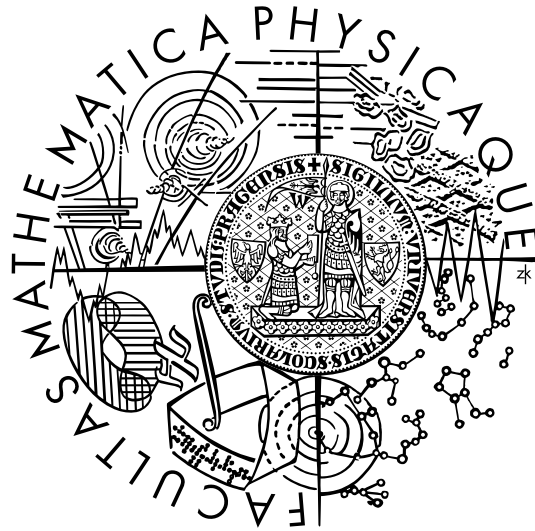


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky



Disertační práce

**NEASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI
SYSTÉMŮ BONUS MALUS**

Mgr. Jan Šváb

Školitel: Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.

Obor: m7 — Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě chci poděkovat především své ženě Veronice. Čas, který jsem strávil nad touto prací měl patřit jí a mé dceři Kristýně. Bez jejich podpory by tato práce nikdy nevznikla.

Děkuji svému školiteli panu prof. RNDr. Petru Mandlovi, DrSc. za vedení během celého mého studia, že přede mne kladl úkoly a výzvy, jejichž splněním jsem se odstal až k sepsání této práce.

Děkuji pojišťovně Kooperativa, která mi poskytla mnoho inspirace směrem k praktickému zaměření práce a která také vlastní licenci SW, který byl použit při všech výpočtech této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně s použitím citované literatury. Souhlasím se zapůjčováním práce.

Obsah

Úvod	1
1 Definice systému bonus malus a portfolia	3
1.1 Měření času	3
1.2 Popis rizika	4
1.3 Popis portfolia	4
1.3.1 Strukturální parametr pro škodní frekvenci	4
1.3.2 Rozložení stáří rizik	5
1.3.3 Znáhodnění stáří portfolia	5
1.4 Definice portfolia	5
1.5 Definice BMS	8
2 Vlastnosti BMS	11
2.1 Průměrná úroveň pojistného	11
2.1.1 Přírážka pro nováčka	14
2.1.2 Finanční rovnováha systému	16
2.2 Koeficient variace	18
2.3 Míra konvergence	20
2.4 Elasticita	22
2.5 Norbergovo riziko	26
3 Hlad po bonusu a spoluúčast	29
3.1 Optimální retence	30
3.2 Vliv hladu po bonusu na škodní frekvenci	32
4 Optimální BMS	35
4.1 Optimalizace pravidel	35
4.1.1 Optimalizace pravidel při asymptotické sazbovací základně	35
4.1.2 Optimalizace pravidel při sazbovací základně Z_{N_Ω}	39
4.1.3 Volba konkrétní sazbovací základny (pravidel BMS)	40
4.2 Optimalizace sazbovací funkce	42
4.2.1 Předepsaná sazbovací funkce	45

4.3	Optimalizace pravidel a sazbovací funkce zároveň	50
4.4	Optimalizace elasticity	54
	Závěr	56
	A BMS jako markovský řetězec	58
	B Další příklad BMS	60
	C Model kmene	64
C.1	Model s obnovami bez historie	64
C.2	Model s obnovami s historií	66
C.3	Modifikace s růstem portfolia	66
C.4	Porovnání AL pro různá rozdělení stáří rizik	67
C.5	Limitní portfolio	67
	D Vzorce	70
D.1	Průměrná úroveň pojistného	71
D.2	Koeficient variace	71
D.3	Elasticita	72
D.4	Norbergovo riziko	75
D.5	Baesovské sazbovací funkce	75
D.6	Souvislost mezi AL , CV a Q	76

Seznam tabulek

1.1	Keňský systém bonus malus	10
2.1	Průměrné úrovně pojistného	12
2.2	Koeficienty variace	18
2.3	Elasticity	23
2.4	Norbergovo riziko	27
4.1	Vymezení zkoumaných BMS	36
4.2	Vybrané BMS	42
4.3	Bayesovské sazbovací funkce	43
4.4	Lineární sazbovací funkce	46

Seznam grafů

1.1	$w_n(t)$ pro otevřené portfolio	7
1.2	$w_n(t)$ pro uzavřené portfolio	7
2.1	Vývoj $AL_{S,\theta}^{(t)(n)}$ v závislosti na θ a čase	12
2.2	Porovnání ukazatelů AL v závislosti na čase	13
2.3	Porovnání ukazatelů AL v závislosti na θ	14
2.4	Porovnání přírážek pro nováčka v závislosti na čase	15
2.5	Závislost $AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)}$ na počátečním stupni	16
2.6	Vývoj škál při finanční rovnováze	17
2.7	Vynucené změny pojistného k dosažení finanční rovnováhy	17
2.8	Porovnání ukazatelů CV v závislosti na čase	19
2.9	Porovnání CV v závislosti na θ	19
2.10	Porovnání ukazatelů TV v závislosti na čase	21
2.11	$ROC_{S,\theta}$ pro různé počty \mathcal{M}	21
2.12	$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)$ v závislosti na θ a β	24
2.13	Porovnání ukazatelů $ELAS$ v závislosti na čase	24
2.14	Porovnání ukazatelů $ELAS$ v závislosti na θ	25
2.15	Závislost $ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)$ na θ pro různá V	25
2.16	Závislost $ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)$ na V	26
2.17	Porovnání ukazatelů Q v závislosti na čase	28
2.18	Porovnání ukazatelů Q v závislosti na θ	28
3.1	Optimální retence podle stavů	31
4.1	$ROC_{S,\theta}$ v závislosti na K a \mathcal{M}	36
4.2	Čas poklesu $TV_{S,\theta,\mathcal{U}}^{(\infty)}$ v závislosti na K a \mathcal{M}	37
4.3	Čas poklesu $TV_{S,\theta,\mathcal{O}}^{(\infty)}$ v závislosti na K a \mathcal{M}	37
4.4	Nejlepší k pro K a \mathcal{M} vzhledem k času poklesu pro \mathcal{U}	38
4.5	Čas poklesu $TV_{S,\theta,\mathcal{U}}^{(\infty)}$ v závislosti na K a k	39
4.6	Nejlepší \mathcal{M} v závislosti na K a k vzhledem k času poklesu pro \mathcal{U}	39
4.7	Modifikace grafu 4.2 pro $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$	40
4.8	Vliv volby vah ω_t na $\overline{TV}_{S,\theta,\mathcal{O}}(t)$ a $TV_{S,\theta,\mathcal{O}}(n)$	41
4.9	30 nejlepších BMS při omezení na K a \mathcal{M}	41

4.10	30 nejlepších BMS při omezení na K , \mathcal{M} i k	42
4.11	Bayesovské škály pro Keňský BMS a \mathcal{O} v závislosti na t	44
4.12	Bayesovské škály pro Keňský BMS a \mathcal{U} v závislosti na t	45
4.13	Lineární škály pro Keňský BMS a \mathcal{O}	46
4.14	Lineární škály pro Keňský BMS a \mathcal{U}	47
4.15	Lineárně lomené a exponenciální škály pro Keňský BMS a \mathcal{O}	48
4.16	Lineárně lomené a exponenciální škály pro Keňský BMS a \mathcal{U}	48
4.17	Bayesovské škály vybraných BMS	49
4.18	Lineární škály vybraných BMS	49
4.19	Lineárně lomenné škály vybraných BMS	49
4.20	$Q_{S,\mathcal{F}}$ všech zkoumaných BMS	50
4.21	Třikrát 20 nejlepších ze všech zkoumaných BMS	51
4.22	$Q_{S,\mathcal{F}}$ pro $K = 20$ v závislosti na k a \mathcal{M}	51
4.23	Bayesovské škály pro $K = 7, \dots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$	52
4.24	Alalogický graf ke grafu 4.23 se shodným k	52
4.25	Lineární škály pro $K = 7, \dots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$	53
4.26	Lineárně lomené škály pro $K = 7, \dots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$	53
4.27	Porovnání baesovských a lineárně lomených škál	54
4.28	Porovnání elasticity při omezeních na K , \mathcal{M} a k	55
B.1	$AL_{S,\theta}^{(t)(n)}$ pro jednoduchý BMS	61
B.2	Porovnání AL jednoduchého BMS	62
C.1	Pravděpodobnosti storen.	65
C.2	Model A: rozložení stáří rizika v čase portfolia	65
C.3	Model B: rozložení stáří rizika v čase portfolia	66
C.4	Model C: rozložení stáří rizika v čase portfolia	67
C.5	AL při různých modelech portfolia.	68
C.6	Porovnání různých portfolií	69
D.1	Závislost Q na AL a CV	76

Úvod

V roce 1999 bylo ukončeno monopolní postavení České pojišťovny na trhu s pojištěním odpovědnosti z provozu vozidel („povinné ručení“) a do té doby se neaplikoval žádný systém bonus malus („BMS“). Proto také neexistuje evidence o škodní historii pojistníků („rizik“) do té doby. Od roku 2000 bylo umožněno i dalším pojistitelům se podílet na trhu s povinným ručením včetně možnosti zavést BMS. Tato práce se zajímá o chování BMS v takových startovacích obdobích. Toto chování je zřejmě neasymptotické a proto nelze aplikovat obvyklou teorii shrnutou dobře v Lemaire (1995), ale ani teorii uvedenou v Norberg et al. (1981), která sice připouští konečné stáří rizika, ale uvažuje tzv. uzavřené či asymptotické portfolio (definice těchto pojmů jsou uvedeny v oddíle 1.4).

Hlavním cílem této práce je tak jednak zkoumání neasymptotických vlastností a jednak popis modelu tzv. otevřeného portfolia pomocí dvojího měření času (stáří rizika (n) a stáří portfolia (t)). Běžně se totiž uvažuje, že je portfolio uzavřené vůči příchodům a odchodům jednotlivých rizik (tzv. uzavřené portfolio). Koncepce otevřeného portfolia je zcela jiná než v de Lourdes Centeno and Manuel Andrade e Silva (2001), volnější z pohledu omezujících předpokladů. Uvedená práce se např. omezuje jen na BMS popisované markovskými řetězci. Námí uvažované otevřené portfolio lze modelovat nezávisle na BMS. Velmi jednoduché modely kmene (portfolia) jsou navrženy v dodatku C, které však pro ilustraci zkoumaných principů jistě postačí. Navíc použití reálných dat některého pojistitele by znemožnilo možnost volného využití této práce.

Dalším výsledkem je odvození vztahu mezi koeficientem variace CV s průměrnou úrovní pojistného AL vůči Norbergovu riziku Q a tím ozřejmení souvislosti možného optimalizování jednotlivých vlastností BMS.

Celá práce je založena zejména na předchozí práci Šváb (2002b), která vychází z prací Lemaire (1995), Sundt and Gilde (1989), Norberg et al. (1981), Norberg (1976), Norberg (1975) a Šváb (2000). Další budou citovány až v příslušných souvislostech. Tato práce se naopak nezabývá možností, kterou uvádí Holtan (1994), kde navrhuje místo BMS používat spoluúčast, k čemuž se Lemaire and Hongmin (1994b) vyjadřuje jako k příliš teoretické záležitosti. Použití spoluúčasti můžeme vlastně chápat jako „povinný“ hlad po bonusu.

V kapitole 1 uvedeme velmi obecnou definici BMS a pro takto definovaný BMS zavedeme v kapitole 2 hodnotící a optimalizační kritéria, která budou zobecněním prací Lemaire (1995), Norberg et al. (1981) a dalších. Uvedené definice budou zahrnovat jak asymptotický tak

neasymptotický přístup. Tyto vlastnosti budeme ilustrovat na BMS klasicky modelovaném pomocí markovských řetězců. Vzhledem k tomu, že tento přístup je velmi dobře známý, je popsán v dodatku A jen proto, abychom ukázali, že splňuje naši obecnou definici a také pro zřejmost používaného značení. V dodatku B se budeme ve stručnosti a přehledově věnovat i dalšímu příkladu.

Kapitola 1

Definice systému bonus malus a portfolia

Vzhledem k různě užívané terminologii je třeba předznamenat, že v této práci neuvažujeme žádnou návaznost na jakékoliv a priori ohodnocení rizika (segmentaci). Z tohoto hlediska budujeme model jen jako a posteriori. Avšak, abychom předešli zmatení čtenáře, je nutno upozornit, že použitý přístup je bayesovský. A priori informace se nebude týkat ocenění rizika pomocí nějaké skupiny tarifních proměnných, ale rozdělení strukturálního parametru, viz oddíl 1.3. V části 1.5 pak uvedeme zcela obecnou definici systému bonus malus.

Systém BMS si můžeme představit jako aproximaci reality. Nejprve však aproximujeme riziko v reálném portfoliu nějakým modelem počtu škod a popisem rozdělení stáří rizik v každém okamžiku stáří portfolia. Tuto aproximaci dále aproximujeme systémem BMS pro jeho predikční schopnosti (určení pojistného pro následující období). Tyto schopnosti jsou dále předmětem hodnocení různými kritérii (v této práci používáme ekvivalentně pojmy *kritérium* a *ukazatel*).

1.1 Měření času

Uvažujme portfolio rizik. Jejich chování sledujeme v diskrétním čase po obdobích, kterými jsou nejčastěji roky. Tím se rozumí pořadové číslo spojitého časového intervalu. Tedy období n je vlastně intervalem $(n - 1, n)$. Otevřenost či uzavřenost tohoto intervalu není důležitá, můžeme si představit, že se jednotlivé intervaly (období) dotýkají půlnocí, ta může patřit k libovolnému z nich.

Čas rizika budeme důsledně značit n a bude vyjadřovat dobu, po kterou sledujeme riziko, a která se obecně liší od doby, po kterou sledujeme celé portfolio, tu zase budeme důsledně značit písmenem t .

Stářím rozumíme počet celých již uplynulých období. Naproti tomu, když řekneme, že riziko je ve svém n -tém období (nebo portfolio ve svém t -tém období), tak je staré $n - 1$ celých období (resp. celých $t - 1$ v případě portfolia).

Pro zjednodušení uvažujeme, že období, ve kterých sledujeme riziko a ve kterých sledujeme portfolio, se zcela překrývají. V praxi to znamená (při ročních obdobích), že by smlouvy platily od 1.1. do 31.12. Toto zjednodušení lze případně v praxi eliminovat vhodným stanovením pravděpodobností popisujících složení portfolia v čase ($w_n(t)$ viz dále v 1.3.2). Přístup je v souladu s tím, že se sazba stanovuje pro riziko staré $n - 1$ období na následující (n -té) období, ve kterém je.

1.2 Popis rizika

Uvažujeme, že konkrétní riziko náhodně zvolené z portfolia rizik, je charakterizováno parametrem θ . Abychom popsali zkušenost pojistitele s tímto rizikem, označme M_n počet nahlášených škod z n -tého období a Y_{nj} jejich velikosti pro $j = 1, \dots, M_n$ (navíc klademe z technických důvodů $Y_{n0} \equiv 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$). Úhrn škod za n -té období je

$$X_n = \sum_{j=0}^{M_n} Y_{nj}.$$

Dále označme

$$M_{\bullet} = \sum_i M_i.$$

1.3 Popis portfolia

Složení portfolia popíšeme pomocí tří náhodných veličin. První, Θ , popisuje rozložení škodní frekvence v portfoliu bez ohledu na stáří jednotlivých rizik. Není problém zobecnit a použít různé rozložení rizika pro různá období stáří portfolia, nicméně v souladu s předpoklady 1 uvažujeme v čase shodné rozdělení. Druhá, N_t , naopak popisuje rozložení stáří rizik, ale bez ohledu na jejich škodní frekvence. To umožňuje jednoduše popsat otevřené portfolio. Je to však zcela jiný přístup než třeba v de Lourdes Centeno and Manuel Andrade e Silva (2001), kde se při použití teorie markovských řetězců přidá jeden stav pro popsání „zbytku světa“, tj. kdy je riziko mimo portfolio. Třetí náhodná veličina, Ω , je technického charakteru a usnadňuje zápis různých kritérií či sazbovacích funkcí, definice viz dále.

1.3.1 Strukturální parametr pro škodní frekvenci

Uvažujeme, že je každé riziko v portfoliu charakterizováno rizikovým parametrem $\theta \in \langle 0, \infty \rangle$, který je realizací náhodné veličiny Θ s distribuční funkcí $U(\theta)$. Tento parametr se nazývá strukturální a v této souvislosti hovoříme i o strukturální hustotě a strukturální distribuční funkci. Volba rozdělení n. v. Θ je a priori informace, kterou do modelu vneseme a vyjadřuje složení (heterogenitu) rizik v portfoliu. Individuální pojistné pro uvažované riziko je potom $E_{\Theta} X_n$ (pro n -té období stáří rizika).

V rámci asociace neživotních pojistných matematiků ASTIN se od jejího založení v roce 1957 diskutovalo jako jedno z prvních téma BMS a rozdělení počtu škod. Lemaire (1995)

shrnuje tuto diskusi. Je třeba dodat, že vývoj neskončil a zajímavá kombinace je uvedena v Shengwang et al. (1999), kde se diskutuje směs Negativně binomického rozdělení s parametrem, který má Pareto rozdělení. V této práci budeme provádět výpočty různých BMS jen na Negativně binomickém modelu počtu (směs Poissonova rozdělení s Gama rozdělením) škod.

1.3.2 Rozložení stáří rizik

Kromě strukturální hustoty, která popisuje složení portfolia, uvažujme ještě n. v., která popisuje, ve kterém období (n) se nachází náhodně vybrané riziko z portfolia, které je staré t období. Tuto náhodnou veličinu označme N_t a její pravděpodobnosti

$$P(N_t = n) = w_n(t)$$

pro $n, t \in \mathbb{N}$.

Takto jsme popsali otevřené portfolio. Ale pokud použijeme jako rozdělení n. v. N_t rozdělení degenerované do jediného bodu tak, že $w_n(t) = 1$ pro $t = n$ a 0 jinak, sledujeme v čase portfolio rizik, která stárnou shodně s portfoliem. To znamená, že máme uzavřené portfolio jako speciální případ otevřeného. Nicméně kombinace předchozího předpokladu se stárnutím spolu se systémem naznačuje, jak daleko od reality může být obvyklý přístup, kdy se počítá s limitním stavem.

1.3.3 Znáhodnění stáří portfolia

Nechť Ω (stáří BMS v počtu období) je diskrétní n.v. s pravděpodobnostmi $P(\Omega = t) = \omega_t$ pro $t \in \mathbb{N}$. Předchozí n. v. N_t lze pak chápat jako n. v. N_Ω s podmíněným rozdělením $P(N_\Omega = n | \Omega = t) = w_n(t)$ pro $0 \leq n \leq t$ a $t \in \mathbb{N}$.

Zde je třeba vidět přímou souvislost s Norberg et al. (1981), kde se používají váhy w_n pro portfolio v n -tém období (značení z citované práce), zatímco zde máme mezikrok s $w_n(t)$, ale pak zase vážíme zcela analogicky vahami ω_t . Pro případ degenerovaného rozdělení uvedeného výše dostáváme totéž (naše $\omega_t = w_t$ Norbergovy). V naší práci jde tedy o zobecnění z uzavřeného na otevřené portfolio. Norberg navíc uvažuje i w_0 jako váhu pro asymptotické rozdělení, ale to se nám zde nehodí a uvažujeme jen $\Omega \in \mathbb{N}$.

To, že váhy ω_t chápeme jako pravděpodobnosti rozložení n. v. Ω , je záležitost skutečně jen technická, usnadňující zápis.

1.4 Definice portfolia

Definice 1 (Portfolio).

Definujme nyní portfolio pomocí náhodných veličin popsaných výše.

(i) *Nechť*

➤ U je distribuční funkce nezáporné náhodné veličiny Θ popisující rozložení rizika v portfoliu,

➤ pro každé $t \in \mathbb{N}$ jsou $w_n(t)$ pravděpodobnosti n . v. N_t popisující rozdělení stáří rizika v portfoliu starém t období takové, že existuje n_0 , že pro všechna $n > n_0$ je $w_n(t) = 0$

➤ a ω_t pravděpodobnosti (váhy) n . v. Ω příslušné jednotlivým obdobím stáří portfolia takové, že existuje t_0 , že pro všechna $t > t_0$ je $\omega_t = 0$.

Za těchto podmínek strukturu $\mathcal{F} = (U, \{\{w_n(t)\}_{n=1}^\infty, \omega_t\}_{t=1}^\infty)$ nazveme **portfolio**.

(ii) Portfolio nazveme **uzavřené portfolio**, pokud platí podmínka

$$w_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = t \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Uzavřené portfolio značíme \mathcal{U} .

(iii) Pokud portfolio není uzavřené nazýváme jej **otevřené portfolio** a značíme \mathcal{O} .

(iv) Strukturu $\mathcal{F}_t = (U, \{w_n(t)\}_{n=1}^\infty, \omega_t)$ nazýváme **portfolio v čase t** .

(v) Navíc definujeme **asymptotické rozdělení stáří rizik** s pravděpodobnostmi

$$w_n = \lim_{t \rightarrow \infty} w_n(t), \text{ existuje-li pro } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4.2)$$

a pokud w_n definují n . v. označíme ji N_∞ . Odvozeným pojmem je pak **asymptotické portfolio** $(U, \{w_n\}_{n=1}^\infty)$.

To, že přímo v definici požadujeme existenci n_0 a t_0 , je prvek zjednodušující výpočty. Požadavek na existenci t_0 neznámá, že by se portfolio dále nevyvíjelo a že by tedy byl v rozporu s konvergencí $w_n(t) \rightarrow w_n$ pro $t \rightarrow \infty$. Znamená, že pojistitel pro stanovení pojistného nebere do úvahy nic, co se bude dít po období t_0 . V našich příkladech budou pravděpodobnosti $w_n(t_0)$ velmi blízko pravděpodobnostem w_n , tj. blízko své limitě.

V dalším budeme vycházet z následujících předpokladů.

PŘEDPOKLADY 1

Nechť

➤ M_n ($n = 1, 2, \dots$) jsou náhodné veličiny podmíněně (vzhledem k $\Theta = \theta$) navzájem nezávislé, stejně rozdělené (jako M , pro jednodušší značení),

➤ Y_{nj} (pro všechna $n > 0$ a všechna $j > 0$) jsou náhodné veličiny vzájemně nezávislé, stejně rozdělené (jako Y , distribuční funkci budeme značit G) a navíc nezávislé na $(\Theta, M_1, M_2, \dots)$.

Z předpokladů 1 plyne, že X_n jsou také stejně rozdělené (jako X). Bylo by možné také uvažovat obecněji a upustit od požadavku na stejná rozdělení. Drobnou modifikaci těchto předpokladů lze nalézt v Sundt and Gilde (1989), kde se uvažuje různé rozdělení strukturálního parametru pro různě stará rizika. V realitě tomu má odpovídat tzv. „učení se rizika“, kdy se s rostoucí praxí řidiče snižuje škodní frekvence.

Příklad 1.1 (Ilustrační portfolia)

Pro ilustrace v této práci použijeme pro strukturální parametr Θ rozložení Gama s parametry $\tau, h > 0$ a hustotou

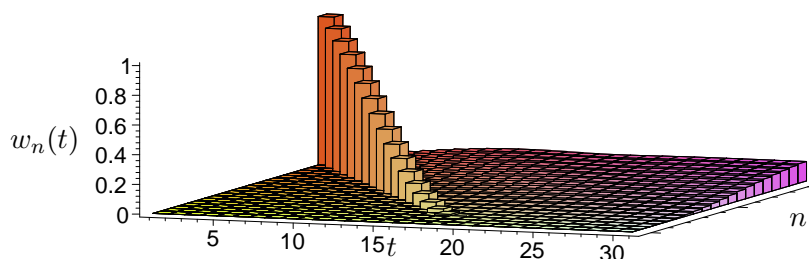
$$u(\theta) = \frac{\tau^h}{\Gamma(h)} \theta^{h-1} \exp(-\theta\tau), \theta > 0$$

s parametry $h = 0,48$ a $\tau = 9,09$. Uvažujeme tedy průměrnou škodní frekvenci $h/\tau = 5,26\%$. Rozdělení počtu škod individuálního rizika uvažujeme Poissonovo s parametrem Θ (tj. $M_n \sim \text{Po}(\Theta)$). Hodnoty parametrů byly odvozeny v práci Šváb (2002b), kde je lze nalézt v tabulce 6.1.4 ve sloupci OA. V odkazované práci jsou testována i jiná rozdělení strukturálního parametru. Až na části, kde se bude studovat hlad po bonusu, předpokládáme, že $EY_{nj} = 1$.

Na rozdíl od strukturálního parametru pro rozdělení stáří rizik použijeme trochu jiný model než ve zmíněném článku. Uvažujme model otevřeného portfolia podle C.1 s parametry:

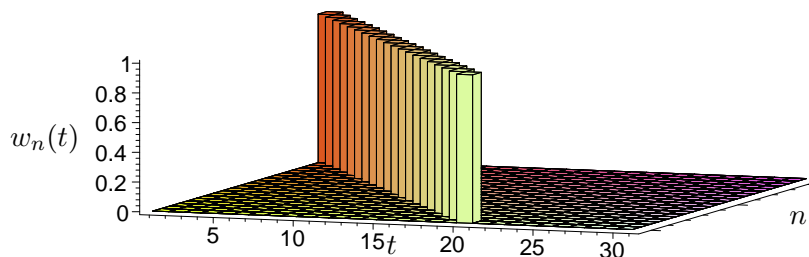
- Horizont stáří rizika $n_0 = 20$ let.
- Horizont stáří portfolia $t_0 = 30$ let.
- Pravděpodobnost storen (podle C.1) dána jako $s_n = \exp(na + b)$ pro $a = 0,15$ a $b = -n_0a$ tak, aby s_{n_0} bylo rovno jedné.

Takto definované pravděpodobnosti $w_n(t)$ ukazuje graf 1.1. Uzavřené portfolio nemá smysl



Graf 1.1: Relativní rozložení stáří smluv v čase — otevřené portfolio

popisovat, stačí se podívat na obrázek 1.2.



Graf 1.2: Relativní rozložení stáří smluv v čase — uzavřené portfolio

Pro uzavřené i otevřené portfolio uvažujeme váhy pro jednotlivá stáří portfolia rovnoměrné ve výši $1/t_0$. Záleží pak na konkrétním použití, zda se větší váha dá prvním nebo posledním letům.

1.5 Definice BMS

Definice 2 (Systém bonus malus).

- (i) Mějme riziko staré $n - 1$ období, pro $n \in \mathbb{N}$. **Historie rizika do času n** je náhodný vektor

$$\Xi_n = (M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, Y_{00}, Y_{10}, \dots, Y_{1M_1}, \dots, Y_{n-10}, \dots, Y_{n-1M_{n-1}})' \quad (1.5.1)$$

z prostoru všech historií do času n

$$\mathcal{H}_n = \mathbb{N}_0^n \times \langle 0, \infty \rangle^{M_\bullet + 1} \quad (1.5.2)$$

dimenze $1 + (n - 1) + 1 + M_\bullet$. Z technických důvodů klademe $M_0, Y_{00} \equiv 0$.

- (ii) Každé riziko pro období t portfolia zařadíme do nějakého stavu z **množiny stavů** $\mathcal{K}_t \subset \mathbb{R}^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{N}$.

- (iii) **Sazbovací základna v období t portfolia pro n -té období rizika** (starého $n - 1$ období) je transformace n.v. Ξ_n na určitý stav z množiny stavů

$$Z_{tn} : \mathcal{H}_n \mapsto \mathcal{K}_t.$$

Riziko bez historie se tak pro své první období zařadí do stavu $Z_{t1}((0, 0)') = k_t \in \mathcal{K}_t$, který nazýváme **základní stav**.

- (iv) **Sazbovací základnou v období t portfolia** je množina transformací pro všechna stáří rizik

$$Z_{t\bullet} = \{Z_{tn} | n \in \mathbb{N}\} \quad (1.5.3)$$

- (v) **Sazbovací funkce v období t stáří systému pro riziko staré $n - 1$ období** je transformace stavu Z_{tn} na pojistné pro n -té období stáří rizika a období t stáří portfolia

$$a_{tn} : \mathcal{K}_t \mapsto \mathbb{R}_+. \quad (1.5.4)$$

- (vi) **Sazbovací funkcí v období t stáří portfolia** je množina transformací pro všechna stáří rizik

$$a_{t\bullet} = \{a_{tn} | n \in \mathbb{N}\} \quad (1.5.5)$$

- (vii) **Zobecněný systém bonus malus** je dvojice posloupností $S = (\{Z_{t\bullet}\}_{t=1}^\infty, \{a_{t\bullet}\}_{t=1}^\infty)$, kde Z_t jsou sazbovací základny a a_t sazbovací funkce používané v t -tém období stáří portfolia.

(viii) **Systém bonus malus (BMS)** je dvojice $S = (\{Z_n\}_{n=1}^\infty, \{a_t\}_{t=1}^\infty)$, kde $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ je sazbovací základna shodná pro všechna t , tj.

$$Z_{tn} = Z_n, \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.5.6)$$

a a_t jsou sazbovací funkce takové, že

$$a_{tn} = a_t, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.5.7)$$

používané v t -tém období stáří portfolia.

(ix) *Jeli S BMS, pak*

➤ za podmínky $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$, nazveme n.v. $Z_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ s rozdělením pravděpodobností (podmíněným vzhledem k $\Theta = \theta$)

$$P_\theta \left(Z_{\mathcal{U}}^{(\infty)} = j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta (Z_n = j), \forall j \in \mathcal{K}, \quad (1.5.8)$$

asymptotickou sazbovací základnou uzavřeného portfolia, pokud limity existují a definují náhodnou veličinu

➤ a **asymptotickou sazbovací základnou otevřeného portfolia** \mathcal{O} n.v. $Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)}$ s rozdělením pravděpodobností (podmíněným vzhledem k $\Theta = \theta$)

$$P_\theta \left(Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)} = j \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_\theta (Z_{N_t} = j). \quad (1.5.9)$$

➤ Je-li \mathcal{F} portfolio, pak jeho asymptotickou sazbovací základnu obecně značíme $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$.

(x) BMS $\left(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}, a \right)$ se nazývá **asymptotický BMS**, je-li $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ asymptotická sazbovací základna a a sazbovací funkce.

Poznámky k definici:

1. Systém bonus malus (BMS) je tedy založen na sledování historie zvoleného rizika. Podle této historie se riziko zařadí do nějakého stavu. Pravidla pro zařazení do stavu mohou záviset jak na stáří rizika tak na stáří systému. Nakonec se podle stavu určí pojistné pomocí sazbovací funkce. Pro zjednodušení zapisujeme sazbovací základnu $Z_n(\Xi_n)$ bez argumentu Ξ_n jako náhodnou veličinu Z_n .
2. Definice sice uvádí zobecněný BMS, ale při hledání optimálního systému obvykle zkoumáme pravidla, která závisí jen na stáří rizika a naopak nezávisle na stáří rizika používáme v čase portfolia různé sazbovací funkce. Další důvod pro zjednodušení je souvislost s asymptotickými sazbovacími funkcemi a asymptotickými BMS, neboť tak je to v tomto případě mnohem přímočařejší a jednodušší. Nebude-li řečeno jinak, budeme uvažovat BMS definovaný v bodě (viii) definice 2.
3. Pokud použijeme pojem asymptotická sazbovací základna bez dalšího zpřesnění, budeme myslet tu pro otevřené portfolio, tj. $Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)}$.

4. Pro asymptotické sazbovací základny potřebujeme $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$, ale pro asymptotické BMS i $a_t = a$ a $k_t = k$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Bylo by možné to zobecnit, ale tato práce je věnována především neasymptotickým vlastnostem neasymptotických BMS a asymptotika je zde pouze pro uvedení do souvislosti s obvyklou teorií.
5. Je-li \mathcal{F} portfolio, potom $Z_{N_t} \rightarrow Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ pro $t \rightarrow \infty$ (tj. pro uzavřené i otevřené portfolio). Důkaz je uveden v dodatku D u tvrzení 5.
6. Jednotlivé stavy z množiny \mathcal{K} se také nazývají stupně nebo třídy. Základní stav bývá také označován jako počáteční. V praxi se používá $\alpha = 1$ a obor hodnot se redukuje na konečný nebo spočetný počet stavů. Pro teoretické účely se používá i $\alpha > 1$ v obecnějších větách, viz Norberg (1976).

