Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Daniel Krejčí

# Ljapunovova věta, její zobecnění a aplikace

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: Matematika, Matematická analýza

Teorie funkcí, funkcionální analýza a teorie potenciálu

Praha 2007

Poděkování

Děkuji profesoru RNDr. Jaroslavu Lukešovi, DrSc za zajímavé téma a mnoho připomínek a rad.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 2007 Daniel Krejčí

# Obsah

Název práce: Ljapunovova věta, její zobecnění a aplikace

Autor: Daniel Krejčí
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
e-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Ljapunovova věta (the Lyapunov convexity theorem) říká, že obor hodnot neatomické konečně dimenzionální vektorové míry je konvexní a kompaktní. Tato práce se zabývá především nekonečně dimenzionálními analogiemi této věty v případě, že hodnoty vektorové míry leží v obecném Banachově prostoru. Podrobně je diskutován zejména Knowlesův výsledek, udávající ekvivalentní podmínky k tomu, aby každá restrikce dané vektorové míry měla konvexní a slabě kompaktní obor hodnot. Hlavním přínosem práce je zjednodušený a podrobně provedený důkaz známého faktu, že konečně dimenzionální Banachovy prostory jsou platností Ljapunovovy věty dokonce charakterizovány. Diskutovány jsou též prostory s tzv. Ljapunovovou vlastností či některé aplikace Ljapunovovy věty.

Klíčová slova: Ljapunovova věta, vektorové míry, Banachovy prostory, Ljapunovova vlastnost

Title: Ljapunov theorem, its generalizations and applications

Author: Daniel Krejčí
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The Lyapunov convexity theorem states that the range of a finite dimensional nonatomic vector measure is convex and compact. The present work deals mainly with infinite dimensional analogies of this theorem when measures with values in a general Banach space are considered. In particular, the result due to Knowles which gives equivalent conditions for every restrictions of a given vector measure to have a convex and weakly compact range is discussed in detail. The main contribution of this work is to present a simplified and detailed proof of the known fact that finite dimensional Banach spaces are even characterized by the validity of the Ljapunov theorem. Spaces with so-called Ljapunov property and some applications of the Ljapunov theorem are also discussed.

Keywords: Ljapunov theorem, vector measures, Banach spaces, Ljapunov property

# 1 Úvod

Ljapunovova věta (the Lyapunov convexity theorem) říká, že obor hodnot neatomické konečně dimenzionální vektorové míry je konvexní a kompaktní. Tento klasický výsledek o vektorových mírách dokázal poprvé ruský matematik A. A. Ljapunov roku 1940. Sama Ljapunovova věta je matematicky pozoruhodná a existuje též mnoho jejích aplikací. Jsou také neustále publikovány nové či modifikované důkazy této věty. Taktéž byla studována všemožná zobecnění či modifikace této věty.

Tato práce se zabývá především zobecněními za situace, kdy hodnoty uvažované vektorové míry leží v Banachově prostoru obecně nekonečné dimenze. Od počátku jsou známy protipříklady ukazující, že za takové situace Ljapunovova věta ve své originální formulaci obecně neplatí. V monografii [DU77] (str.265) se zřejmě poprvé objevuje tvrzení, že konečně dimenzionální prostory jsou platností Ljapunovovy věty dokonce charakterizovány. Přesněji řečeno, platí, že Banachův prostor $X$ je konečně dimenzionální, právě když obor hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ je konvexní. Tato práce obsahuje dva zjednodušené a podrobně provedené důkazy tohoto faktu. Přitom je použita myšlenka pocházející z [KP92] (str.1193).

V následující kapitole jsou odvozena některá fakta o vektorových mírách s hodnotami v Banachových prostorech, která budou v další kapitole potřeba k důkazu Knowlesova zobecnění Ljapunovovy věty do nekonečné dimenze. Jde zejména o to, že každou vektorovou míru lze "kontrolovat" pomocí obyčejné skalární konečné nezáporné míry (Bartle-Dunford-Schwartz theorem).

# 2 Vektorové míry

Uveďme definici zobecňující běžné "skalární" míry.

**Definice 2.1.** *Buď $X$ reálný Banachův prostor, $\Omega$ množina (zcela abstraktní) a $\mathcal{S}$ $\sigma$-algebra jistých podmnožin $\Omega$. Pak $\mu$ je* vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$ *jestliže platí:*
*(1)* $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow X$ ,
*(2)* $\mu(\varnothing) = 0$ ,
*(3) pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ je*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \text{v normové topologii prostoru } X, \text{ tj.}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \right\| \longrightarrow 0 , \quad N \to \infty .$$

**Poznámka 2.2.** *Jde tedy o zobecnění míry (spočetně aditivní) s hodnotami v $\mathbb{R}$ v tom smyslu, že hodnoty leží v abstraktním Banachově prostoru $X$. Pod "vektory" jsou míněny prvky $X$. Prvky $\mathcal{S}$ jsou nazývány měřitelné množiny.*

**Definice 2.3.** *Vektorová míra $\mu$ na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$ se nazývá* neatomická *jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$, pro kterou $\mu(A) \neq 0$, existuje množina $B \subset A$, $B \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(B) \neq 0$ a zároveň $\mu(A) \neq \mu(B)$.*

*Množina $A \in \mathcal{S}$ je* atom *(přesněji $\mu$-*atom*), jestliže $\mu(A) \neq 0$ a zároveň pro každou $B \subset A$, $B \in \mathcal{S}$ je $\mu(B) = 0$ nebo $\mu(B) = \mu(A)$.*

*Míra $\mu$ je tedy neatomická, pokud $\mathcal{S}$ neobsahuje žádné atomy.*

**Tvrzení 2.4 ("spojitost míry").** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost měřitelných množin, pak platí:*

$$\text{Je-li} \quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \text{ pak } \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) ,$$

$$\text{a je-li} \quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots, \text{ pak } \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) .$$

*Důkaz.* Důkaz probíhá analogicky jako v případě obyčejné (konečné) míry.

Mějme nejprve rostoucí posloupnost měřitelných množin $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Je-li $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdisjunktnění, tj. $D_1 := A_1$, $D_2 := A_2 \setminus A_1$, $D_3 := A_3 \setminus A_2$, atd., je díky $\sigma$-aditivitě:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(D_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) .$$

Mějme nyní klesající posloupnost měřitelných množin $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. Pak $B_n := A_1 \setminus A_n$ je rostoucí posloupnost. Tedy podle první části a s použitím de Morganových pravidel máme:

$$\mu(A_1) - \lim \mu(A_n) = \lim\left[\mu(A_1) - \mu(A_n)\right] = \lim \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) .$$

Odtud $\lim \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

□

Aby bylo možno mluvit o množinách "malé" míry, zaveďme následující množinovou funkci.

**Definice 2.5.** *Při značení z Definice 2.1 definujme pro $E \in \mathcal{S}$ množinovou funkci:*

$$\widetilde{\mu}(E) := sup\left\{\|\mu(A)\| : A \in \mathcal{S}, A \subset E\right\} .$$

*Zřejmě $\widetilde{\mu}$ je nezáporná a monotonní. Ukažme, že $\widetilde{\mu}$ je též subaditivní. Zvolme $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$. Položme $A := A_1 \cup A_2$ a zvolme $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. Pak $B = (A_1 \cap B) \cup ((A_2 \setminus A_1) \cap B)$. Odtud máme:*

$$\begin{aligned} \|\mu(B)\| &\le \|\mu(A_1 \cap B)\| + \|\mu((A_2 \setminus A_1) \cap B)\| \le \\ &\le \widetilde{\mu}(A_1 \cap B) \ + \ \widetilde{\mu}((A_2 \setminus A_1) \cap B) \ \le \ \widetilde{\mu}(A_1) + \widetilde{\mu}(A_2) \ , \end{aligned}$$

*a tedy též $\widetilde{\mu}(A) \le \widetilde{\mu}(A_1) + \widetilde{\mu}(A_2)$.*

*Řekneme, že $A \in \mathcal{S}$ je $\mu$-*omezená *jestliže $\widetilde{\mu}(A) < \infty$.*

Vektorové míry mají následující vlastnost, která je neočekávaná už v případě komplexní míry (srov. [Ru03], str.136).

**Věta 2.6 ( omezenost oboru hodnot vektorové míry ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Pak $\widetilde{\mu}(\Omega) < \infty$.* *(srov. [DU77] I.1.19, [Go65] 2.6.)*

*Důkaz.* Jestliže tvrzení neplatí, jistě existuje měřitelná $E \subset \Omega$ tak, že $\widetilde{\mu}(E) = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $K > 2\|\mu(E)\|$. Z definice suprema existuje $E_1 \in \mathcal{S}, E_1 \subset E$ tak, že $\|\mu(E_1)\| \ge K$. Nyní je $E = E_1 \cup E_2$, kde $E_2 = E \setminus E_1 \in \mathcal{S}$. Protože $\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ máme

$$\|\mu(E_1)\| = \|\mu(E) - \mu(E_2)\| \le \|\mu(E)\| + \|\mu(E_2)\| \ ,$$

tedy

$$\|\mu(E_2)\| \ge \|\mu(E_1)\| - \|\mu(E)\| \ge K - K/2 = K/2 \ .$$

Dále zřejmě alespoň jedna z množin $E_1$, $E_2$ je $\mu$-neomezená, tj. platí alespoň jeden ze vztahů $\widetilde{\mu}(E_1) = \infty$, $\widetilde{\mu}(E_2) = \infty$. Dokázali jsme, že každá $\mu$-neomezená množina obsahuje $\mu$-neomezenou množinu libovolně velké míry. Proto lze najít klesající posloupnost $E_n \in \mathcal{S}$ tak, že:

$$\|\mu(E_n)\| > n \ . \qquad (*)$$

Ze spojitosti míry (Tvrzení 2.4) plyne, že $\lim \mu(E_n)$ existuje a je konečná. Ze spojitosti normy existuje tedy též konečná $\lim\|\mu(E_n)\|$. Spor s $(*)$. □

**Poznámka 2.7.** *Ve Větě 2.6 je předpoklad $\sigma$-aditivity podstatný, pouhá konečná aditivita obecně nestačí (protipříklad viz. [Go65] 2.7.).*

**Definice 2.8.** *Uvažujme opět značení z Definice 2.1. Podobně jako v případech $X = \mathbb{R}$ či $X = \mathbb{C}$ zaveďme další množinovou funkci $|\mu|$ s názvem* totální variace vektorové míry $\mu$. *Pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ definujme:*

$$|\mu|(A) := sup \left\{ \sum_{k=1}^{M} \|\mu(A_k)\| : \{A_k\}_{k=1}^{M} \ \textit{konečný měřitelný rozklad množiny } A \right\} ,$$

*kde $\{A_k\}_{k=1}^{M}$ je konečný měřitelný rozklad množiny $A$, tj. $M \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^{M} A_k = A$, $A_k \cap A_l = \varnothing$ pro $k \ne l$ a $A_k \in \mathcal{S}$.*

*Totální variace $|\mu|$ je zřejmě nezáporná a monotonní.*

V případech reálné (rozumí se konečné) či komplexní míry platí, jak ukážeme ve Větě 2.13, že $|\mu|(\Omega) < \infty$. Naproti tomu následující příklad ukazuje, že v případě obecné vektorové míry může být $|\mu|(\Omega) = \infty$.

**Příklad 2.9 ( vektorová míra s neomezenou variací** ([Co80] str.357, cvič.5b, [LM02] 41.6.)**).** *Položme* $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{S} := exp\,\mathbb{N}$ *a* $X := l^2$. *Pro* $E \subset \mathbb{N}$ *definujme* $\mu(E) := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde*

$$x_n := \begin{cases} 1/n & pro \;\; n \in E \;, \\ 0 & pro \;\; n \notin E \;. \end{cases}$$

*Pak zřejmě* $\mu$ *je vektorová míra na* $(\mathbb{N}, exp\,\mathbb{N})$ *s hodnotami v* $l^2$. *Je-li* $N \in \mathbb{N}$, *máme:*

$$|\mu|(\mathbb{N}) \geq \sum_{n=1}^{N} \|\mu(\{n\})\|_2 + \|\mu(\{N+1, N+2, \dots\})\|_2 \geq \sum_{n=1}^{N} \|\mu(\{n\})\|_2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sqrt{(1/n)^2} = \sum_{n=1}^{N} 1/n \to \infty \;,\; N \to \infty \;.$$

*Tedy* $|\mu|(\mathbb{N}) = \infty$.

