Posudek na práci Mgr. Petra Pajase
Structure of submodels.
Diagonal indiscernibility in models of arithmetic

Základním tématem práce je studium podstruktur nestandardního spočetného modelu M aritmetiky rozšiřující $I\Sigma_0$, které jsou v něm řezem.

Problematika je rozpracována ve třech okruzích v kapitolách 2 – 4, přičemž v prvé kapitole se zavádějí základní pojmy a rekapitulují důležitá fakta o problematice.

Kapitola 2 se zabývá diagonálními rozklady a diagonální homogenitou pro ně. Základní význam má Věta o nekonečném diagonálním rozkladu (2.1.2). Lze ji chápat jako nekonečnou verzi Kanamori-McAllonova principu zobecněného navíc na h-regresivní funkce. Je tvrzením o existenci neomezené diagonálně homogenní množiny pro jisté diagonální rozklady n-tic; má tvar kombinatorické šipky $\Gamma_1 \rightrightarrows (\Gamma_2)^{n}_{\Gamma_1}$, kde Γ_i je nějaká třída množin, přes kterou lze v rámci uvažované aritmetiky kvantifikovat.

Diskutovaná věta je důsledkem daleko obecnějších věty, totiž Věty 2.1.5, přesněji její položky a): pro $m, n \geq 1$ platí

$$B\Sigma_{n+m+1} \vdash low\Delta_{m+1} \rightrightarrows (low\Delta_{m+n+1})^n;$$

Přitom $low\Delta_j$ je třída všech $low\Delta_j$ množin. Výsledek je získán pomocí věty o nízké bázi (Low Basis Theorem).

Dále jsou v kapitole 2 studovány jisté posloupnostmi diagonálně nerozlišitelných množin, zvané diagonálně nerozlišitelná překrytí (overlay); ty mimo jiné plně charakterizují peanovské řezy v M. To je obsahem jedné z položek Věty 2.3.2, která poskytuje daleko podrobnější analýzu podmodelů M. Věta 2.3.3 pak říká, že pro $M \models I\Sigma_{n+2}$ s $n \geq 0$ existuje neomezené $\Sigma_n(1;1)$-diagonální nerozlišitelné překrytí $\{X_i;\ i < \omega\}$ v M tvořené Δ_{n+2}-definovatelnými podmnožinami v M tak, že pro každý řez I v M je $I \prec_{n+1} M$, právě když každé $X_i \cap I$ je neomezené v I. Zajímavý je příklad 2.3.8, který je velmi krátkým a názorným důkazem Gaifmanovy věty o elementaritě kofinálního podmodelu modelu Peanovy aritmetiky; důkaz podstatně užívá překrytí.

V kapitole 3 se studují rodiny $\mathcal{R}$ řezů v M, zvláště pak, pokud mají indikátor. Obecná originální Věta 3.2.1 zachycuje vlastnosti takové rodiny $\mathcal{R}$ v $M \models I\Sigma_{n+1}$, pokud $\mathcal{R}$ má Σ_{n+1}-indikátor. Pak např. $\langle\overline{\mathcal{R}}, \subsetneq\rangle$ je izomorfní Cantorově množině a za jistého přirozeného předpokladu je $\mathcal{R}$ hubená v $\overline{\mathcal{R}}$. Pro případ, že $\mathcal{R}$ má Δ_{n+1}-indikátor v M, existuje spočetná množina $S \subsetneq M$ tak, že modely $I^{+}_{a,\mathcal{R}} = \bigcap\{J \subseteq' M;\ a \in J \in \mathcal{R}\}$ pro $a \in S$ jsou po dvou neizomorfní; to je jedním z tvrzení Věty 3.2.4, která je zobecněním Kotlarského výsledku z [Kot84b, Theorem 4].

Obecná věta a další postupy umožňují analyzovat význačné rodiny $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{D}_n$, tvořené po řadě n-elementární resp. navíc isomorfními s M resp. Σ_n-definovatelnými elementy určenými řezy a dále rodiny $\mathcal{R}_T$ řezů, jež jsou modelem nějaké teorie T v jazyce aritmetiky, přičemž se ještě značí $\mathcal{P}_n = \mathcal{E}_n \cap \mathcal{R}_{PA}$. Ukazuje se

$$\overline{\mathcal{P}_n} \supsetneq \overline{\mathcal{I}_n} \supsetneq \overline{\mathcal{D}_{n+1}} \supseteq \mathcal{E}_n \supsetneq \overline{\mathcal{P}_{n+1}}$$

a dále navíc např., že prvky $\mathcal{D}_n$ jsou právě tvaru $\bigcap \mathcal{I}_n^a$ pro $n \geq 0$, $a \in M$, kde $\mathcal{I}_n^a$ je lokalizovaná verze $\mathcal{I}_n$, tvořená řezy I takovými, že $\langle I, a\rangle \cong_n \langle M, a\rangle$. Aplikací výsledků o překrytí se získají ve Větě 3.4.1 další výsledky.