Příklad 1.2 (Keňský BMS)

Tento příklad je přebrán z Lemaire (1995). Keňský systém má 7 stupňů, startovacím stupněm je stupeň první s úrovní pojistného 100%. Po roce bez nehody se pojistník posune o stupeň výše s pojistným o 10% nižším. Po roce s jednou nebo více nehodami se pojistník vrátí do počátečního stupně. Lze to vyjádřit pomocí matice přechodu a tabulky 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta} & e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & 0 & e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & e^{-\theta} & 0 & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\theta} & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\theta} \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Tabulka 1.1: Keňský systém bonus malus

stupeň (Z_{n-1})	úroveň pojistného	nový stupeň (Z_n)	
		$M_{n-1} = 0$	$M_{n-1} \geq 1$
1	100%	2	1
2	90%	3	1
3	80%	4	1
4	70%	5	1
5	60%	6	1
6	50%	7	1
7	40%	7	1

Kapitola 2

Vlastnosti BMS

Některá měřítka kvality BMS zavádí již Lemaire (1988) a výsledky prezentuje v materiálu Lemaire and Hongmin (1994a) a vše později shrnuje ve své knize, pro teorii BMS stěžejním díle Lemaire (1995), kde zavádí několik asymptotických charakteristik, které zde zobecníme, aby byly jednak v souladu s naší obecnou definicí BMS a jednak abychom měli jejich neasymptotické verze.

První dvě základní charakteristiky jsou odvozeny od momentových charakteristik sazbovací funkce BMS. To znamená, že relativní stacionární průměrná úroveň pojistného (Lemaire značí $RSAL$) je vlastně modifikovanou charakteristikou střední hodnoty a koeficient variace (v Lemaire (1995) CV), je charakteristikou odvozenou z druhého centrálního momentu.

Lemaire (1995) definuje $RSAL$ jako ukazatel charakterizující portfolio z hlediska stacionárního rozdělení sazbovací základny. Zachovejme význam a definujme průměrnou úroveň pojistného, nebo-li průměrné pojistné vztažené k pojistnému, které přísluší základnímu stavu. Vlastnosti budeme ilustrovat na velmi jednoduchém BMS, který byl popsán v příkladu 1.2, a na portfoliu uvedeném v příkladu 1.1.

2.1 Průměrná úroveň pojistného

Tento ukazatel je vlastně průměrné pojistné daného BMS relativně vztažené k pojistnému pro základní stav.

Definice 3 (Průměrná úroveň).

*Nechť S je BMS a \mathcal{F} portfolio, potom **průměrná úroveň pojistného v období t** je podíl průměrného pojistného a pojistného pro základní stupeň*

$$AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{E a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)} \quad (2.1.1)$$

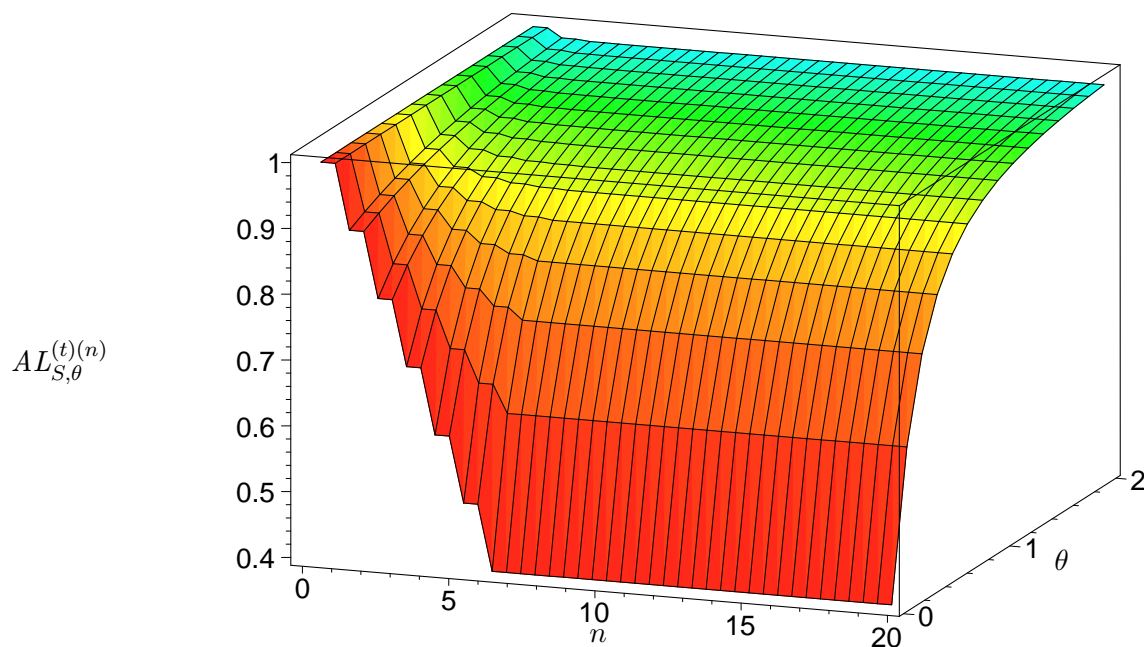
Další varianty jsou uvedeny v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1: Průměrné úrovně pojistného

znáhodnění a vysčítání n		
		↗ znáhodnění a vysčítání t
		↘ limita pro $t \rightarrow \infty$
$AL_{S,\theta}^{(t)(n)} = \frac{E_{\theta} a_t(Z_n)}{a_t(k_t)}$	$AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{E_{\theta} a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)}$	$AL_{S,\theta,\mathcal{F}} = E_{\theta} \frac{a_{\Omega}(Z_{N_{\Omega}})}{a_{\Omega}(k_{\Omega})}$
		$AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{E_{\theta} a(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})}{a(k)}$
↓ vyintegrování θ ↓		
$AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \frac{E a_t(Z_n)}{a_t(k_t)}$	$AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{E a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)}$	$AL_{S,\mathcal{F}} = E \frac{a_{\Omega}(Z_{N_{\Omega}})}{a_{\Omega}(k_{\Omega})}$
		$AL_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{E a(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})}{a(k)}$

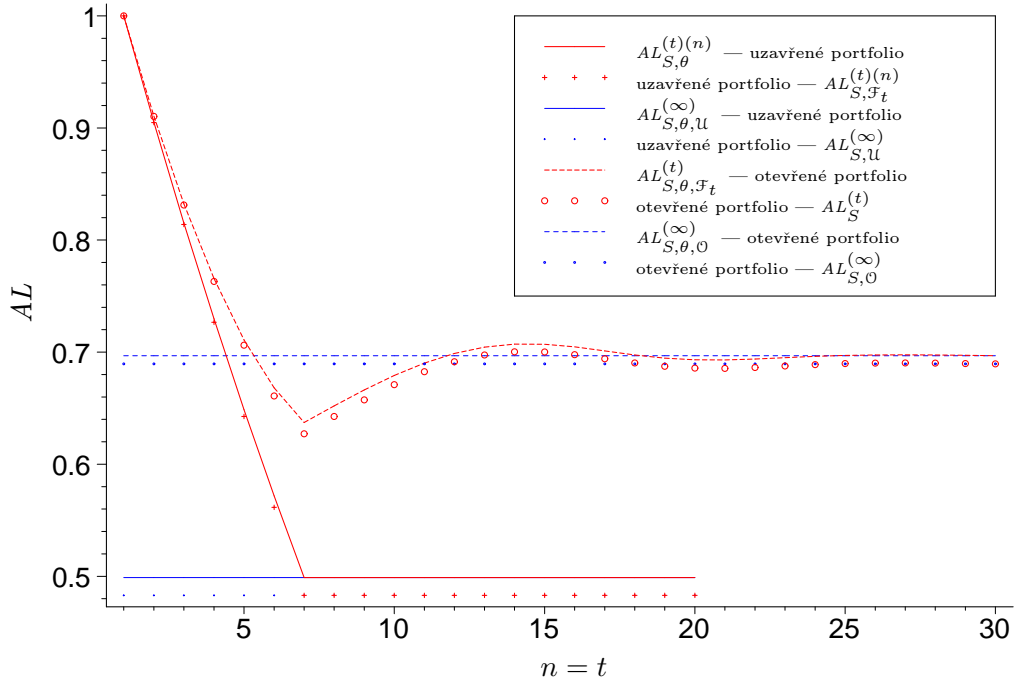
Příklad 2.1 (Ilustrace vlastností BMS)

Začneme v ilustraci na zvoleném keňském BMS. Z grafu 2.1 je vidět, že $AL_{S,\theta}^{(t)(n)}$ konverguje velmi rychle bez ohledu na hodnotu θ .

Graf 2.1: Vývoj $AL_{S,\theta}^{(t)(n)}$ v závislosti na θ a čase rizika (i portfolia) $n = t$

Pokračujme v ilustraci porovnáním závislosti na čase pro čas rizika a jako vážený průměr pro čas celého portfolia. To se dá také chápat jako porovnání na uzavřeném a otevřeném

portfoliu. Dále můžeme srovnat výpočet průměrné úrovně na střední hodnotě škodní frekvence a střední hodnotu průměrné úrovně. Je tak vidět, jaká chyba v úvahách o volbě BMS se může udělat, pokud pracujeme jen se střední hodnotou. Může být užitečné ověřit si na několika BMS, že neděláme chybu příliš velkou a že vývoj v čase je v obou případech obdobný a pak pracovat s ukazatelem vypočteným pro střední hodnotu rizikového parametru. Pak po zredukování počtu kandidátů na vhodný BMS se vrátit ke střední hodnotě ukazatele přes všechna rizika. Totéž lze porovnat na celém otevřeném portfoliu. Vše viz obrázek 2.2.



Graf 2.2: Porovnání otevřené vs. uzavřené portfolio a AL na střední hodnotě Θ (na grafu je tedy $\theta = E\Theta = h/\tau$) vs. střední hodnota AL v čase rizika n resp. portfolio t .

Vzorce pro BMS modelovaný pomocí markovských řetězců a souvislosti mezi jednotlivými ukazateli průměrné úrovně pojistného jsou uvedeny v dodatku D.1. Tam vidíme, že lze postupovat velmi intuitivně, tedy integrovat a vysčítávat přímo ukazatel nižší úrovně na ukazatel komplexnější, neboť lze snadno zaměňovat pořadí \lim a \sum díky konečným časovým horizontům a konečnému počtu stupňů. Také platí, že $AL_{S,\theta}^{(n)(n)} = AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}$, je-li \mathcal{F} uzavřené portfolio.

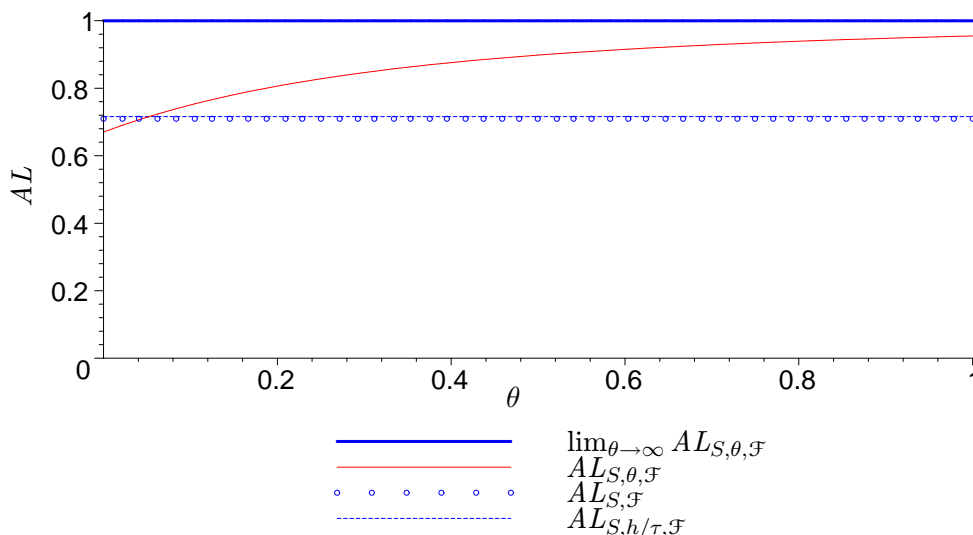
V praxi nás navíc zajímá spíše vývoj průměrné úrovně v jednotlivých obdobích portfolio (t), než jejich vážený průměr. Ten lze použít spíše pro rozhodování mezi více BMS.

Uvažujeme-li o asymptotických vlastnostech, je třeba si uvědomit, že v kombinaci s uzavřeným portfoliem je limitním stavem limitní rozdělení sazbovacích základů Z_t , ale pro otevřené portfolio jde o limitní rozložení stárí rizik v portfoliu.

Pro uvedení do souvislostí poznamenejme, že $AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}$ je přesně to, co je definováno v Le-maire (1995) jako průměrná úroveň pojistného.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

V naší ilustraci charakteristik zvoleného příkladného BMS zbývá vykreslit hodnoty průměrné úrovně pojistného portfolia \mathcal{F} převážené vahami jednotlivých období stáří portfolia v závislosti na rizikovém parametru θ ($AL_{S,\mathcal{F}}$) v porovnání s jeho střední hodnotou (AL_S), navíc zvýrazníme hodnotu prvního z ukazatelů odpovídající střední hodnotě Θ . Vše je zachyceno na grafu 2.3, detail s θ mezi 0 a 1.



Graf 2.3: Porovnání závislosti $AL_{S,\theta,\mathcal{F}}$ na θ s uvedením konstant (modré vodorovné přímky) pro lepší možnost srovnání se svou limitou pro $\theta \rightarrow \infty$, s hodnotou argumentu $\theta = E \Theta = h/\tau$ a svým integrálem přes $dU(\theta)$.

2.1.1 Přirážka pro nováčka

Je obvyklé, že BMS má implicitně zabudovanou přirážku pro nové řidiče (takzvaný „first year surcharge“, který budeme volně překládat jako **přirážka pro nováčka** viz Lemaire (1995)). Přirážku Lemaire definuje jako

$$\frac{\text{vstupní pojistné} - \text{stacionární pojistné}}{\text{stacionární pojistné}}.$$

My opět jeho definici zobecníme a vyjádříme pomocí průměrné úrovně pojistného.

Definice 4 (Přirážka pro nováčka).

Počáteční **přirážku pro nováčka** vůči ostatním shodným rizikům (resp. shodnému portfoliu rizik) s různým stářím v čase portfolia t definujeme jako

$$FYS_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{AL_{S,\theta}^{(t)(1)} - AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}}{AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}} \quad \text{resp.} \quad FYS_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(1)} - AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}}{AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}} \quad (2.1.2)$$

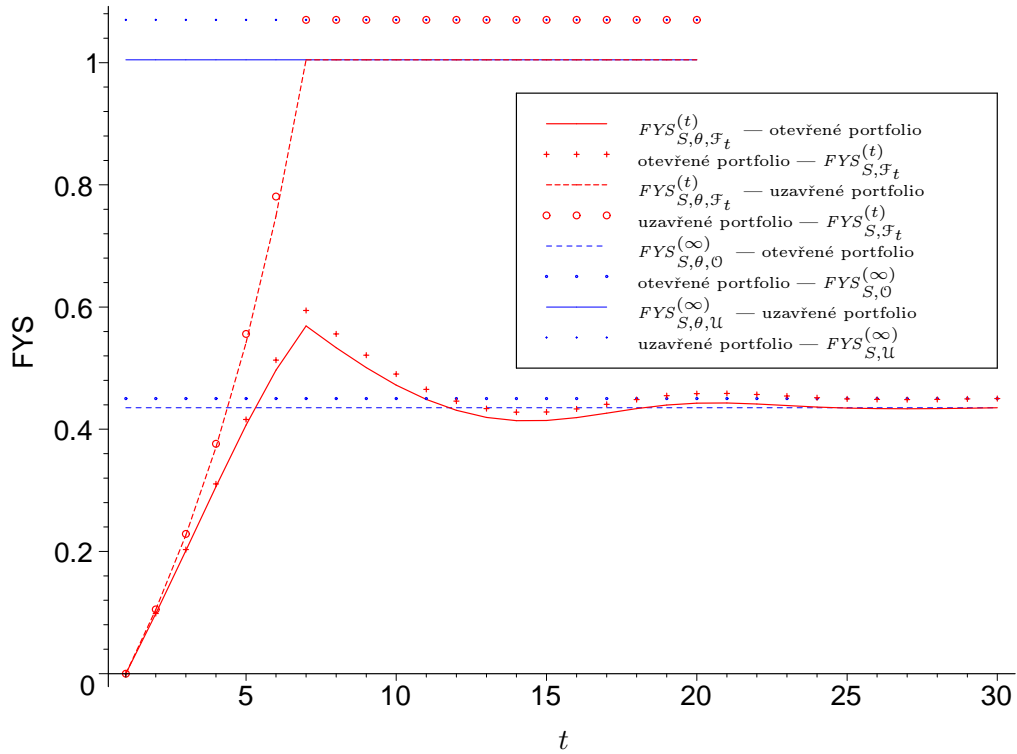
a vůči asymptotickému ukazateli jako

$$FYS_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)}(t) = \frac{AL_{S,\theta}^{(t)(1)} - AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}}{AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}} \quad \text{resp.} \quad FYS_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)}(t) = \frac{AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(1)} - AL_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)}}{AL_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)}} \quad (2.1.3)$$

Další varianty jsou snadno odvoditelné po vzoru variant v tabulce 2.1, nebudeme je zde explicitně uvádět. Asymptotický ukazatel je sice závislý na t , ale pro klasický BMS modelovaný pomocí markovských řetězců, kde pojistné na t nezávisí, dostáváme konstantní ukazatel na t nezávislý. Proto argument (t) nebudeme psát.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

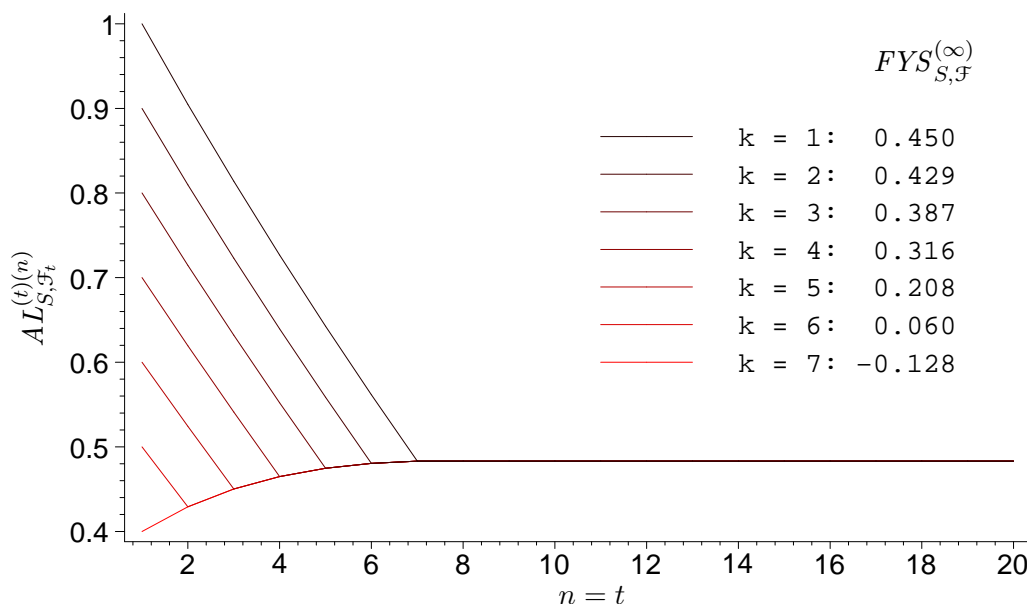
Pokud porovnááme první pojistné vůči pojistnému v portfoliu v čase t , tak pro $t = 1$ máme tento ukazatel logicky roven nule, protože všichni platí stejné pojistné. Viz graf 2.4.



Graf 2.4: Porovnání přírážek pro nováčka ($\theta = h/\tau$).

Na následujícím grafu (2.5) zkoumáme závislost $AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}$ a $FYS_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)}$ na počátečním stavu. Jednotlivé barvy čar odpovídají jednotlivým počátečním stavům. Je vidět, že změny průměrné úrovně pojistného jsou různě dramatické. Od sedmého roku vývoje jsou si rovny a pokud by bylo zaručeno uplatnění malusu, lze volbou pátého či šestého stupně zajistit příznivější vývoj a opticky dokonce větší slevu pro pojistníky. Tyto výsledky potvrdí i další text v 4.1.1.

Pokud pojistitel aplikuje také segmentaci rizik, může být taková přírážka (v případě mladého řidiče) aplikována dvakrát. Řešení nabízejí práce z poslední doby, jako je například Pitrebois et al. (2003a) a další. Pochopitelně přírážka pro mladé řidiče je výpočtem ospravedlnitelná. Navíc taková rizika spíše zvyšují průměrnou úroveň pojistného, která je na druhé straně snižována riziky, která si nenechají zvýšit pojistné po způsobené škodě a z portfolia raději odejdou.



Graf 2.5: Vývoj $AL_{S, \mathcal{F}_t}^{(t)(n)}$ v závislosti na počátečním stupni k a čase rizika (i portfolia) $t = n$. Zároveň je uvedena přírážka pro nováčka při tom kterém počátečním stupni.

2.1.2 Finanční rovnováha systému

Finanční rovnováhu definujeme pomocí ekvivalence mezi pojistným a škodami. Jinou možností by byl výpočet hladiny pravděpodobnosti postačitelnosti pojistného pro dané riziko. Tedy s jakou pravděpodobností BMS stanoví riziku pojistné vyšší než je jeho reálné pojistné $E_{\theta} X_n$.

Definice 5.

Systém BMS S je pro portfolio \mathcal{F} v období stáří portfolia t **finančně vyvážený**, je-li

$$E a_t(Z_{N_t}) = E_{\Theta} X_{N_t}. \quad (2.1.4)$$

Opět je možno konstruovat varianty ve stylu tabulky 2.1, tj. finanční rovnováhu detailněji pro různá subportfolia a naopak souhrnně pro řadu období najednou. Reálně použitelný ukazatel je jen ten výše definovaný, neboť pojistitel potřebuje finanční rovnováhu pro každé t a není též obvyklé zajišťovat finanční rovnováhu pro každé subportfolio.

Pokud se sazbovací funkce „vymyslí“ namísto jejího výpočtu (možnosti jsou uvedeny dále v kapitole 4), je velmi pravděpodobné, že BMS bude finančně nevyvážený.

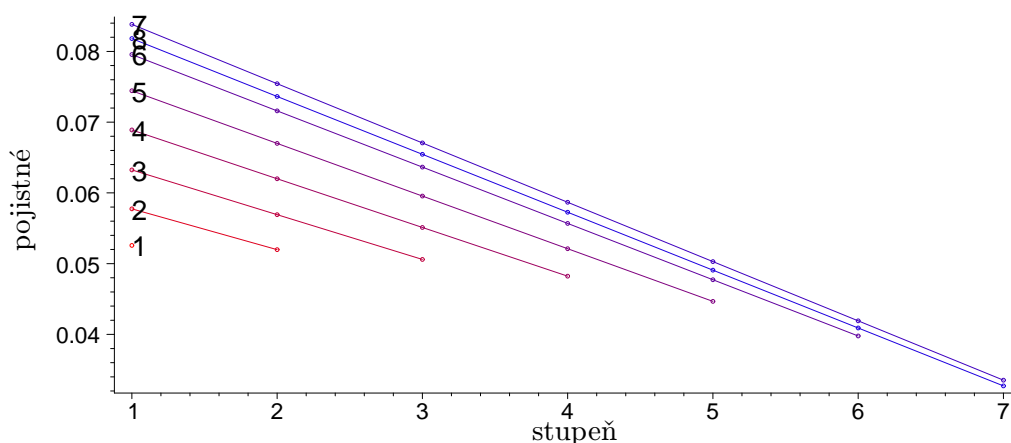
Požadavek na finanční rovnováhu, jakkoliv opodstatněný, vede ke snížení transparentnosti BMS pro pojistníky. Problém transparentnosti se rozebírá ve Verico (2002). Pojistitelé, aby garantovali velkému počtu dobrých rizik redukcí pojistného, kterou jim slíbili, jsou nuceni ke zvyšování základního pojistného. Jak říká Baione et al. (2002), „většina bonusu se vypaří“. Je to způsobeno neustálým poklesem průměrné úrovně pojistného a pojistitel, v zájmu zachování finanční stability, o příslušnou změnu zvyšuje pojistné. To je velmi problematicky akceptovatelné pojištěnými a celý systém postrádá na transparentnosti. Navíc se může stát,

že riziko po bezeškodním období může platit vyšší pojistné než platilo v období předcházejícím. Porovnáme-li shodná rizika, která by v portfoliu strávila shodnou delší dobu (například 10 let), avšak zahájila své setrvání v portfoliu v různých obdobích jeho stáří, dostaneme pro ně různé pojistné.

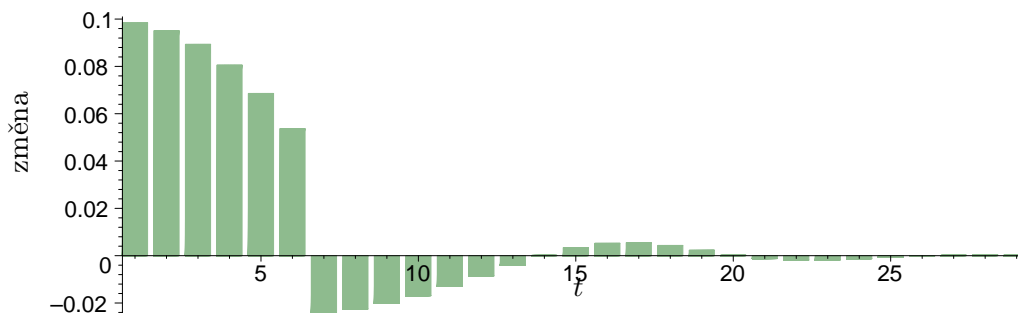
Poznamenejme ještě, že adjustování škály pojistného pro dosažení finanční rovnováhy nemá vliv na AL , FYS ani na dále definované ukazatele CV , $ELAS$, TV a RoC , neboť to jsou buď relativní ukazatele nebo vůbec se sazbovací funkcí nepracují.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Pro ilustraci ukážeme na grafu 2.6, jak je nutno měnit sazbovací funkci v čase. Ponecháme relativní škálu danou originálními pravidly Keňského systému, jen budeme měnit pojistné příslušné počátečnímu stupni. Zobrazeny jsou časy $t = 1, \dots, 8$. Relativní změny pak ilustruje graf 2.7. Toto změny jsou velké zejména v prvních sedmi letech. Ačkoliv klient po prvním roce dostane slevu 10% pokud neměl škodu, pojišťovna musí o 9,85% zdražit, aby zachovala finanční rovnováhu. Výsledkem je jen nepatrná sleva, která v praxi bude pohlcena dalším důvodem nárůstu — inflací škod.



Graf 2.6: Číslice u jednotlivých škál označují čas portfolia t , škály pojistného jsou nastaveny tak, aby v každém tomto čase platila finanční rovnováha v celém otevřeném portfoliu.



Graf 2.7: Zde jsou patrné poměrně vysoké změny pojistného (meziroční relativní nárůst z času t do času $t + 1$).

2.2 Koeficient variace

Definice 6 (Koeficient variace).

Koeficient variace je směrodatná odchylka pojistného BMS dělená jeho střední hodnotou. Základní varianty jsou uvedeny v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2: Koeficienty variace

vysčítání n		
		↗ vysčítání t ↘ limita pro $t \rightarrow \infty$
$CV_{S,\theta}^{(t)(n)} = \frac{\sqrt{\text{var}_\theta [a_t(Z_n)]}}{\text{E}_\theta a_t(Z_n)}$	$CV_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{\sqrt{\text{var}_\theta [a_t(Z_{N_t})]}}{\text{E}_\theta a_t(Z_{N_t})}$	$CV_{S,\theta,\mathcal{F}} = \frac{\sqrt{\text{var}_\theta [a_\Omega(Z_{N_\Omega})]}}{\text{E}_\theta a_\Omega(Z_{N_\Omega})}$ $CV_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{\sqrt{\text{var}_\theta [a_\infty(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})]}}{\text{E}_\theta a_\infty(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})}$
↓ vyintegrování θ ↓		
$CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \frac{\sqrt{\text{var} [a_t(Z_n)]}}{\text{E} a_t(Z_n)}$	$CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{\sqrt{\text{var} [a_t(Z_{N_t})]}}{\text{E} a_t(Z_{N_t})}$	$CV_{S,\mathcal{F}} = \frac{\sqrt{\text{var} [a_\Omega(Z_{N_\Omega})]}}{\text{E} a_\Omega(Z_{N_\Omega})}$ $CV_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{\sqrt{\text{var} [a_\infty(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})]}}{\text{E} a_\infty(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})}$

Vzorce vhodné pro implementaci pro případ BMS modelovaného pomocí markovských řetězců jsou uvedeny v dodatku D.2.

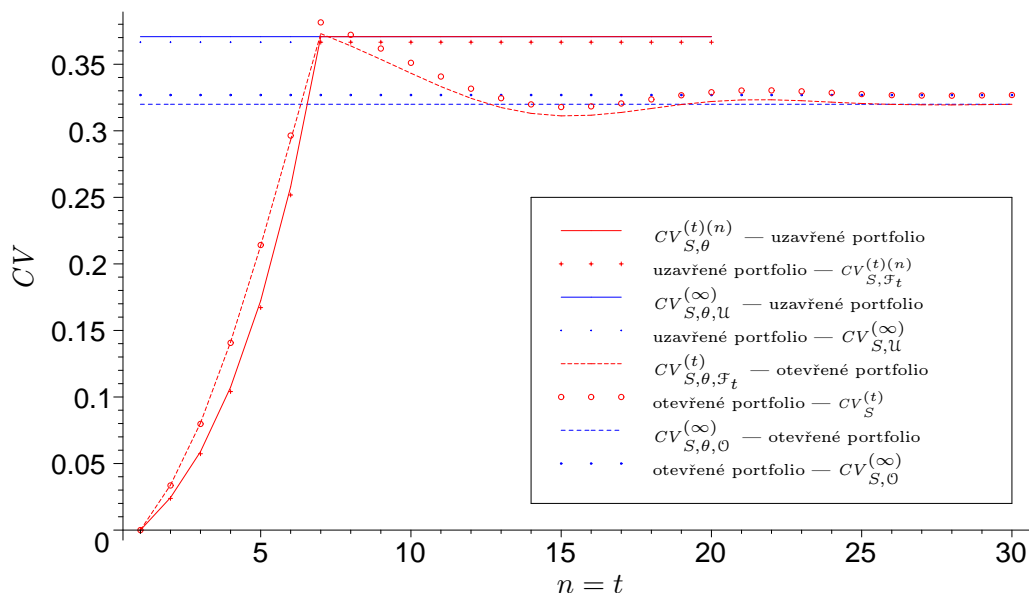
Díky BMS je nejen strana škod popisována jako náhodná veličina, ale i pojistné je náhodnou veličinou. Jde o to, aby koeficient variace nebyl příliš veliký. V praxi nelze čekat na to, až se riziko stabilizuje v okolí nějakého stavu. Je třeba zajistit, aby odchylky od správného pojistného byly od začátku co nejmenší, jinak takové riziko odvádí jiný pojistitel na trhu, který dovede přesněji vyjádřit pojistné. To platí v případě nadhodnocení pojistného. Pokud by bylo pojistné podhodnoceno, nedojde sice k odchodu rizika, ale chyba je v tom, že pojistitel přebírá riziko za neprofitabilní pojistné.

Koeficient variace měří solidaritu mezi pojištěnými riziky. Koeficient variace v portfoliu bez a posteriorního sazbování (a také pro rizika bez historie, protože ta řadíme všechna do základního stupně - deterministicky) je samozřejmě 0. Lemaire (1995) na základě dat o Taiwanském trhu uvádí, že bez pojištění, kdy každý pojistník nese škodu sám, je koeficient variace hypoteticky 6,4. Proto by se hodnoty testovaných BMS měly pohybovat mezi těmito dvěma čísly. Můžeme tedy posuzovat, jak moc BMS redukuje variabilitu, když je riziko pojiš-

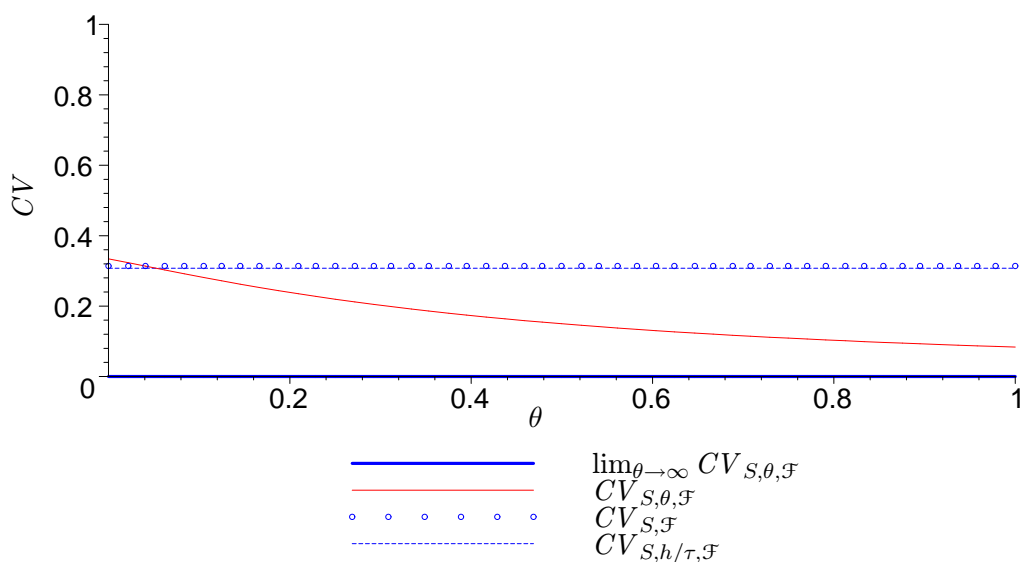
těno. Další komentář tohoto ukazatele viz Lemaire (1995). My se tímto ukazatelem, pro jeho vazbu na Norbergovo riziko, nebudeme podrobněji zabývat.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Stejně porovnání jako pro průměrnou úroveň pojistného (grafy 2.2 a 2.3), je provedeno i pro koeficient variace a je uvedeno na grafech 2.8 a 2.9.