**Poznámka 2.10.** *Platí, že dokonce pro* každý $X$ *Banachův prostor nekonečné dimenze existuje vektorová míra s hodnotami v* $X$*, která nemá omezenou variaci. To plyne snadno z hluboké Dvoretzky-Rogersovy věty ([Lu02] *10.4.), podle které v každém Banachově prostoru nekonečné dimenze existuje bezpodmínečně konvergentní řada (tj. konvergentní po každém přerovnání), která není absolutně konvergentní. Buď* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *taková řada (její součet nezávisí na přerovnání - viz. [Lu02] 3.12.). Pro* $A \subset \mathbb{N}$ *definujme:*

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} x_n \;.$$

*Pak* $\mu$ *je zřejmě vektorová míra na* $(\mathbb{N}, exp\,\mathbb{N})$ *s hodnotami v* $X$*, která (zřejmě) nemá omezenou variaci (srov. [DU77] str.32).*

**Definice 2.11.** *Řekneme,že vektorová míra* $\mu$ *má* omezenou variaci, *jestliže* $|\mu|(\Omega) < \infty$.

**Věta 2.12 (** $|\mu|$ **je míra ).** *Buďte* $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ *jako v Definici 2.1, přičemž nechť* $\mu$ *má omezenou variaci. Pak* $|\mu|$ *je nezáporná konečná míra na* $\mathcal{S}$. *(srov. [DU77] I.1.9)*

*Důkaz.* Jde o to ověřit $\sigma$-aditivitu $|\mu|$.

Zvolme nejprve $A, B \in \mathcal{S}$ tak, aby $A \cap B = \emptyset$. Buďte $\{A_k\}_{k=1}^{M}$, $\{B_k\}_{k=1}^{N}$ měřitelné rozklady množin $A, B$. Pak z definice totální variace plyne:

$$\sum_{k=1}^{M} \|\mu(A_k)\| + \sum_{k=1}^{N} \|\mu(B_k)\| \leq |\mu|(A \cup B) \;.$$

Fixujeme-li nyní pevně rozklad množiny $A$ a přejdeme k supremu přes rozklady množiny $B$, máme:

$$\sum_{k=1}^{M} \|\mu(A_k)\| + |\mu|(B) \leq |\mu|(A \cup B) ,$$

a tedy dalším přechodem k supremu též:

$$|\mu|(A) + |\mu|(B) \leq |\mu|(A \cup B) . \qquad (*)$$

Pro důkaz $\sigma$-aditivity zvolme nyní $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjuntních množin z $\mathcal{S}$. Pro $N \in \mathbb{N}$ máme užitím vztahu $(*)$ (a indukce) a monotonie $|\mu|$ následující:

$$\sum_{n=1}^{N} |\mu|(A_n) \leq |\mu| \left( \bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \leq |\mu| \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) ,$$

Odtud:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \leq |\mu| \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) .$$

Dokažme opačnou nerovnost. Buď $\{B_k\}_{k=1}^{M}$ rozklad množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak máme:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \|\mu(B_k)\| &= \sum_{k=1}^{M} \| \mu \left( B_k \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \| = \sum_{k=1}^{M} \| \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_k \cap A_n) \right) \| = \\
&= \sum_{k=1}^{M} \| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_k \cap A_n) \| \leq \sum_{k=1}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(B_k \cap A_n)\| = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{M} \|\mu(B_k \cap A_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) ,
\end{aligned}$$

kde ve třetí rovnosti byla použita $\sigma$-aditivita míry $\mu$, v následující nerovnosti trojúhelníková nerovnost "podrobená" limitnímu přechodu (spojitost normy) a v předposlední rovnosti možnost přerovnat řadu s nezápornými členy beze změny součtu. Přechodem k supremu dostáváme:

$$|\mu| \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) .$$

□

V následující větě se omezíme na reálné míry.

**Věta 2.13 ( reálná míra má omezenou variaci ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1, přičemž nechť $X = \mathbb{R}$. Pak pro každou $A \in \mathcal{S}$ je $|\mu|(A) \leq 2\widetilde{\mu}(A)$. Speciálně vzhledem k Větě 2.6 má $\mu$ omezenou variaci.*

*Důkaz.* Buď $\{A_k\}_{k=1}^M$ konečný měřitelný rozklad množiny $A$. Pak definujeme-li $P := \{k : \mu(A_k) \geq 0\}$ a $Z := \{k : \mu(A_k) < 0\}$, máme:

$$\sum_{k=1}^{M} |\mu(A_k)| = \sum_{k\in P} \mu(A_k) - \sum_{k\in Z} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in P} A_k\right) - \mu\left(\bigcup_{k\in Z} A_k\right) =$$

$$= \left|\mu\left(\bigcup_{k\in P} A_k\right)\right| + \left|\mu\left(\bigcup_{k\in Z} A_k\right)\right| \leq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{k\in P} A_k\right) + \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{k\in Z} A_k\right) \leq 2\widetilde{\mu}(A) ,$$

kde v druhé rovnosti byla použita konečná aditivita $\mu$ a nakonci monotonie $\widetilde{\mu}$. Odtud plyne:

$$|\mu|(A) \leq 2\widetilde{\mu}(A) .$$

□

**Poznámka 2.14.** *V případě komplexní míry dostaneme obdobně odhad* $|\mu|(A) \leq 4\widetilde{\mu}(A)$.

Přikročme k definici zobecňující pojem absolutní spojitosti.

**Definice 2.15.** *Buďte* $\lambda$, $\mu$ *vektorové míry na společném měřitelném prostoru* $(\Omega, \mathcal{S})$. *Pak* $\mu$ je $\lambda$-spojitá ( značení $\mu << \lambda$ ), *jestliže*
*pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechny* $A \in \mathcal{S}$ *platí:*

$$\textit{pokud} \quad \widetilde{\lambda}(A) < \delta \ , \ \textit{pak} \quad \|\mu(A)\| < \varepsilon \ .$$

**Poznámka 2.16.** *Ekvivalentní podmínka je:*
*pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechny* $A \in \mathcal{S}$ *platí:*

$$\widetilde{\lambda}(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mu}(A) < \varepsilon \ .$$

*Tato podmínka je zřejmě silnější než ta, která je použitá v Definici 2.15.*

*Nechť je naopak splněna podmínka z Definice 2.15. Pro* $A \in \mathcal{S}$ *takovou, že* $\widetilde{\lambda}(A) < \delta$, *platí díky monotonii* $\widetilde{\lambda}$ *též* $\widetilde{\lambda}(B) < \delta$ *pro všechny* $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. *Podmínka z definice dává* $\|\mu(B)\| < \varepsilon$ *pro všechny* $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. *Odtud* $\widetilde{\mu}(A) < \varepsilon$.

**Lemma 2.17.** *Buďte* $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ *jako v Definici 2.1. Je-li* $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ *klesající posloupnost měřitelných množin v* $\Omega$ *a je-li* $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \varnothing$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(E_n) = 0$.

*Důkaz.* Nechť (pro spor) $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(E_n) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ a vybraná posloupnost z $\{E_n\}$( označme ji opět $\{E_n\}$) tak, že $\widetilde{\mu}(E_n) > \delta$. Definujme vybranou posloupnost $\{E_{n_k}\}$ z $\{E_n\}$ následujícím způsobem.

$$E_{n_1} := E_1 \ .$$

Protože $\widetilde{\mu}(E_1) > \delta$, existuje $A_1 \in \mathcal{S}$, $A_1 \subset E_1$ tak, že $\|\mu(A_1)\| > \delta$. Protože $E_n \cap A_1 \searrow \varnothing$, existuje ze "spojitosti míry"(Tvrzení 2.4) a spojitosti normy index $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že:

$$\|\mu(E_{n_2} \cap A_1)\| < \frac{\delta}{2} \ .$$

Definujme:

$$F_1 := A_1 \setminus E_{n_2} \ .$$

Jelikož $F_1 \cup (E_{n_2} \cap A_1) = A_1$, musí být

$$\|\mu(F_1)\| > \frac{\delta}{2}$$

(jinak bychom z aditivity $\mu$ a trojúhelníkové nerovnosti dostali $\|\mu(A_1)\| < \delta$, což je spor s předchozím).

V k. kroku uvážíme, že $\widetilde{\mu}(E_{n_k}) > \delta$. Najdeme měřitelnou $A_k \subset E_k$ tak, že $\|\mu(A_k)\| > \delta$. Ze "spojitosti míry" najdeme index $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tak, že:

$$\|\mu(E_{n_{k+1}} \cap A_k)\| < \frac{\delta}{2} \ ,$$

a položíme-li:

$$F_k := A_k \setminus E_{n_{k+1}} \ ,$$

máme:

$$\|\mu(F_k)\| > \frac{\delta}{2} \ .$$

Takto sestrojíme indukcí dvě posloupnosti $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že:

$$\begin{aligned} &(1) \quad F_k \subset E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}} \ , \\ &(2) \quad \|\mu(F_k)\| > \frac{\delta}{2} \ . \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $E_n$ klesají, plyne z (1) disjunktnost množin $F_k$. Díky $\sigma$-aditivitě řada $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)$ konverguje. Nutná podmínka k tomu je $\lim_{k\to\infty} \|\mu(F_k)\| = 0$, což je spor s (2). □

**Tvrzení 2.18 (" spojitost $\widetilde{\mu}$ ").** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost měřitelných množin. Pak platí:*

$$\textit{Je-li} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \textit{ pak } \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(A_n) = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ ,$$

$$\textit{a je-li} \quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots, \textit{ pak } \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(A_n) = \widetilde{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ .$$

*Důkaz.* Buď nejdříve $\{A_n\}$ klesající. Zvolme $\varepsilon > 0$. Neboť je $[A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k] \searrow \emptyset$, plyne z lemmatu 2.17, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ je:

$$\widetilde{\mu}\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon \ .$$

Odtud pořadě z monotonie a subaditivity $\widetilde{\mu}$ máme:

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \widetilde{\mu}(A_n) \le \widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \widetilde{\mu}\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \widetilde{\mu}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \varepsilon \ .$$

V případě $\{A_n\}$ rostoucí je důkaz analogický. $\square$

**Tvrzení 2.19.** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Pak $\widetilde{\mu}$ je též spočetně subaditivní,tj. je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin z $\mathcal{S}$, platí:*

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_n) \ .$$

*Důkaz.* Zvolme $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin z $\mathcal{S}$. Pak s pomocí subaditivity $\widetilde{\mu}$ pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme:

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{N} \widetilde{\mu}(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_n) \ .$$

Přejdeme-li s využitím Tvrzení 2.18 na levé straně k limitě $N \to \infty$, máme:

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_n) \ .$$

$\square$

Platí následující charakterizace absolutní spojitosti zobecňující analogické charakterizace pro skalární míry (pro $\mu$ nezápornou konečnou je ovšem $\widetilde{\mu} = \mu$).

**Věta 2.20 ( Pettis ).** *Buďte $\lambda$, $\mu$ vektorové míry na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Pak $\mu << \lambda$, právě když pro všechny $A \in \mathcal{S}$ platí:*

$$\widetilde{\lambda}(A) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \widetilde{\mu}(A) = 0 \ .$$

*Důkaz.* "$\Rightarrow$": Nechť je $\widetilde{\lambda}(A) = 0$. Volme $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Dle předpokladu plyne odtud pro každou měřitelnou $B \subset A$ nerovnost $\|\mu(B)\| < \frac{1}{n}$. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo voleno libovolně, je nutně $\widetilde{\mu}(A) = 0$.