Kapitola 4 je věnována studiu Stoneova prostoru $\mathcal{S}(M, M)$ algebry $\mathcal{D}(M, M)$ definovatelných množin uvažovaného nestandardního spočetného modelu M Peanovy aritmetiky, a to v rozšířeném prostředí, tj. pomocí $\aleph_1$-saturovaného elementárního rozšíření C modelu M; pak $\mathcal{D}(M, M) \cong \mathcal{D}(C, M)$ a $\mathcal{S}(M, M) \cong \mathcal{S}(C, M)$ a netriviální ultrafiltr p algebry $\mathcal{D}(C, M)$ je jednoznačně identifikován s $\bigcap p$, což je právě nějaký nekonečný faktor, čili monáda, ekvivalence $\sim$ na C určené $\mathcal{D}(C, M)$: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathcal{D}(C, M))(\alpha \in Y \leftrightarrow \beta \in Y)$. Netriviální monáda $\mathfrak{m}$ (tj. $|\mathfrak{m}| \neq 1$) určuje řez $I_{\mathfrak{m}}$ v M tvaru $\{a \in M;\ a < \mathfrak{m}\}$. Užitečná je dále ekvivalence $\approx$ na C určená podalgebrou algebry $\mathcal{D}(C, M)$, která je generovaná intervaly $[a, \rightarrow)$, $a \in M$; její netriviální monáda se nazývá skok (gap) a značí $\mathfrak{g}$. Řez I určuje jediný skok $\bigcap\{(a, b);\ a \in I,\ b \in M - I\}$, který se značí $\mathfrak{g}_I$; pro monádu $\mathfrak{m}$ je $I_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{g}_{I_{\mathfrak{m}}}$.

Typové vlastnosti monády $\mathfrak{m}$ (korelativně ultrafiltru p) se promítají do vlastností $I_{\mathfrak{m}}$. Základními typy jsou selektivní, semiregulární, regulární a ramseyovské. Ty a další lze studovat pomocí Stoneovy topologie a Rudin-Keislerova (RK) uspořádání, jak se zde ukazuje. Originálně se zde rozvíjí studium "diagonálně určených" monád $\mathfrak{m}$ splňujících $\mathfrak{m} \rightrightarrows (\mathfrak{m})_h^a$ a tzv. p- a q- monád, které jsou jistou analogií p- a q-bodů v $\beta\mathbb{N}$.

Ukazuje se, že pro silný řez I je množina regulárních monád, které nejsou p-monádami, hustá v $\mathfrak{g}_I$ (4.2.26) a dále je-li I regulární, tak každá p-monády v $\mathfrak{g}_I$ je regulární (4.4.27) a RK-neminimálná p-monády tvoří hustou podmnožinu $\mathfrak{g}_I$ (Věta 4.4.29). Je-li dále I silný řez a $\alpha \in \mathfrak{g}_I$, tak monáda $\mathfrak{m}$, obsahující α, je p-monáda, právě když $I[\alpha] := \{F(\alpha);\ F$ je I-funkce a $\alpha \in \mathrm{dom}(F)\}$ je minimální elementární koncové rozšíření I. Přitom F je I-funkce, je-li definovatelná, $\mathrm{dom}(F) \cap \mathfrak{g}_I \neq \emptyset$ a $F[i] \subseteq I$.

Práce je dále opatřena dvěma dodatky s důkazy několika důležitých známých tvrzení, užitých v práci. V prvém se dokazuje McDowell-Specker-Gaifmanova věta o existenci vlastního konzervativního elementárního rozšíření N daného modelu $M \models \mathrm{PA}$ s $|N| = |M|$. Klíčové lemma A.3 se dokazuje pomocí Věty o nekonečném diagonálním rozkladu.

Předložená práce je vynikající. Obsahuje velké množství nových kvalitních výsledků, je systematická a originální a užívá celou řadu komplikovaných technik. Je napsána přehledně, uceleně a jednotlivá témata jsou dobře motivována. Nalezené chyby jsou vesměs překlepy.

Doporučuji, aby práce byla uznána jako dizertační.

V Praze 26. 6. 2007 Prof. RNDr. Petr Vopěnka, DrSc.