Graf 2.8: Porovnání CV pro otevřené vs. uzavřené portfolio a zároveň srovnání CV na střední hodnotě n . v. Θ se střední hodnotou CV v čase rizika n resp. portfolio t . Limitní ukazatele jsou uvedeny modře.



Graf 2.9: Porovnání závislosti $CV_{S,\theta,\mathcal{F}}$ na θ s uvedením střední hodnoty přes Θ hodnoty ve střední hodnotě Θ a limitní hodnoty pro $\theta \rightarrow \infty$.

2.3 Míra konvergence

Nejprve mírně zobecníme v Lemaire (1995) definovanou celkovou variaci pro uzavřené portfolio.

Definice 7 (Celková variace).

Celková variace sazbovací základny Z_n vůči základně $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ na portfolio \mathcal{F} je

$$TV_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}(n) = \sum_{j \in \mathcal{K}_t} \left| P_{\theta}(Z_n = j) - P_{\theta}(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j) \right|. \quad (2.3.1)$$

Míru konvergence potom spolu s Bonsdorf (1992) definujeme následovně.

Definice 8 (Míra konvergence).

Mírou konvergence BMS S a rizika s parametrem $\Theta = \theta$ rozumíme takové $ROC_{S,\theta}$, že

1. když $\rho > ROC_{S,\theta}$, tak existuje $q < \infty$, že $TV_{S,\theta,u}^{(\infty)}(n) \leq \rho q^n$ pro všechna n a
2. když $\rho < ROC_{S,\theta}$, tak takové q neexistuje.

Čím menší je ukazatel míra konvergence, tím rychleji BMS konverguje. Keňský BMS má míru konvergence 0, která odpovídá tomu, že od určitého okamžiku rozdělení posloupnosti sazbovacích základnen dosáhne své limity přesně. Modelujeme-li BMS pomocí markovských řetězců (a za určitých předpokladů na pravidla BMS, která jsou uvedena v dodatku A), existuje stacionární rozdělení $Z_u^{(\infty)}$. Hledanou mírou konvergence je potom v absolutní hodnotě druhé největší vlastní číslo matice přechodu (největší je 1)

$$ROC_{S,\theta} = \max \{ |\alpha_1(\theta)|, \dots, |\alpha_{K-1}(\theta)| \},$$

kde $\alpha_j(\theta)$ jsou vlastní čísla, když $\alpha_K(\theta) = 1$. Odkaz na důkaz lze nalézt v Bonsdorf (1992).

Oproti zobecňování, které provádíme s jinými ukazateli, zde stojíme před několika problémy. V otevřeném portfolio máme omezeno stáří rizik nějakým n_0 , takže těžko můžeme hovořit o konvergenci pro $n \rightarrow \infty$ v otevřeném portfolio, to je možné jen pro portfolio uzavřené. Proveditelné zobecnění spočívá v měření rychlosti konvergence k asymptotické sazbovací základně otevřeného portfolio, což neznamená rychlost konvergence sazbovací základny, ale rychlost konvergence portfolio k asymptotickému portfolio. To se jednak těžko měří (kvůli problematickému modelování portfolio pomocí exaktních formulí) a jednak je to něco, co si pojišťovna jen málo vybírá, na rozdíl od BMS. Lze tedy shrnout, že:

1. Pro individuální rizika (a uzavřené portfolio) je důležitá rychlost konvergence posloupnosti $\{P_{\theta}(Z_n = j)\}_{n=1}^{\infty}$. Z tohoto faktu vychází první navržená strategie optimalizace BMS, uvedená v 4.1.1.
2. Pro pojišťovnu jako celek je důležitá rychlost konvergence $w_n(t)$, která mimo jiné naznačuje, kdy pojišťovna přestane být nucena výrazně měnit sazbovací funkci, aby udržela finanční rovnováhu.

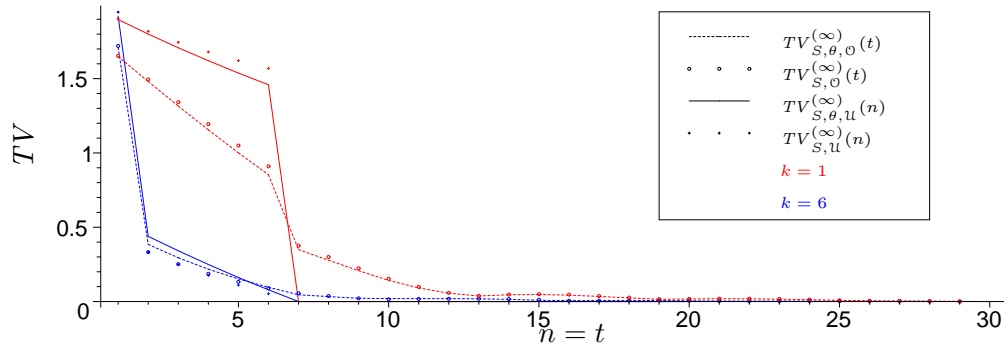
3. Pokud však sazbovací funkci stanovíme za použití sazbovací základny Z_{N_Ω} , nemůžeme o konvergenci mluvit vůbec. S tím se vypořádává strategie druhá, uvedená v 4.1.2. V tomto případě budeme počítat celkovou variaci jako

$$TV_{S,\theta,\mathcal{F}}(n) = \sum_{j \in \mathcal{K}} |P_\theta(Z_n = j) - P_\theta(Z_{N_\Omega} = j)|.$$

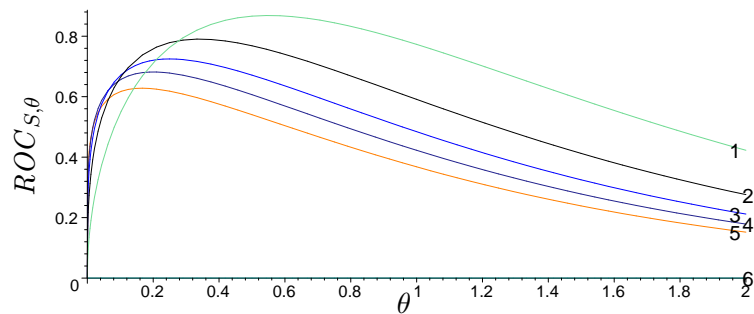
Uvedené celkové variace můžeme vyintegrovat přes $U(\theta)$, ale to jistě není totéž jako u ukazatele AL , kde lze snadno zaměňovat pořadí sumy a integrálu nebo u ukazatele CV , který máme alespoň definovaný pro portfolio rizik daných strukturální distribuční funkcí.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Porovnejme nyní celkové variace pro různé počáteční stupně. Na grafu 2.10 je červeně uveden vývoj pro reálně aplikovaný stupeň $k = 1$ a modře pro $k = 6$, který vypadá velmi slibně již na grafu 2.5. Graf 2.10 navíc dobře dokladuje, proč má větší význam zkoumat celkovou variaci v prvních obdobích, než míru konvergence. Vzhledem k tomu, že míra konvergence Keňského BMS je 0, uděláme již nyní exkurz do optimalizace pravidel BMS a na grafu 2.11 zobrazíme míry konvergence pro BMS s $K = 7$ stejně jako má Keňský, ale s $\mathcal{M} = 1, \dots, 6$. Význam \mathcal{M} vyz dodatek A.



Graf 2.10: Porovnání otevřené vs. uzavřené portfolio a TV na střední hodnotě Θ vs. střední hodnota TV v čase rizika n resp. portfolio t .



Graf 2.11: Porovnání různých BMS. Číslo na konci křivky značí počet stupňů, které jsou sankcí za každou škodu v posledním období. V zákrytu s vodorovnou osou je Keňský BMS.

2.4 Elasticita

Koncept elasticity/eficience BMS byl zaveden postupně, ale zcela různým způsobem v Loimaranta (1972) a v Lemaire (1975, 1976). Oba přístupy jako speciální případ shrnuje článek De Pril (1978). De Pril definuje elasticitu (v článku používá pojem eficiency) na časovém intervalu konečné délky jako míru citlivosti BMS pojistného na změnu rizikového pojistného. Což dále zobecňuje na limitní případ a při vhodné volbě parametrů se tak dostane eficiency podle Loimaranty. Lemaire elasticitu definuje v Lemaire (1988) sice také jako citlivost diskontovaného BMS pojistného na časovém intervalu, ale jen vůči škodní frekvenci θ , což znamená implicitní zahrnutí určitých předpokladů o rozdělení výše škod Y .

V této práci použijeme pojem elasticita tak, jak jej používá Lemaire (1995), neboť pojem používaný dříve (eficiency), by se křížil s eficiency BMS definovanou např. v Norberg (1976).

Hledáme kritérium, které by měřilo, jak BMS reaguje na změnu rizikovosti pojištěného rizika. Uvažujme, že se rizikovost změní z období n do období $n + 1$ stáří rizika. BMS v čase t riziku starému n přiřadil nějaké pojistné. Klademe si otázku: jak závisí změna pojistného během daného počtu období V na změně rizikovosti (škodní frekvenci) individuálního rizika.

Definice 9 (Elasticita).

Nechť β značí diskontní faktor příslušný určité úrokové míře, kterou použijeme pro vyjádření časové hodnoty peněz. **Diskontovaný úhrn škod** za období rizika $n, n + 1, \dots, n + V$ pro $V \in \mathbb{N}_0$ resp. $t, t + 1, \dots, t + V$ období portfolia je

$$\mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^V X_{n+v} \beta^{(t+v-1)+1/2} \quad (2.4.1)$$

a pro asymptotické účely definujme „úhrn“ škod jako $\mathcal{X}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = X$. Dále označme **diskontovaný úhrn pojistného**, které riziku určí BMS, za stejné období

$$\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^V a_{t+v}(Z_{n+v}) \beta^{t+v-1} \quad (2.4.2)$$

a opět pro asymptotické účely definujme „úhrn“ pojistného jako $\mathcal{A}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = a(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})$. **Elasticita za dobu V rizika θ v období n v portfoliu v období t je**

$$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \frac{\frac{d \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{\mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}}{\frac{d \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{\mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}} = \frac{d \lg \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{d \lg \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)} \quad (2.4.3)$$

Elasticita po dobu V rizik θ všech stáří portfoliu starém t období je

$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) = \frac{\frac{d \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}{\mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}}{\frac{d \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}{\mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}} = \frac{d \lg \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}{d \lg \mathbb{E}_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)} \quad (2.4.4)$$

V definici předpokládáme, že škody nastávají v polovině období a že pojistné je placeno předlžitně. Další varianty jsou uvedeny v tabulce 2.3.

Tabulka 2.3: Elasticity

limita pro $V \rightarrow \infty$			
		vyintegrování θ	
$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \frac{d \lg E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{d \lg E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}$	$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)} = \lim_{V \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)$	$= ELAS_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \int_0^\infty ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)} dU(\theta)$	$=$
↓ vysčítání n ↓			
$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) = \frac{d \lg E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}{d \lg E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V)}$	$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \lim_{V \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V)$	$= ELAS_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \int_0^\infty ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} dU(\theta)$	$=$
↓ vysčítání t ↓			
$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}(V) = \frac{d \lg E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(\Omega)(N_\Omega)}(V)}{d \lg E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(\Omega)(N_\Omega)}(V)}$	$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}} = \lim_{V \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}(V)$	$= ELAS_{S,\mathcal{F}} = \int_0^\infty ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}} dU(\theta)$	$=$
↪ limita pro $t \rightarrow \infty$ ↩			
$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{d \lg E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}}{d \lg E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}}$	ukazatel nemá smysl	$ELAS_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \int_0^\infty ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} dU(\theta)$	$=$

Poznamenejme jen, že můžeme sice elasticitu závislou na konkrétním θ vyintegrovat přes $U(\theta)$, ale dostaneme jen „vážený průměr“ původního ukazatele, nikoliv cokoli ve smyslu elasticity, protože ta právě měří reakci na změnu vlastností jednoho konkrétního rizika. Definice je v souladu s literaturou, kdy Bonsdorf (1992) také nejdříve provádí limitu pro $V \rightarrow \infty$ a pak takto získaný limitní ukazatel integruje.

Obdobně záleží na pořadí operátorů derivace a střední hodnoty a tedy

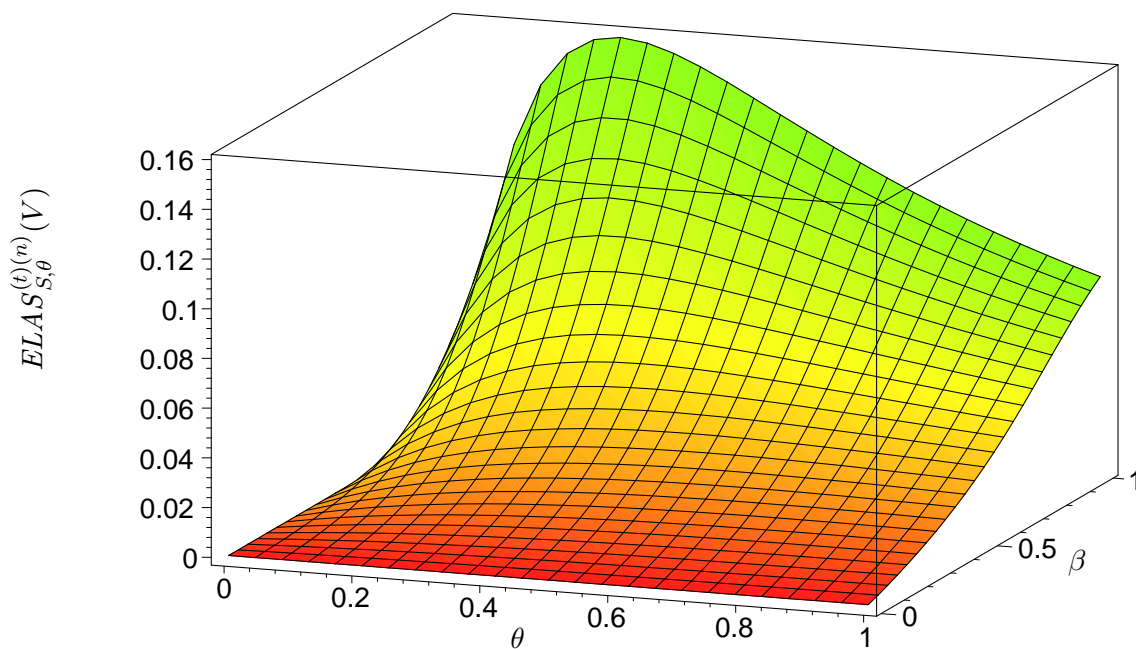
$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) \neq E \left[ELAS_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V) \right],$$

kde levá strana znamená **elasticitu portfolia shodných rizik** (shodné θ , ale rozdílné stáří n), ale pravá strana znamená **vážený průměr elasticit různě starých rizik**.

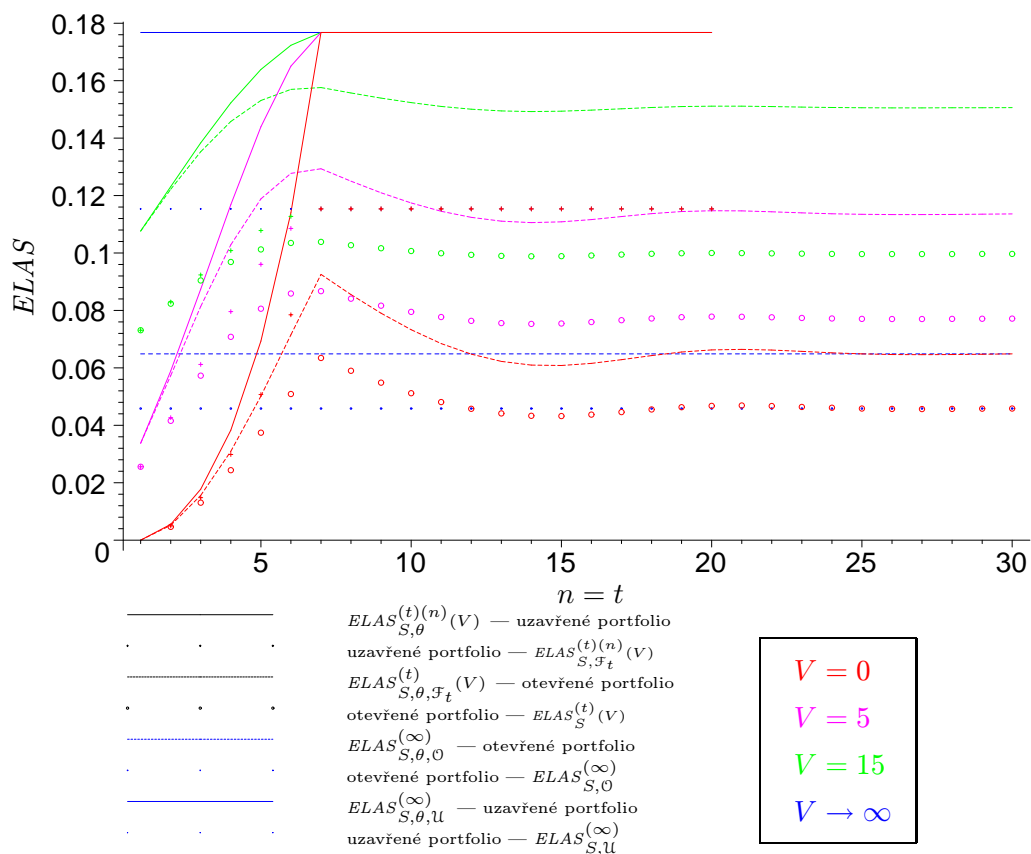
Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Pokračování ilustrací na Keňském BMS. V případě elasticity lze sledovat závislost na více proměnných: θ , t , n , V a β . Nejprve se podíváme na grafu 2.12 na závislost na diskontním faktoru β a škodní frekvenci θ .

Odtud dále budeme uvažovat $\beta = 1$. Graf 2.13 je obdobný jako grafy pro předchozí ukazatele, ale je uvedeno hned několik hodnot V najednou. Ukazatele pro limitní portfolia se s limitou ukazatele (t nebo n jdoucí do ∞) sejdou pro uzavřené portfolio bez ohledu na hodnotu

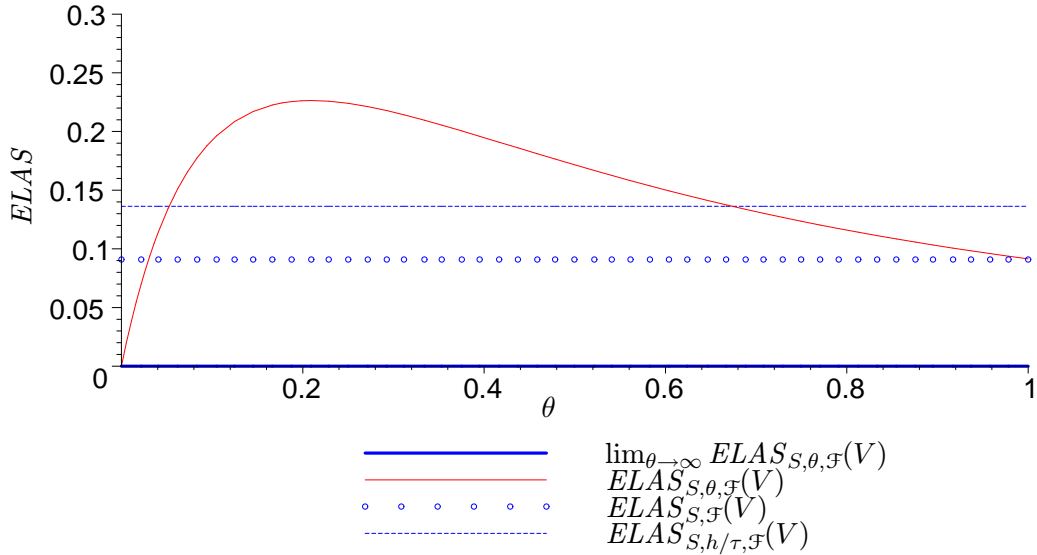


Graf 2.12: Diskontování snižuje elasticitu až ji zcela zploští, ale profil se spíše zachovává, není třeba se tedy zabývat diskontním faktorem. Zde máme $n = t = 1$ a $V = 10$.

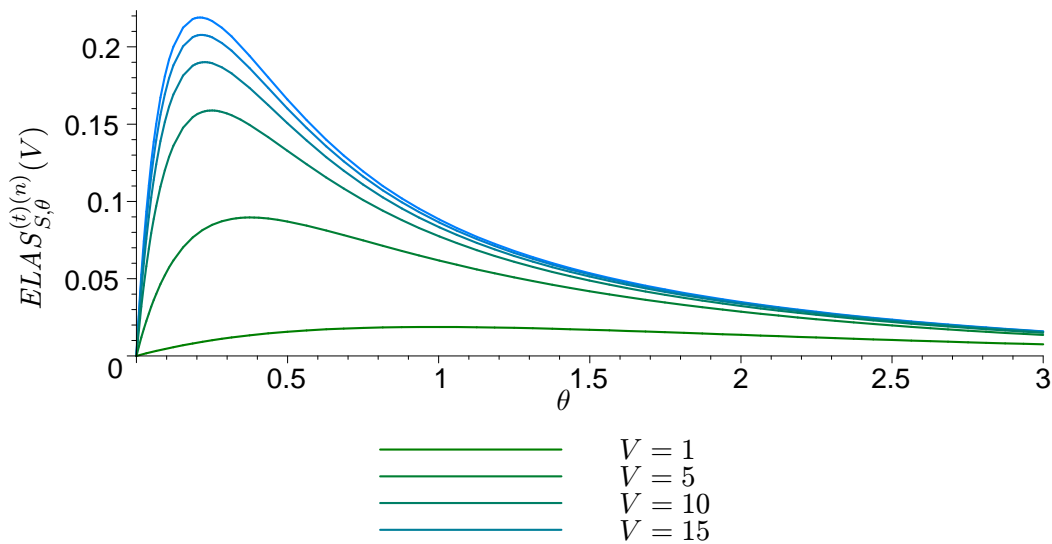


Graf 2.13: Porovnání různých ukazatelů elasticity ($V = 0$, $\beta = 1$ a pro zkoumání závislosti na n klademe $t = 1$).

V , ale pro otevřené portfolio jen pro $V = 0$. Dále lze vidět, že rozdíl mezi střední hodnotou elasticity a elasticitou střední hodnoty je značný. Otevřená portfolia jsou na tom vždy hůře než uzavřená. To a význam volby počtu období V ilustruje graf 2.15 a při zafixování ostatních parametrů graf 2.16.

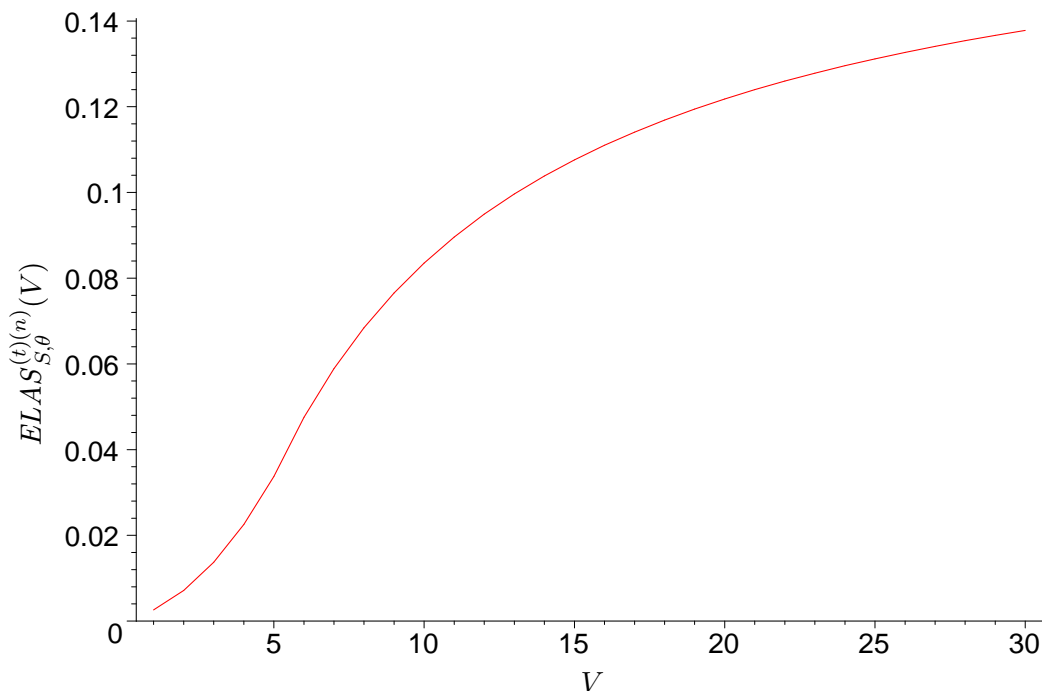


Graf 2.14: Porovnání závislosti $ELAS_{S,\mathcal{F}}$ na θ s uvedením konstant: své limity pro $\theta \rightarrow \infty$, s hodnotou argumentu $\theta = E \Theta = h/\tau$ a svým integrálem přes $dU(\theta)$. Pro $V = 10$ a $\beta = 1$.



Graf 2.15: Porovnání závislosti elasticity na V při $n = 1$, $t = 1$ a $\beta = 1$.

Pokud by BMS degenroval a ve stavové množině byl jen jeden stupeň, tedy všechna rizika by měla stejné pojistné, je $ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = 0$ pro všechna θ . Nemusíme však hned uvažovat o degenrovaném BMS. Toto je typická situace pro rizika bez historie, která BMS zařadí do základního stupně, tedy elasticita během jednoho období je nulová: $ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(1)(1)}(0) = 0$.



Graf 2.16: Čím déle necháme na přizpůsobení, tím větší elasticita — nic překvapivého, V je tedy otázkou volby konstruktéra BMS. Volí jak dlouho je pro něj akceptovatelné, aby se adjustovala změna pojistného při změně rizika a podle toho počítá kritérium elasticity ($\beta = 1$, $n = t = 1$ a $\theta = E\Theta = h/\tau$).

Smysluplný BMS má tu vlastnost, že dobrá rizika platí v průměru menší pojistné než špatná. To znamená že relativní změny pojistného i rizika mají stejné znaménko a tedy, že $ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \geq 0$.

Ideální BMS by měl elasticitu pro všechna rizika θ a všechny časové horizonty V rovnu 1. V praxi však relativní zvýšení rizikovosti bude v obecnosti znamenat menší růst pojistného daného BMS, což znamená, že dobrá rizika musí platit na ta špatná. V reálu se bude elasticita pohybovat mezi 0 a 1. Lemaire (1995) uvádí i ve světě použitý BMS s elasticitou větší než 1, ale tento případ považujeme spíše za výjimečný.

Platí

$$E_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) > 0 \quad \text{a} \quad E_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \rightarrow 0 \quad \text{pro } \theta \rightarrow 0$$

$$E_{\theta} \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \text{ je omezené} \quad \text{a} \quad E_{\theta} \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \rightarrow \infty \quad \text{pro } \theta \rightarrow \infty$$

a tedy

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = 0.$$

2.5 Norbergovo riziko

V posledních pracech, jako například v Pitrebois et al. (2003a), se používá označení Norbergovo kritérium, podle autora prací Norberg (1976) a Norberg et al. (1981), ve kterých je

takové kritérium optimality BMS poprvé předvedeno. Zde se budeme držet označení Norbergovo riziko, částečně podle autora a částečně podle toho, že uvažované kritérium opravdu měří riziko BMS v určitém, ve statistice obvyklém, smyslu.

Definice Norbergova rizika vychází z toho, že nejlepší individuální pojistné pro náhodně vybrané riziko θ staré n období je $E_\theta X_n$. Kritérium porovnává tuto optimální sazbu se sazbou určenou BMS, která je $a_t(Z_n)$.

Definice 10 (Norbergovo riziko).

Norbergovo riziko systému bonus malus S a portfolia starého t období je

$$Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = E [E_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t})]^2. \quad (2.5.1)$$

Tabulka 2.4: Norbergovo riziko

		vyintegrování θ	
	\sum_n	$Q_{S,\theta}^{(t)(n)} = E [E_\Theta X_n - a_t(Z_n) \Theta = \theta]^2$	$Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = E [E_\Theta X_n - a_t(Z_n)]^2$
		$Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = E [E_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t}) \Theta = \theta]^2$	$Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = E [E_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t})]^2$
	\sum_t	$Q_{S,\theta,\mathcal{F}} = E [E_\Theta X_{N_\Omega} - a_t(Z_{N_\Omega}) \Theta = \theta]^2$	$Q_{S,\mathcal{F}} = E [E_\Theta X_{N_\Omega} - a_t(Z_{N_\Omega})]^2$
	$t \rightarrow \infty$	$Q_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = E [E_\Theta X - a_t(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}) \Theta = \theta]^2$	$Q_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = E [E_\Theta X - a_t(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})]^2$

Definice 11 (Eficiencie).

Eficienci BMS S v období t a rizika v období n definujeme jako

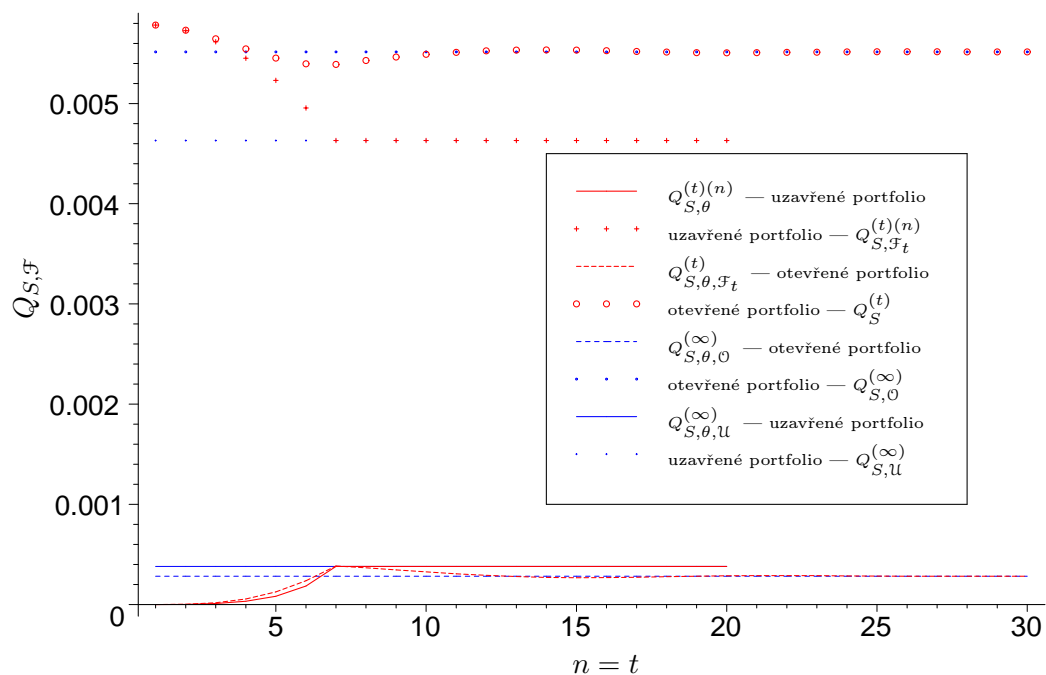
$$e_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = E a_t^2(Z_n). \quad (2.5.2)$$

Norberg používá kvadratickou ztrátovou funkci. Nicméně lze nalézt i zmínky o jiných ztrátových funkcích, konkrétně v Lemaire (1979) o exponenciální (dále tuto myšlenku rozvíjí například Bermúdez et al. (2001)). Její použití může být interpretováno například jako aplikace tlaku regulátora na to, aby nadhodnocení pojistného bylo penalizováno více než podhodnocení, což je samozřejmě ve prospěch pojištěných.