"$\Leftarrow$": Pro spor nechť $\mu$ není $\lambda$-spojitá. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k $\delta_n := \frac{1}{2^n}$ množina $A_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\widetilde{\lambda}(A_n) < \frac{1}{2^n}$ a zároveň $\widetilde{\mu}(A_n) \ge \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme:

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

Monotonie $\widetilde{\mu}$ dává:

$$\widetilde{\mu}(B_n) \ge \widetilde{\mu}(A_n) \ge \varepsilon \ .$$

Díky monotonii posloupnosti $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne z Tvrzení 2.18, že je též:

$$\widetilde{\mu}(B) \geq \varepsilon \ , \quad \text{kde jsme označili} \quad B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ . \qquad (*)$$

Zároveň však ze spočetné subaditivity $\widetilde{\lambda}$ (Tvrzení 2.19) plyne:

$$\widetilde{\lambda}(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{\lambda}(A_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ .$$

Poslední výraz konverguje k nule pro $n \to \infty$ jako zbytek konvergentní řady. Odtud $\widetilde{\lambda}(B_n) \to 0$, a protože $B \subset B_n$, je díky monotonii $\widetilde{\lambda}$ nutně $\widetilde{\lambda}(B) = 0$. Podle předpokladu je tedy též $\widetilde{\mu}(B) = 0$. Spor s $(*)$. $\square$

**Definice 2.21.** *Rodina $\{\mu_i : i \in I\}$ vektorových měr na společném měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ je* omezená*, jestliže existuje $M > 0$ tak, že:*

$$\sup\{\|\mu_i(A)\| : i \in I, A \in \mathcal{S}\} \leq M \ .$$

*Dále řekneme, že rodina $\{\mu_i : i \in I\}$ je* stejnoměrně $\sigma$-aditivní*, jestliže pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$, platí:*

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_i(A_n) \longrightarrow \mu_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ \textit{stejnoměrně vzhledem k } i \in I \ ,$$

*neboli jinak zapsáno:*

$$\sup_{i \in I} \left\| \sum_{n=1}^{N} \mu_i(A_n) - \mu_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \right\|_X \longrightarrow 0 \ , \quad N \to \infty \ .$$

**Tvrzení 2.22.** *Buď $\{\mu_i : i \in I\}$ rodina vektorových měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$ a $\lambda$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $Y$. Nechť rodina vektorových měr $\{\mu_i : i \in I\}$ je omezená a $\mu_i << \lambda$ pro každé $i \in I$. Je-li rodina $\{\mu_i : i \in I\}$ navíc ještě stejnoměrně $\sigma$-aditivní, pak je též stejnoměrně $\lambda$-spojitá.*

*Důkaz.* Rodina $\{\mu_i\}_{i \in I}$ může být považována za jednu množinovou funkci $\mu : A \mapsto \{\mu_i(A)\}_{i \in I}$ s hodnotami v kartézském součinu $X^I$. Definujme:

$$Z := \left\{\{\alpha_i\} \in X^I : \sup \|\{\alpha_i\}\|_Z < \infty\right\} \ , \quad \text{kde}$$
$$\|\{\alpha_i\}\|_Z := \sup_{i \in I} \|\alpha_i\|_X \ .$$

Pak $(Z, \|\cdot\|_Z)$ je Banachův prostor, přičemž vektorové operace jsou definovány "po složkách". Díky předpokladu omezenosti rodiny $\{\mu_i : i \in I\}$ leží obor hodnot $\mu$ v $Z$. Díky předpokladu stenoměrné $\sigma$-aditivity rodiny $\{\mu_i : i \in I\}$ je $\mu$ $\sigma$-aditivní. Díky předpokladu $\mu_i << \lambda$ platí zřejmě sada implikací:

$$\widetilde{\lambda}(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\mu_i(E)\| = 0 \text{ , pro } i \in I \quad \Rightarrow \quad \|\mu(E)\| = 0 \text{ .}$$

Odtud s použitím netriviální implikace Věty 2.20 (Pettis) máme $\mu << \lambda$. Odtud plyne, že $\{\mu_i : i \in I\}$ je stejnoměrně $\lambda$-spojitá. □

**Tvrzení 2.23.** *Buď $\{\mu_i : i \in I\}$ rodina reálných měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$, která je omezená a stejnoměrně $\sigma$-aditivní. Pak existuje nezáporná míra $\lambda$ na $\mathcal{S}$ tak, že platí $\mu_i << \lambda$ stejnoměrně vůči $i \in I$. Navíc lze míru $\lambda$ zvolit tak, aby pro každou $A \in \mathcal{S}$ platilo:*

$$\lambda(A) \leq \sup\{\widetilde{\mu}_i(A) : i \in I\} \text{ .}$$

*Důkaz.* Nejdříve dokažme následující **fakt**: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná podmnožina indexů $J \subset I$ tak, že pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí:

$$|\mu_j|(A) = 0 \text{ pro každé } j \in J \quad \Rightarrow \quad |\mu_i(A)| < \varepsilon \text{ pro každé } i \in I \text{ .}$$

Důkaz faktu: Nechť (pro spor) fakt neplatí. Postupnou konstrukcí indukcí, kdy v negaci faktu volíme $J$ vhodně "čím dál větší" lze snadno ověřit, že existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost měr $\{\mu_n\}$ z uvažované rodiny a posloupnost množin $\{A_n\}$ z $\mathcal{S}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} &(1) \quad |\mu_i|(A_n) = 0 \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ,} \\ &(2) \quad |\mu_{n+1}(A_n)| \geq \varepsilon \text{ .} \end{aligned}$$

Položme:

$$F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ .}$$

Pak podle (1) a (2) platí:

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1}(F_n)| = \left|\mu_{n+1}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\right| &= |\mu_{n+1}(A_n) + \mu_{n+1}(A_{n+1}) + \mu_{n+1}(A_{n+2}) + \cdots| = \\ &= |\mu_{n+1}(A_n) + 0 + 0 + \cdots| \geq \varepsilon \text{ .} \qquad (3) \end{aligned}$$

Uvažujeme-li nyní zdisjunktněnou posloupnost $D_1 := A_1$, $D_2 := A_2 \setminus A_1$, $D_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ..., pak díky stejnoměrné $\sigma$-aditivitě musí být:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_i(D_k) \longrightarrow \mu_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\right) \text{ stejnoměrně pro } i \in \mathbb{N} \text{ ,}$$

neboli:

$$\begin{aligned}\sup_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\mu_i(D_k)-\mu_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k\right)\right| &= \sup_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\mu_i(A_k)-\mu_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\right| = \\ &= \sup_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\mu_i(A_k)\right| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left|\mu_i\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\right| = \\ &= \sup_{i\in\mathbb{N}}|\mu_i(F_n)| \longrightarrow 0\ , \quad n\to\infty\ ,\end{aligned}$$

což je ve sporu s (3) a fakt je dokázán.

Podle faktu existuje k $\varepsilon := \frac{1}{m}$ konečná podmnožina indexů $J_m \subset I$ tak, že pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí:

$$|\mu_j|(A) = 0 \ \text{ pro každé } \ j \in J_m \quad \Rightarrow \quad |\mu_i(A)| < \frac{1}{m} \ \text{ pro každé } \ i \in I\ .$$

Definujme:

$$\lambda_m := \sum_{k\in J_m}\frac{1}{2^k}|\mu_k|\ .$$

S použitím Vět 2.12 a 2.13 je zřejmé, že $\lambda_m$ jsou nezáporné konečné míry na $\mathcal{S}$. Platnost faktu dává pro $A \in \mathcal{S}$:

$$\lambda_m(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mu_i(A)| < \frac{1}{m} \ \text{ pro každé } \ i \in I\ . \qquad (5)$$

Dále s využitím odhadu z Věty 2.13 máme pro každou $A \in \mathcal{S}$:

$$\lambda_m(A) = \sum_{k\in J_m}\frac{1}{2^k}|\mu_k|(A) \le \sup\{2\widetilde{\mu}_k(A) : k \in J_m\} \le 2M\ , \qquad (6)$$

kde $M := \sup\{\widetilde{\mu}_i(A) : i \in I, A \in \mathcal{S}\}$, což je konečné číslo díky předpokladu omezenosti rodiny $\{\mu_i : i \in I\}$. Nakonec položme:

$$\lambda := \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{2^n}\ .$$

Snadný odhad s využitím (6) dává pro $A \in \mathcal{S}$:

$$\lambda(A) \le M\ .$$

Protože řady s kladnými členy lze přerovnávat bez ovlivnění součtu, lze snadno ověřit $\sigma$-aditivitu $\lambda$. Tedy $\lambda$ je též nezáporná konečná míra.

Jestliže nyní pro $A \in \mathcal{S}$ platí $\lambda(A) = 0$, pak je $\lambda_m(A) = 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, a tedy dle (5) je $|\mu_i(A)| < \frac{1}{m}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, a tedy $\mu_i(A) = 0$ (dokonce $\widetilde{\mu}_i(A) = 0$, jak je snadno vidět). Dle Věty 2.20 (Pettis) je tedy $\mu_i << \lambda$ pro každé $i \in I$ a Tvrzení 2.22 (jehož předpoklady jsou zřejmě splněny) dává dokonce stejnoměrnou $\lambda$-spojitost rodiny měr $\{\mu_i : i \in I\}$. $\square$

Následuje jedna z centrálních vět o vektorových mírách. Její důkaz se opírá o Hahn-Banachovu větu.

**Věta 2.24 ( Bartle-Dunford-Schwartz (1955) ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Pak existuje nezáporná míra $\lambda$ na $\mathcal{S}$ tak, že:*

$$(a) \quad \mu << \lambda \; ,$$
$$(b) \quad \lambda(A) \leq \widetilde{\mu}(A) \quad \textit{pro všechny } A \in \mathcal{S} \; , \; \textit{speciálně tedy } \lambda << \mu \; .$$

*Je-li navíc $\mu$ neatomická, je $\lambda$ nutně též neatomická.*

*Důkaz.* Nejdříve přejdeme od vektorové míry $\mu$ k jisté rodině reálných měr. Za tím účelem definujme:

$$I := \{\varphi : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1\} \; .$$

Pro každý funkcionál $\varphi \in I$ definujme množinovou funkci $\mu_\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$\mu_\varphi := \varphi \circ \mu \; .$$

Zřejmě $\mu_\varphi$ je reálná míra na $(\Omega, \mathcal{S})$. S použitím "Schwarzovy" nerovnosti máme:

$$|\mu_\varphi(A)| = |\varphi(\mu(A))| \leq \|\varphi\|\|\mu(A)\| \leq \|\mu(A)\| \leq \widetilde{\mu}(A) \leq \widetilde{\mu}(\Omega) \; ,$$

tedy rodina $\{\mu_\varphi : \varphi \in I\}$ je omezená. Dokažme, že rodina $\{\mu_\varphi : \varphi \in I\}$ je stejnoměrně $\sigma$-aditivní. Zvolme tedy posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$. Pak zřejmě

$$\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n+1}^\infty A_k = \varnothing \; ,$$

a tedy dle lemmatu 2.17 je:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu} \left( \bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) = 0 \; .$$

Pro každou míru z uvažované rodiny máme:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \mu_\varphi(A_k) - \mu_\varphi \left( \bigcup_{k=1}^\infty A_k \right) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^\infty \mu_\varphi(A_k) \right| = \left| \mu_\varphi \left( \bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) \right| \leq \\ &\leq \|\varphi\| \left\| \mu \left( \bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) \right\| \leq \\ &\leq \widetilde{\mu} \left( \bigcup_{k=n+1}^\infty A_k \right) \longrightarrow 0 \; , \quad n \to \infty \; . \end{aligned}$$

Aplikace Tvrzení 2.23 dává existenci nezáporné míry $\lambda$ na $\mathcal{S}$ takové, že rodina $\{\mu_\varphi : \varphi \in I\}$ je vůči ní stejnoměrně $\lambda$-spojitá. Odtud s použitím duálního vyjádření normy ([Lu02] 2.24.) máme následující. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny $A \in \mathcal{S}$ platí:

$$\lambda(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup\{|\varphi(\mu(A))| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1\} = \|\mu(A)\| < \varepsilon ,$$

tedy $\mu << \lambda$.

Přejděme k důkazu bodu (b). Odhad z Tvrzení 2.23 dává pro $A \in \mathcal{S}$ následující:

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &\leq \sup\{\widetilde{\mu}_\varphi(A) : \varphi \in I\} \\
&= \sup\{\sup\{\|\mu_\varphi(B)\| : B \in \mathcal{S}, B \subset A\} : \varphi \in I\} \\
&= \sup\{\|\mu_\varphi(B)\| : B \in \mathcal{S}, B \subset A, \varphi \in I\} \\
&= \sup\{\sup\{|\varphi(\mu(B))| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1\} : B \in \mathcal{S}, B \subset A\} \\
&= \sup\{\|\mu(B)\| : B \in \mathcal{S}, B \subset A\} \\
&= \widetilde{\mu}(A) .
\end{aligned}$$

Dokažme ještě poslední tvrzení věty. Z bodů (a), (b) s přihlédnutím k Větě 2.20 (Pettis) plyne, že pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí:

$$\lambda(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\mu}(A) = 0 . \qquad (*)$$

Buď nyní $\mu$ neatomická. Nechť (pro spor) $\mathcal{S}$ obsahuje $\lambda$-atom $A$. Pak je $\lambda(A) > 0$. Tedy díky $(*)$ je též $\widetilde{\mu}(A) > 0$. Existuje tedy $B \subset A$, $B \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(B) \neq 0$. Z neatomičnosti míry $\mu$ existuje $C \subset B$, $C \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(C) \neq 0$, a zároveň:

$$\mu(B \setminus C) = \mu(B) - \mu(C) \neq 0 ,$$

tedy též $\widetilde{\mu}(C) \neq 0$ a $\widetilde{\mu}(B \setminus C) \neq 0$. Díky $(*)$ je nyní $\lambda(C) \neq 0$ a zároveň:

$$\lambda(A \setminus C) = \lambda(B \setminus C) + \lambda(A \setminus B) \geq \lambda(B \setminus C) > 0 ,$$

tedy $A$ není $\lambda$-atom. Spor. □

**Poznámka 2.25.** *Jeli $\mu$ vektorová míra a $\lambda$ nezáporná konečná míra taková, že $\mu << \lambda$, názývá se někdy míra $\lambda$* "control measure" *pro míru $\mu$ ([DU77] str.11). Předchozí věta zaručuje existenci "control measure" $\lambda$ pro zadanou $\mu$. Tato věta zaručuje dokonce existenci nezáporné konečné míry* vzájemně *absolutně spojité se zadanou vektorovou mírou (takové míry jsou v [KK75] nazývány* ekvivalentní*), což bude později též podstatně využito (v kapitole 6).*

**Poznámka 2.26.** *Věty 2.20 (Pettis) a 2.24 (Bartle-Dunford-Schwartz) jsou v [BDS55] a [DS58] dokázovány neelementárně. Elementární a čtivé podání lze najít v [Go65]. Zdá se být stručnější než postup v [DU77], i když ne nepodobné, a je použito též v této práci.*

**Poznámka 2.27.** *Je-li vektorová míra $\mu$ speciálně znaménková či komplexní míra, pak totální variace $|\mu|$ je zřejmě "control measure" pro $\mu$.*

*Je-li vektorová míra $\mu$ konečně dimenzionální, čili je-li $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, kde $\mu_i$ jsou reálné míry na $\mathcal{S}$, pak nezáporná míra $\lambda := |\mu_1| + |\mu_2| + \cdots + |\mu_n|$ je zřejmě "control measure" pro $\mu$.*

Pro definování integrálu podle vektorové míry bude mít význam následující definice.

**Definice 2.28.** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Množinová funkce $\|\mu\|$ definovaná pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ předpisem:*

$$\|\mu\|(A) := sup\left\{\left\|\sum \alpha_i \mu(A_i)\right\| : \{A_i\} \text{ konečný měřitelný rozklad } A,\ |\alpha_i| \leq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}\right\} ,$$

*se nazývá* semivariace vektorové míry *$\mu$. Semivariace $\|\mu\|$ je zřejmě nezáporná a monotonní.*

Již víme, že vektorová míra nemusí mít omezenou variaci, má však vždy omezenou semivariaci.

**Tvrzení 2.29 ( omezenost semivariace).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Pak pro každou $A \in \mathcal{S}$ je $\|\mu\|(A) \leq 2\widetilde{\mu}(A)$.* (srov. [DS58] IV.10.4)

*Důkaz.* Pro $A \in \mathcal{S}$ máme:

$$\begin{aligned}
\|\mu\|(A) &= \sup_{\substack{|\alpha_i|\le 1\\ \{A_i\}}} \left\| \sum \alpha_i \mu(A_i) \right\| \\
&= \sup_{\substack{|\alpha_i|\le 1\\ \{A_i\}}} \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} \left| \varphi\left(\sum \alpha_i \mu(A_i)\right) \right| \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} \sup_{\substack{|\alpha_i|\le 1\\ \{A_i\}}} \left| \sum \alpha_i \varphi\left(\mu(A_i)\right) \right| \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} \sup_{\{A_i\}} \sum \left| (\varphi\circ\mu)\left(A_i\right) \right| \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} |\varphi\circ\mu|\,(A) \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} 2\widetilde{(\varphi\circ\mu)}\,(A) \\
&= 2 \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} \sup_{\substack{B\in\mathcal{S}\\ B\subset A}} |(\varphi\circ\mu)(B)| \\
&\le 2 \sup_{\substack{B\in\mathcal{S}\\ B\subset A}} \sup_{\substack{\varphi\in X^*\\ \|\varphi\|\le 1}} \|\varphi\|\|\mu(B)\| \\
&\le 2 \sup_{\substack{B\in\mathcal{S}\\ B\subset A}} \|\mu(B)\| \\
&= 2\widetilde{\mu}(A)\ ,
\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme použili duální vyjádření normy a asi uprostřed úprav Větu 2.13 pro reálnou míru $\varphi\circ\mu$ (snadno se ověří, že $\varphi\circ\mu : \mathcal{S}\to\mathbb{R}$ je skutečně reálná míra na $(\Omega,\mathcal{S})$ ). □

Nyní není problém definovat *integrál* z reálné ("esenciálně") omezené měřitelné funkce *podle vektorové míry.*

**Definice 2.30.** *Buďte $\Omega,\mathcal{S},\mu,X$ jako v Definici 2.1. Reálná funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$ je $\mathcal{S}$-*měřitelná, *jestliže vzory otevřených množin v $\mathbb{R}$ jsou prvky $\mathcal{S}$. Reálná funkce $s:\Omega\to\mathbb{R}$ je* jednoduchá, *je-li $\mathcal{S}$-měřitelná a její obor hodnot je konečná množina. Takovou funkci lze vyjádřit pomocí charakteristických funkcí v tzv.* kanonickém tvaru*:*

$$s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{E_j}\ ,$$

*kde $E_j\in\mathcal{S}$, $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$, $\lambda_j\ne\lambda_i$ pro $j\ne i$, $E_j\cap E_i=\varnothing$ pro $j\ne i$, $\bigcup_{j=1}^N E_j = X$. Očíslujeme-li konečně mnoho různých hodnot funkce $s$ od jedničky do $N$, stačí zřejmě vzít* *za $E_j$ vzor $j$-té hodnoty funkce $s$. Načež definujme:*

$$\int_\Omega s\,d\mu := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, \mu(E_j)\ .$$

Stejně jako v případě skalární míry zjistíme nejprve snadno pomocí konečné aditivity, že hodnota integrálu se nezmění, vynecháme-li v Definici 2.30 požadavek, aby $\lambda_j \neq \lambda_i$ pro $j \neq i$, a po té dokážeme, že definovaný integrál je lineární na prostoru jednoduchých funkcí. Proveďme to.

**Tvrzení 2.31.** *V Definici 2.30 lze vynechat požadavek, aby $\lambda_j \neq \lambda_i$ pro $j \neq i$, aniž se změní hodnota integrálu.*

*Důkaz.* Důkaz plyne z konečné aditivity $\mu$. Zvolme $s$ jednoduchou funkci. Nechť $s = \sum_{j=1}^{N^*} \lambda_j^*\, \chi_{E_j^*}$ je vyjádření splňující požadavky z Definice 2.30 obecně kromě požadavku $\lambda_j^* \neq \lambda_i^*$ pro $j \neq i$. Buď $s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, \chi_{E_j}$ kanonické vyjádření funkce $s$. Pak máme:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N^*} \lambda_j^*\, \mu(E_j^*) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\{j:\, \lambda_j^* = \lambda_i\}} \lambda_j^*\, \mu(E_j^*) &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, \mu\left( \bigcup_{\{j:\, \lambda_j^* = \lambda_i\}} E_j^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, \mu(E_i) = \int_\Omega s\,d\mu\ .\end{aligned}$$

□

**Tvrzení 2.32 (aditivita pro jednoduché funkce).** *Buďte $s^1, s^2$ jednoduché funkce, pak*

$$\int_\Omega s^1\,d\mu + \int_\Omega s^2\,d\mu = \int_\Omega (s^1 + s^2)\,d\mu\ .$$

*Důkaz.* Buď $s^1 = \sum_{j=1}^{N^1} \lambda_j^1\, \chi_{E_j^1}$, $s^2 = \sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j^2\, \chi_{E_j^2}$ kanonická vyjádření funkcí $s^1$ a $s^2$. Uvažme následující konečný měřitelný rozklad množiny $\Omega$:

$$\mathcal{D} := \{E_j^1 \cap E_i^2 : j \in \{1, 2, \ldots, N^1\},\, i \in \{1, 2, \ldots, N^2\},\, E_j^1 \cap E_i^2 \neq \varnothing\}\ .$$

Rozklad $\mathcal{D}$ je "společné zjemění" předchozích v tom smyslu , že funkce $s^1, s^2, s^1 + s^2$ jsou konstantní na prvcích tohoto rozkladu. Ve změněném označení lze psát: $\mathcal{D} = \{F_i : i \in \{1, 2, \ldots, M\}\}$. Zvolme libovolně $x_i \in F_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$. S pomocí Tvrzení 2.31 máme:

$$\begin{aligned}\int_\Omega s^1\,d\mu + \int_\Omega s^2\,d\mu &= \sum_{i=1}^{M} s_i^1(x_i)\, \mu(F_i) + \sum_{i=1}^{M} s_i^2(x_i)\, \mu(F_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{M} (s_i^1 + s_i^2)(x_i)\, \mu(F_i) = \int_\Omega (s^1 + s^2)\,d\mu\ .\end{aligned}$$

□

Nyní odvoďme "Schwarzovu nerovnost" na prostoru jednoduchých funkcí.

**Tvrzení 2.33 ("Schwarz" pro jednoduché funkce).** *Buď $s : \Omega \to \mathbb{R}$ jednoduchá funkce. Pak platí:*

$$\left\| \int_\Omega s \, d\mu \right\| \leq \|s\|_\infty \|\mu\|(\Omega) \ ,$$

*kde $\|s\|_\infty$ značí supremovou normu, tj. $\|s\|_\infty := \sup\{|s(w)| : w \in \Omega\}$.*

*Důkaz.* Pro $s$ v kanonickém tvaru máme:

$$\left\| \int_\Omega s \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{j=1}^N \lambda_j \, \mu(E_j) \right\| \leq \|s\|_\infty \left\| \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\|s\|_\infty} \, \mu(E_j) \right\| \leq \|s\|_\infty \|\mu\|(\Omega) \ ,$$

kde poslední nerovnost plyne z definice semivariace. □

**Tvrzení 2.34 ( o hustotě jednoduchých funkcí ).** *Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je omezená měřitelná funkce. Pak existují $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ jednoduché funkce tak, že $s_n \rightrightarrows f$ na $\Omega$ a zároveň $|s_n| \nearrow |f|$.*

*Důkaz.* (a) Buď nejprve $f$ navíc nezáporná. Použijeme obvyklou konstrukci (viz. např. [LM02] 3.9.) k sestrojení pospoupnosti $\{s_n\}$ nezáporných jednoduchých funkcí takových, že $s_n \nearrow f$. Protože $f$ je omezená, plyne z této konstrukce zřejmě navíc $s_n \rightrightarrows f$.