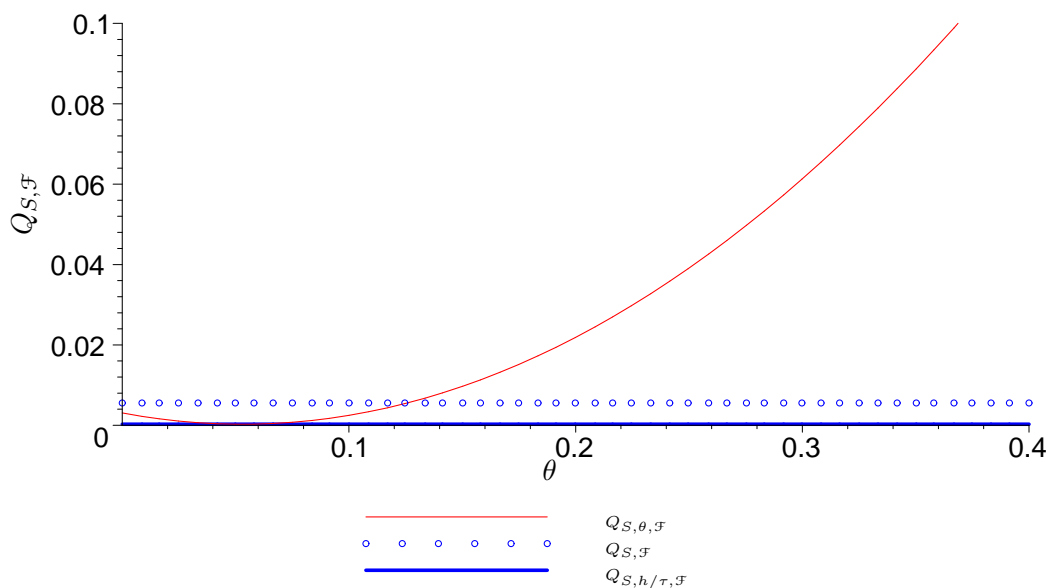
V tuto chvíli zůstaneme u definic, vše ostatní bude předmětem kapitoly 4. Pro souvislosti nejen mezi ukazateli Q , ale i mezi Q , AL a CV , odkazujeme do dodatku D.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Keňský BMS a jeho Norbergovo riziko viz graf 2.17. Křivky pro vyintegrované ukazatele a pro $\theta = E\Theta = h/\tau$ jsou od sebe značně vzdálené a navíc mají pro malá n resp. t zcela odlišný vývoj. Pokud uvažujeme jen rizika s rizikovým parametrem rovným h/τ , která v prvním období dostanou všechna stejné pojistné a to opět h/τ , tak mají logicky kvadratickou odchylku od individuálního pojistného nulovou. Reálně však máme různá rizika (s distribuční funkcí $U(\theta)$), ale těm dáme v prvním období také pojistné h/τ , což je naopak nejhorší situace, později už začíná fungovat BMS a Q se snižuje. Ukazatel po eliminaci času portfolia (t) je na grafu 2.18.



Graf 2.17: Porovnání otevřené vs. uzavřené portfolio a Q na střední hodnotě Θ (na grafu je tedy $\theta = E \Theta = h/\tau$) vs. střední hodnota Q v čase rizika n resp. portfolio t



Graf 2.18: Porovnání závislosti $Q_{S, \theta, \mathcal{F}}$ na θ s uvedením konstant (modré vodorovné přímky) pro lepší možnost srovnání s hodnotou argumentu $\theta = E \Theta = h/\tau$ a svým integrálem přes $U(\theta)$. Limita pro $\theta \rightarrow \infty$ je $+\infty$ a proto není zobrazena.

Kapitola 3

Hlad po bonusu a spoluúčast

Zatímco Sundt (1989) a Norberg (1975) se zabývají konstrukcí BMS tak, aby již zohledňoval hlad po bonusu, většina ostatních prací (například. De Pril (1979), samozřejmě Lemaire (1995), Holtan (1999) a Dellaert et al. (1991)) řeší jen hledání optimální strategie pro pojistníka, tj. reakci na existující BMS. Zajímavá je ještě práce Holtan (1994), která navrhuje použít spoluúčast místo BMS. Výhrady k tomuto řešení lze nalézt v Lemaire and Hongmin (1994b). Jmenujme alespoň některé z nich. BMS penalizuje zcela nového, mladého řidiče, ale spoluúčast je pro všechny stejná. Penalizace mladého řidiče se tedy musí řešit jinak. A naopak, pokud je řešena jinak např. segmentací, a pokud je riziko i přesněji apriorně osazbováno, přestává být potřeba používat BMS (další aspekty koexistence BMS a segmentace např. v Pitrebois et al. (2003b)) a spoluúčast by byla na místě. Vzhledem k tomu, že o spoluúčast nelze snížit pojistné plnění poškozenému, je třeba počítat se zpětným vymáháním spoluúčasti od pojistníka, což přinese dodatečně správní náklady. Navíc systém se spoluúčastí je podle zmíněných autorů funkční až při spoluúčasti blízké průměrné škodě, což je pravděpodobně příliš vysoká částka pro retailového klienta. Holtan sice navrhuje provázanost na automatickou půjčku, ale to má stejný efekt jako navýšení pojistného pomocí BMS a navíc přináší komplikace s administrací v pojišťovně. Dále se touto myšlenkou nebudeme zabývat.

Vraťme se k myšlence hledání optimální strategie pojistníka, který reaguje na BMS určený pojistitelem. K tomu se vrací i Holtan (1999) ve své pozdější práci. Spolu s Lemaire (1995) (Average optimal retention (průměr přes všechny stupně) a Maximum optimal retention) je přístup k definici *optimální retence* (lépe česky asi *velikost hladu po bonusu*) v principu shodný a spočívá ve změření rozdílu v budoucnu očekávaného pojistného při nahlášení a nenahlášení škody. Zde tento princip zachováváme.

V článku Šváb (2002a), který vychází z obou zmíněných prací (Sundt (1989) a Norberg (1975)) je aplikace hladu po bonusu při modelování BMS pomocí markovských řetězců. To je možné zkombinovat s myšlenkou iterací použitou v Lemaire (1995) do následujícího výpočetního postupu:

máme návrh BMS

- (i) spočteme optimální retenci
 - (ii) retence nám dá změněnou škodní frekvenci
 - (iii) znovu napočteme škálu BMS
- a pokračujeme prvním bodem

3.1 Optimální retence

Lze předpokládat, že pojistník volí svou strategii na základě nějakých úvah. Ekonomicky přirozenou variantou je současná hodnota budoucích navýšení pojistného, pokud škodu nahlásí. De Pril (1979) používá současnou hodnotu rozdílu budoucích očekávaných nákladů pojistníka podle variant zda škodu nahlásí nebo nenahlásí. První přístup zohledňuje jen pojistné, ale ten druhý i případné další nenahlášené škody na vlastní vrub pojistníka. V této práci zůstaneme u té první, jednodušší varianty, neboť hlad po bonusu není jejím těžištěm. Nemusí to však být až tak daleko od reality, neboť málokterý pojistník očekává, že bude mít škodu a naše zjednodušení jen znamená, že bude všechny budoucí škody bez ohledu na výši hlásit pojistiteli, ačkoliv je jasné, že se bude znovu u každé z nich rozhodovat.

Vezmeme základní z myšlenek a uvažujme, že v období $n - 1$ svého stáří a v období $t - 1$ stáří portfolia je určité riziko v určitém stavu. V tomto období vznikne jedna škoda. Před pojistníkem stojí otázka zda je výhodnější škodu nahlásit nebo ji zaplatit sám a tak si uchovat bonus.

Pojistné pro následující období (n resp. t) je dáno rozhodnutím pojistníka. Pokud by jeho rozhodovacím horizontem bylo jedno období, tak rozdíl mezi pojistným po nahlášení škody a bez nahlášení škody je právě tou správnou hranicí pro výši škody při rozhodování o jejím nahlášení.

Všechna další období (omezme se nějakým maximálním obdobím V , které představuje horizont uvažování pojistníka) jsou dány dalšími eventuálními škodami, proto budeme počítat střední hodnotu pojistného. Hranici pro nahlášení škody budeme počítat jako rozdíl mezi střední hodnotou současné hodnoty budoucích toků pojistného.

Definice 12 (optimální retence).

Náhodnou veličinu pojistné rizika, které je ve stupni $j \in \mathcal{K}$ v období $n - 1$, za dobu $n, \dots, n + V$ označme

$$\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \Big|_j = \sum_{v=0}^V a_{t+v}(Z_{n+v}|Z_n = j)\beta^v,$$

kde β je diskontní faktor, placení pojistného uvažujeme předlhůtní a diskontujeme ke konci období $n - 1$. Značením $(Z_{n+v}|Z_n = j)$ rozumíme sazbovací základnu $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ale podmíněnou $Z_n = j$.

Uvažujme, že pokud pojistník (v období $n - 1$ ve stavu j) škodu nahlásí, bude ve stupni j_- v období n a pokud ne, tak bude ve stupni j_+ .

Optimální retence rizika θ v čase n resp. t ve stavu j s výhledem na $V \in \mathbb{N}$ období je

$$RET_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \Big|_j = \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \Big|_{j_-} - \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \Big|_{j_+}.$$

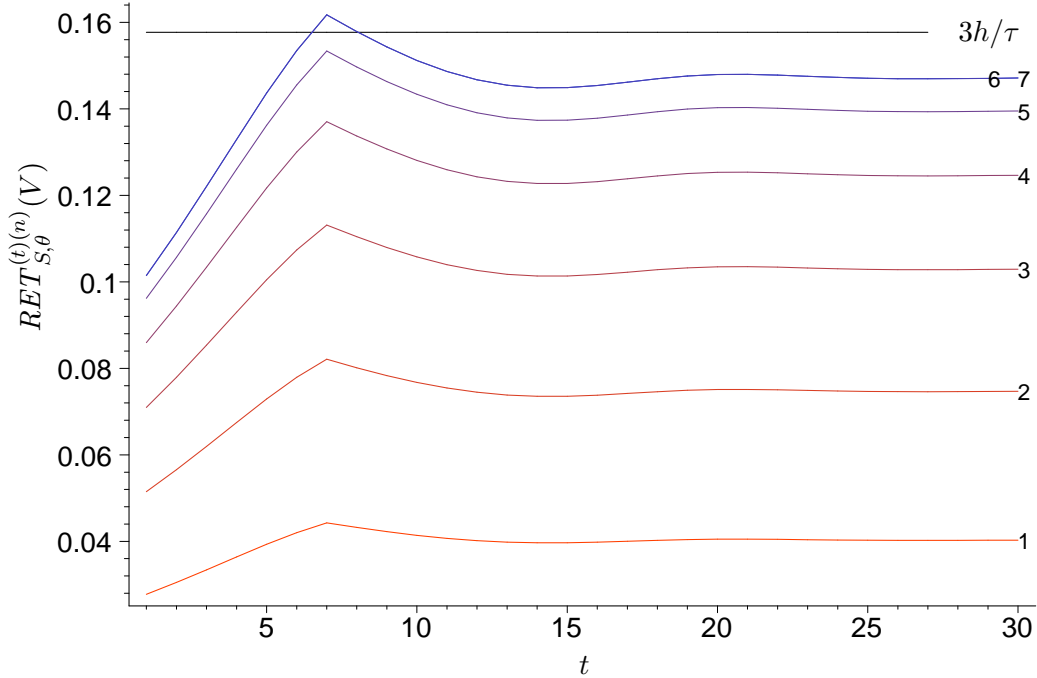
Optimální retence portfolia rizik v čase n resp. t ve stavu j s výhledem na V období je

$$RET_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)}(V) \Big|_j = \int RET_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) \Big|_j dU(\theta).$$

Pochopitelně se může stát, že v tom samém období bude mít další škodu a bude se znovu rozhodovat, nicméně to zanedbáme a možnost dalších škod uvažujeme až od dalšího období.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Pro naše účely uděláme jednoduchou ilustraci výše optimální retence, jaká by byla pro některé stupně, ve kterých se riziko nachází v okamžiku rozhodování. Viz graf 3.1.



Graf 3.1: Optimální retence v čase t při finanční rovnováze. Čísla u jednotlivých křivek představují stupeň, ve kterém je riziko v okamžiku jeho rozhodování zda nahlásit, nebo nenahlásit škodu. Horizont $V = 10$ období, pro riziko s $\theta = h/\tau$.

Pro ilustrační účely uvádíme hladinu rovnou trojnásobku průměrného pojistného $3h/\tau$. Je zřejmé, jak problematická by byla volba jediného čísla, jakožto optimální retence. Ale přesně to bychom byli nuceni udělat, pokud by náš tarif měl obsahovat jednotnou spoluúčast. Pokud bychom měli volbu i tak učinit, volíme v podstatě asymptoticky s určitou bezpečnostní přírůžkou pro pojistitele a volba bude odpovídat pravděpodobně stupňům pět až sedm, kde bude za delší čas alokována většina rizika. To také odpovídá ustálenému vývoji v čase t . V praxi je třeba postupovat velmi opatrně, neboť znalost je nesymetrická, pojistitel ji má větší a pokud by nadsazoval tak jako my zde, mohlo by to být považováno za neetické. Nikdy se jedinou část-

kou netrefí do konfigurace každého rizika, protože retence velmi závisí na škodní frekvenci, ale může uspět s tvrzením, že pro většinu klientů nemá smysl hlásit škodu do určité výše.

Vysoká penalizace za škodu, měřeno optimální retencí, může nutit k chování „hit and run“, tj. mít škodu a hned odejít k jinému pojistiteli. Úkolem BMS je rozlišit špatná a dobrá rizika, nemá tedy docházet k tlaku na pojistníka ve snaze výrazněji na něj zpět přenášet škody.

3.2 Vliv hladu po bonusu na škodní frekvenci

Na rozdíl od minulého oddílu, kde jsme zjišťovali optimální retenci, zde uvažujeme, že máme retence dány. V předchozím jsme mohli vidět, že retence závisí na stavu, ve kterém se riziko nachází. Zde však taková závislost není explicitně uvedena, ale je zřejmé, že riziko v určitém stavu je. V případě modelování BMS markovskými řetězci je ekvivalentní vývoj rizika od prvního období s vývojem rizika od libovolného období, pokud se nachází v obou případech ve stejném stavu. Toto zjednodušení znamená jen použít jiný startovací stupeň.

Definice 13 (Hlad po bonusu).

Hladem po bonusu nazýváme posloupnost nezáporných čísel (s_1, s_2, \dots) , které představují strategii rizika v jednotlivých obdobích jeho stáří. Pojištěné riziko nahlásí škodu, právě když v období n její velikost překročí s_n .

Označme počet nahlášených škod v n -tém období K_n ($0 \leq K_n \leq M_n$) a $Y'_{n1}, \dots, Y'_{nK_n}$ velikosti K_n největších škod z původních Y_{n1}, \dots, Y_{nM_n} (navíc klademe $Y'_{n0} \equiv 0$).

DŮSLEDKY 1: Platí, že

- (i) Y'_{nj} ($n, j \geq 1$) jsou nezávislé a mají distribuční funkci (mějme dáno n)

$$G'(y) = \frac{G(y) - G(s_n)}{1 - G(s_n)}$$

pro $y > s_n$ a 0 jinak. Navíc jsou nezávislé na $(\Theta, K_1, K_2, \dots)$.

- (ii) Pravděpodobnost, že škoda přesáhne y je $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$. Označme

$$\Psi(s) = \int_s^\infty y dG(y),$$

potom

$$E Y'_{nj} = \frac{\Psi(s_n)}{\bar{G}(s_n)}$$

pro $n, j \geq 1$.

- (iii) Pro dané $M_n = m$ má $K_n \sim \text{Bi}(m, \bar{G}(s_n))$ bez ohledu na hodnotu Θ . Tedy

$$\begin{aligned} E[K_n | M_n = m] &= \bar{G}(s_n)m, \\ E K_n &= \bar{G}(s_n) E M_n \quad \text{a} \\ E_\Theta K_n &= \bar{G}(s_n) E_\Theta M_n. \end{aligned}$$

(iv) Je-li $M_n|\Theta = \theta \sim \text{Po}(\theta)$, je rozdělení $K_n|\Theta = \theta \sim \text{Po}(\theta\overline{G}(s_n))$. A pokud navíc $\Theta \sim \Gamma(h, \tau)$, je $\Theta\overline{G}(s_n) \sim \Gamma(h, \tau/\overline{G}(s_n))$

Předpokládejme, že (s_1, s_2, \dots) jsou pevně daná známá čísla. Definujme sazbovací základnu

$$Z_n = (K_1, \dots, K_{n-1}).$$

Redukce historie pouze na počty škod je za daných předpokladů oprávněná, neboť

$$\mathbb{E}[X_n|Z_n] = \mathbb{E}[K_n|K_1, \dots, K_{n-1}] \frac{\Psi(s_n)}{\overline{G}(s_n)}.$$

Vliv na škodní frekvenci je tedy takový, že se ŠF sníží vynásobením pravděpodobností, že škoda bude překračovat s_n , což je v souladu s přirozeným očekáváním. Navíc to znamená, že je možné rozvíjet teorii bez hladu po bonusu a pak ji jen zmodifikovat použitím jiné škodní frekvence, počítáme-li BMS pro jednu konkrétní hodnotu rizikového parametru nebo dokonce jen zmodifikovat rozdělení rizikového parametru, viz důsledky 1.

Příklad 3.1

Zvolme $s_1 = s_2 = \dots = 0$. Potom $\overline{G}(s_n) = 1$, $\Psi(s_n) = \mathbb{E}Y$, $\Phi(s_n) = 1$ a

$$\mu_n(K_1, \dots, K_{n-1}) = \mathbb{E}Y \left(\frac{n-1}{n-1+\kappa} \overline{K_{n-1}} + \frac{\kappa}{n-1+\kappa} \mathbb{E}M \right),$$

kde $\overline{K_{n-1}} = \sum K_j / (n-1)$. Dostáváme klasickou kredibilitní formuli (viz Norberg (1975)) pro pojistné bez uvažování hladu po bonusu, kde

$$\kappa = \frac{\mathbb{E} \text{var}_{\Theta} [M]}{\text{var} \mathbb{E}_{\Theta} M}.$$

Vzhledem k předpokladu znalosti strategie (s_1, s_2, \dots) pojistitelem a její shodnosti pro každé individuální riziko má model poněkud teoretický význam. Jako možné řešení se jeví zveřejnění hodnot s_j pojistitelem. S těmito hodnotami může počítat jak pojistitel tak klient. Jde o deklaraci jakési „návodné“ spoluúčasti. Lemaire (1995) píše přímo o praxi v Německu, kde se zákonem požaduje, aby pojistitel do určité výše škody informoval pojistníka o možnosti proplatit škodu a tím si zachovat bonus.

Pozorovaná data jsou ovlivněna hladem po bonusu. Pro optimální retenci by mělo stačit brát v úvahu škody na věci, škoda na zdraví bude těžko někdy tak malá, aby ji pojistník finančně unesl. Výpočet optimální retence je vždy kompromisem mezi složitostí modelu a výpočetními možnostmi.

Příklad 3.2 (Hlad po bonus a klasický BMS)

Uveďme velmi jednoduchý ilustrativní příklad stejně jako ve Šváb (2002b). Uvažujeme klasický BMS definovaný v dodatku A pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$, tj. za každou škodu dva stupně do malusu a za každé bezeškodní období jeden stupeň nahoru do bonusu. Matice přechodu v případě bez hladu po bonusu je potom

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta} & e^{-\theta} & 0 \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & e^{-\theta} \\ 1 - e^{-\theta} & 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Pro účely demonstrace dále předpokládáme, že $Y_{nj} \sim \text{Exp}(1)$. Potom je matice přechodu pro n -té období při strategii (s_1, s_2, \dots)

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta e^{-s_n}} & e^{-\theta e^{-s_n}} & 0 \\ 1 - e^{-\theta e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta e^{-s_n}} \\ 1 - e^{-\theta e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

Pro praktické výpočty je důležité, že právě při známých s_n není třeba mnoho modifikovat výpočet používaný pro BMS bez uvažování hladu po bonusu.

Kapitola 4

Optimální BMS

V této kapitole se budeme nejprve zabývat kritérii pro výběr pravidel BMS (tedy sazbovací základny) a následně k vybraným pravidlům budeme optimalizovat sazbovací funkce.

4.1 Optimalizace pravidel

Ze zkoumaných ukazatelů charakterizujících BMS jsou na sazbovací funkci nezávislé jen celková variace (TV) a míra konvergence ($ROC_{S,\theta}$), a proto se je pokusíme využít pro nezávislé hodnocení pravidel BMS.

Pokud si zafixujeme určitá pravidla BMS, máme stále ještě na výběr z několika sazbovacích základen. Pro jednotlivé období t základnu Z_{N_t} , kterou bychom v praxi použili jen těžko, neboť je třeba garantovat neměnnost relativní sazbovací funkce $a_t(j)/a_t(k_t)$ alespoň několik období. To můžeme dosáhnout buď základnou Z_{N_Ω} , která je váženým průměrem přes jednotlivá období stáří systému, nebo pomocí jedné z asymptotických základen $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ pro uzavřené nebo otevřené portfolio.

První strategií, kterou prozkoumáme, je najít rychle konvergující BMS, kdy pojistitel nějak „přežije“ několik počátečních období a rychle se dostane do těsné blízkosti limity portfolia resp. sazbovací základny. A tedy bude oprávněně takovou sazbovací základnu použít pro napočtení BMS.

4.1.1 Optimalizace pravidel při asymptotické sazbovací základně

Pokusme se tedy najít co nejrychleji konvergující BMS. Rychlost konvergence můžeme měřit pomocí $ROC_{S,\theta}$. Jenže v praxi nás bude spíše zajímat počet let než se BMS dostane do nějakého „hezkého“ stavu. Navíc $ROC_{S,\theta}$ nebere v úvahu počáteční stupeň k , což ale má pro prvních několik období obrovský význam. $ROC_{S,\theta}$ je z tohoto hlediska měřítkem konvergence až po uplynutí mnoha období. „Hezkým“ stavem můžeme rozumět pokles $TV_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}(n)$ pod určitou úroveň.

Základem rychlé konvergence sazbovací základny Z_{N_t} pro $t \rightarrow \infty$ je rychlá konvergence Z_n pro $n \rightarrow \infty$, neboť rychlost konvergence pravděpodobností $w_n(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ lze ovlivnit jen

ztěžka, nepřímo a s nejistým výsledkem. Proto se zaměříme na uzavřené portfolio a ukazatele $TV_{S,\theta,u}^{(\infty)}(n)$ a $ROC_{S,\theta}$.

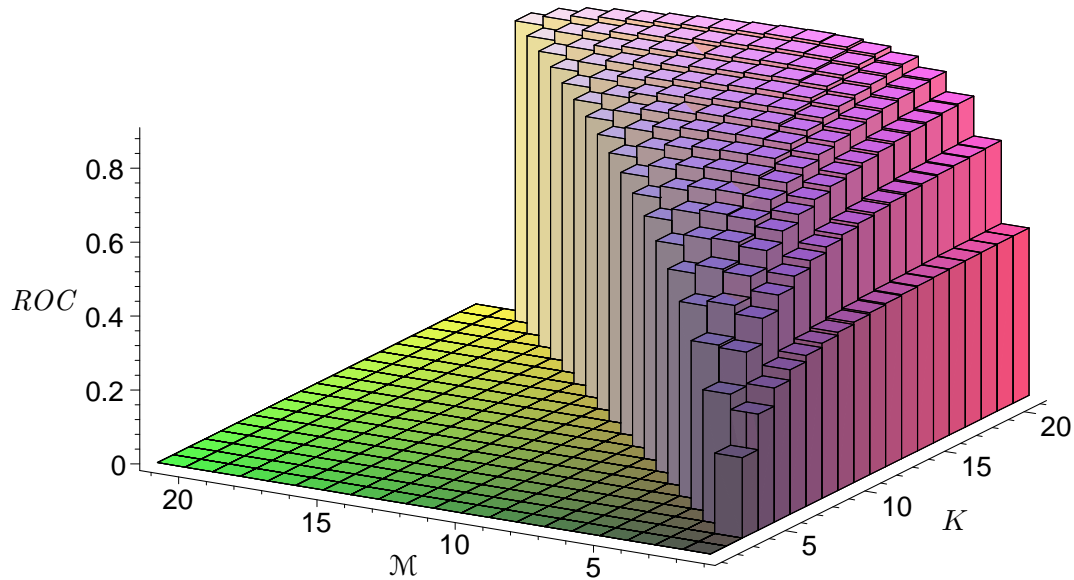
V tuto chvíli máme ambici napočítat mnoho BMS a z tohoto hlediska je porovnat. Kritérium si proto zjednodušíme a budeme hledat první rok, kdy $TV_{S,\theta,u}^{(\infty)}(n)$ poklesne pod požadovanou úroveň bez ohledu na to, zda později ještě vzroste. Za těchto okolností by pak byl BMS napočten pomocí asymptotického Norbergova rizika a měříme dobu přiblížení se k tomuto asymptotickému stavu.

Uvažujme BMS modelovaný pomocí markovských řetězců popsáný v dodatku A. Takový BMS je plně určen čtveřicí $(K, \mathcal{B}, \mathcal{M}, k)$, kde K je počet stavů, počet stupňů za každou škodu označujeme \mathcal{M} , počet stupňů za bezeškodní období \mathcal{B} a k je počáteční stupeň. Množinu zkoumaných systémů si vymežíme hranicemi uvedenými v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Vymezení zkoumaných BMS

parametr	rozpětí
K	$2, \dots, 20$
\mathcal{B}	1
\mathcal{M}	$1, \dots, K - 1$
k	$1, \dots, K$

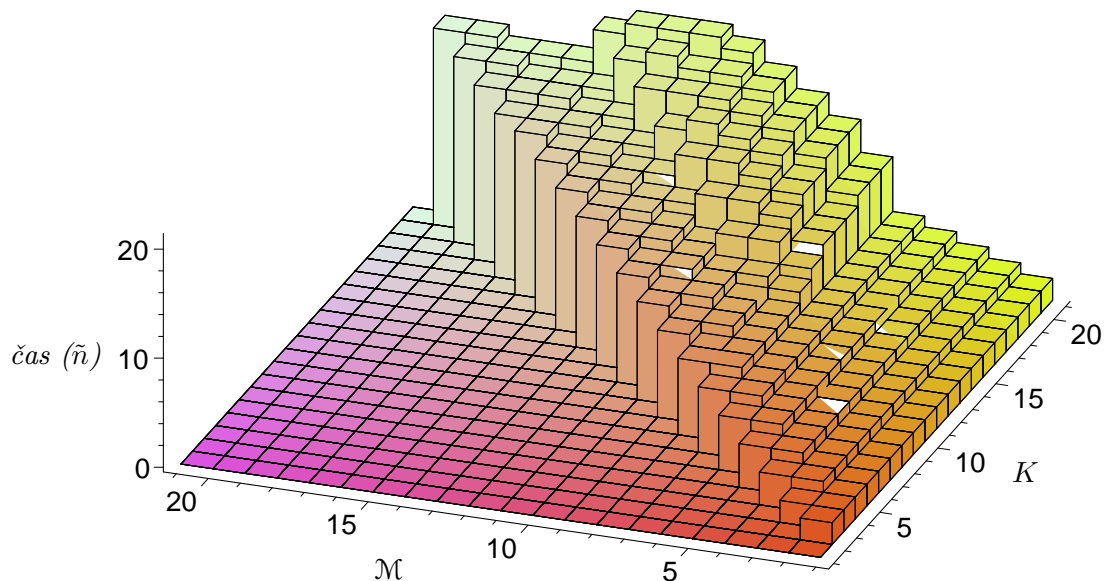
Dodejme, že výpočty jsou provedeny pro průměrnou škodní frekvenci, tj. $\theta = E\Theta$ a jako hranici bereme $\varepsilon = 0.1$. Výsledné míry konvergence $ROC_{S,\theta}$ jsou na grafu 4.1.



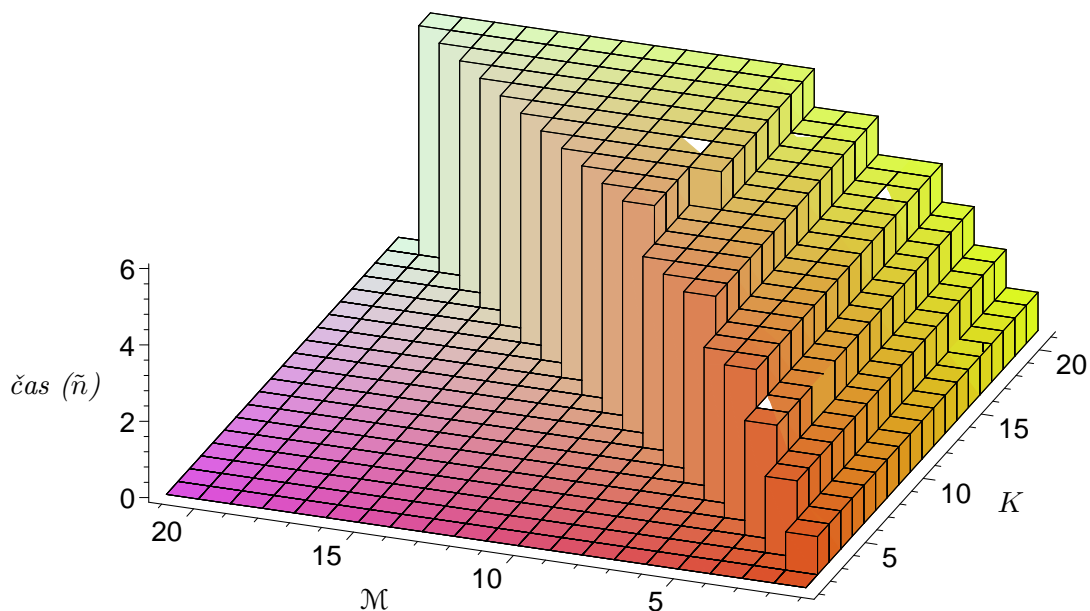
Graf 4.1: Na grafu vidíme v absolutní hodnotě druhé nejvyšší vlastní číslo matice přechodu, která je vytvořena pro BMS určený trojicí $(K, 1, \mathcal{M})$. Intuitivně je vidět, že pro $\mathcal{M} = K - 1$ máme konvergenci s $ROC_{S,\theta} = 0$, což znamená od určitého období rovnost asymptotickému stavu. To jsme již mohli vidět pro Keňský BMS, viz graf 2.11.

Nejlepší řešení bez dalších omezení

Na grafech 4.2 pro uzavřené a 4.3 pro otevřené portfolio si nyní ukažme počet období pro kombinace K a \mathcal{M} a s nevhodnějším k . Při shodnosti počtu let volíme k co nejnižší.



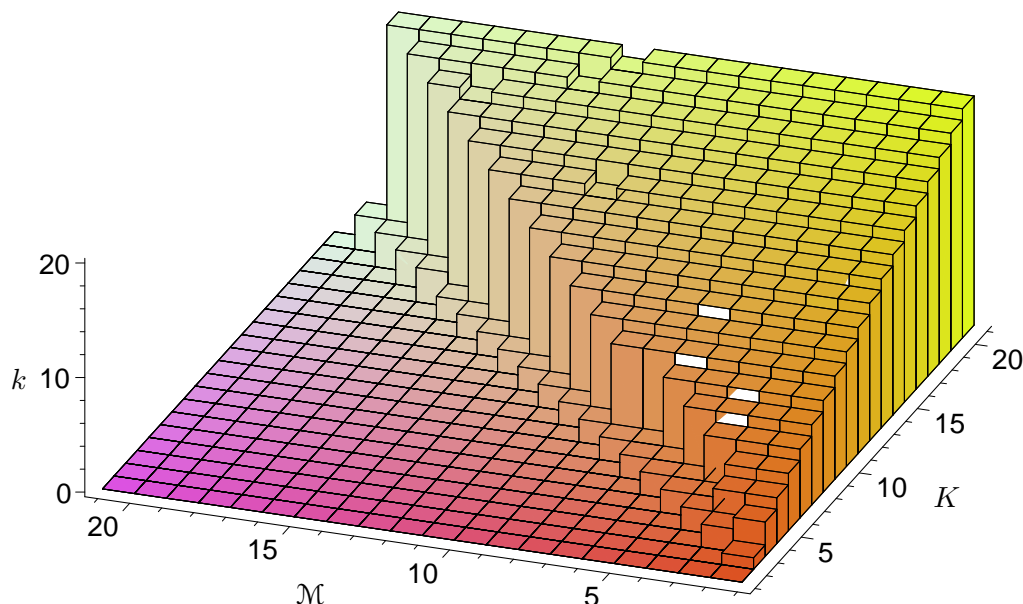
Graf 4.2: Čas uvedený na grafu vyjadřuje takové \tilde{n} , pro které je $TV_{S,\theta,U}^{(\infty)}(\tilde{n}) \leq \varepsilon$ a pro $n < \tilde{n}$ je $TV_{S,\theta,U}^{(\infty)}(n) > \varepsilon = 10\%$.



Graf 4.3: Graf analogický ke grafu 4.2, s počtem let \tilde{n} do poklesu $TV_{S,\theta,U}^{(\infty)}(n)$ pod $\varepsilon = 10\%$ pro nevhodnějším startovací stupeň k pro každou kombinaci K a \mathcal{M} při **otevřeném portfolio**.

Problémem pro použitelnost v praxi je, že až na $\mathcal{M} = K - 1$ máme nejrychlejší konvergenci, když je startovací stupeň roven K . Pro $\mathcal{M} = K - 1$ je pak nejlepší volbou $k = 2$ viz graf 4.4.

Při dalším snížení \mathcal{M} o jedna je volba $k = 2$ až druhou nejlepší volbou. Při dalším snižování \mathcal{M} až třetí, čtvrtou atd. Úsudek, který vede ke stejnému závěru, je následující. Většina rizik je dobrých a škodu mít nebude, a proto uděláme menší chybu, když budeme u všech rizik předpokládat, že jsou dobrá a ta, co nejsou, dostanou v následujících obdobích přírážku, než naopak. Máme tedy rozpor mezi teorií a praxí. V zemích, kde není vynutitelný malus a existuje tzv. bonusová turistika, nelze přijmout tento teoretický výsledek a aplikovat jej v praxi, zde jej však použijeme (navíc je dobrá vyhlídka, že by v ČR mohla vynutitelnost malusů fungovat).



Graf 4.4: Graf ukazuje nejlepší volbu k pro všechny kombinace K a \mathcal{M} . Pro uzavřené portfolio.

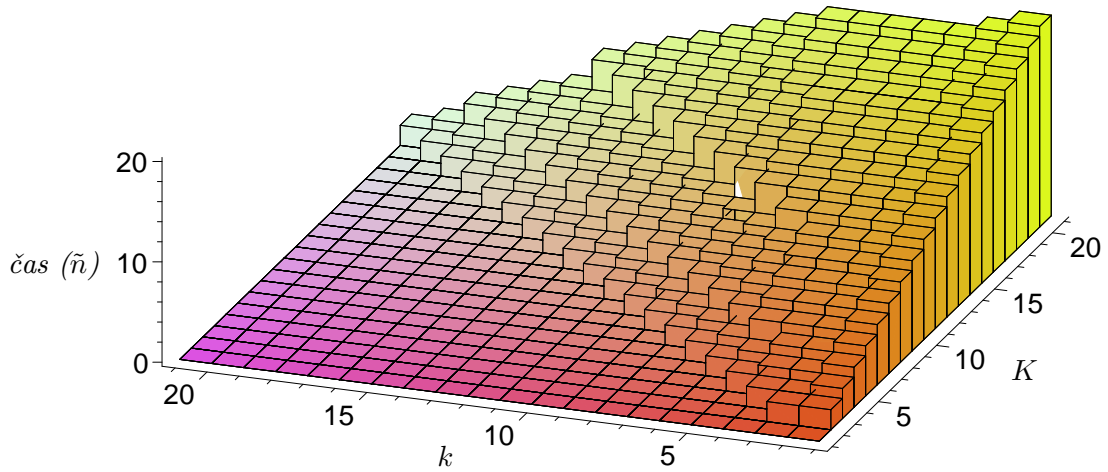
Dále se podíváme na volbu \mathcal{M} pro všechny kombinace K a k . Nejprve uvádíme čas poklesu (graf 4.5) a následně na grafu 4.6 i nejlepší volbu \mathcal{M} odpovídající uvedenému času.

Nejlepší řešení při omezení na startovací stupeň

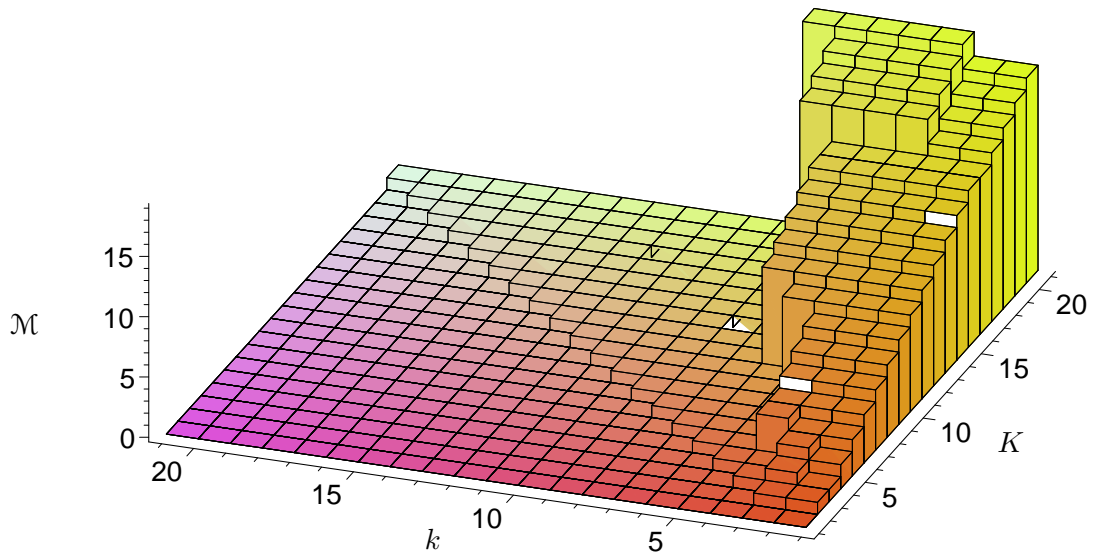
Výsledkem předchozího zkoumání bylo, že vybereme-li jakýkoliv počet stupňů K , tak k tomuto výběru je nejlepší vzít $k = K$ a skok do malusu o jeden stupeň za každou škodu. Vzhledem ke spornému využití v praxi, zafixujeme jeden z parametrů. Startovací stupeň k budeme volit v horní části stupnice, jak je v praxi obvyklé. Možný výsledek najdeme na grafu 4.7 a to pro $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$.

Analogický intuitivní závěr je, že pokud umístíme startovací stupeň někam výše, tak s rostoucím počtem stupňů K roste i část potřebný pro pokles $TV_{S,\theta,U}^{(\infty)}(n)$ pod ε . Důvod je zase založený na tom, že správné umístění většiny rizik je v nejlepším bonusu a čím dříve tam doputuje tím lépe. Vysvětluje to také, proč graf 4.2 pro malá \mathcal{M} na K nezávisí a graf 4.7 ano. Vhodné volby počtu stupňů skoku do malusu jsou potom naopak zase co nejvyšší.

Resumé: Máme tedy jednoduché pravidlo — při velkém k volíme $\mathcal{M} = 1$ a při malém



Graf 4.5: Graf zobrazuje čas poklesu $TV_{S,\theta,U}^{(\infty)}(n)$ pod ε pro kombinace K a k . Při shodnosti časů se volí nejnižší hodnota \mathcal{M} .



Graf 4.6: Zobrazení nejlepších voleb \mathcal{M} . Lze očekávat, že „skok“ v grafu nalezneme i pro jiné hodnoty ε .

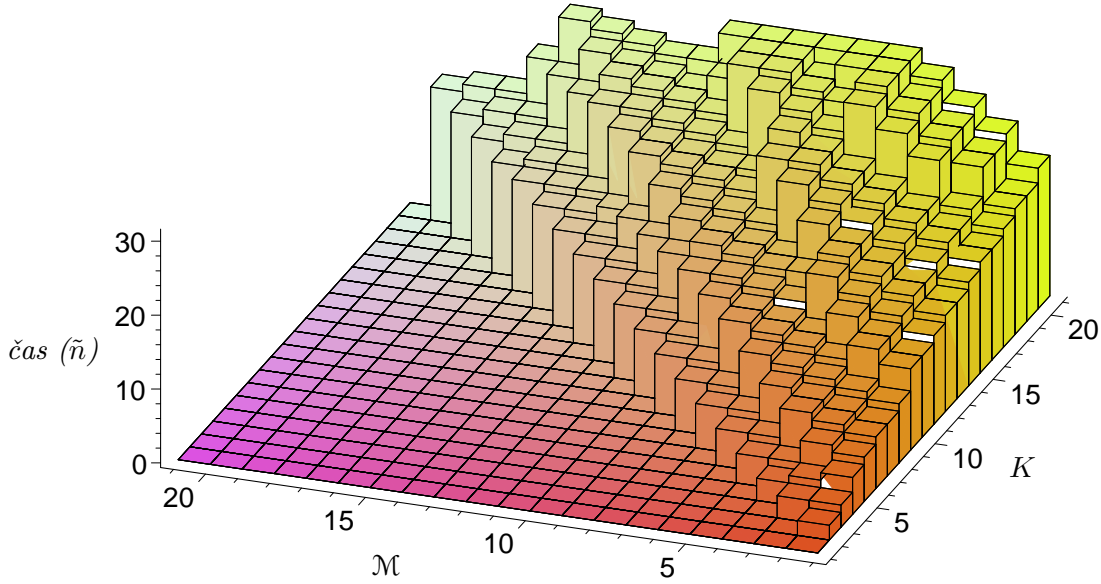
k volíme velké \mathcal{M} .

Uvedené závěry plynou z použité hrubé výpočetní síly a jsou to tedy hypotézy, nikoliv dokázaná tvrzení.

4.1.2 Optimalizace pravidel při sazbovací základně Z_{N_Ω}

Zde máme dvě možnosti měření celkové variace. První je porovnání individuálního rizika s průměrným stavem přes všechna období stáří portfolia

$$TV_{S,\theta,\mathcal{F}}(n) = \sum_{j \in \mathcal{K}} |\mathbb{P}_\theta(Z_n = j) - \mathbb{P}_\theta(Z_{N_\Omega} = j)|.$$



Graf 4.7: Srovnaj s grafem 4.2, kde je $k = K$. Zde máme $k = \lceil \frac{K}{3} \rceil$.

Další možnost je zkoumat rozpětí mezi Z_{N_t} a Z_{N_Ω} a tím se dostáváme k celkové variaci typu

$$\overline{TV}_{S,\theta,\mathcal{F}}(t) = \sum_{j \in \mathcal{K}} |\mathbb{P}_\theta(Z_{N_t} = j) - \mathbb{P}_\theta(Z_{N_\Omega} = j)|.$$

Na grafu 4.8 je jednak porovnání obou zmíněných a jednak srovnání různé volby vah ω_t .

V tuto chvíli bychom opět mohli použít metodu hrubé výpočetní síly a hledat vzhledem k uvedeným celkovým variacím optimální pravidla pro BMS, ale domnívám se, že bychom dospěli k podobným výsledkům jako v oddíle 4.1.1. Výsledky by pravděpodobně byly hodně závislé na volbě vah.

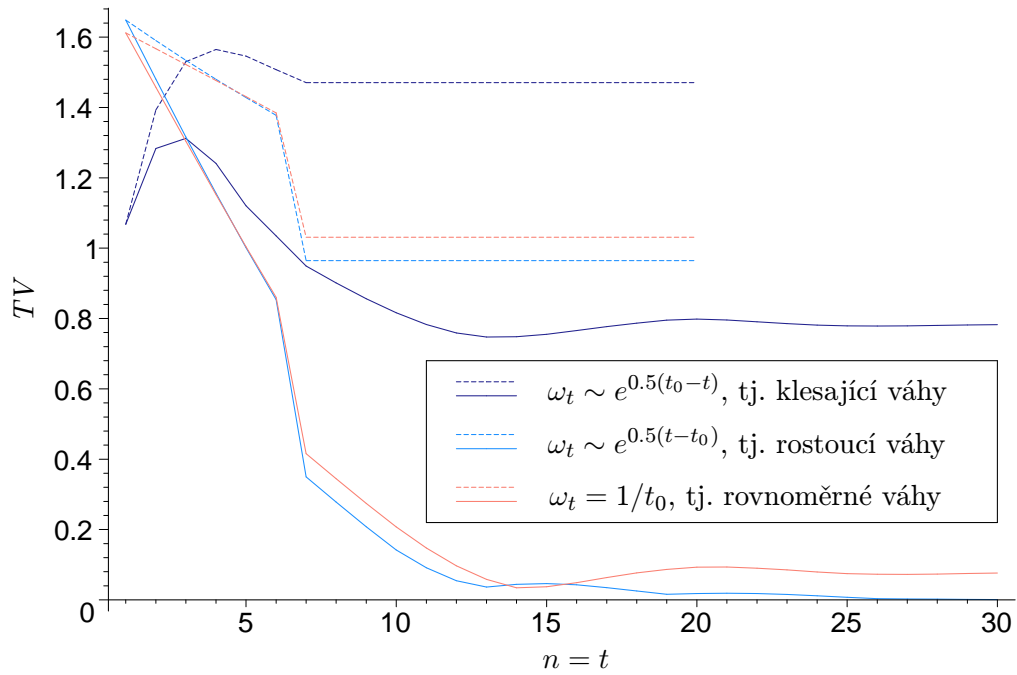
Užitečnost tohoto oddílu tedy vidím v zobrazení vlivu volby vah a možnosti jejich intuitivní optimalizace v souladu s preferencemi pojistitele, pokud by jako sazbovací základnu volil Z_{N_Ω} .

4.1.3 Volba konkrétní sazbovací základny (pravidel BMS)

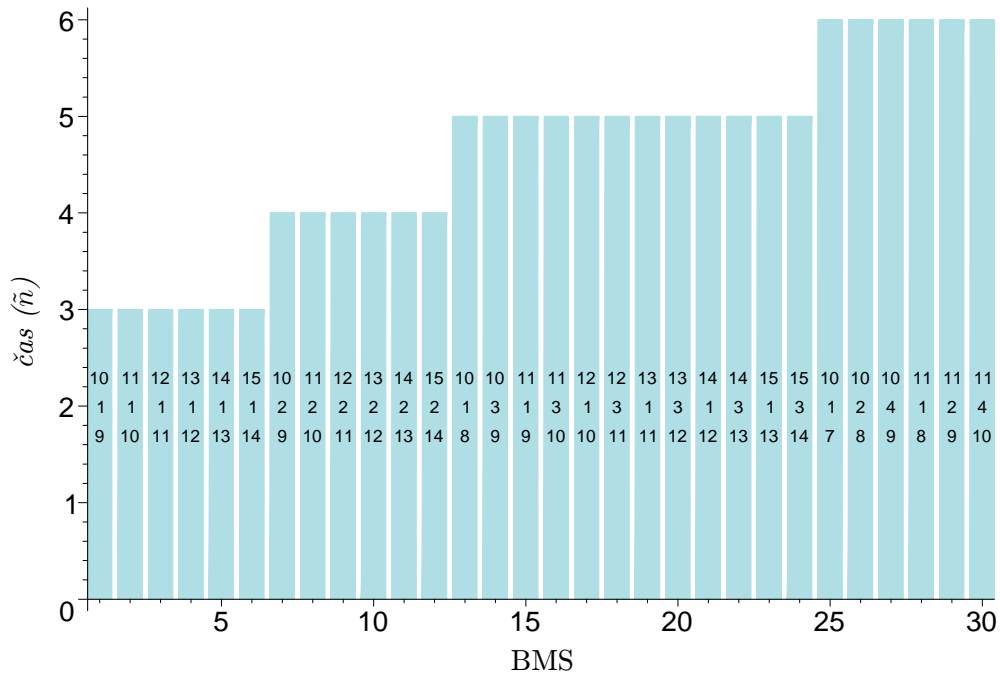
Nyní se pokusíme zvolit pravidla BMS, která budou kompromisem mezi teorií a praxí. Na grafu 4.6 vidíme, že v hodnotách k je ostrá hranice mezi tím, kdy je optimální \mathcal{M} poměrně vysoké a tím, kdy je rovno 1. Již jsme zjistili, že čím nižší k (blíže největším bonusům), tím lépe.

Nechceme mít rovnost $k = K$, počáteční stupeň bude někde výše. Z grafu 4.7 vidíme, že čím větší K , tím delší dobu na pokles celkové variace potřebujeme. Není myslitelné mít skok do malusu větší než 4 (například z důvodů tržního prostředí). Podívejme se proto na BMS pro $K = 10, \dots, 15$ a malusy $1, \dots, 4$. Na grafu 4.9 je uvedeno 30 nejlepších BMS za těchto omezení.

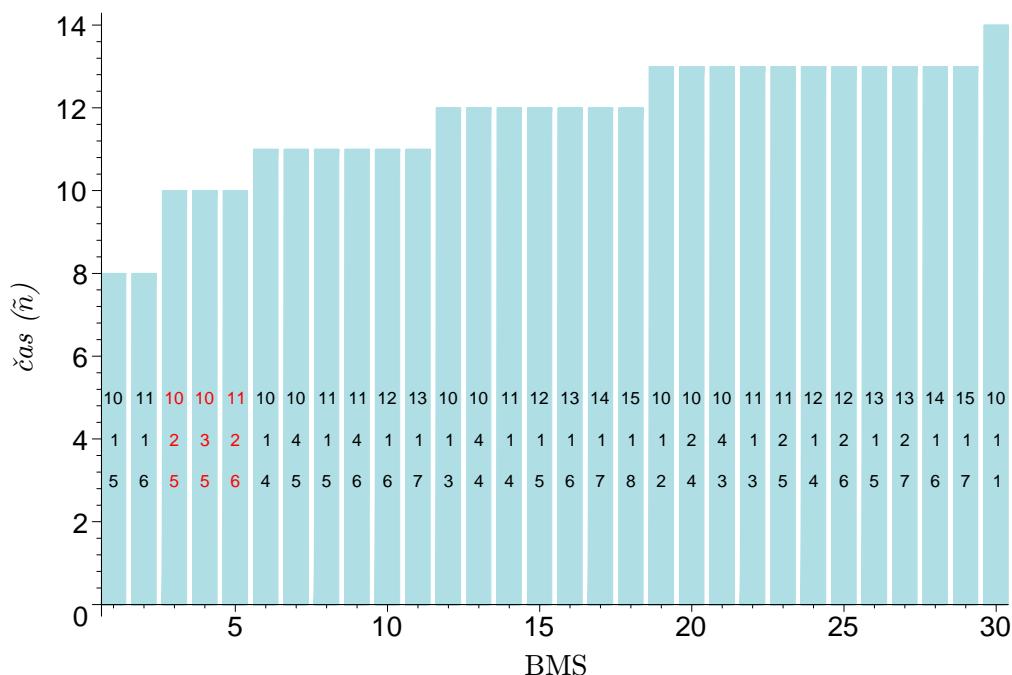
V grafu 4.10 se navíc omezíme na takové počáteční stupně, které jsou v horní polovině škály.



Graf 4.8: Na grafu je plnou čarou uvedena celková variace $\overline{TV}_{S,\theta,\Theta}(t)$ a přerušovanou $TV_{S,\theta,\Theta}(n)$. Je zřejmé, že pokud se zvolí větší váha pro počáteční období, snížíme celkovou variaci na počátku, ale dostaneme daleko vyšší na konci a naopak. Alternativní váhy byly volené úměrné exponenciálnímu růstu nebo poklesu ($\Theta = h/\tau$, Keňský BMS).



Graf 4.9: Zobrazení nejlepších voleb pravidel při omezení se na $K = 10, \dots, 15$, $\mathcal{M} = 1, \dots, 4$, ale bez omezení na startovací stupeň k . Parametry jsou vyneseny v každém sloupci pod sebou v pořadí K, \mathcal{M}, k .



Graf 4.10: Dále se omezme na v praxi používanou podmínku, že startovací stupeň je poměrně daleko od nejlepšího bonusu, matematicky podmínku zapíšeme jako $k \leq \left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil$

Zejména na základě aktuárského úsudku pro další optimalizaci vybíráme jako nejzajímavější následující troje pravidla.

Tabulka 4.2: Vybrané BMS

K	\mathcal{M}	k
10	2	5
10	3	5
11	2	6

4.2 Optimalizace sazbovací funkce

V této části vyjdeme z výsledků Norberg (1976) a sazbovací základnu považujeme za danou, konkrétně například BMS popsané v oddíle 4.1.3 v tabulce 4.2.

TVRZENÍ 2: Pro každý BMS S máme

$$Q_{S, \mathcal{F}_t}^{(t)(n)} \geq \mathbb{E} \text{var}_{Z_n} [\mathbb{E}_\Theta X_n]$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbb{P}(a_t(Z_n) = \mathbb{E}_{Z_n} \mathbb{E}_\Theta X_n) = 1$.

Důkaz. Podle pravidla iterované střední hodnoty máme $Q_{S, \mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \mathbb{E} \mathbb{E}_{Z_n} (\mathbb{E}_\Theta Z_n - a_t(Z_n))^2$.

Ve vnitřní podmíněné střední hodnotě použijeme pravidlo $\mathbb{E}[W - c]^2 = \text{var } W + (\mathbb{E}W - c)^2$ platící pro každou n . v. W a konstantu c .

Potom máme

$$Q_{S, \mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \mathbb{E} \operatorname{var}_{Z_n} [\mathbb{E}_\Theta X_n] + \mathbb{E} [\mathbb{E}_{Z_n} \mathbb{E}_\Theta X_n - a_t(Z_n)]^2,$$

což dokazuje vše. \square

Můžeme tedy definovat optimální sazbovací funkci.

Definice 14 (Bayesovská sazbovací funkce).

Mějme sazbovací základnu Z_n a portfolio \mathcal{F} , potom za **Bayesovskou sazbovací funkci pro čas portfolia t** označíme

$$\operatorname{bay}_{\mathcal{F}_t}^{(t)}(j) = \mathbb{E} [\mathbb{E}_\Theta X_{N_t} | Z_{N_t} = j]$$

pro $j \in \mathcal{K}_t$. *Systém bonus malus*

$$\left(\{Z_n\}_{n=1}^\infty, \left\{ \operatorname{bay}_{\mathcal{F}_t}^{(t)} \right\}_{t=1}^\infty \right)$$

tvoreň sazbovací základnou Z_n a odvozenou bayesovskou sazbovací funkcí $\operatorname{bay}_{\mathcal{F}_t}^{(t)}(j)$ nazveme **bayesovský BMS**.

Další varianty shrnuje tabulka 4.3. Norbergův přístup najdeme ve třetím řádku, při uzavřeném portfoliu, nebo jako limitní otevřené portfolio v řádku čtvrtém. Asymptotický Norbergův přístup pak je ekvivalentní zápisu ve čtvrtém řádku při uzavřeném portfoliu.

V případě posledních dvou řádků je výsledkem v čase neměnná sazbovací funkce, jinak je závislá buď na čase portfolia t nebo na čase rizika n . Přesazbování v čase t automaticky zajišťuje finanční rovnováhu každý rok (při druhém řádku tabulky a otevřeném portfoliu nebo při prvním řádku tabulky a uzavřeném portfoliu), neboť například pro otevřené portfolio je

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E}_{Z_{N_t}} \mathbb{E}_\Theta X_{N_t} \right] = \mathbb{E}_\Theta X_{N_t}.$$

Tabulka 4.3: Bayesovské sazbovací funkce

\sum_n	$\operatorname{bay}^{(n)}(j) = \mathbb{E} [\mathbb{E}_\Theta X_n Z_n = j]$
\sum_t	$\operatorname{bay}_{\mathcal{F}_t}^{(t)}(j) = \mathbb{E} [\mathbb{E}_\Theta X_{N_t} Z_{N_t} = j]$
$t \rightarrow \infty$	$\operatorname{bay}_{\mathcal{F}}(j) = \mathbb{E} [\mathbb{E}_\Theta X_{N_\Omega} Z_{N_\Omega} = j]$
	$\operatorname{bay}_{\mathcal{F}}^{(\infty)}(j) = \mathbb{E} [\mathbb{E}_\Theta X Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j]$

Následující úvaha je přímým důsledkem tvrzení 2. Mějme bayesovský BMS zavedený v tabulce 4.3 v prvním řádku $S^B = \left(\{Z_n\}_{n=1}^\infty, \left\{ \operatorname{bay}^{(n)} \right\}_{n=1}^\infty \right)$. Lze snadno ukázat (viz také

Norberg (1976)), že čím vyšší eficeince je, tím nižší je Norbergovo riziko, neboť

$$\begin{aligned} \text{var} [E_{\Theta} X_n] &= \text{var} [E_{Z_n} E_{\Theta} X_n] + E [\text{var}_{Z_n} [E_{\Theta} X_n]] = \\ &= \text{var} [bay^{(n)}(Z_n)] + Q_{S^B}^{(t)(n)} = \\ &= E [bay^{(n)}(Z_n)]^2 - \left(E [bay^{(n)}(Z_n)] \right)^2 + Q_{S^B}^{(t)(n)} = \\ &= e_{S^B}^{(t)(n)} - (E X_n)^2 + Q_{S^B}^{(t)(n)}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že součet $e_{S^B}^{(t)(n)}$ a $Q_{S^B}^{(t)(n)}$ je nezávislý na sazbovací základně Z_n . A odtud plyne, že pro dvě sazbovací základny Z_n a \tilde{Z}_n resp. příslušné BMS S^B a \tilde{S}^B s bayesovskou sazbovací funkcí odvozenou z těchto základen platí, že

$$Q_{S^B}^{(t)(n)} < Q_{\tilde{S}^B}^{(t)(n)} \iff e_{S^B}^{(t)(n)} > e_{\tilde{S}^B}^{(t)(n)}.$$

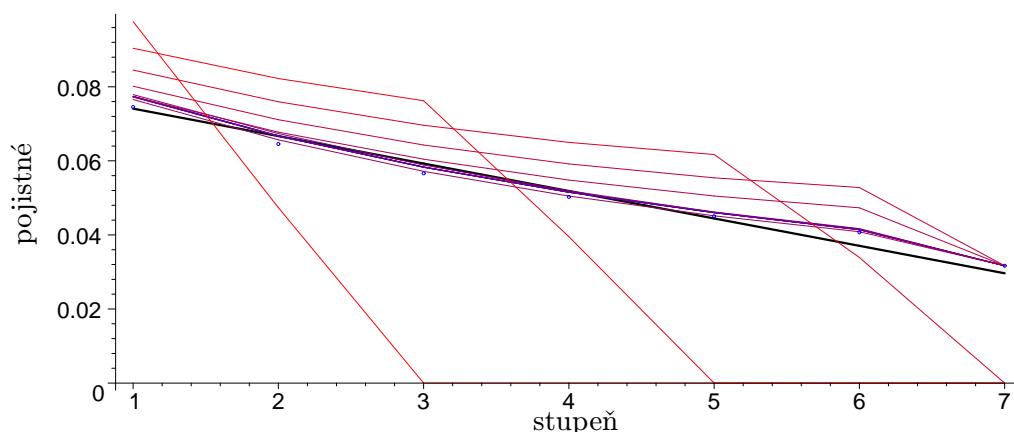
Norberg (1976) v Lemma 2.5 ještě dokazuje, že když je sazbovací základna funkcí jiné sazbovací základny, pak musí být BMS méně eficientní. Je to třeba chápat jako transformaci n. v. Shodné jsou, jen když jsou si bayesovské pojistné obou BMS rovny skoro jistě. Což je ekvivalentně splněno při určité nezávislosti sazbovacích základen viz Lemma 2.8. Na základě toho lze ukázat ekvivalenci sazbovacích základen Ξ a (M_1, \dots, M_n) a nevýhodnost sazbovací základny sestávající jen z historie výší škod.

Další z výsledků uvedených ve zmíněném článku ukazuje, že je-li jeden BMS více eficientní při porovnání svých asymptotických kritérií, pak to platí i pro všechna jednotlivá období n .

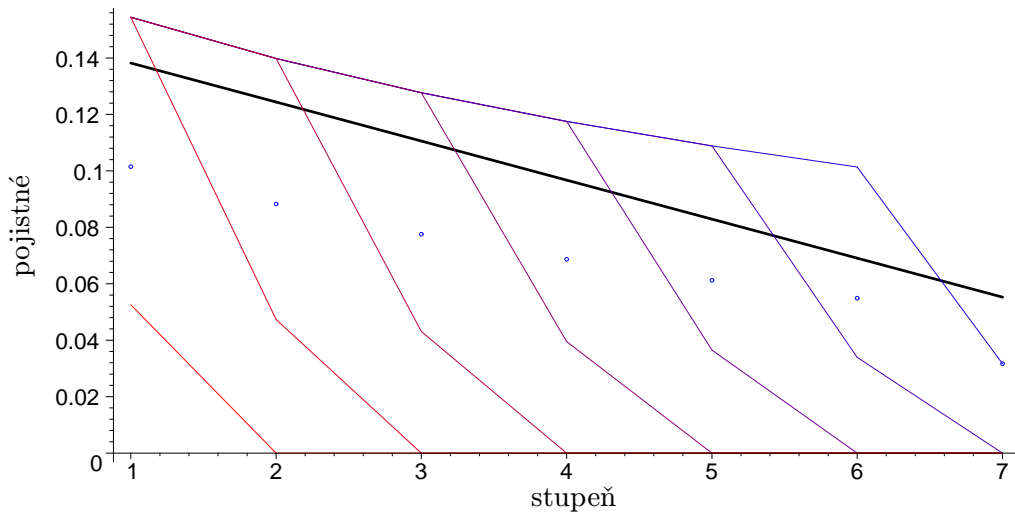
Poznamenejme, že při podmínce na nestrannost odhadu, tj. finanční rovnováhu, tj. podmínka na AL , je optimalizace Q ekvivalentní s optimalizací CV , viz oddíl D.6.

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Pro porovnání nyní uvedme, jaké sazbovací funkce vycházejí v některých časech t s originální danou sazbovací funkcí Keňského systému.



Graf 4.11: Porovnání Bayesovských škál s originální (tučná černá) pro otevřené portfolio. Zde se nejvíe jako špatný nápad udělat váženou sazbovací funkci, neboť poměrně mnoho období je blízko v tom období optimální sazbovací funkci, na rozdíl od grafu 4.12



Graf 4.12: Porovnání bayesovských škál s originální (tučná černá) pro uzavřené portfolio. Povšimněme si, že od sedmého období se již nic nemění a že vážená bayesovská funkce za všechna období (modré kroužky) bude po většinu času (od sedmého dále) zcela nevyhovující.

4.2.1 Předepsaná sazbovací funkce

V praxi je běžné, že sazbovací funkce má nějakou „hezkou“ podobu, například je lineární. Nyní ve stručnosti uvedeme obecně známou teorii, kterou aplikujeme na optimalizaci sazbovací funkce. Pro přehlednost se nyní zdržme konkrétního značení.

Bayesovské pojistné není nijak omezeno sazbovací funkcí. Obecně nemusí být taková škála dokonce nerostoucí a také rozdíly diferencí pojistného mezi jednotlivými stupni bonusu jsou velmi značné. Pro větší přehlednost a srozumitelnost potřebujeme lineární nebo lineárně lomenou škálu. Nabízejí se i jiné funkce, například exponenciální s výraznými rozdíly v pojistném v nejhorsích malusových stupních.

Mějme dánu (sazbovací) funkci $f(j; b_1, \dots, b_p)$ až na její parametry b_1, \dots, b_p . Hledáme tedy hodnotu těchto parametrů tak, aby $Q = E[y - f(x)]^2$ bylo za podmínky $E y = E f(x)$ minimální. Pokud si neklademe žádná omezení na tvar, tak máme řešení $f_{\min}(x) = E[y|x]$. To už jsme vyřešili v oddíle 4.2. Počítejme tedy

$$Q = E[y - f(x)]^2 = \text{var } y - 2 \text{cov}(y, f(x)) + \text{var } f(x) + (E y - E f(x))^2,$$

kde poslední sčítanec je nulový, protože požadujeme nestrannost odhadu.

Lineární sazbovací funkce

Definice 15.

Lineární škála je definována sazbovací funkcí $a_t(j) = a + bj$.

Počítejme

$$Q = \text{var } y - 2a \text{cov}(y, x) + a^2 \text{var } x.$$

Abychom našli minimum, tak zderivujeme podle parametrů a a b a vyřešíme vzhledem k 0

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \operatorname{cov}(y, x) + 2a \operatorname{var} x \implies a = \frac{\operatorname{cov}(y, x)}{\operatorname{var} x}$$

a z podmínky na nestrannost máme

$$b = \mathbb{E} y - \frac{\operatorname{cov}(y, x)}{\operatorname{var} x} \mathbb{E} x$$

a tedy

$$f(x) = ax + b = \mathbb{E} y + \frac{\operatorname{cov}(y, x)}{\operatorname{var} x} (x - \mathbb{E} x)$$

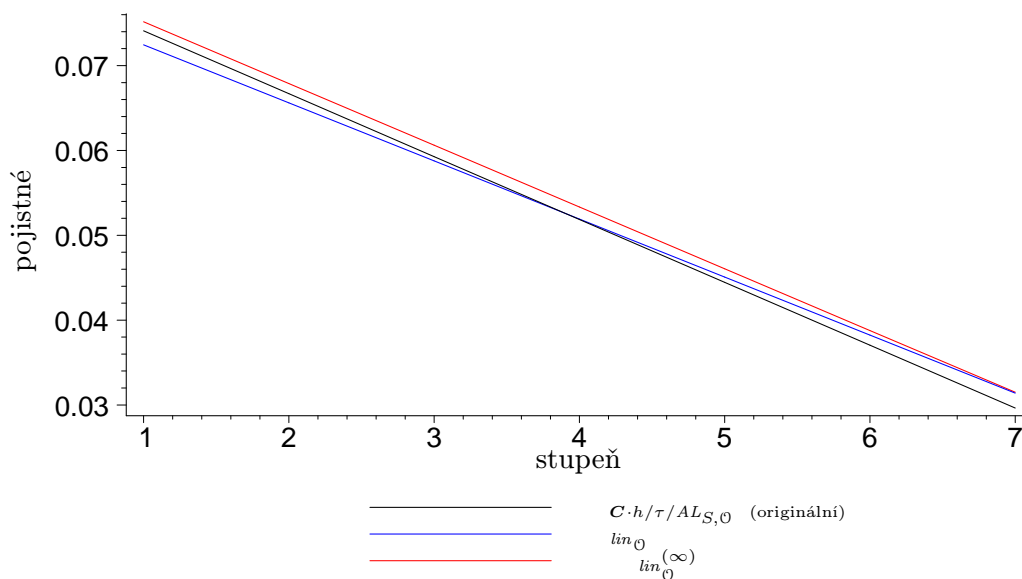
Postupně dosazujeme za x sazbovací základny $Z_n, Z_{N_t}, Z_{N_\Omega}$ a $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ a za y máme $\mathbb{E}_\Theta X_n, \mathbb{E}_\Theta X_{N_t}, \mathbb{E}_\Theta X_{N_\Omega}$ a $\mathbb{E}_\Theta X$. Tyto varianty shrnuje tabulka 4.4.