(b) V obecném případě použijeme rozklad $f = f^+ - f^-$ a na každou z nezáporných funkcí $f^+, f^-$ aplikujeme bod (a). Získáme tak posloupnosti $s_n^+$ a $s_n^-$ takové, že $s_n^+ \rightrightarrows f^+$, $s_n^- \rightrightarrows f^-$, $s_n^+ \nearrow f^+$ a $s_n^- \nearrow f^-$. Odtud $s_n^+ - s_n^- \rightrightarrows f$ na $\Omega$, přičemž funkce $s_n := s_n^+ - s_n^-$ jsou zřejmě jednoduché. Dále

$$|s_n| = \left|s_n^+ - s_n^-\right| = s_n^+ + s_n^- \nearrow f^+ + f^- = |f| \ .$$

□

**Definice 2.35.** *Pro $f : \Omega \to \mathbb{R}$ omezenou měřitelnou definujme:*

$$\int_\Omega f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, d\mu \ ,$$

*kde $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou jednoduché funkce takové, že $s_n \rightrightarrows f$.*

*Korektnost definice:*

*1) Existence limity. Z aditivity integrálu a Tvrzení 2.33 ("Schwarz") pro jednoduché funkce plyne odhad:*

$$\left\| \int_\Omega s_n \, d\mu - \int_\Omega s_k \, d\mu \right\| = \left\| \int_\Omega (s_n - s_k) \, d\mu \right\| \leq \|s_n - s_k\|_\infty \|\mu\|(\Omega) \ .$$

*Protože je $\|\mu\|(\Omega) < \infty$ (Tvrzení 2.29), plyne z $\|\cdot\|_\infty$-cauchyovskosti posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ $\|\cdot\|_X$-cauchyovskost posloupnosti $\{\int_X s_n \, d\nu\}_{n=1}^\infty$, a tedy s použitím úplnosti $X$ též její konvergence.*

*2) Jednoznačnost. Nechť $s_n \rightrightarrows f$, $t_n \rightrightarrows f$, $I_1 := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n\, d\mu$, $I_2 := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega t_n\, d\mu$. Posloupnost s "prostřídanými" členy $\{s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots\}$ je zřejmě též posloupnost jednoduchých funkcí stejnoměrně konvergující k $f$. Označíme-li $I_3$ limitu posloupnosti odpovídajících integrálů, máme $I_1 = I_2 = I_3$, neboť jde o limity vybraných posloupností.*

**Tvrzení 2.36 ( linearita integrálu ).** *Buďte $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ omezené měřitelné funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

$$\alpha \int_\Omega f\, d\mu + \beta \int_\Omega g\, d\mu = \int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, d\mu \ .$$

*Důkaz.* Pro jednoduché funkce již máme aditivitu (Tvrzení 2.32), homogenita se dokáže snadno. Zbytek se dokáže snadno limitním přechodem. □

**Tvrzení 2.37.** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Buď $\varphi \in X^*$ a buď $f : \Omega \to \mathbb{R}$ omezená měřitelná funkce. Pak $\varphi \circ \mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ je konečná znaménková míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ a platí:*

$$\varphi \left( \int_\Omega f\, d\mu \right) = \int_\Omega f\, d(\varphi \circ \mu) \ .$$

*Důkaz.* Tvrzení, že $\varphi \circ \mu$ je konečná znaménková míra, se ověří snadno s pomocí linearity a spojitosti funkcionálu $\varphi$.

Buď $f = \chi_A$ charakteristická funkce měřitelné množiny $A \in \mathcal{S}$. Pak tvrzení přechází v identitu:

$$\varphi \left( \int_\Omega \chi_A\, d\mu \right) = \varphi\left(\mu(A)\right) = (\varphi \circ \mu)(A) = \int_\Omega \chi_A\, d(\varphi \circ \mu) \ .$$

Díky linearitě obou stran v $f$ platí tvrzení též pro jednoduché funkce. Je-li nyní $f$ omezená měřitelná, pak podle Tvrzení 2.34 existují jednoduché funkce takové, že $s_n \rightrightarrows f$ na $\Omega$ a zároveň $|s_n| \nearrow |f|$. Limitní přechod (nalevo definice integrálu a spojitost $\varphi$, napravo Lebesgueova věta (pro znaménkovou míru) s konvergentní majorantou $|f|$) dává tvrzení. □

Budeme potřebovat umět integrovat ještě o něco obecnější funkce než omezené (srovn. [HS69] 20.32).

**Definice 2.38.** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Buď $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$, kde $\lambda$ je nezáporná konečná míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ a buď $\mu << \lambda$. Pak definujme:*

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f^*\, d\mu \ ,$$

*kde $f^*$ je omezený reprezentant $L^\infty$-třídy určené funkcí $f$.*

*Jednoznačnost definice: Buďte $f^*, f^{**}$ dva omezení reprezentanti $L^\infty$-třídy funkce $f$. Označíme-li $A := \{w \in \Omega : f^*(w) - f^{**}(w) \neq 0\}$, pak $\lambda(A) = 0$, a tedy též $\widetilde{\mu}(A) = 0$. S použitím linearity integrálu máme:*

$$\int_\Omega f^*\, d\mu - \int_\Omega f^{**}\, d\mu = \int_\Omega (f^* - f^{**})\, d\mu =$$
$$= \int_\Omega \chi_A (f^* - f^{**})\, d\mu + \int_\Omega \chi_{A^c} (f^* - f^{**})\, d\mu = 0 + 0 = 0 \ ,$$

*kde druhý integrál je nula, neboť zřejmě $\chi_{A^c}(f^* - f^{**}) = 0$. Zdůvodněme nulovost prvního integrálu. Díky Tvrzení 2.34 existují jednoduché funkce takové, že $s_n \rightrightarrows f^* - f^{**}$ na $\Omega$. Pak zřejmě $\chi_A s_n \rightrightarrows \chi_A(f^* - f^{**})$ na $\Omega$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme z definice integrálu z jednoduché funkce $\int_\Omega \chi_A s_n \, d\mu = 0$, neboť je $\widetilde{\mu}(A) = 0$. Odtud též $\int_\Omega \chi_A(f^* - f^{**}) \, d\mu = 0$.*

Linearita integrálu zřejmě zůstává v platnosti i po uvedeném rozšíření definice na funkce z $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$, a protože platí-li $\mu << \lambda$, je zřejmě též $\varphi \circ \mu << \lambda$, zůstává v platnosti, jak se snadno ověří, též Tvrzení 2.37.

Připomeňme, že pro $\lambda$ nezápornou konečnou míru na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ platí $(L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda))^* \cong L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$ (tento reprezentační teorém je v podstatě důsledkem Radon-Nikodýmovy věty, i když ne okamžitým, viz. [Ru03] 6.12 nebo [Co90] appendix B (viz. též kapitola 9 (Dodatek))). Tedy $L^\infty(\lambda)$ má preduál. Dokažme nyní významný důsledek Věty 2.24 (Bartle-Dunford-Schwartz).

**Důsledek 2.39 ( Bartle-Dunford-Schwartz ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Buď $\lambda$ míra nezáporná konečná na $\mathcal{S}$ taková, že $\mu << \lambda$ (existuje podle Věty 2.24). Pak definujeme-li operátor $T : L^\infty(\Omega, \lambda, \mathcal{S}) \to X$ předpisem:*

$$T : f \longmapsto \int_\Omega f \, d\mu \ ,$$

*je $T$ lineární a je spojitý vůči $w^*$-topologii na $L^\infty(\lambda)$ a $w$-topologii na $X$ a platí pro něj, že*

$$T(\chi_A) = \mu(A) \qquad \text{pro každou } A \in \mathcal{S} \ .$$

*Důkaz.* $T$ je na $L^\infty(\lambda)$ dobře definován (viz. Definice 2.38). Linearita $T$ plyne z linearity integrálu. Protože je $\mu << \lambda$, je zřejmě též $\varphi \circ \mu << \lambda$, pro každý $\varphi \in X^*$. Použijeme-li Tvrzení 2.37 a Radon-Nikodýmovu větu pro znaménkovou míru, pak pro každý funkcionál $\varphi \in X^*$ máme:

$$\varphi(T(f)) = \varphi\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) = \int_\Omega f \, d(\varphi \circ \mu) = \int_\Omega f \frac{d(\varphi \circ \mu)}{d\lambda} \, d\lambda \ , \qquad (\triangle)$$

kde $\frac{d(\varphi \circ \mu)}{d\mu} =: g_\varphi \in L^1(\lambda)$ je Radon-Nikodýmova derivace znaménkové míry $\varphi \circ \mu$ podle míry $\lambda$.

Ukažme nyní $w^*$- $w$ spojitost $T$.

(1) Důkaz pomocí netů (používáme "Heineho definici spojitosti pro nety", viz. např. [Lu02] C.12.): Zvolme $f_\alpha \overset{w^*}{\to} f_0$ $w^*$-konvergentní net v $L^\infty(\lambda)$, přičemž prvky $L^\infty(\lambda)$ ztotožňujeme s funkcionály z $(L^1(\lambda))^*$. Zvolme ještě $\varphi \in X^*$. Pak dle $(\triangle)$ máme:

$$\varphi(T(f_\alpha)) = \int_\Omega f_\alpha g_\varphi \, d\lambda = f_\alpha(g_\varphi) \longrightarrow f_0(g_\varphi) = \int_\Omega f_0 g_\varphi \, d\lambda = \varphi(T(f_0)) \ ,$$

tedy $T(f_\alpha) \overset{w}{\to} T(f_0)$.

(2) Důkaz bez netů (Použijeme následující známou vlastnost slabých topologií (viz. např. [Kr] 2.3.věta8). Nechť topologie na $X$ je slabě vytvořená souborem zobrazení $\{\varphi_i\}_{i \in I}$,

kde $\varphi_i : X \to Y_i$. Prostory $Y_i$ jsou topologické. Buď $Z$ další topologický prostor. Pak zobrazení $T : Z \to X$ je spojité, právě když každé složené zobrazení $\varphi_i \circ T : Z \to Y_i$ je spojité.) V našem případě je:

$$\begin{aligned}
&X = (\, X, \sigma(X, X^*)\,) = (\, X, w\text{-topologie}\,) \\
&Z = (\, (L^1(\lambda))^*, \sigma((L^1(\lambda))^*, \varepsilon L^1(\lambda))\,) = (\, (L^1(\lambda))^*, w^*\text{-topologie}\,) \\
&Y_i = \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Zobrazení $T$ bude $w^*$- $w$ spojité, pokud ukážeme, že pro každé $\varphi \in X^*$ je $\varphi \circ T : L^\infty(\lambda) \to \mathbb{R}$ $w^*$-spojité. Avšak pro $f \in L^\infty(\lambda)$ je podle ($\triangle$):

$$(\varphi \circ T)(f) = \int_\Omega f g_\varphi \, d\lambda = f(g_\varphi) = \varepsilon_{g_\varphi}(f)\ ,$$

tedy $\varphi \circ T \in \varepsilon L^1(\lambda)$. Proto je $\varphi \circ T$ je $w^*$-spojité, neboť $w^*$-topologie je nejmenší topologií na $(L^1(\lambda))^* \cong L^\infty(\lambda)$, v níž jsou všechny funkcionály z kanonického obrazu $\varepsilon L^1(\lambda)$ spojité.

Konečně pro $A \in \mathcal{S}$ je podle definice integrálu opravdu:

$$T(\chi_A) = \int_\Omega \chi_A \, d\mu = \mu(A)\ .$$

□

**Poznámka 2.40.** *Je-li vektorová míra $\mu$ speciálně konečně dimenzionální, čili je-li $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, kde $\mu_i$ jsou reálné míry na $\mathcal{S}$, pak $T$ má následující tvar:*

$$T(f) = \left( \int_\Omega f \, d\mu_1, \int_\Omega f \, d\mu_2, \cdots, \int_\Omega f \, d\mu_n \right) \in \mathbb{R}^n \qquad \textit{pro} \;\; f \in L^\infty(\lambda)\ ,$$

*kde $\lambda := |\mu_1| + |\mu_2| + \cdots + |\mu_n|$. (srov. s pozn. 2.27)*

Následující důsledek říká, že obor hodnot vektorové míry je vždy relativně slabě kompaktní.