Tabulka 4.4: Lineární sazbovací funkce

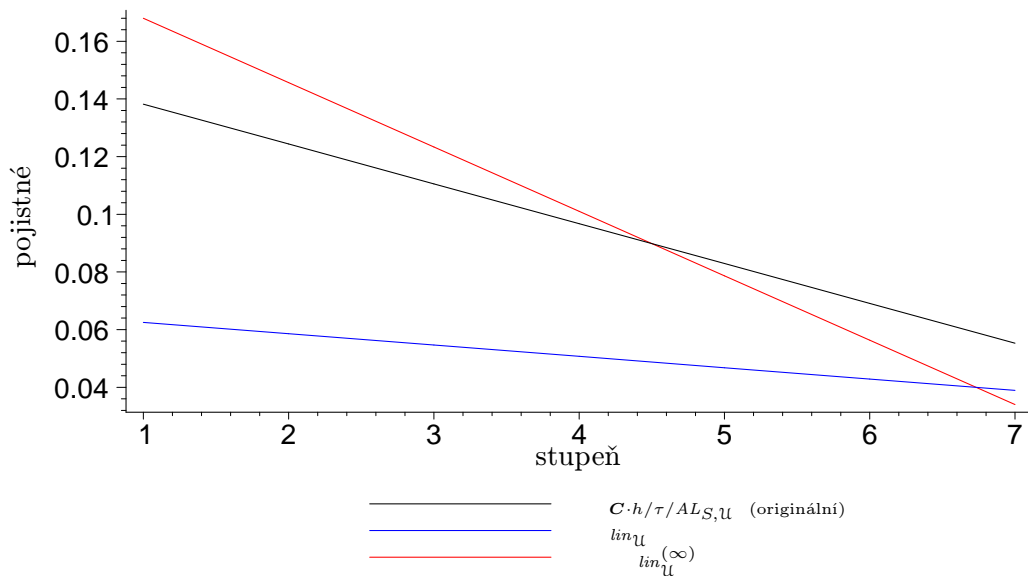
\sum_n	$\operatorname{lin}^{(n)}(j) = \mathbb{E} \mathbb{E}_\Theta X_n + \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{E}_\Theta X_n, Z_n)}{\operatorname{var} Z_n} (j - \mathbb{E} Z_n)$
\sum_t	$\operatorname{lin}_{\mathcal{F}_t}^{(t)}(j) = \mathbb{E} \mathbb{E}_\Theta X_{N_t} + \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{E}_\Theta X_{N_t}, Z_{N_t})}{\operatorname{var} Z_{N_t}} (j - \mathbb{E} Z_{N_t})$
\sum_Ω	$\operatorname{lin}_{\mathcal{F}}(j) = \mathbb{E} \mathbb{E}_\Theta X_{N_\Omega} + \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{E}_\Theta X_{N_\Omega}, Z_{N_\Omega})}{\operatorname{var} Z_{N_\Omega}} (j - \mathbb{E} Z_{N_\Omega})$
$t \rightarrow \infty$	$\operatorname{lin}_{\mathcal{F}}^{(\infty)}(j) = \mathbb{E} \mathbb{E}_\Theta X + \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{E}_\Theta X, Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})}{\operatorname{var} Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}} (j - \mathbb{E} Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})$

Pokračování příkladu 2.1 — Keňský BMS

Nyní nebudeme jen porovnávat lineární a původní škálu, ale spíše porovnáme škály v čase neměnné, tedy asymptotické a vážené vahami pro jednotlivé období stáří portfolia.



Graf 4.13: Lineární škály na otevřeném portfoliu.



Graf 4.14: Lineární škály na uzavřeném portfoliu

Další sazbovací funkce

Definice lineárně lomené škály je vhodná taková, aby byl zlom ve startovacím stupni k . Právě taková škála se nejčastěji blíží praxi. Z 24 popsanych systémů v Lemaire (1995) jsou 4 lineární (ty mají většinou malý počet stupňů a vyskytují se v exotičtějším zemích), 8 přibližně lineárně lomených a ze zbylých by se nejméně polovina dala dobře proložit exponenciální funkcí, která má z praktického pohledu k lineárně lomené blízko. Případných zlomů můžeme uvažovat i více.

Definice 16.

Sazbovací funkce:

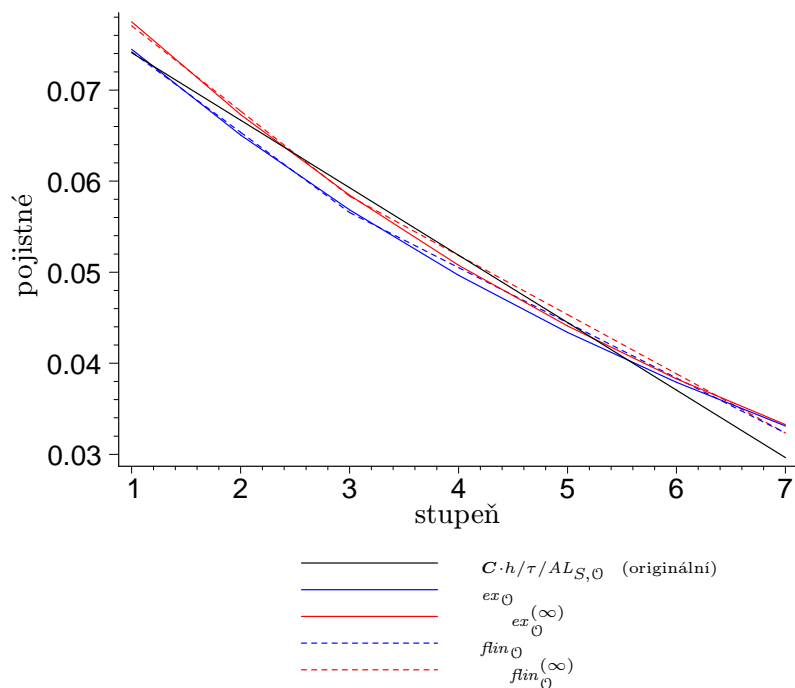
(i) **Lineárně lomená škála** je definována sazbovací funkcí

$$a_n(j) = \begin{cases} (k - j)a + b, & j \leq k \\ (k - j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

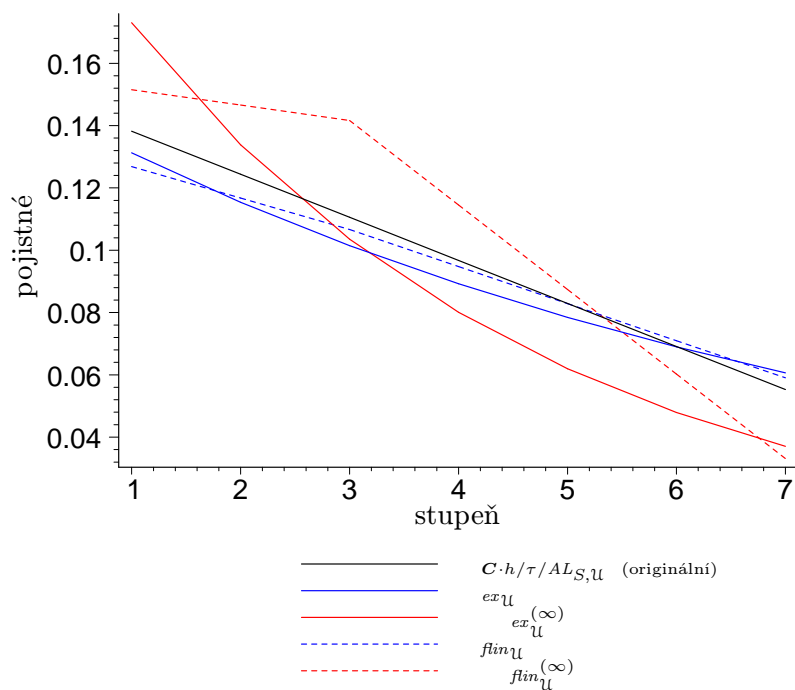
(ii) **Exponenciální škála** je definována sazbovací funkcí $a_n(j) = \exp(a + bj)$.

Příklad 4.1 (Další sazbovací funkce)

Na příkladu si ukážeme další možné sazbovací funkce. K těm předešlým přidáme lineární lomenou a exponenciální sazbovací funkci.



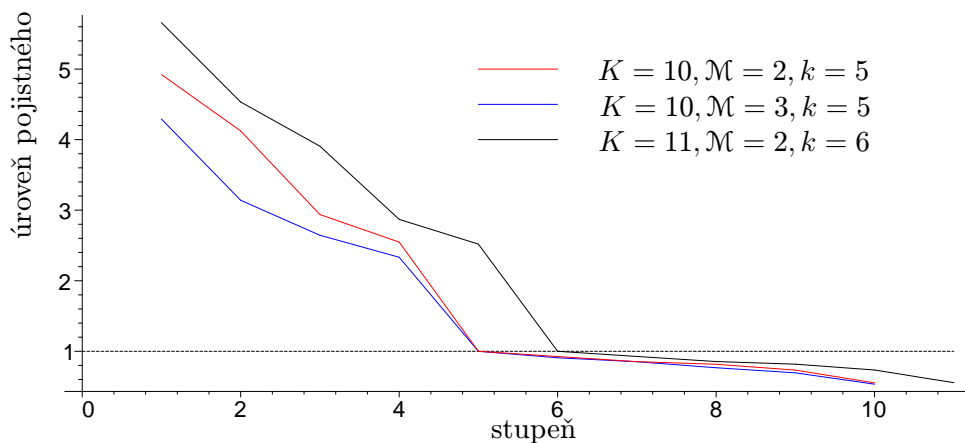
Graf 4.15: Lineárně lomené a exponenciální škály na otevřeném portfoliu



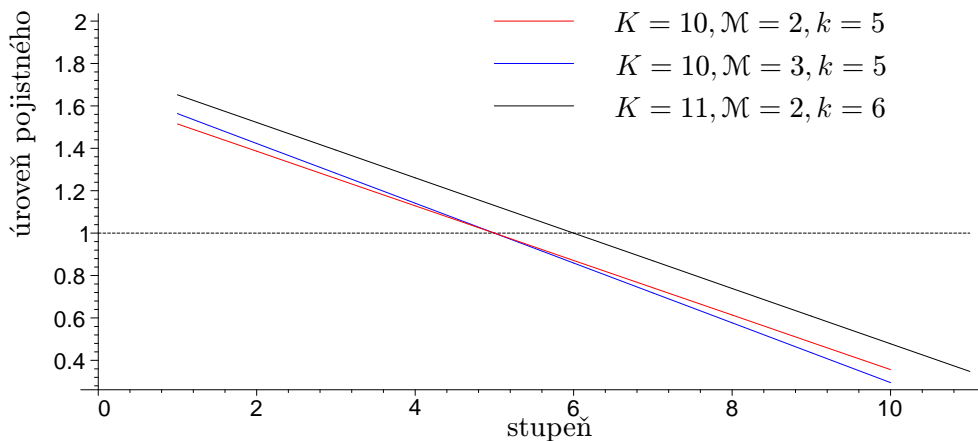
Graf 4.16: Lineárně lomené a exponenciální škály na uzavřeném portfoliu

Příklad 4.2 (Škály vybraných BMS)

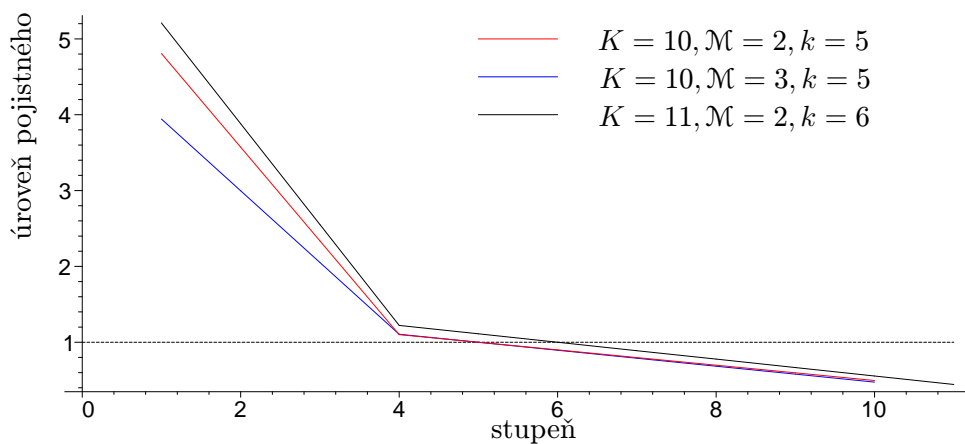
V dalším příkladu se vrátíme k vybraným škálám z konce oddílu 4.1.3.



Graf 4.17: Bayesovské škály vybraných BMS



Graf 4.18: Lineární škály vybraných BMS

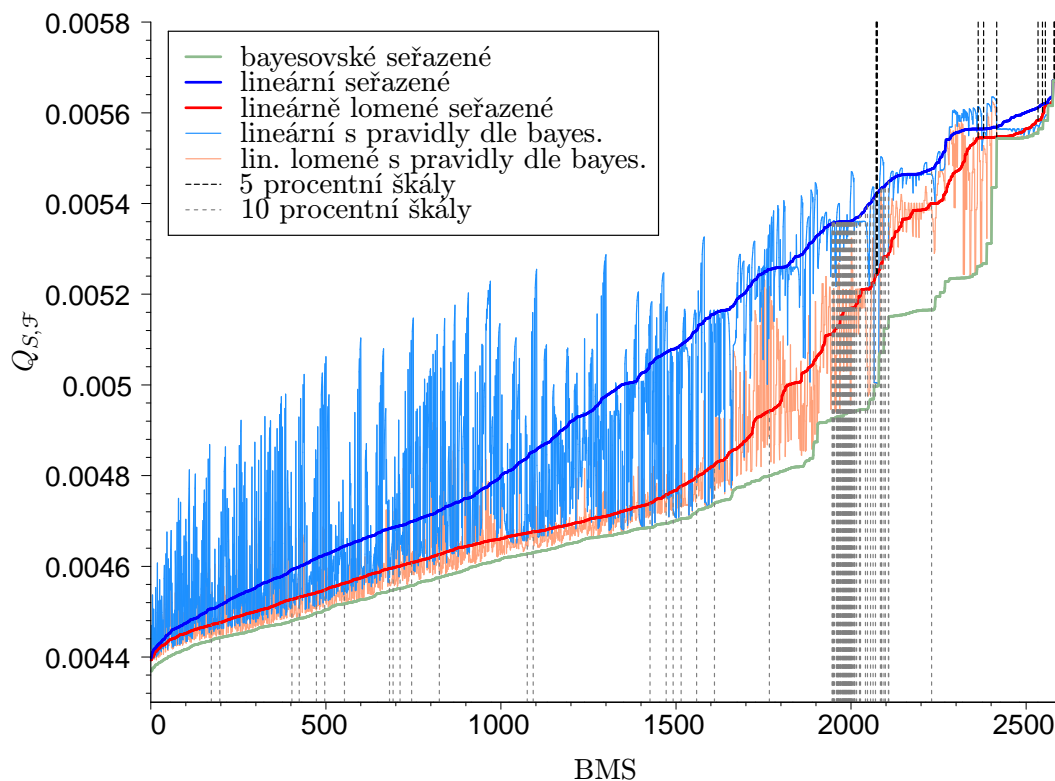


Graf 4.19: Lineárně lomenné škály vybraných BMS

4.3 Optimalizace pravidel a sazbovací funkce zároveň

Napočteme-li pro každý BMS z tabulky 4.1 bayesovskou, lineární a lineárně lomenou sazbovací funkci, můžeme vybrat ta pravidla, která dávají nejmeší Q , aproximují tak realitu nejlépe. Stejný přístup byl použit i v článku Šváb (2002b). Pro napočítání používáme popis portfolia podle příkladu 1.1, kde máme například zvoleny rovnoměrné váhy pro všechna období t a kritérium $Q_{S,\mathcal{F}}$, tj. mimo jiné „průměrovou“ sazbovací základnu.

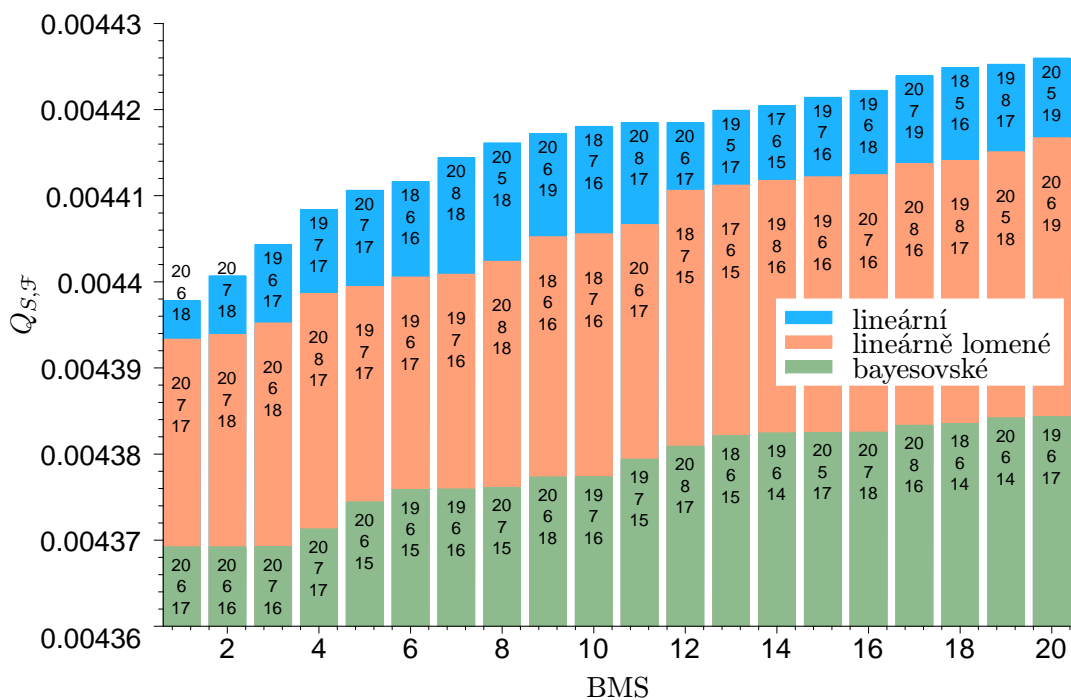
Nejprve se podíváme na graf 4.20 se všemi napočtenými BMS. Lze konstatovat několik



Graf 4.20: Graf všech uvažovaných BMS a jejich $Q_{S,\mathcal{F}}$, seřazeno podle velikosti.

více či méně očekávaných poznatků:

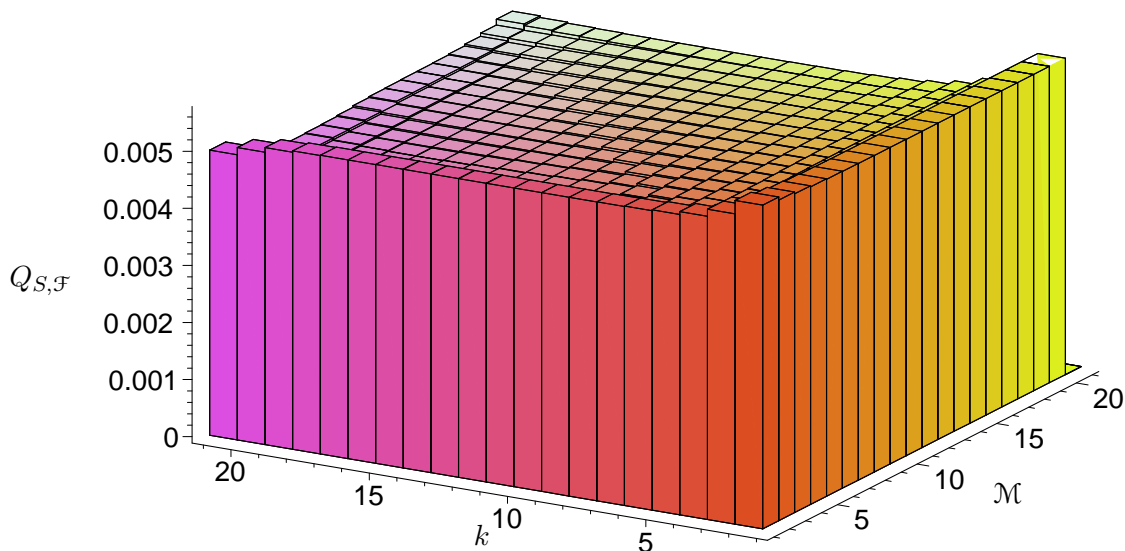
1. Všechny bayesovské škály jsou lepší než lineární či lineárně lomené.
2. Lineárně lomené se zdají být (pro vhodně zvolený zlom) docela dobrou aproximací, rozhodně lepší než lineární.
3. Máme-li určitá pravidla pro BMS a k nim spočtenou bayesovskou škálu, o které víme jak dobrá či špatná z hlediska Q je, tak nelze nic tvrdit z hlediska kvality o lineární a lineárně lomené škále se stejnými pravidly (viz rozkmitané čáry na zmíněném grafu).
4. Pojistitelé často používají zaokrouhlené relativní rozestupy mezi stupni (například 5 či 10 procent). Na grafu jsou vyneseny BMS, které by s tolerancí na 0,1 p.b. mohly z tohoto hlediska pojistitelům vyhovovat. Zejména ty pětiprocentní mají hodně velká Q .



Graf 4.21: Pravidla jsou uvedena v každém sloupci v pořadí od shora K , \mathcal{M} a k .

Nyní vyberme 20 nejlepších BMS pro každý tvar sazbovací funkce, viz graf 4.21.

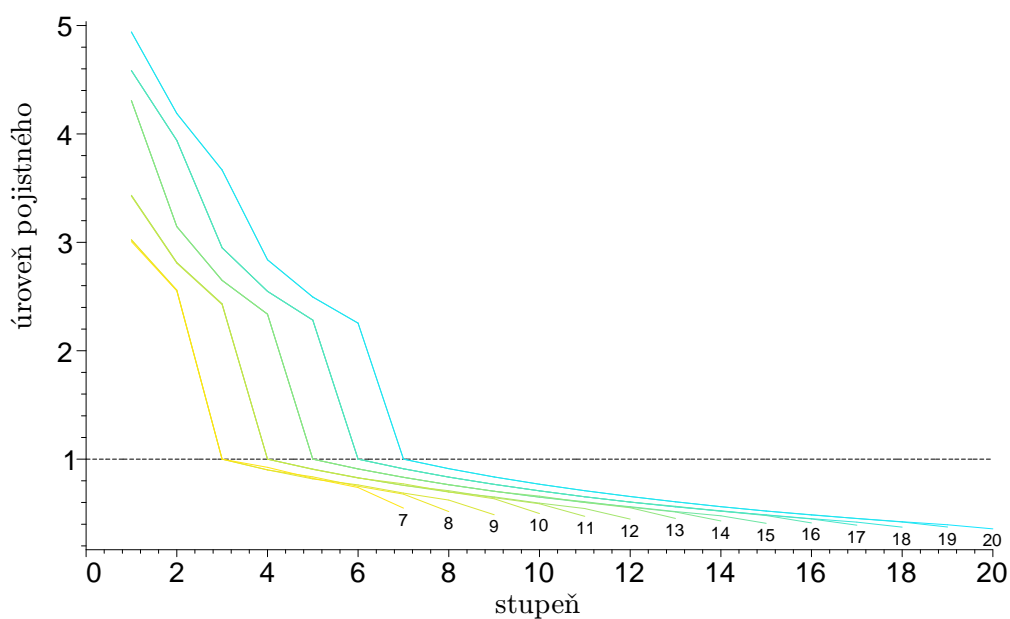
Vzhledem k tomu, že se BMS pro $K = 20$ opakuje velmi často (a důvod je opět očekávatelný — čím více stupňů tím lepší aproximace modelu počtu škod), podíváme se na něj a bayesovské škály kompletně na grafu 4.22.



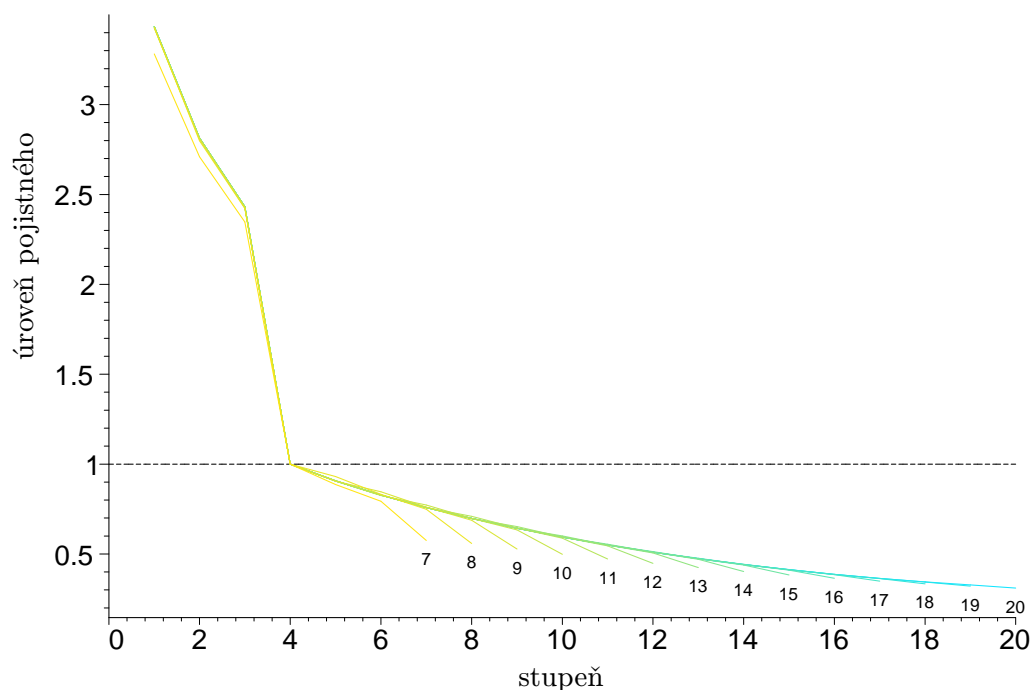
Graf 4.22: Pro $K = 20$ zkoumáme všechny kombinace k a \mathcal{M} . Je to obtížně zřetelné, ale „uprostřed“ grafu je prohlubeň.

Další grafy budou jen ukázkou výsledků, neboť výběr BMS v praxi je záležitostí, kterou ovlivňuje mnoho praktických faktorů, které zde nemůžeme postihnout a zároveň nesmíme

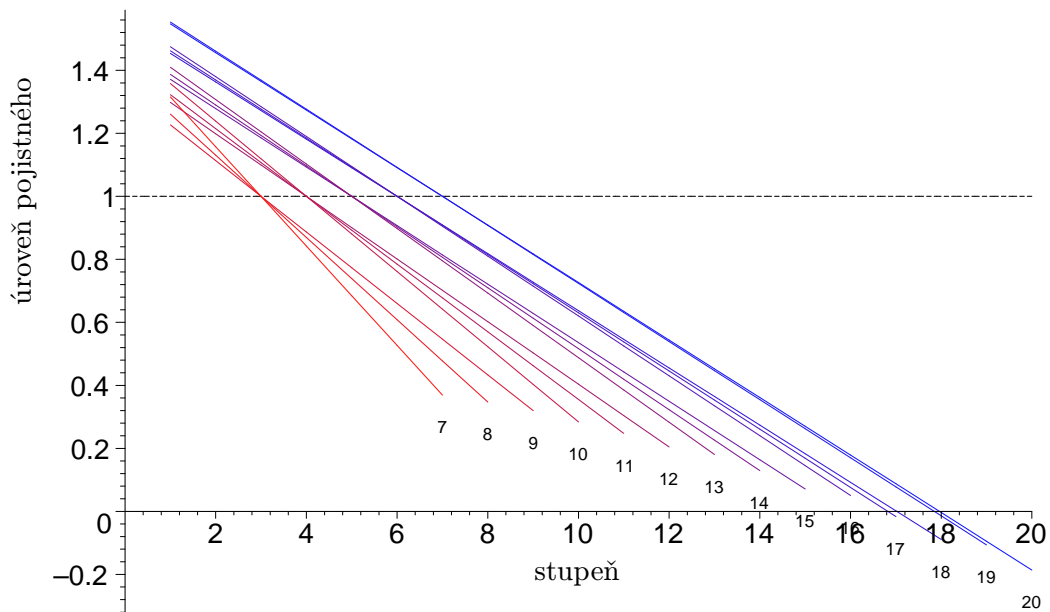
zapomenout, že použitý popis portfolia je jen „školním“ příkladem.



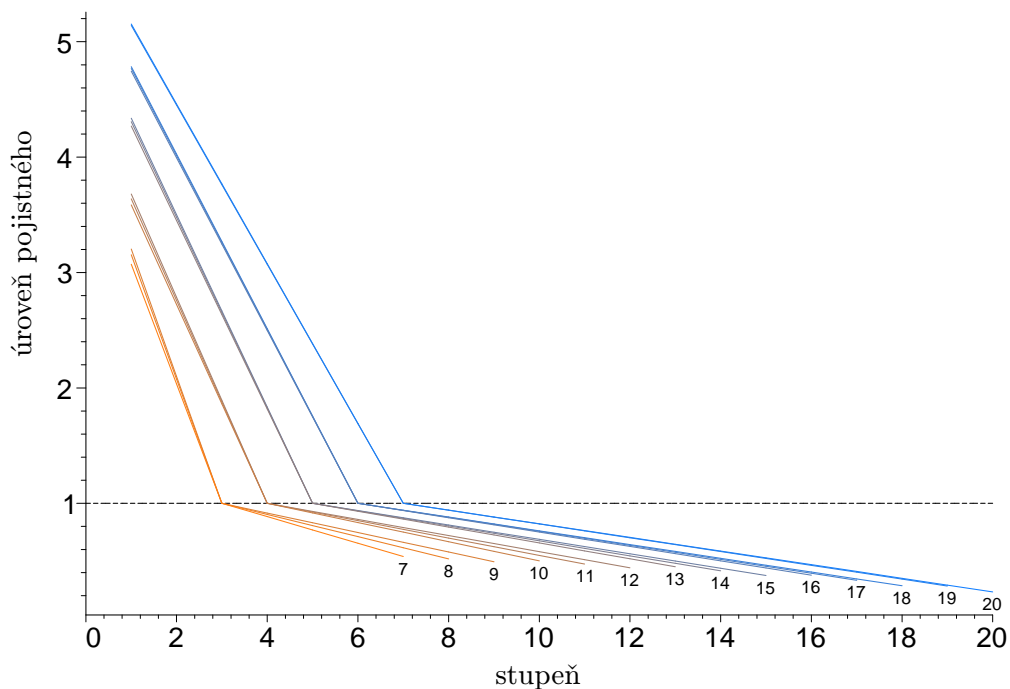
Graf 4.23: Bayesovské škály pro $K = 7, \dots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \lfloor \frac{K}{3} \rfloor$. Číslo u konců škál označují počet stupňů K . Na svislé ose je vyneseno relativní pojistné vůči počátečnímu stupni. Proto je na grafu uvedena vodorovná čára s počátečním pojistným 1, která tak identifikuje počáteční stupeň. Grafy se překrývají pro shodná k , více následující graf.



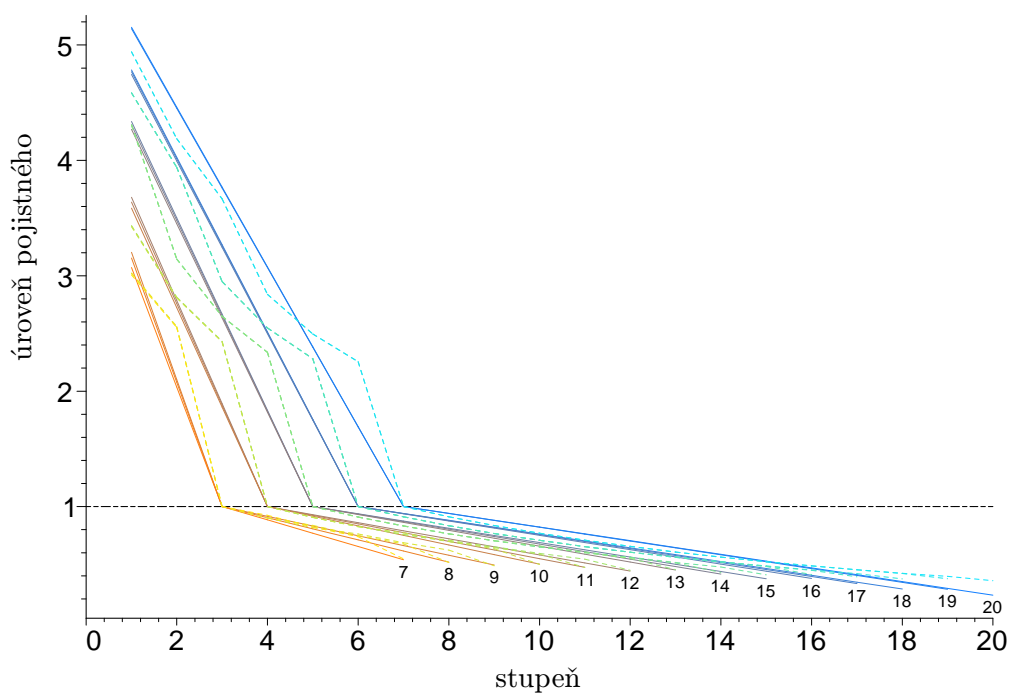
Graf 4.24: Tento graf ukazuje analogicky k předchozímu, jak moc záleží na volbě počátečního stupně. Dokonce tak, že v jeho nejbližším okolí nezáleží na tom, kolik stupňů má škála celkem. Což je logický poznatek. $\mathcal{M} = 3$ a $k = 4$.