**Důsledek 2.41 ( Bartle-Dunford-Schwartz ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1. Pak $w$-uzávěr oboru hodnot $\mu$ je $w$-kompaktní.*

*Důkaz.* Buď $T$ operátor z Důsledku 2.39. Podle Alaogluovy věty (viz. [Lu02] 7.4., 16.6. ) je jednotková koule $\{f \in L^\infty(\lambda) : \|f\|_\infty \le 1\}$ $w^*$-kompaktní. Díky $w^*$- $w$ spojitosti $T$ je $T(\{f \in L^\infty(\lambda) : \|f\|_\infty \le 1\})$ $w$-kompaktní množina. Pro obor hodnot $\mu$ nyní máme

$$\mu(\mathcal{S}) = \{\mu(A) : A \in \mathcal{S}\} = \{T(\chi_A) : A \in \mathcal{S}\} \subset T\left(\{f \in L^\infty(\lambda) : \|f\|_\infty \le 1\}\right)\ ,$$

odtud:

$$\overline{\mu(\mathcal{S})}^{\,w} \subset T\left(\{f \in L^\infty(\lambda) : \|f\|_\infty \le 1\}\right)\ ,$$

a protože uzavřená podmnožina topologického kompaktního prostoru je kompaktní, jsme hotovi. □

**Tvrzení 2.42.** *Mějme situaci jako v Důsledku 2.39. Pak množina*

$$U := \{f \in L^\infty(\lambda) : 0 \le f \le 1\} \qquad \textit{je} \quad w^*\textit{-uzavřená} \quad .$$

*Důkaz.* (a) Důkaz pomocí netů (používáme charakterizaci uzávěru množiny v topologickém prostoru pomocí netů viz. např. [Lu02] C.8.): Nechť $\{f_\alpha\} \subset U$ je net a nechť $f_\alpha \overset{w^*}{\to} f_0 \in L^\infty(\lambda)$. Pak zřejmě $0 \le f_0 \le 1$, tedy $f_0 \in U$.

(b) Důkaz bez netů: Dokažme nejprve následující pomocný fakt:

$$f \in U \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \int_\Omega fg\, d\lambda \le \int_\Omega g\, d\lambda \quad \text{pro všechny } \ g \ge 0,\, g \in L^1(\lambda)\ .$$

"$\Rightarrow$": zřejmé.
"$\Leftarrow$": Volíme-li speciálně $g := \chi_E$, kde $E \in \mathcal{S}$, dostáváme:

$$0 \le \int_E f\, d\lambda\ , \qquad \int_E (f-1)\, d\lambda \le 0 \quad \text{pro všechny } \ E \in \mathcal{S}\ ,$$

tedy máme ( [LM02] 8.18.):

$$0 \le f \quad \lambda\text{-s.v.}\ , \qquad\qquad f - 1 \le 0 \quad \lambda\text{-s.v.}\ .$$

Celkem $0 \le f \le 1$ $\lambda$-s.v., tedy $f \in U$.

Jinak zapsáno, říká pomocný fakt následující:

$$\begin{aligned} U &= \bigcap_{\substack{g \ge 0 \\ g \in L^1(\lambda)}} \left\{ f : 0 \le \int_\Omega fg\, d\lambda \le \int_\Omega g\, d\lambda \right\} \\ &= \bigcap_{\substack{g \ge 0 \\ g \in L^1(\lambda)}} \{ f : 0 \le f(g) \le \|g\|_1 \} \\ &= \bigcap_{\substack{g \ge 0 \\ g \in L^1(\lambda)}} \{ f : 0 \le \varepsilon_g(f) \le \|g\|_1 \}\ , \end{aligned}$$

a protože $\varepsilon_g$ je $w^*$-spojitá funkce, je množina $U$ $w^*$-uzavřená. □

Připomeňme, že $x \in C$ je *extremálním bodem* konvexní množiny $C$, jestliže ze vztahu $x = \frac{a+b}{2}$, kde $a, b \in C$ plyne, že $a = b$, tj. jestliže $x$ není středem žádné (netriviální) úsečky s koncovými body v $C$.

**Tvrzení 2.43.** *Mějme situaci jako v Důsledku 2.39. Pak množina*

$$U = \{f \in L^\infty(\lambda) : 0 \le f \le 1\}$$

*je $w^*$-kompaktní a konvexní a extremální body $U$ jsou právě všechny charakteristické funkce množin z $\mathcal{S}$*

*Důkaz.* Konvexita $U$ se ověří snadno.

Protože $U$ je $w^*$-uzavřená (Tvrzení 2.42) a je podmnožinou uzavřené jednotkové koule, která je $w^*$-kompakt dle Alaogluovy věty, je $U$ též $w^*$-kompaktní.

Každá charakteristická funkce $\chi_A$, kde $A \in \mathcal{S}$, je zřejmě extremálním bodem $U$.

Naopak nechť $f_0 \in U$ není charakteristická funkce množiny z $\mathcal{S}$. Tedy označíme-li $B := \{w \in \Omega : f_0(w) \notin \{1, 0\}\} \in \mathcal{S}$, je $\lambda(B) > 0$. Nyní máme:

$$E_\varepsilon := \{w \in \Omega : \varepsilon \leq f_0(w) \leq 1 - \varepsilon\} \nearrow B \;, \quad \varepsilon \to 0^+$$

(symbol "$\nearrow$" znamená, že platí $E_{\varepsilon_1} \subset E_{\varepsilon_2}$ pro $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ a $\bigcup_{\varepsilon>0} E_\varepsilon = B$). Kdyby bylo $\lambda(E_\varepsilon) = 0$ pro všechna $\varepsilon > 0$, pak by ze spojitosti míry bylo též $\lambda(B) = 0$, což by byl spor. Existuje tedy $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $\lambda(E) > 0$ a $\varepsilon \leq f_0 \leq 1 - \varepsilon$ na $E$. Definujme nyní:

$$f_0^1 := \begin{cases} f_0 & \text{na } E^c \;, \\ f_0 + \frac{\varepsilon}{2} & \text{na } E \;, \end{cases}$$

$$f_0^2 := \begin{cases} f_0 & \text{na } E^c \;, \\ f_0 - \frac{\varepsilon}{2} & \text{na } E \;. \end{cases}$$

Pak $f_0^1, f_0^2 \in U$, $f_0^1 \neq f_0^2$ a přitom:

$$f_0 = \frac{f_0^1 + f_0^2}{2} \;,$$

tedy $f_0$ není extremálním bodem množiny $U$. $\square$

Následuje další z důsledků týkajících se oboru hodnot vektorové míry. Je-li $A \subset X$, značí $\overline{conv} A$ nejmenší uzavřenou konvexní nadmnožinu množiny $A$. Připomeňme, že v každém Banachově prostoru (dokonce v každém topologickém vektorovém prostoru) platí $\overline{conv} A = \overline{conv A}$, kde $conv A$ značí nejmenší konvexní nadmnožinu množiny $A$.

**Důsledek 2.44.** *Mějme situaci jako v Důsledku 2.39. Pak platí:*

$$\overline{conv}\mu(\mathcal{S}) = \left\{ \int_\Omega f \, d\mu : f \in L^\infty(\lambda), \, 0 \leq f \leq 1 \right\} \;.$$

*(srov. [Vl99] 1.2.6, [DU77] IX.1.3(c))*

*Důkaz.* Buď $T$ operátor z Důsledku 2.39. Označme:

$$V := \left\{ \int_\Omega f \, d\mu : f \in L^\infty(\lambda), \, 0 \leq f \leq 1 \right\} \;,$$
$$U := \{f \in L^\infty(\lambda) : 0 \leq f \leq 1\} \;.$$

"$\subset$": Máme:

$$\mu(\mathcal{S}) = T(\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\}) \subset T(U) = V \;.$$

Protože $V$ je zřejmě konvexní, je:

$$conv\,\mu(\mathcal{S}) \subset V \ .$$

Podle Tvrzení 2.43 je $U$ $w^*$-kompaktní. Díky $w^*$-$w$ spojitosti $T$ je tedy $V = T(U)$ $w^*$-kompaktní, speciálně $w^*$-uzavřená (protože jsme v Hausdorffově prostoru, viz. [Kr] 7.3.7.). Protože pro konvexní množiny splývá slabý a normový uzávěr ( [Lu02] 16.2.), je $V$ též normově uzavřená, tedy máme:

$$\overline{conv}\mu(\mathcal{S}) = \overline{conv\,\mu(\mathcal{S})} \subset V \ .$$

"$\supset$": Podle Tvrzení 2.43 je konvexní množina $U$ $w^*$-kompaktní a její extremální body jsou právě charakteristické funkce měřitelných množin. Podle Krejn-Milmanovy věty ( [Lu02] 18.5.) je:

$$U = \overline{conv}^{w^*}\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\} = \overline{conv\,\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\}}^{w^*} \ .$$

Je známo, že je-li zobrazení $f$ mezi topologickými prostory spojité, je $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pro každou množinu A ( [Kr] 2.1.2.). V našem případě spojitost $T$ dává (využíváme též linearity $T$, resp. toho, že konvexní obal a lineární obraz komutují):

$$V = T(U) = T\left(\overline{conv\,\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\}}^{w^*}\right) \subset$$
$$\subset \overline{T\,(conv\,\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\})}^{w} = \overline{conv\,T\,(\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\})} = \overline{conv}\mu(\mathcal{S}) \ .$$

□

# 3 Ljapunovova věta a její zobecnění

Následuje věta, která je zobecněním klasické Ljapunovovy věty do nekonečné dimenze. Jde vlastně o zobecnění Lindenstraussova funkcionálně analytického přístupu z [Li66].

**Věta 3.1 ( Knowles (1975), Ljapunovova věta ve slabé topologii ).** *Buď $\mu$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$. Buď $\lambda$ míra nezáporná konečná na $\mathcal{S}$ taková, že $\mu << \lambda$ (existuje podle Věty 2.24). Buď*

$$T:\, L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda) \to X:\, f \longmapsto \int_\Omega f\, d\mu$$

*operátor daný integrováním podle vektorové míry $\mu$. Pro $A \in \mathcal{S}$ označme*

$$\chi_A L^\infty(\lambda) := \{\, \chi_A f : f \in L^\infty(\lambda)\,\}$$

*podprostor těch funkcí z $L^\infty(\lambda)$, které se anulují mimo $A$. Pak je ekvivalentní:*

*(1) Pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ takovou, že $\lambda(A) > 0$ platí, že restrikce operátoru $T$ na podprostor $\chi_A L^\infty(\lambda)$ není prostá.*

*(2) Pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ je množina $\{\mu(A \cap B) : B \in \mathcal{S}\}$ $w$-kompaktní a konvexní.*

*(3) Pro každou funkci $0 \neq f \in L^\infty(\lambda)$ existuje funkce $g \in L^\infty(\lambda)$ tak, že $fg \neq 0$ a $\int_\Omega fg\, d\mu = 0$.*

*Důkaz.* Implikace (3)⇒(1) je sice snadná (za $f$ ve (3) stačí volit $\chi_A$ z (1)), avšak postup důkazu je následující: (1)⇒(3)⇒(2)⇒(1).

(1)⇒(3): Buď $f \in L^\infty(\lambda)$, $f \neq 0$. Tedy označíme-li $B := \{w \in \Omega : f(w) \neq 0\}$, je $\lambda(B) > 0$. Dále je:

$$A_\varepsilon := \{w \in \Omega : |f(w)| > \varepsilon\} \nearrow B \,, \quad \varepsilon \to 0^+$$

(symbol "$\nearrow$" znamená, že platí $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$ pro $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ a $\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = B$). Kdyby bylo $\lambda(A_\varepsilon) = 0$ pro všechna $\varepsilon > 0$, pak by ze spojitosti míry bylo též $\lambda(B) = 0$, což by byl spor. Existují tedy $\varepsilon > 0$ a $A \in \mathcal{S}$ tak, že $\lambda(A) > 0$ a $|f| > \varepsilon$ na $A$. Podle (1) existuje $h \in L^\infty(\lambda)$ tak, že $\chi_A h \neq 0$ a přitom $0 = T(\chi_A h) = \int_\Omega fg \, d\mu$. Položme:

$$g := \begin{cases} \frac{\chi_A h}{f} & \text{na } A \,, \\ 0 & \text{na } A^c \,. \end{cases}$$

Pak $fg \neq 0$ a přitom:

$$\int_\Omega fg \, d\mu = \int_\Omega \chi_A h \, d\mu = 0 \,.$$

(2)⇒(1): Nechť pro spor (1) neplatí. Tedy existuje $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{S}$, $\lambda(\widetilde{\Omega}) > 0$ tak, že $T$ je prostý na $\chi_{\widetilde{\Omega}} L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda) \cong L^\infty(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{\lambda})$, kde $\widetilde{\mathcal{S}} := \{E \cap \widetilde{\Omega} : E \in \mathcal{S}\}$ je restringovaná $\sigma$-algebra a $\widetilde{\lambda}$ je restrikce míry $\lambda$ na $\widetilde{\mathcal{S}}$. Použijeme-li (2) a Důsledek 2.44 (kde vše je restringované na $\widetilde{\Omega}$, resp. na $\widetilde{\mathcal{S}}$) v druhé a třetí z následujících rovností, máme:

$$\begin{aligned} T\left(\left\{\chi_A : A \in \widetilde{\mathcal{S}}\right\}\right) &= \mu(\widetilde{\mathcal{S}}) = \overline{conv}(\mu(\widetilde{\mathcal{S}})) \\ &= \left\{\int_{\widetilde{\Omega}} f \, d\mu : f \in L^\infty(\widetilde{\lambda}),\, 0 \leq f \leq 1\right\} \\ &= T\left(\left\{f \in L^\infty(\widetilde{\lambda}),\, 0 \leq f \leq 1\right\}\right) \,. \end{aligned}$$

Odtud je zcela jasné, že $T$ není na $L^\infty(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{\lambda})$ prostý, což je hledaný spor.

(3)⇒(2) ("Lindenstrauss's argument" z [Li66]): Zvolme $A \in \mathcal{S}$. Máme ukázat, že $\{\mu(A \cap B) : B \in \mathcal{S}\}$ je $w$-kompaktní a konvexní množina. Postup bude stejný, avšak zápis jednodušší (bez vlnek z předchozího bodu), budeme-li BÚNO předpokládat, že $A = \Omega$. Máme tedy ukázat, že $\mu(\mathcal{S})$ je $w$-kompaktní a konvexní. Ukážeme, že z platnosti (3) plyne:

$$\mu(\mathcal{S}) = T(U) = V \,,$$

kde

$$\begin{aligned} V &:= \left\{\int_\Omega f \, d\mu : f \in L^\infty(\lambda),\, 0 \leq f \leq 1\right\} \,, \\ U &:= \{f \in L^\infty(\lambda) : 0 \leq f \leq 1\} \,. \end{aligned}$$

Ukážeme-li to, pak konvexnost $\mu(\mathcal{S})$ plyne z linearity $T$ a zřejmé konvexnosti $U$ a $w$-kompaktnost $\mu(\mathcal{S})$ plyne z $w^*$- $w$ spojitosti $T$ a $w^*$-kompaktnosti $U$ (Tvrzení 2.43) ("spojitý obraz kompaktu je kompakt"). Zbývá tedy ověřit $\mu(\mathcal{S}) = T(U)$.

"$\subset$": Zřejmě je: $\mu(\mathcal{S}) = T\left(\{\chi_A : A \in \mathcal{S}\}\right) \subset T(U)$.

"$\supset$": Zvolme $p \in T(U)$. Označme množinu těch prvků $U$, které se pomocí $T$ zobrazí na $p$ následovně:

$$K_p := \{\, g \in U : Tg = p \,\} = T^{-1}\left(\{p\}\right) \cap U \;.$$

Ukážeme-li, že $K_p$ obsahuje charakteristickou funkci nějaké množiny $E \in \mathcal{S}$, budeme hotovi, neboť pak $p = T(\chi_E) = \mu(E) \in \mu(\mathcal{S})$.

Množina $T^{-1}(\{p\})$ je $w^*$-uzavřená jako vzor jednobodové (tedy $w^*$-uzavřené) množiny při $w^*$-spojitém zobrazení $T$. Protože $U$ je $w^*$-kompaktní (Tvrzení 2.43), je $K_p = T^{-1}(\{p\} \cap U$ též $w^*$-kompaktní a podle Krejn-Milmanovy věty obsahuje $K_p$ extremální bod $g_0$. Ukážeme, že $g_0$ musí být charakteristická funkce měřitelné množiny.

Nechť (pro spor) $g_0$ není charakteristická funkce množiny z $\mathcal{S}$. Pak existuje $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $\lambda(E) > 0$ a $\varepsilon \leq g_0 \leq 1 - \varepsilon$ na $E$ (viz. důkaz Tvrzení 2.43). Položme:

$$f := \chi_E \neq 0 \;.$$

Podle (3) existuje funkce $g \in L^\infty(\lambda)$ tak, že $\chi_E g \neq 0$ a

$$\int_\Omega \chi_E g \, d\mu = 0 = T\left(\chi_E g\right) \;.$$

Položme nyní:

$$\widetilde{g} := \frac{\chi_E g}{\|g\|_\infty} \varepsilon \neq 0 \;.$$

Máme $-\epsilon \leq \widetilde{g} \leq \epsilon$ a $T(\widetilde{g}) = 0$. Tedy $g_0 + \widetilde{g}, g_0 - \widetilde{g} \in U$, neboť $0 \leq g_0 \pm \widetilde{g} \leq 1$. Dále $g_0 + \widetilde{g}, g_0 - \widetilde{g} \in K_p$, neboť díky linearitě $T$ je:

$$T\left(g_0 \pm \widetilde{g}\right) = T(g_0) \pm T(\widetilde{g}) = T(g_0) \pm 0 = T(g_0) = p \;.$$

Dále $g_0 + \widetilde{g} \neq g_0 - \widetilde{g}$, neboť $\widetilde{g} \neq 0$. Konečně je:

$$g_0 = \frac{g_0 - \widetilde{g}}{2} + \frac{g_0 + \widetilde{g}}{2} \;.$$

tedy $g_0$ není extremální bod $K_p$. Spor. $\square$

**Poznámka 3.2.** *Za "Lindenstraussovým argumentem" obsaženým v implikaci (3)$\Rightarrow$(2) lze vidět jistou ideu* "konvexifikace" *(srov. [Ba02] str.131). Pokusme se ji popsat. Jde nám o zkoumání oboru hodnot množinové funkce $\mu$ na $\mathcal{S}$. Prvkům $E \in \mathcal{S}$ "odpovídají" charakteristické funkce $\chi_E$. Místo zobrazení $E \mapsto \mu(E)$, lze zkoumat zobrazení $\chi_E \mapsto \mu(E)$. Nyní jde o to, rozšířit definiční obor tohoto zobrazení bez rozšíření oboru hodnot z charakteristických funkcí na větší množinu funkcí, která bude* konvexní *a kompaktní, a na níž bude navíc toto zobrazení lineární a spojité. Nyní stačí využít faktu, že spojitý lineární obraz konvexního kompaktu je konvexní kompakt.*

**Poznámka 3.3.** *Věta 3.1 tedy dává nutnou a postačující podmínku k tomu, aby obor hodnot vektorové míry a zároveň obory hodnot všech jejích restrikcí, byly konvexní a slabě kompaktní. Tato podmínka říká, že vektorová míra má být v určitém smyslu "dostatečně neprostá" (přesněji jde o neprostotu restrikcí operátoru daného integrací dle této míry).*

*Splňuje-li vektorová míra $\mu$ ekvivalentní podmínky z Věty 3.1, je již nutně neatomická. Kdyby totiž množina $A \in \mathcal{S}$ byla atom, pak by restrikce míry $\mu$ na tento atom měla obor hodnot roven dvouprvkové množině $\{0, \mu(A)\}$, což není konvexní množina. Spor s podmínkou* (2).

Jako důsledek dostáváme klasickou Ljapunovu větu.

**Věta 3.4 ( Ljapunov, 1940 ).** *Buď $\mu : \mathcal{S} \to X$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Nechť Banachův prostor $X$ je konečně dimenzionální a nechť míra $\mu$ je neatomická. Pak obor hodnot $\mu$ je konvexní a kompaktní podmnožina $X$.*

*Důkaz.* Nechť $dim X = n$. Ověřme, že je splněna podmínka (1) z Věty 3.1. Zvolme tedy $A \in \mathcal{S}$ tak, aby $\lambda(A) > 0$. Ukažme, že prostor $Y_A := \chi_A L^\infty(\lambda) \subset\subset L^\infty(\lambda)$ má dimenzi větší než $n$ (ve skutečnosti je $dim Y_A = \infty$). S využitím neatomičnosti $\mu$ snadno postupně sestrojíme posloupnost $\{E_k\}_{k=1}^{n+1}$ množin z $\mathcal{S}$ tak, že:

$$A \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_{n+1} \ ,$$
$$\mu(A) > \mu(E_1) > \mu(E_2) > \cdots > \mu(E_{n+1}) > 0 \ .$$

Je zřejmé, že $\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \ldots, \chi_{E_{n+1}} \in Y_A$ jsou lineárně nezávislé (položíme-li totiž $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \chi_{E_i} = 0$, dostáváme nutně $c_1 = 0$, odtud nutně $c_2 = 0$, atd. až $c_{n+1} = 0$). Odtud:

$$dim Y_A > n \ .$$

Lineární operátor $T$ tedy nemůže prostor $Y_A$ prostě zobrazovat do prostoru $X$, jehož dimenze je $n$.

Tvrzení nyní plyne z Věty 3.1. □

# 4 Charakterizace konečně dimenzionálních prostorů pomocí Ljapunovovy věty

V této části ukážeme, že platí dokonce obrácení Ljapunovovy věty v tom smyslu, že konečně dimenzionální prostory jsou platností Ljapunovovy věty charakterizovány.

**Lemma 4.1 ( o existenci nekonečného biortogonálního systému ).** *Buď $X$ normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Pak v $X$ existuje nekonečný* biortogonální systém, *tj. existuje posloupnost dvojic $\{(f_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$ taková, že $f_n \in X^*, x_n \in X$ a*

$$f_i(x_j) := \begin{cases} 1 & pro \ \ j = i \ , \\ 0 & pro \ \ j \neq i \ . \end{cases}$$

*(srov. [HHZ96] theorem 272(Markushevich))*

*Důkaz.* Konstrukce se provede indukcí a připomíná klasický Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.

1. krok: Zvolme $x_1 \in X$ tak, aby $x_1 \neq 0$. Protože prvky $X^*$ oddělují body $X$ (důsledek Hahn-Banachovy věty, viz. [Lu02] 2.20.), existuje $\widetilde{f_1} \in X^*$ tak, že $\widetilde{f_1}(x_1) \neq 0$. Položme:

$$f_1 := \frac{\widetilde{f_1}}{\widetilde{f_1}(x_1)} .$$

Máme tedy $f_1(x_1) = 1$.