Graf 4.25: Graf analogický ke grafu 4.23, ale pro lineární škály. To že vyjde dokonce záporné pojistné, je sice teoreticky správný výsledek, nicméně zcela proti praxi. Výsledek souvisí s nastavením vah období stáří portfolia i s použitím $Z_{N\Omega}$ jako sazbovací základny.



Graf 4.26: Další analogie ke 4.23. Tentokrát pro lineárně lomené škály. Vidíme, že se škály shlukly podle počátečního stupně stejně jako bayesovské a lineární. Zde je však zajímavé porovnat, jak na sebe „sednou“ bayesovské se zde uvedenými lineárně lomenými škálami. To nám ukáže následující graf 4.27.

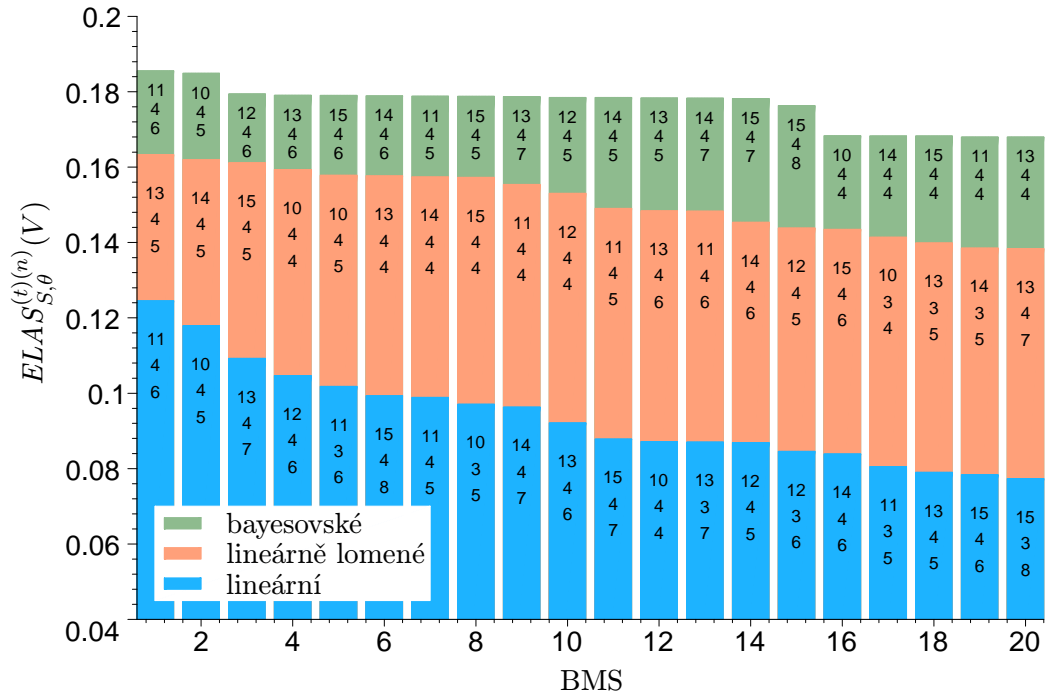


Graf 4.27: Graf ukazuje, že lineárně lomená škála (plná čára na grafu) je docela smysluplná aproximace bayesovské (přerušované čáry). Jsou zde vyneseny shodné škály jako na předchozích grafech 4.23 a 4.26.

4.4 Optimalizace elasticity

Elasticitu je možné optimalizovat, jen známe-li jak sazbovací základnu tak sazbovací funkci. Sazbovací funkce převezmeme ty, které jsme napočítali v předchozím oddílu 4.3 a podíváme se na jejich elasticitu.

Pro optimalizaci elasticity volíme $V = 5$, $n = t = 1$ a $\theta = h/\tau$, jinými slovy hledáme pravidla, která nejúčinněji opraví pojistné nově vstoupivšího (průměrného) rizika do portfolia. Uvažujeme uzavřené portfolio, ačkoliv jsou škály napočteny pro portfolio otevřené, neboť nás zajímá hlavně chování se BMS vůči individuálnímu riziku. Výsledky jsou naznačeny na grafu 4.28.



Graf 4.28: Porovnání elasticity při omezení se na $K = 10, \dots, 15$, $\mathcal{M} = 1, \dots, 4$ a $k \leq \lceil \frac{K}{2} \rceil$. Zobrazeno vždy 20 nejlepších škál. Parametry jsou uvedeny přímo v grafu, v pořadí od shora K, \mathcal{M}, k . Mimo jiné je vidět, že i z hlediska elasticity je lineárně lomená škála lepší aproximací než lineární.

Závěr

Tato práce předkládá mnoho nástrojů k hodnocení systémů bonus malus. Zkoumání jednotlivých vlastností však kromě výroku o tom, který BMS je lepší a který horší, také poskytuje náhled na nevýhody použití BMS vůbec.

Výhrada, že se porušuje základní princip pojištění, kdy se náhodná veličina (škody) nenahrazuje konstantou (pojistné), ale opět náhodnou veličinou, je v současné době již irelevantní. Byla diskutována v počátcích zavádění BMS, kdy se i potřebná teorie teprve začala rozvíjet. Dnes jsou již BMS realitou, nelze je tedy zatracovat, je třeba je optimalizovat.

Zvláště při zavádění nového BMS, kdy nemáme bezeškodní historii, je velký problém transparentnosti kvůli finanční rovnováhou vynucenému růstu základního pojistného. Zlepšit to může dočasně snížený počáteční stav. Ať již formálně nebo uznáváním prohlášení pojistníka, že neměl škody, ačkoliv pojistitel o tom nemá evidenci.

Neřešení tohoto problému vyvolává další „nespravedlnost“. Porovnáme-li totiž shodná rizika, která by v portfoliu strávila shodnou delší dobu (například 10 let), avšak zahájila své setrvání v portfoliu v různých obdobích jeho stáří, dostaneme pro ně různé pojistné.

Z tohoto hlediska je pro začátek ideální jednoduchý BMS (viz dodatek B), který stanovuje pojistné podle počtu let historie a počtu škod v této historii. Jsou to tedy pravidla, která nejsou v čase rizika stabilizovaná.

Koeficient variace je důležité minimalizovat, neboť jinak hrozí riziko, že konkurenční pojistitel ocení riziko přesněji a z toho vytěží lepší rizika za dobré pojistné. Jak bylo však ukázáno, je ekvivalentní minimalizovat Norbergovo kritérium. A pro tuto optimalizaci máme standardní matematické nástroje.

Již v Lemaire (1995) je možné nalézt různá speciální pravidla urychlující konvergenci (například, že riziko po určitém počtu bezeškodních období nesmí být v horším stupni než ...), ale je otázkou, s jakým záměrem byla taková pravidla zavedena.

Tato práce se jen letmo zmínila o kombinaci BMS a segmentace. V praxi však nelze tyto dvě od sebe oddělit a je tedy třeba tuto teorii propojit např. se zobecněnými lineárními modely.

Velikost hladu po bonusu si pojistník asi těžko spočítá, ale intuitivně se jím řídit bude. Proto je tento ukazatel důležitým konkurenčním nástrojem. Je možné, že klient půjde k tomu pojistiteli, u kterého bude cítit menší trest za škody.

V kapitole o optimalizaci pravidel jsme došli k závěrečnému pravidlu: při velkém k volíme

$\mathcal{M} = 1$ a při malém k volíme velké \mathcal{M} , které je také v rozporu s praxí.

Při hledání optimálních pravidel jsme zdaleka nevyčerpali všechny možnosti. Daly by se například uvažovat dvakrát lomené sazbovací funkce, případně s tím, že za druhým zlomem by již byla stagnace pojistného, což by automaticky zajistilo ve světě občas používaný „odpustek“, tj. pojištění zachování bonusu, které by však bylo zaslouženo počtem bezeškových let, nikoliv volně v prodeji.

Shrnutí poznatků ukončíme výčtem neprovedených nebo zde neuvedených analýz, které by aplikací této teorie v praxi ještě obohatily.

- Můžeme zkoumat jaké má být V , abychom se dostatečně přiblížili limitnímu ukazateli elasticity (při $V \rightarrow \infty$).
- Optimalizace vlastností BMS pomocí různých dodatečných pravidel.
- Podmínky konvergence elasticity pro $t \rightarrow \infty$ při neexistenci n_0 .
- Konvergence ukazatelů při nekonstatních a_t , k_t a \mathcal{K}_t .
- Souvislost Norbergova rizika s kritérii adekvátnosti uvedenými v Baione et al. (2002).
- Dvakrát lomená sazbovací funkce.
- Další analýza vhodné politiky pojistitele vzhledem k vyhlašování optimální retence.
- Souvislost optimalizace elasticity a Norbergova rizika.

Závěrečná poznámka se bude týkat použitého software. Implementace všech výpočtů byla provedena v SW MAPLE 9, přičemž výpočty běžely na notebooku v konfiguraci s dvoujádrovým procesorem Intel ($2 \times 2\text{GHz}$) a s 1GB RAM. Právě zde vidím jedinou výhodu toho, že se mé doktorské studium protáhlo na 8 let. Před pěti lety nebylo myslitelné na tehdy běžném PC provést výpočet více než 7500 různých BMS. I na zmíněném notebooku výpočet trval cca 5–7 dní strojového času.

Dodatek A

BMS jako markovský řetězec

Nejobvyklejším příkladem BMS je systém používaný v mnoha zemích v praxi a popsáný v různých pracech, například v Sundt and Gilde (1989) nebo Lemaire (1995). Pro jeho obvyklost nasazení v praxi se o něm v této práci zmiňujeme také jako o „klasickém BMS“. Pomocí zavedených pojmů definice 2 jej nyní definujeme formálně.

Definice 17 (Klasický BMS).

Nechť množina stavů je konečná $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$. Počáteční stav označme $k \in \mathcal{K}$ a sazbovací základnu Z_n definujeme jako

$$Z_n = \begin{cases} k & n = 1 \\ T(Z_{n-1}, M_{n-1}) & n > 1 \end{cases},$$

kde $T : \mathcal{K} \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathcal{K}$ jsou **pravidla přechodu** a $R = (T, k)$ se označují **pravidla BMS**.

Sazbovací funkci místo funkčního zápisu zapisujeme jako vektor, který přiřazuje přímo konkrétní pojistné každému stupni

$$\mathbf{a}_t = (a_t(1), \dots, a_t(K))' \in \mathbb{R}^K$$

a nazýváme jej **pojistná škála** (resp. škála pojistného). **Základním pojistným** pak rozumíme pojistné počátečního stupně $a_t(k)$. **Bonusovou škálou** je pak vektor relativních výší pojistného vůči pojistnému základnímu $\mathbf{C}_t = \mathbf{a}_t/a_t(k)$. **Klasickým BMS** rozumíme trojici (T, \mathbf{a}, k) .

PŘEDPOKLADY 2

Předpokládejme dále, že

- v naší práci budeme používat ještě užší definici BMS, neboť se omezujeme na pravidla tvaru

$$T(i, r) = \begin{cases} \min(i + \mathcal{B}, K) & r = 0 \\ \max(i - r\mathcal{M}, 1) & r > 0 \end{cases},$$

kde \mathcal{B} a \mathcal{M} označují počty stupňů (nejčastěji $\mathcal{B} = 1$).

- Nechť konkrétně $M_n \sim \text{Po}(\theta)$.

DŮSLEDKY 3 (VLASTNOSTI KLASICKÉHO BMS): Sazbovací základna $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ klasického BMS je markovský řetězec, neboť Z_n „nemá paměť“ tj. závisí jen na předchozím stavu Z_{n-1} a počtu škod v posledním období M_{n-1} , a má tyto vlastnosti:

- je ireducibilní, neboť libovolný stav je dosažitelný z libovolného jiného stavu,
- je homogenní, neboť pravděpodobnosti přechodu nezávisí na čase,
- je ergodický, neboť pro každý stav je pravděpodobnost, že se vrátí do svého stavu, nenulová.

A tedy existuje stacionární rozdělení.

Ergodicitu zajišťuje buď vlastnost tzv. *superbonus stavu* jak jej nazývá Bonsdorf (1992) a definuje jej jako stav, ve kterém skončí každé riziko po dostatečném množství bezeškodních období. Nebo požadavek, že existuje takový stav, ve kterém riziko zůstane zařazeno i po jednom bezeškodním období. Zde zavedený kalsický BMS splňuje obojí stavem K .

Počáteční stav $k = Z_1(\Xi_1) \in \mathcal{K}$ zavedený v definici 17 v tomto případě též nazýváme základní stupeň, protože je zvykem v praxi označovat jednotlivé stavy stupněmi.

Sazbovací základna $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je sice definovaná rekurzivně, ale je zřejmé, že po převodu na nerekurzivní podobu splňuje definici 2.

Uvažujme, že máme dáno náhodně vybrané riziko z portfolia s $\Theta = \theta$. Zavedme označení pravděpodobností přechodu (pro $i, j = 1, \dots, K$ a $n \in \mathbb{N}$):

$$p_{T,\theta}(i, j) = P_{\theta}(Z_{R,n} = j | Z_{R,n-1} = i),$$

$$p_{R,\theta}^{(n)}(j) = P_{\theta}(Z_{R,n} = j) = (\mathbf{p}_0' \mathbf{M}_{T,\theta}^n)_j = (\mathbf{M}_{T,\theta}^n)_{kj}.$$

Matice přechodu je $\mathbf{M}_{T,\theta} = (p_{T,\theta}(i, j))_{i,j=1,\dots,K}$ a počáteční rozdělení $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 1, \dots, 0)'$ s jedničkou na k -tém místě. Stacionární rozdělení s pravděpodobnostmi ($j = 1, \dots, K$) označujeme

$$p_{T,\theta}^{(\infty)}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{R,\theta}^{(n)}(j).$$

Tímto je podle důsledků 3 definována n. v., kterou značíme $Z_{\mathcal{U}}^{\infty}$ (podle definice 2 bodu (ix)). Toto rozdělení je jednoznačně určeno soustavou $K + 1$ rovnic o K neznámých

$$\begin{aligned} p_{T,\theta}(j) &= \sum_{i=1}^K p_{T,\theta}(i) p_{R,\theta}(i, j), & j = 1, \dots, K, \\ \sum_{j=1}^K p_{T,\theta}(j) &= 1. \end{aligned}$$

Dodatek B

Další příklad BMS

Abychom se neomezovali jen na BMS modelované jako markovské řetězce, uveďme jednoduchý příklad BMS, který také vyhovuje základní definici 2 a ukažme jeho vlastnosti.

Teoreticky nejjednodušší BMS, zmíněný v Lemaire (1995), závisí přímo na počtu škod za všechna předešlá období, proto ho budeme nazývat *jednoduchý BMS*.

Sazbovací základna je nezávislá na stáří portfolia, tj. udržujeme pravidla stabilní v čase a závislí pouze na stáří rizika. Definujeme ji jako

$$Z_n(\Xi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i.$$

VĚTA 4: Za platnosti předpokladů 1 a popisu portfolia podle příkladu 1.1 máme pro riziko staré $n - 1$ období bayesovské pojistné pro následující období (t resp. n)

$$a_n(Z_n) = \frac{h + Z_n}{\tau + n - 1}.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že součet pevného počtu $n - 1$ iid n.v. s rozdělením $Po(\theta)$ má rozdělení $Po((n - 1)\theta)$, je pro $r \in \mathbb{N}_0$

$$P_\theta(Z_n = r) = \frac{((n - 1)\theta)^r e^{-(n-1)\theta}}{r!}$$

a bayesovské pojistné pro období n při r škodách za $n - 1$ období vypočteme jako

$$a_n(r) = E[\Theta | Z_n = r] = \frac{\int_0^\infty \theta P_\theta(Z_n = r) dU(\theta)}{\int_0^\infty P_\theta(Z_n = r) dU(\theta)} = \frac{h + r}{\tau + n - 1}.$$

□

Vlastnosti

I: Průměrná úroveň pojistného:

Vzhledem k tomu, že $a_1(0) = h/\tau$ a $E_\theta Z_n = (n-1)\theta$ je průměrná úroveň pro $n = 1, 2, \dots$

$$AL_{S,\theta}^{(t)(n)} = \frac{h + (n-1)\theta}{\tau + n - 1} \frac{\tau}{h}$$

a při uzavřeném portfoliu jen vyměníme n za t a můžeme vypočítat limitní ukazatel

$$AL_{S,\theta,\mathcal{F}} = \lim_{t \rightarrow \infty} AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \frac{\theta\tau}{h}.$$

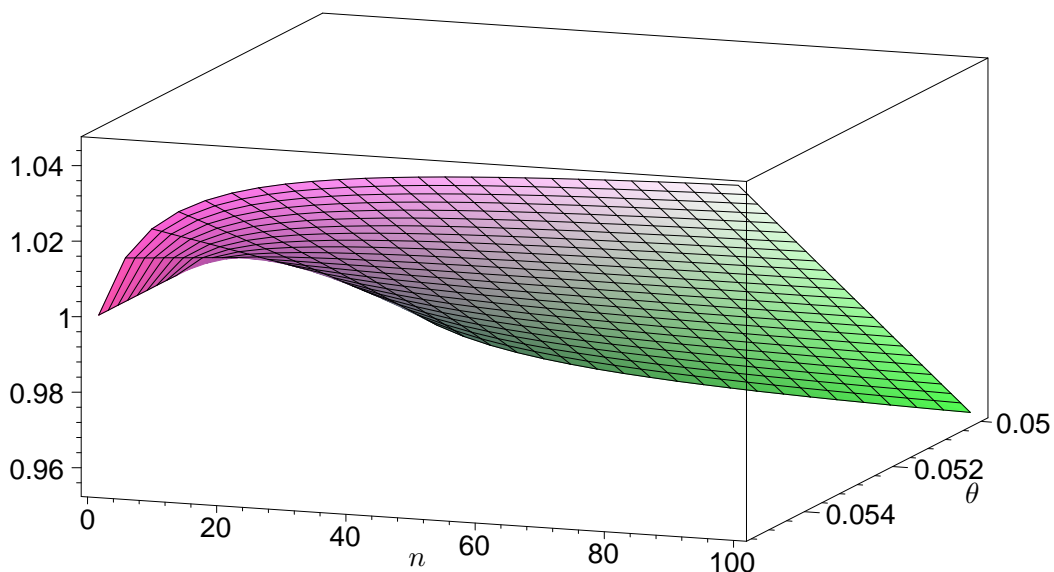
Nyní vyintegrujeme θ a máme

$$\begin{aligned} AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} &= \int_0^\infty \frac{h + (n-1)\theta}{\tau + n - 1} \frac{\tau}{h} dU(\theta) = \\ &= \frac{\tau}{h} \left(\frac{h}{\tau + n - 1} + \frac{n-1}{\tau + n - 1} \int_0^\infty \theta dU(\theta) \right) = \\ &= \frac{\tau}{\tau + n - 1} + \frac{n-1}{\tau + n - 1} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

A tedy i $AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = 1$. Ať už limitou posledního ukazatele $AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}$ pro t jdoucí do nekonečna nebo vyintegrováním parametru θ v ukazateli $AL_{S,\theta,\mathcal{F}}$, dostáváme

$$AL_S = 1.$$

Lze tedy říct, že z hlediska průměrné úrovně pojistného a pro uzavřené portfolio jde opravdu o zcela ideální BMS.

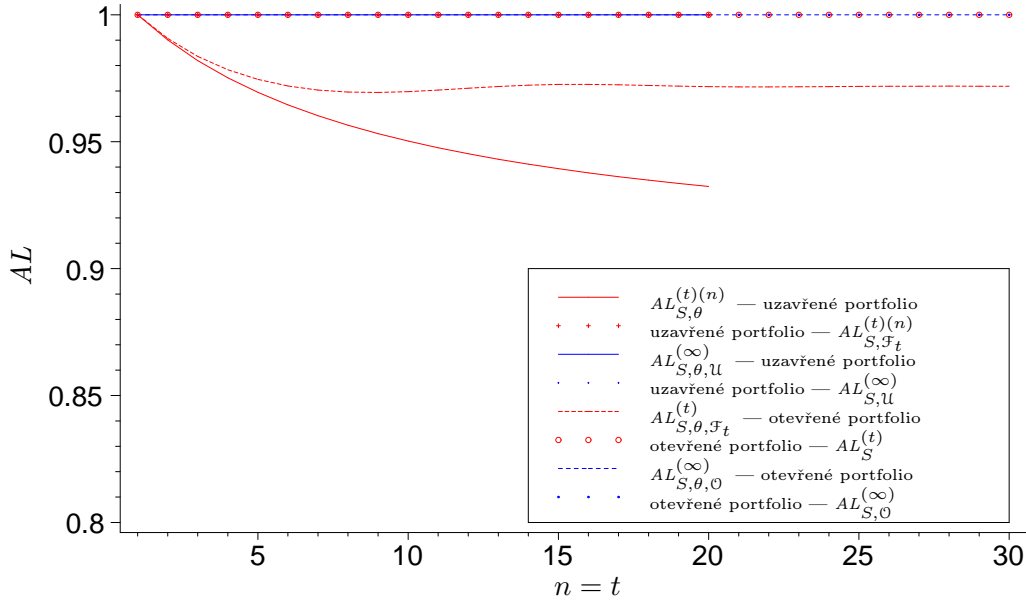


Graf B.1: $AL_{S,\theta}^{(t)(n)}$ pro jednoduchý BMS

II: Koeficient variace

Počítejme:

$$\begin{aligned} \text{var}_\theta [a_n(Z_n)] &= \frac{(n-1)\theta}{(n-1+\tau)^2}, \\ CV_{S,\theta}^{(t)(n)} &= \frac{\sqrt{(n-1)\theta}}{h + (n-1)\theta}, \end{aligned}$$



Graf B.2: Porovnání AL analogické ke klasickému BMS, zde však konkrétní θ volíme mimo střední hodnotu Θ , neboť to bychom na grafu měli vše rovno jedné. Zde je $\theta = 0.9 E \Theta$.

$$\text{var} [a_n(Z_n)] = \int_0^\infty \text{var}_\theta [a_n(Z_n)] dU(\theta) = \frac{n-1}{(n-1+\tau)^2} \frac{h}{\tau}$$

a vzhledem k tomu, že $E a_n(Z_n) = \frac{h}{\tau}$, tak

$$CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \frac{\sqrt{n-1}}{n-1+\tau} \sqrt{\frac{\tau}{h}}.$$

III: Elasticita

$$\begin{aligned} E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) &= \sum_{v=1}^V E_\theta a_{n+v}(Z_{n+v}) (1+\iota)^{-(t+v-1)} = \\ &= \sum_{v=1}^V \frac{h + (n+v-1)\theta}{\tau + n + v - 1} (1+\iota)^{-(t+v-1)}. \end{aligned}$$

Opět při uzavřeném portfolio ($w_n(t) = 1$ pro $t = n$ a 0 jinak) nahradíme pro další výpočty označení stáří rizik n stářím portfolio t .

$$\begin{aligned} ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) &= \frac{d \left(\sum_{v=1}^V \frac{h + (t+v-1)\theta}{\tau + t + v - 1} (1+\iota)^{-(t+v-1)} \right)}{\sum_{v=1}^V \frac{h + (t+v-1)\theta}{\tau + t + v - 1} (1+\iota)^{-(t+v-1)}} \frac{\theta}{d\theta} = \\ &= \frac{\sum_{v=1}^V \frac{(t+v-1)\theta}{\tau + t + v - 1} (1+\iota)^{-(t+v-1)}}{\sum_{v=1}^V \frac{h + (t+v-1)\theta}{\tau + t + v - 1} (1+\iota)^{-(t+v-1)}}. \end{aligned}$$

$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} = \lim_{V \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) = 1$ a integrací se výsledek už nezmění a máme $ELAS_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} = 1$.

IV: Celková variace je nulová, protože se sazbuje přesně podle rozdělení, které mám v každém období k dispozici.

V: Norbergovo riziko v období n

$$Q_{n+1} = \frac{h}{\tau(n + \tau)},$$

resp. riziko systému bonus malus

$$Q_{N_\Omega} = \sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \frac{h}{\tau(n + \tau)}.$$

Budováním teorie k BMS, budujeme vlastně aproximační model reality s prediktivní schopností. V prvním kroku aproximujeme realitu modelem počtu škod (v této práci se zaměřujeme na jedinou variantu, směs rozdělení Poissonova s Gamma rozdělením jeho parametru). V dalším kroku aproximujeme tento model škod pomocí BMS, který dokáže predikovat, určit pojistné pro následující období.

Druhou aproximaci rozděluje ještě mezikrokem Coene and Doray (1996). V tomto článku se vypočítávají stupně na základě aproximace jednoduchého BMS klasickým s pravidly. Jednoduchý má mnoho možností jak dosáhnout určitého počtu škod za určitý počet let, proto se musí vybrat ta nejpravděpodobnější možnost. Potom se počítá pojistné pro jednotlivé stupně jako problém kvadratického programování.

Dodatek C

Model kmene

Cílem této kapitoly je mít jednoduchý, avšak s realitou alespoň něco společného mající, model kmene. Modelem kmene zde rozumíme popis vztahů a parametrů, který nám určí rozložení stáří rizik v čase stáří portfolia.

Čas měříme stejně jako je popsáno v oddíle 1.1. Uvažujme, že známe pravděpodobnost storna smlouvy, která prožila v portfoliu n období a označme ji s_n . Je zřejmé, že se lze omezit na konečnou historii smluv (přinejmenším například omezením na délku lidského života). Proto označíme n_0 takové stáří rizika, kdy bude riziko s jistotou vystornováno ($s_{n_0} = 1$). Máme tedy vektor pravděpodobností storen

$$(s_1, s_2, \dots, s_{n_0-1}, 1) \in \langle 0, 1 \rangle^{n_0}.$$

Modely v následujících oddílech jsou zapsány jako algoritmy vhodné pro přímou implementaci.

C.1 Model s obnovami bez historie

Začínáme s portfoliem starým jedno období a tedy i s riziky starými jedno období

$$w_1(1) = 1.$$

Další období definujeme rekurzivně. Známe rozložení stáří v čase portfolia $t - 1$. Rozložení v čase t vypočteme tak, že vezmeme rizika stará $n - 1$, tj. $w_{n-1}(t - 1)$ a z nich ubudou stornované smlouvy s pravděpodobností storna s_{n-1} . Zůstane nám tedy

$$w_n(t) = w_{n-1}(t - 1)(1 - s_{n-1})$$

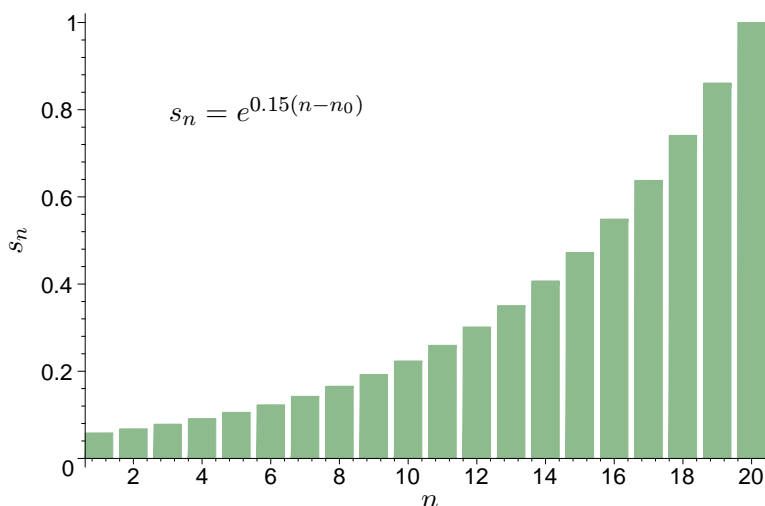
rizik starých n období v portfoliu starém t období. To jsme pochopitelně mohli udělat pro $n = 2, \dots, \min(t, n_0)$. Stanovíme-li si podmínku, že máme stagnující portfolio (což je v praxi minimální požadavek pojišťovny, častěji se požaduje růst), tak všechna vystornovaná rizika musíme nahradit riziky zcela novými. Máme tedy

$$w_1(t) = 1 - \sum_{i=2}^{\min(t, n_0)} w_i(t).$$

Tento oddíl jsme nazvali „s obnovami bez historie“, neboť všechny nové smlouvy uvažujeme bez individuální historie. V dalším se na tento model budeme odkazovat jako na model A. Ještě poznamenejme, že pro neuvedené kombinace n a t definujeme $w_n(t) = 0$.

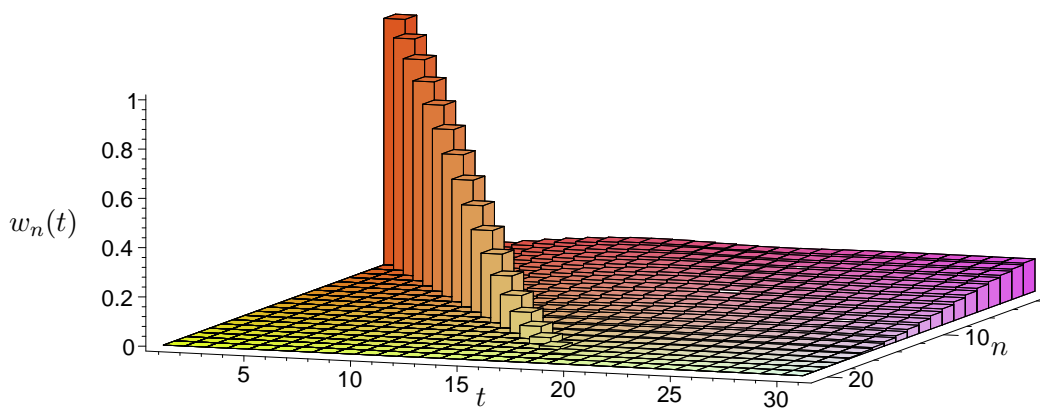
Příklad C.1 (Model A)

Pro ilustraci zde, ale i všude jinde v této práci, zvolme parametry zobrazené na grafu C.1, s $n_0 = 20$.



Graf C.1: Pravděpodobnosti storen.

Pravděpodobnosti $w_n(t)$ lze ilustrovat na grafu C.2.



Graf C.2: Model A: rozložení stáří rizika v čase portfolia

Model A by bylo možné interpretovat jako jednoduchý model celého trhu s tím, že storno znamená vyřazení vozidla z provozu. Pro skutečné využití by se ještě muselo uvažovat rozložení stáří vozidel, protože pravděpodobnost vyřazení bude spíše závislá na stáří auta než na stáří rizika. Pokud by se hledal optimální systém BMS jednotný pro celý trh, je toto dobrý a transparentní model pro počátek úvah. Přechody mezi pojišťovnami netřeba řešit. Pokud modelujeme jednu pojišťovnu, je třeba model zpřesnit.

C.2 Model s obnovami s historií

Nyní uvažujme, že místo stornovaného rizika přijde do portfolia jiné, ale že jen s určitou pravděpodobností bude zcela bez historie (vstupuje do svého prvního období). I v praxi je obvyklé předpokládat, že v portfoliu nová rizika, avšak s delší historií u jiné pojišťovny, přicházejí s historií ve stejném rozložení, jaké je již rozložení délek historií rizik ve stávajícím portfoliu.

Definujeme model B tak, že modifikujeme tedy model A. Označme q pravděpodobnost, že příchozí smlouva bude bez historie. Uvažujme, že máme vypočtený model A a uložený v proměnných $w_n^A(t)$. Následuje postup, kterým se tyto pravděpodobnosti změní podle pravidel modelu B. Hodnota $w_1(1)$ se nemění a opět postupujeme rekurzivně. Z rozložení podle modelu B v čase portfolia $t - 1$ spočteme rozložení v čase t . Označme úhrn přeživších smluv podle modelu A z času $t - 1$ do času t proměnnou

$$F = \sum_{i=2}^{\min(t, n_0)} w_i^A(t).$$

Potom zcela nových rizik máme jen

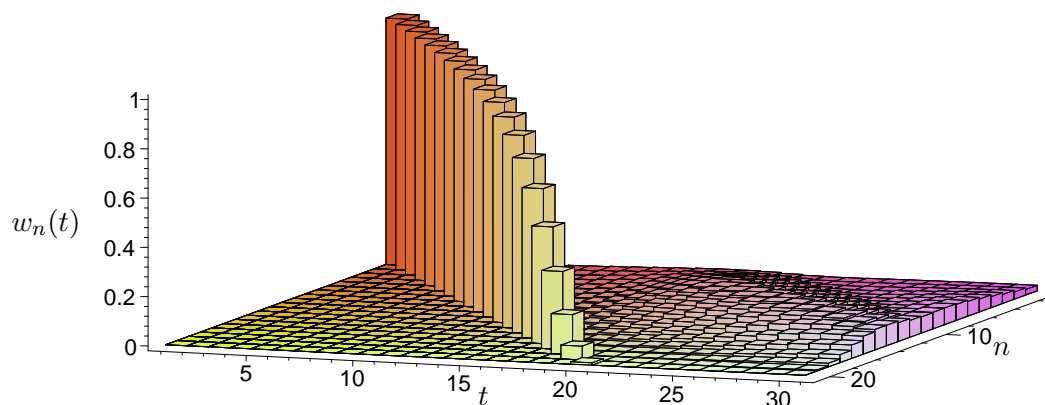
$$w_1(t) = (1 - F)q.$$

Zbytek rozdělíme k přeživším

$$w_n(t) = w_n^A(t)(1 + (1 - q)(1 - F)/F) \text{ pro } n = 2, \dots, \min(t, n_0).$$

Příklad C.2 (Model B)

Pravděpodobnosti $w_n(t)$ lze ilustrovat na grafu C.3 (při poměrně malém podílu rizik bez historie $q = 0.08$).



Graf C.3: Model B: rozložení stáří rizika v čase portfolia

C.3 Modifikace s růstem portfolia

Doposud jsme explicitně neuvažovali růst portfolia, ačkoliv nebyl vyloučen, protože modelujeme relativní strukturu. Nyní budeme uvažovat určitý příliv vozidel bez historie navíc. To

lze interpretovat při pohledu na vozidla jako továrně nová vozidla případně dovozy ze zahraničí nebo při pohledu na pojistníky jako nové řidiče. Označme tedy relativní nárůst portfolia písmenem r . Opět modifikujeme pravděpodobnosti modelu A. Pro rizika bez historie máme (F jako v modelu B)

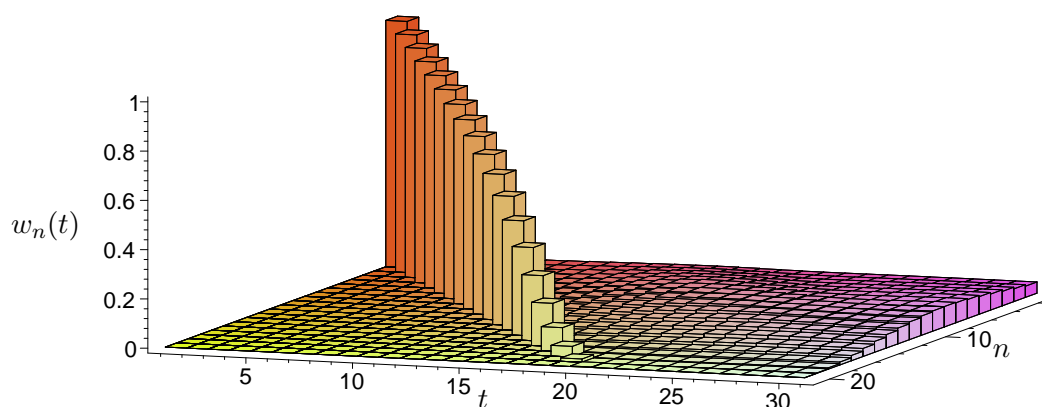
$$w_1(t) = ((1 - F)q + r)/(1 + r).$$

a opět zbytek rozdělíme k přeživším

$$w_n(t) = w_n^A(t)(1 + (1 - q)(1 - F)/F)/(1 + r) \text{ pro } n = 2, \dots, \min(t, n_0).$$

Příklad C.3 (Model C)

Pravděpodobnosti $w_n(t)$ lze ilustrovat na grafu C.4 (s růstem $r = 0.03$).



Graf C.4: Model C: rozložení stáří rizika v čase portfolia

C.4 Porovnání AL pro různá rozdělení stáří rizik

Udělejme zde jedno porovnání a tím alespoň naznačme důležitost správné predikce stáří rizik v budoucnu. Tato práce však není zaměřena na modelování portfolií.

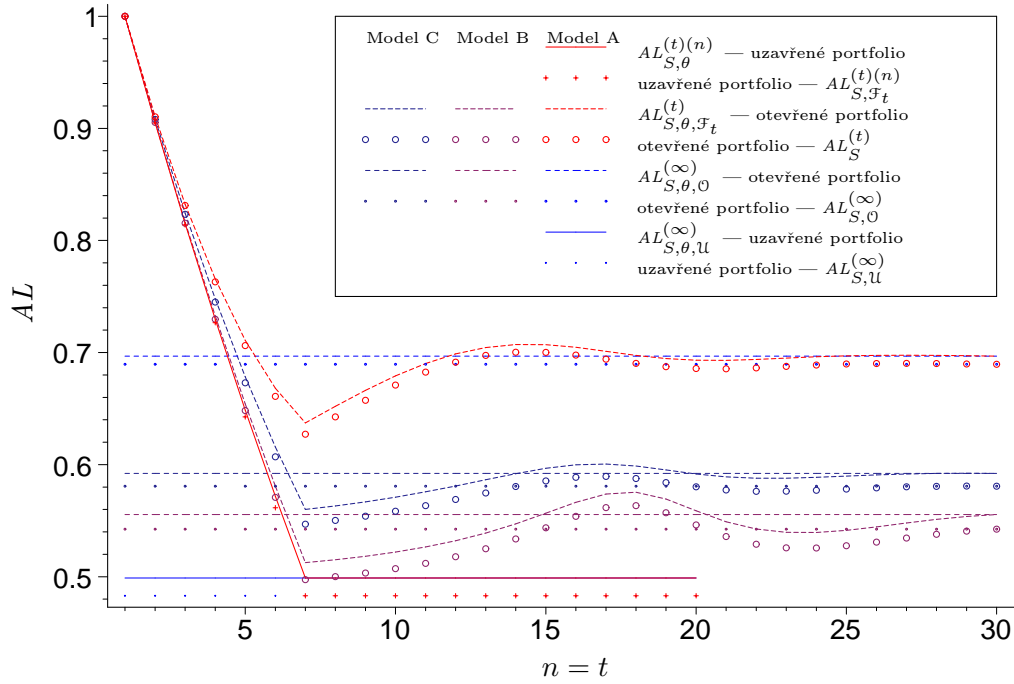
Příklad C.4 (Porovnání AL pro různá rozdělení stáří rizik)

Tento příklad ilustrujeme na stejném BMS jako definice různých vlastností v kapitole 2. Je jím Keňský systém podrobněji popsán v příkladu 1.2. Srovnání je na grafu C.5.

C.5 Limitní portfolio

Ze všech grafů je patrné, že se rozdělení ustálí a že by tedy mohlo být možné popsat limitní rozdělení. Vyjdeme však z opačného konce. Vyjdeme z představy, že po určitém, hodně dlouhém čase, se rozložení historie v portfoliu nebude měnit a bude blízko limitnímu rozdělení. Tento požadavek lze zapsat jako

$$w_n(t) = w_n(t + 1), \text{ pro } n = 1, \dots, n_0.$$



Graf C.5: Porovnání průměrné úrovně pojistného při různých modelech portfolia.

Přechod smluv z času t do času $t+1$ lze zapsat pomocí pravděpodobnosti storna rizika starého $n-1$ období (pro $n=2, \dots, n_0$)

$$\begin{aligned} w_n(t+1) &= w_{n-1}(t)(1-s_{n-1}) = w_{n-1}(t+1)(1-s_{n-1}) = \\ &= w_1(t+1) \prod_{i=1}^{n-1} (1-s_i). \end{aligned}$$

A tedy po odstranění času t máme $w_n = w_{n-1}(1-s_{n-1}) = w_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1-s_i)$. A z toho plyne nutnost

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum_{n=2}^{n_0} \prod_{i=1}^{n-1} (1-s_i)}.$$

Toto rozdělení je limitou rozdělení $w_n(t)$ modelu A pro $t \rightarrow \infty$. Máme totiž

$$w_n(t) = w_1(t-(n-1)) \prod_{j=1}^{n-1} (1-s_j) \quad (\diamond)$$

pro $n=2, \dots, \min(n_0, t)$ a $t=2, \dots$. Rozepíšeme součet pravděpodobností

$$1 = \sum_{n=1}^{\min(n_0, t)} w_n(t) = w_1(t) + \sum_{n=2}^{\min(n_0, t)} w_1(t-(n-1)) \prod_{j=1}^{n-1} (1-s_j).$$

Na obou stranách provedeme limitní přechod a máme

$$1 = \lim_{t \rightarrow \infty} w_1(t) + \sum_{n=2}^{n_0} \lim_{t \rightarrow \infty} w_1(t-(n-1)) \prod_{j=1}^{n-1} (1-s_j),$$

Z čehož plyne

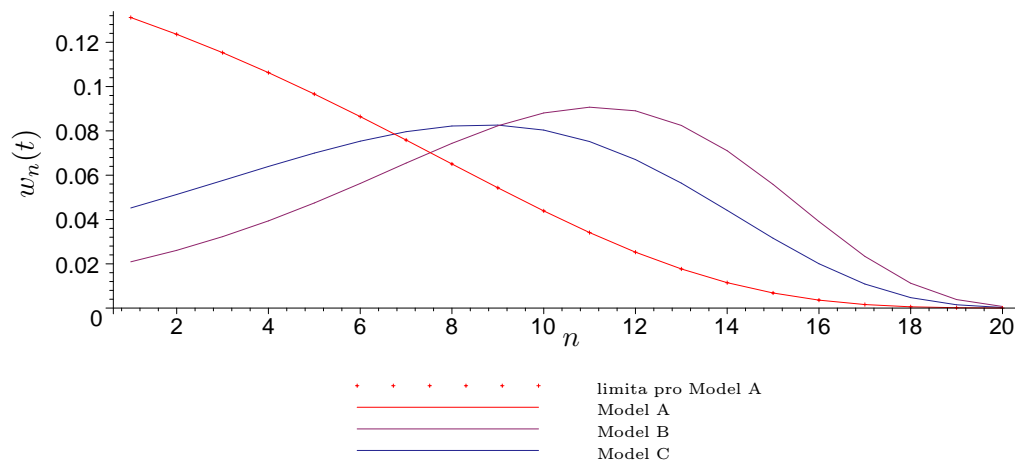
$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_1(t) = \frac{1}{1 + \sum_{n=2}^{n_0} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - s_i)} = w_1.$$

Limity $w_n(t) \rightarrow w_n, t \rightarrow \infty$, pro ostatní n plynou z rovnosti \diamond .

Vzhledem k tomu, že modely jsou na sebe převoditelné pomocí nalezení vhodné přeparametrizace, není nutné odvozovat limity zbylých dvou modelů.

Příklad C.5 (Porovnání „limitních“ rozdělení)

Pro účely srovnání na grafu zobrazujeme limitní případ modelu A a dále pro všechny modely rozdělení stáří smluv po velkém počtu let ($t = 200$).



Graf C.6: Porovnání rozložení stáří rizik v čase $t = 200$ a limitního rozložení modelu A

Dodatek D

Vzorce

Tato kapitola jednak ukazuje souvislosti mezi ukazateli a jednak uvádí vzorce, podle kterých byla provedena implementace v SW Maple.

Máme dány dvě konvergence z definice 1 (portfolia) a definice 2 (BMS)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t = n) = \lim_{t \rightarrow \infty} w_n(t) = w_n = \mathbb{P}(N_\infty = n)$$

a pro uzavřené portfolio

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(Z_{N_t} = j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) = \mathbb{P}_\theta(Z_U^{(\infty)} = j).$$

Následující tvrzení ukazuje limitu v případě otevřeného portfolio, a to bez případného omezení na existenci n_0 .

TVRZENÍ 5 (O KONVERGENCI SAZBOVACÍ ZÁKLADNY): *Mějme otevřené portfolio portfolio \mathcal{O} podle definice 1 a BMS S podle definice 2 (viii), potom (při k_t a \mathcal{K}_t na t nezávislé) pro všechna $j \in \mathcal{K}$ platí*

$$\mathbb{P}_\theta(Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)} = j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(Z_{N_t} = j).$$

Důkaz. Počítejme.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(Z_{N_t} = j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\theta(Z_{N_t} = j | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \mathbb{P}_\theta(Z_{N_\infty} = j) = \mathbb{P}_\theta(Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)} = j). \end{aligned}$$

Prohození pořadí limity a sumy je možné díky existenci konvergentní majoranty, kterou je $\mathbb{P}_\theta(Z_n = j)$. \square

Konvergence platí i nepodmíněně (vzhledem k θ) a plyne z toho, že integrujeme přes $u(\theta)$, což je integrovatelná majoranta a lze zaměnit pořadí lim a \int .

D.1 Průměrná úroveň pojistného

Platí následující vzájemné vztahy mezi různými ukazateli průměrné úrovně pojistného.

$$\begin{aligned} AL_{S,\theta}^{(t)(n)} &= \sum_{j \in \mathcal{K}_t} P_\theta(Z_n = j) \frac{a_t(j)}{a_t(k_t)} & AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} &= \int AL_{S,\theta}^{(t)(n)} dU(\theta) \\ AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) AL_{S,\theta}^{(t)(n)} & AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \int AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} dU(\theta) \\ AL_{S,\theta,\mathcal{F}} &= \sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) AL_{S,\theta}^{(t)(n)} & AL_{S,\mathcal{F}} &= \int AL_{S,\theta,\mathcal{F}} dU(\theta) \end{aligned}$$

a podle tvrzení 5 navíc

$$AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} \quad \text{a} \quad AL_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}.$$

Důkaz. Počítejme

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\theta a(Z_n)}{a(k)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}} \frac{a(j)}{a(k)} P_\theta(Z_n = j) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{K}} \frac{a(j)}{a(k)} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) P_\theta(Z_n = j) \end{aligned}$$

Možnost prohození $\sum_{n=1}^{\infty}$ a $\lim_{t \rightarrow \infty}$ byla ukázána již v důkazu tvrzení 5. Nepodmíněná verze plyne z nepodmíněné verze tvrzení 5. \square

D.2 Koeficient variace

Uvedme sadu vzorců pro koeficient variace a jak závisí na analogii k průměrné úrovni pojistného. Závislosti, jaké máme pro průměrnou úroveň pojistného, mezi koeficienty variace neplatí. Tj. základní ukazatel $CV_{S,\theta}^{(t)(n)}$ nelze ani vyintegrovat přes $U(\theta)$, abychom dostali ukazatel $CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)}$, ani vysčítat přes n a $w_n(t)$ na $CV_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}$.

$$\begin{aligned} CV_{S,\theta}^{(t)(n)} &= \frac{\sqrt{\sum_{j \in \mathcal{K}_t} P_\theta(Z_n = j) \left(\frac{a_t(j)}{a_t(k_t)} \right)^2 - \left(AL_{S,\theta}^{(t)(n)} \right)^2}}{AL_{S,\theta}^{(t)(n)}} \\ CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} &= \frac{\sqrt{\sum_{j \in \mathcal{K}_t} \left(\frac{a_t(j)}{a_t(k_t)} \right)^2 \int P_\theta(Z_n = j) dU(\theta) - \left(AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} \right)^2}}{AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)}} \\ CV_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}_t} P_\theta(Z_n = j) \left(\frac{a_t(j)}{a_t(k_t)} \right)^2 - \left(AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} \right)^2}}{AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}_t} \left(\frac{a_t(j)}{a_t(k_t)} \right)^2 \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) \int \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) dU(\theta) - \left(AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} \right)^2}}{AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}} \\
CV_{S,\theta,\mathcal{F}} &= \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}_t} \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) a_t^2(j) - \left[\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t a_t(k_t) AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} \right]^2}}{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t a_t(k_t) AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}} \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) \left(\frac{a(j)}{a(k)} \right)^2 - \left(AL_{S,\theta,\mathcal{F}} \right)^2}}{AL_{S,\theta,\mathcal{F}}}
\end{aligned}$$

Přitom druhá rovnost platí, pokud \mathcal{K}_t , k_t a a_t na t nezávisí a takto je to i implementováno ve všech výpočtech pro tuto práci.

$$\begin{aligned}
CV_{S,\mathcal{F}} &= \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}_t} a_t^2(j) \int \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) dU(\theta) - \left[\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t a_t(k_t) AL_{S,\mathcal{F}} \right]^2}}{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t a_t(k_t) AL_{S,\mathcal{F}}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{j \in \mathcal{K}} \left(\frac{a(j)}{a(k)} \right)^2 \int \mathbb{P}_\theta(Z_n = j) dU(\theta) - \left(AL_{S,\mathcal{F}} \right)^2}}{AL_{S,\mathcal{F}}}
\end{aligned}$$

Opět druhá rovnost platí, pokud \mathcal{K}_t , k_t a a_t na t nezávisí a takto je to i implementováno ve všech výpočtech pro tuto práci.

Jediná souvislost, která zde platí stejně jako pro průměrné úrovně, je limitní přechod

$$CV_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} CV_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} \quad \text{a} \quad CV_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}.$$

Důkaz by byl zcela analogický k důkazu tvrzení v oddílu D.1.

D.3 Elasticita

Na rozdíl od obou předchozích ukazatelů, je elasticita postavena na tom, že máme tři základní verze

$$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V), \quad ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) \quad \text{a} \quad ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}(V)$$

a ostatní jsou z nich odvozeny jako limita pro $V \rightarrow \infty$ a dále vyintegrováním θ přes $U(\theta)$. Proto uvedeme odvození vzorců jen pro uvedené tři základní a pro asymptotický ukazatel (pro $t \rightarrow \infty$).

I/ $ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)$: Současnou hodnotu pojistného individuálního rizika θ starého n období vypočteme jako

$$\mathbb{E}_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^V \mathbb{E}_\theta a_{t+v}(Z_{n+v}) \beta^{t+v-1} = \sum_{v=0}^V AL_{S,\theta}^{(t+v)(n+v)} a_t(k_t) \beta^{t+v-1}.$$

V celé práci užíváme předpoklad, že $E_\theta X_n = \theta$. Potom je očekávaná současná hodnota škod

$$E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=1}^V E_\theta X_{n+v} \beta^{(t+v-1)+1/2} = \sum_{v=1}^V \theta \beta^{(t+v-1)+1/2}.$$

Z toho plyne

$$\frac{d E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{E_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)} = \frac{\sum_{v=1}^V \beta^{(t+v-1)+1/2} d\theta}{\sum_{v=1}^V \beta^{(t+v-1)+1/2} \theta} = \frac{d\theta}{\theta}$$

a tedy dohromady

$$ELAS_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \frac{\frac{d E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \frac{d E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{d\theta} \frac{\theta}{E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}.$$

Vzhledem k tomu, že v klasickém BMS je sazbovací funkce nezávislá na t , je i tato elasticita pro klasický BMS na t nezávislá.

II/ $ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}$ (V): Současná hodnota pojistného rizika θ v portfoliu starém t období je

$$\begin{aligned} E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(N_t)}(V) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{v=0}^V AL_{S,\theta}^{(t+v)(n+v)} a_t(k_t) \beta^{t+v-1} \\ &= \sum_{v=0}^V \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) AL_{S,\theta}^{(t+v)(n+v)} a_t(k_t) \beta^{t+v-1} \end{aligned}$$

a pokud máme rozdělení X_n nezávislé na n (a to v naší práci u konkrétních výpočtů máme), tak se škody opět zredukuje na θ resp. $d\theta$ a celkově máme

$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)}(V) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \frac{d E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{d\theta} \frac{\theta}{\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}.$$

A to ukazuje proč platí nerovnost 2.4.

III/ $ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}(V)$: Váženou současnou hodnotu pojistného za všechna období t rizik θ máme

$$\begin{aligned} E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(\Omega)(N_\Omega)}(V) &= \sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) E_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sum_{v=1}^V AL_{S,\theta}^{(t+v)(n+v)} a_t(k_t) \beta^{t+v-1} = \\ &= \sum_{v=1}^V \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_t w_n(t) AL_{S,\theta}^{(t+v)(n+v)} a_t(k_t) \beta^{t+v-1}. \end{aligned}$$

Konečný vzorec pro $ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}(V)$ je zřejmý a nebudeme jej uvádět.

IV/ $ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}$: Máme pojistné

$$\mathbf{E}_\theta \mathcal{A}_{S,\theta}^{(\infty)} = \mathbf{E}_\theta a \left(Z_U^{(\infty)} \right) = \sum_{j \in \mathcal{K}} a(j) \mathbf{P}_\theta \left(Z_U^{(\infty)} = j \right)$$

a škody $\mathbf{E}_\theta \mathcal{X}_{S,\theta}^{(\infty)} = \mathbf{E}_\theta X_n = \theta$, takže

$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = \frac{d \mathbf{E}_\theta a \left(Z_U^{(\infty)} \right)}{d\theta} \frac{\theta}{\mathbf{E}_\theta a \left(Z_U^{(\infty)} \right)}.$$

TVRZENÍ 6 (O LIMITĚ ELASTICITY): Necht' a_t , k_t a K_t nezávisí na t a $\beta = 1$, potom

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)(N_t)}(0) = ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}.$$

Důkaz. Při $V = 0$ máme velmi jednoduchý tvar pro pojistné $\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(0) = a(Z_n)$. Dále rozdělíme postup pro uzavřené a otevřené portfolio.

(i) Pro uzavřené portfolio je

$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)(N_t)}(0) = ELAS_{S,\theta}^{(n)(n)} = \frac{d \mathbf{E}_\theta a(Z_n)}{d\theta} \frac{\theta}{\mathbf{E}_\theta a(Z_n)}. \quad (\star)$$

Vzhledem k tvrzení 5 máme $Z_n \rightarrow Z_U^{(\infty)}$ a také $a(Z_n) \rightarrow a(Z_U^{(\infty)})$ pro $n \rightarrow \infty$ a tedy konvergenci obou zlomků v (\star) a tak i celé elasticity, pokud lze v prvním zlomku zaměnit pořadí derivace a limity.

(ii) Pro otevřené portfolio je pojistné

$$\mathbf{E}_\theta \mathcal{A}_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)(N_t)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \mathbf{E}_\theta a(Z_n)$$

a elasticita

$$ELAS_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)(N_t)}(0) = \frac{d \mathbf{E}_\theta \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) a(Z_n)}{d\theta} \frac{\theta}{\mathbf{E}_\theta \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) a(Z_n)}.$$

Jmenovatel druhého zlomku je vlastně průměrné pojistné, které konverguje k $\mathbf{E}_\theta a(Z_O^{(\infty)})$ stejně jako odpovídající průměrná úroveň pojistného.

V obou typech portfolií tedy záleží na možnosti zaměňovat pořadí derivace a limity. Pokud máme $w_n(t)$ přesně podle definice portfolia, sčítáme konečný počet sčítanců (do n_0) a prohození je zřejmé. V případě modelování portfolia obecnějším modelem potřebujeme lokálně stejnoměrnou konvergenci derivací podmíněných pravděpodobností, což zde nebudeme dále zkoumat. Pro BMS modelované markovskými řetězci a uzavřené portfolio viz De Pril (1978). \square

D.4 Norbergovo riziko

Pro Norbergovo riziko máme opět sadu závislostí jako pro průměrnou úroveň pojistného. Připomeňme, že podle předpokladů 1 máme $E_\theta X_n = \theta$.

$$\begin{aligned}
 Q_{S,\theta}^{(t)(n)} &= E [E_\Theta X_n - a_t(Z_n)|\Theta = \theta]^2 & Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} &= E [E_\Theta X_n - a_t(Z_n)]^2 \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{K}} P_\theta(Z_n = j) (\theta - a_t(j))^2 & &= \int Q_{S,\theta}^{(t)(n)} dU(\theta) \\
 Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= E [E_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t})|\Theta = \theta]^2 & Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= E [E_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t})]^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) Q_{S,\theta}^{(t)(n)} & &= \int Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} dU(\theta) \\
 Q_{S,\theta,\mathcal{F}} &= E [E_\Theta X_{N_\Omega} - a_t(Z_{N_\Omega})|\Theta = \theta]^2 & Q_{S,\mathcal{F}} &= E [E_\Theta X_{N_\Omega} - a_t(Z_{N_\Omega})]^2 \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} \omega_t Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} & &= \int Q_{S,\theta,\mathcal{F}} dU(\theta) \\
 Q_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} & Q_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)}
 \end{aligned}$$

D.5 Baesovské sazbovací funkce

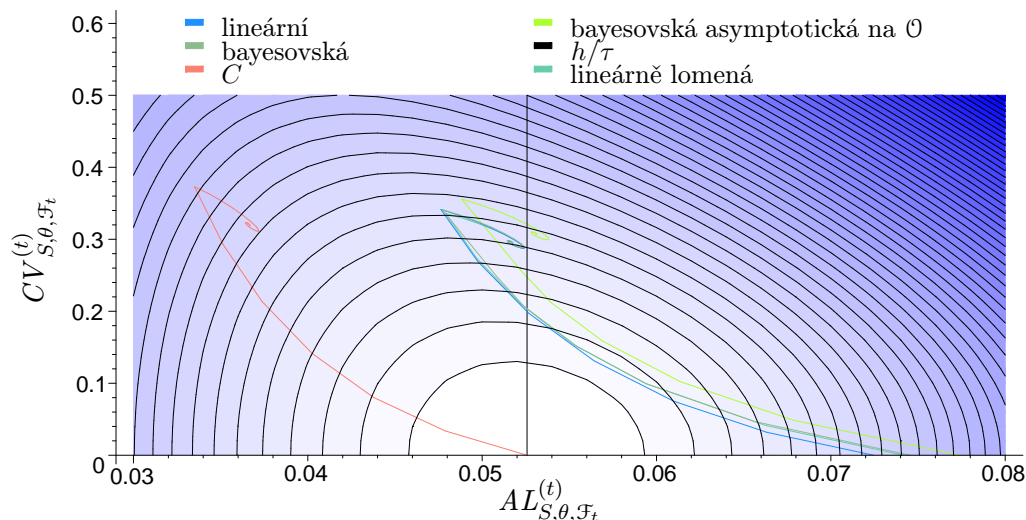
Bayesovské pojistné odpovídající různým Norbergovým rizikům je uvedeno v následujícím výčtu:

$$\begin{aligned}
 Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} \longrightarrow bay^{(n)}(j) &= E [E_\Theta X_n | Z_n = j] = \frac{\int E_\Theta X_n P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)}{\int P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)} \\
 Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} \longrightarrow bay_{\mathcal{F}_t}^{(t)}(j) &= E [E_\Theta X_{N_t} | Z_{N_t} = j] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int E_\Theta X_n P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)}{\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)} \\
 Q_S \longrightarrow bay_{\mathcal{F}}(j) &= E [E_\Theta X_{N_\Omega} | Z_{N_\Omega} = j] = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int E_\Theta X_n P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)}{\sum_{t=1}^{\infty} \omega_t \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int P_\theta(Z_n = j) dU(\theta)} \\
 Q_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} \longrightarrow bay_{\mathcal{F}}^{(\infty)}(j) &= E [E_\Theta X_n | Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j] = \frac{\int E_\Theta X_n P_\theta(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j) dU(\theta)}{\int P_\theta(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j) dU(\theta)}
 \end{aligned}$$

D.6 Souvislost mezi AL , CV a Q

$$\begin{aligned}
Q_{S,\theta}^{(t)(n)} &= \theta^2 & -2a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta}^{(t)(n)} & & + \left(AL_{S,\theta}^{(t)(n)} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\theta}^{(t)(n)} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} &= \int \theta^2 dU(\theta) & -2 \int a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta}^{(t)(n)} dU(\theta) & & + \left(AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \theta^2 & -2a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} & & + \left(AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} &= \int \theta^2 dU(\theta) & -2 \int a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}_t}^{(t)} dU(\theta) & & + \left(AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\theta,\mathcal{F}} &= \theta^2 & -2a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}} & & + \left(AL_{S,\theta,\mathcal{F}} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\theta,\mathcal{F}} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\mathcal{F}} &= \int \theta^2 dU(\theta) & -2 \int a_t(k_t)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}} dU(\theta) & & + \left(AL_{S,\mathcal{F}} a_t(k_t) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\mathcal{F}} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} &= \theta^2 & -2a(k)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} & & + \left(AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} a(k) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} \right)^2 + 1 \right) \\
Q_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} &= \int \theta^2 dU(\theta) & -2 \int a(k)\theta AL_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} dU(\theta) & & + \left(AL_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} a(k) \right)^2 \left(\left(CV_{S,\mathcal{F}}^{(\infty)} \right)^2 + 1 \right)
\end{aligned}$$

Rovnosti se při finanční rovnováze vždy zredukuje na vztah jen mezi Q a CV s θ resp. momenty Θ , ale bez účasti AL . Jednu z rovností jsme využili při ilustraci vývoje všech tří ukazatelů na grafu D.1. Interpretace vztahu je: čím menší CV a čím menší AL , tím menší je Q , jenže AL chceme maximalizovat. Takže při daném AL můžeme optimalizovat jen CV a zoptimalizujeme tak i Q a naopak.



Graf D.1: Červená linka odpovídá červené čárkované čáře z grafu 2.17 pro Keňský BMS bez kalibrace na finanční rovnováhu v každém období t . Čím je vybarvení plochy tmavší, tím vyšší je Q . Svislá čára označuje finanční rovnováhu. Ukazatele jsou vypočteny pro $\theta = E\Theta = h/\tau$.

Literatura

- F. Baione, S. Levantesi, and M. Menzietti. The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market. *ASTIN Bulletin*, 32(1):159–170, 2002.
- L. Bermúdez, M. Denuit, and J. Dhaene. Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. *Journal of Actuarial Practice*, 9(1):84–112, 2001.
- H. Bonsdorf. On the convergence rate of bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, 22(2): 218–223, 1992.
- G. Coene and L. G. Doray. A financially balanced bonus-malus system. *ASTIN Bulletin*, 26 (1):107–116, 1996.
- M. de Lourdes Centeno and J. Manuel Andrade e Silva. Bonus systems in an open portfolio. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28(3):341–350, June 2001. available at <http://ideas.repec.org/a/eee/insuma/v28y2001i3p341-350.html>.
- N. De Pril. The efficiency of a bonus-malus system. *ASTIN Bulletin*, 10.1:59–72, 1978.
- N. De Pril. Optimal claim decisions for a bonus-malus system: A continuous approach. *ASTIN Bulletin*, 10.2:215–222, 1979.
- N. P. Dellaert, J. B. G. Frenk, and E. Voshol. Optimal claim behaviour for third-party liability insurances with perfect information. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10: 145–151, 1991.
- J. Holtan. Bonus made easy. *ASTIN Bulletin*, 24:61–74, 1994.
- J. Holtan. Optimal loss financing under bonus-malus contracts. 30th ASTIN Colloquium, Japan, 22–25 August 1999, 1999.
- J. Lemaire. Si les assurés connaissaient la programmation dynamique. *Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges*, 70:54–63, 1975.
- J. Lemaire. Driver versus company—optimal behaviour of the policy holder. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4:209–219, 1976.
- J. Lemaire. How to define a bonus-malus system with an exponential utility function. *ASTIN Bulletin*, 10.3:274–282, 1979.

- J. Lemaire. Construction of the new belgian motor third. *ASTIN Bulletin*, 18.1:99–112, 1988.
- J. Lemaire. *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer, 1995.
- J. Lemaire and Z. Hongmin. A comparative analysis of 30 bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, 24.2:287–309, 1994a.
- J. Lemaire and Z. Hongmin. High deductibles instead of bonus-malus: Can it work? *ASTIN Bulletin*, 24.1:75–88, 1994b.
- K. Loimaranta. Some asymptotic properties of bonus systems. *ASTIN Bulletin*, 6.3: 233–245, 1972.
- R. Norberg. Credibility premium plans which make allowance for bonus hunger. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1975:73–86, 1975.
- R. Norberg. A credibility theory for automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1976:92–107, 1976.
- R. Norberg, J. M. Hoem, and f. Borgan. A nonasymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1981:165–178, 1981.
- S. Pitrebois, M. Denuit, and J.-F. Walhin. Setting a bonus-malus scale in the presence of other rating factors: Taylor’s work revisited. *ASTIN Bulletin*, 33(2):419–436, 2003a.
- S. Pitrebois, M. Denuit, and J.-F. Walhin. Setting a bonus-malus scale in the presence of other rating factors: Taylor’s work revisited. *ASTIN Bulletin*, Vol. 33(2):419–436, 2003b.
- M. Shengwang, Y. Wei, and G. A. Whitmore. Accounting for individual over-dispersion in a bonus-malus automobile insurance system. *ASTIN Bulletin*, 29(2):327–337, 1999.
- B. Sundt. Bonus hunger and credibility estimators with geometric weights. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8:119–126, 1989.
- B. Sundt and V. Gilde. On bonus system with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1989:13–22, 1989.
- P. Verico. Bonus-malus systems: ”lack of transparency” and adequacy measure. *ASTIN Bulletin*, 32(2):315–318, 2002.
- J. Šváb. Srovnávání systémů bonus—malus. *Seminář z aktuárských věd*, 1999/2000: 126–135, 2000.
- J. Šváb. Hlad po bonusu. *Seminář z aktuárských věd*, 2001/2002:107–111, 2002a.
- J. Šváb. Jak na systémy bonus—malus. *Pojistné rozpravy*, 12:101–132, 2002b.