2. krok: Protože $X$ je nekonečně dimenzionální, lze zvolit $\widetilde{x_2} \in X$ tak, že $\widetilde{x_2} \notin Lin(\{x_1\})$. Položme:

$$x_2 := \widetilde{x_2} - f_1\left(\widetilde{x_2}\right) x_1 .$$

Máme tedy $f_1(x_2) = 0$. Díky lineární nezávislosti $\widetilde{x_2}$ a $x_1$ je nutně $x_2 \neq 0$. Existuje tedy $\widetilde{f_2} \in X^*$ tak, že $\widetilde{f_2}(x_2) \neq 0$. Položme:

$$f_2 := \frac{\widetilde{f_2} - \widetilde{f_2}(x_1) f_1}{\widetilde{f_2}(x_2)} .$$

Máme tedy $f_2(x_1) = 0$, $f_2(x_2) = 1$.

n. krok: Máme již sestrojeny $x_1$, $x_1$,..., $x_{n-1}$, $f_1$, $f_1$,..., $f_{n-1}$ tak, že pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ máme:

$$f_i(x_j) := \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i , \\ 0 & \text{pro } j \neq i . \end{cases}$$

Zvolme $\widetilde{x_n} \notin Lin(\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\})$.Položme:

$$x_n := \widetilde{x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} f_i\left(\widetilde{x_n}\right) x_i .$$

Máme tedy $f_i(x_n) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Protože $x_n \neq 0$, existuje $\widetilde{f_n} \in X^*$ tak, že $\widetilde{f_n}(x_n) \neq 0$. Položme:

$$f_n := \frac{\widetilde{f_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{f_n}(x_i) f_i}{\widetilde{f_n}(x_n)} .$$

Máme tedy $f_n(x_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ a $f_n(x_n) = 1$. S konstrukcí lze pokračovat do nekonečna, čímž získáme požadovaný biortogonální systém. □

**Věta 4.2.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nekonečné dinmenze. Buď $\Omega = [0, 1]$ a buď $\mathcal{S}$ $\sigma$-algebra borelovských podmnožin $[0, 1]$. Pak existuje neatomická vektorová míra $\mu : \mathcal{S} \to X$ na měřitelném prostoru $([0, 1], \mathcal{S})$ taková, že její obor hodnot není konvexní množina. Míru $\mu$ lze navíc volit tak, že má omezenou variaci.*

*(srov. [DU77] IX.1. corollary 6. )*

*Důkaz.* Uveďme dva podobné důkazy.

*První důkaz*: Buď $\lambda$ Lebesgueova míra na $\mathcal{S}$. Prostor $L^2([0,1],\mathcal{S},\lambda) \equiv L^2([0,1])$ je Hilbertův a existuje v něm tedy ortonormální báze. Protože $L^2([0,1])$ je separabilní (spočetnou hustou podmnožinu tvoří racionální lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů s racionálními koncovými body), je ortonormální báze nutně spočetná (jinak prvky ortonormální báze tvoří nespočetnou $\sqrt{2}$-izolovanou množinu, což je spor se separabilitou). Nechť je tedy $\{g_1, g_2, \dots\}$ ortonormální báze prostoru $L^2([0,1])$. Protože je $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, je $\|g_n\|_1 < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $g_n \neq 0$ s.v., je ovšem též $\|g_n\|_1 > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Položíme-li:

$$f_n := \frac{g_n}{\|g_n\|_1} \,,$$

je $\|f_n\|_1 = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{g_n\}$ je ortonormální báze, platí, že jediný prvek $L^2([0,1])$, který je kolmý na všechny $g_n$, je nulový prvek ( [Lu02] 1.34.(ii)). Neboli pro všechny $g \in L^2([0,1])$ platí implikace:

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda = 0 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad g = 0 \,.$$

Protože $X$ je nekonečně dimenzionální, existuje podle lemmatu 4.1 v $X$ nekonečný biortogonální systém $\{(\varphi_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ takový, že $\varphi_n \in X^*, x_n \in X$ a

$$\varphi_i(x_j) := \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i \,, \\ 0 & \text{pro } j \neq i \,. \end{cases}$$

Definujme operátor $T : L^\infty([0,1],\mathcal{S},\lambda) \to X$ vztahem:

$$T(g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \,.$$

Abychom ověřili, že uvedená řada v Banachově prostoru konverguje, stačí ukázat, že konverguje absolutně ( [Lu02] 3.11.). K tomu použijme odhad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{[0,1]} |f_n g| \, d\lambda \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|g\|_\infty \int_{[0,1]} |f_n| \, d\lambda = \|g\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|g\|_\infty \,.$$

Odtud plyne též odhad:

$$\|T(g)\| \leq \|g\|_\infty \,,$$

tedy $T$ je omezený. Protože $T$ je zřejmě též lineární, je $T \in \mathcal{L}(L^\infty([0,1]), X)$.

Ukažme, že $T$ je prostý. Zvolme $g \in L^\infty([0,1])$ tak, že $T(g) = 0$. Chceme ukázat, že $g = 0$. Spočítejme $\varphi_n(T(g))$. S využitím spojitosti $\varphi_j$ v druhé rovnosti máme pro všechna $j \in \mathbb{N}$:

$$0 = \varphi_j(T(g)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varphi_j(x_n)}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda = \frac{1}{2^j} \int_{[0,1]} f_j g \, d\lambda \,.$$

Odtud:

$$\int_{[0,1]} f_j g \, d\lambda = 0 \qquad \text{pro každé } j \in \mathbb{N} \, .$$

Protože je $g \in L^\infty([0,1]) \subset L^2([0,1])$, máme odtud $g = 0$.

Nyní pro $A \in \mathcal{S}$ definujme:

$$\mu(A) := T(\chi_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda \, .$$

Ověřme, že $\mu$ je $\sigma$-aditivní. Volme $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$. Všimněme si, že podle Lebesgueovy věty s konvergentní majorantou $f_n$ pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} \, d\lambda \longrightarrow \int_{[0,1]} f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, d\lambda \, , \quad N \to \infty \, .$$

Máme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} \, d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} \, d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, d\lambda = \mu\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \, ,
\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme mohli zaměnit pořadí sum (limit), neboť je:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} \, d\lambda \right\| \leq \cdots \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\chi_{A_i}\|_\infty}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, .$$

Dostali jsme odhad "majorantní" řadou nezávislou na $i \in \mathbb{N}$, tedy řada konverguje stejnoměrně vzhledem k $i \in \mathbb{N}$. Záměna sum (limit) je tedy možná na základě Moore-Osgoodova lemmatu pro metrické prostory ( [Ve97] 15.3.3), které se snadno zobecní pro funkce do Banachova prostoru. Jiná možnost je dívat se na sumu (přes $n$) jako na speciální případ integrálu (podle počítací míry). Pak plyne možnost záměny z "Lebesgueovy" věty pro Bochnerův integrál s konvergentní majorantou 1 ( [Co80] str.353). Pro každé $N \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$ je totiž:

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} g \, d\lambda \right\| = \frac{1}{2^n} \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} \left| \int_{[0,1]} f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} \, d\lambda \right| \leq \frac{1}{2^n} \leq 1 \, ,$$

přičemž funkce $s_N(n) := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} g \, d\lambda$ jsou bochnerovsky integrovatelné, neboť zřejmě jejich normy jsou integrovatelné ( [LM02] 42.2.) a jsou zřejmě měřitelné.

Z prostoty $T$ plyne snadno, že míra $\mu$ je neatomická.

Ukažme, že $\mu$ má konečnou variaci. Buď $\{A_i\}_{i=1}^N$ konečný měřitelný rozklad $[0,1]$. Pak máme:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \|\mu(A_i)\| &= \sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i} \, d\lambda \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{A_i} |f_n| \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} |f_n| \, d\lambda = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{[0,1]} |f_n| \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \, .\end{aligned}$$

Ukažme konečně, že obor hodnot $\mu$ není konvexní množina. Předpokládejme pro spor, že $\mu(\mathcal{S})$ je konvexní. Označme:

$$z := \mu([0,1]) \, .$$

Protože $\mu(\varnothing) = 0$, musí být díky konvexitě prvek $\frac{z+0}{2} = \frac{z}{2}$ prvkem $\mu(\mathcal{S})$. Proto existuje $A \in \mathcal{S}$, $A \subset [0,1]$ tak, že:

$$\frac{z}{2} = \mu(A) = T(\chi_A) \, .$$

Pak ovšem konečná aditivita $\mu$ dává:

$$\mu([0,1] \setminus A) = \mu([0,1]) - \mu(A) = z - \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \, .$$

Odtud:

$$\frac{z}{2} = \mu([0,1] \setminus A) = T\left(\chi_{[0,1] \setminus A}\right) \, .$$

Tím jsme dostali spor s prostotou $T$.

*Druhý důkaz*: Buď $\lambda$ Lebesgueova míra na $\mathcal{S}$. Nechť $\{f_1, f_2, \dots\}$ je taková ortonormální báze prostoru $L^2([0,1], \mathcal{S}, \lambda)$, že její prvky jsou stejně omezené. Zvolme například známou trigonometrickou bázi $\{1, \sqrt{2}\cos(n2\pi x), \sqrt{2}\sin(n2\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$, jejíž prvky jsou omezené konstantou $\sqrt{2}$. Protože $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální báze, platí pro všechny $g \in L^2([0,1])$ implikace (viz. [Lu02] 1.34.(ii)):

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda = 0 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad g = 0 \, .$$

Protože $X$ je nekonečně dimenzionální, existuje podle lemmatu 4.1 v $X$ nekonečný biortogonální systém $\{(\varphi_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ takový, že $\varphi_n \in X^*, x_n \in X$ a

$$\varphi_i(x_j) := \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i \, , \\ 0 & \text{pro } j \neq i \, . \end{cases}$$

Definujme operátor $T : L^2([0,1], \mathcal{S}, \lambda) \to X$ vztahem:

$$T(g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \,.$$

Pak pro $g \in L^2([0,1])$ s použitím Schwarzovy nerovnosti máme:

$$\begin{aligned} \|T(g)\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f_n\|_2 \|g\|_2 = \|g\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|g\|_2 \,. \end{aligned}$$

Máme tedy $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]), X)$.

Ukažme, že $T$ je prostý. Zvolme $g \in L^2([0,1])$ tak, že $T(g) = 0$. Chceme ukázat, že $g = 0$. S využitím spojitosti $\varphi_j$ v druhé rovnosti máme pro všechna $j \in \mathbb{N}$:

$$0 = \varphi_j(T(g)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varphi_j(x_n)}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda = \frac{1}{2^j} \int_{[0,1]} f_j g \, d\lambda \,.$$

Odtud:

$$\int_{[0,1]} f_j g \, d\lambda = 0 \qquad \text{pro každé } \ j \in \mathbb{N} \,,$$

tedy $g = 0$.

Nyní pro $A \in \mathcal{S}$ definujme:

$$\mu(A) := T(\chi_A) \,.$$

Ověřme, že $\mu$ je $\sigma$-aditivní. Volme $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ . Pak platí:

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \,.$$

To plyne ze spojitosti míry takto:

$$\begin{aligned} \left\| \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} \right\|_2 &= \left( \int_{[0,1]} \left| \chi_{\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i} \right|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \int_{[0,1]} \chi_{\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \lambda \left( \bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i \right) \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \,, \quad N \to \infty \,, \end{aligned}$$

neboť $\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i \searrow \varnothing$ a $\lambda$ je na $\mathcal{S}$ konečná. Nyní stačí použít linearitu a spojitost $T$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} T(\chi_{A_i}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} T(\chi_{A_i}) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} T\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i}\right) = T\left(\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) .$$

Z prostoty $T$ plyne snadno, že míra $\mu$ je neatomická.

Ukažme, že $\mu$ má konečnou variaci. Buď $\{A_i\}_{i=1}^{N}$ konečný měřitelný rozklad $[0,1]$. Pak máme:

$$\sum_{i=1}^{N} \|\mu(A_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \int_{[0,1]} f_n \chi_{A_i}\, d\lambda \right\| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{A_i} |f_n|\, d\lambda =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} |f_n|\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda \le \sqrt{2}\,,$$

kde v poslední nerovnosti jsme použili odhad $\|f_n\|_1 \le \sqrt{2}$, který plyne z omezenosti funkcí $f_n$ konstantou $\sqrt{2}$.

Ukažme konečně, že obor hodnot $\mu$ není konvexní množina (zde se postup neliší od prvního důkazu). Předpokládejme pro spor, že $\mu(\mathcal{S})$ je konvexní. Označme:

$$z := \mu([0,1])\,.$$

Protože $\mu(\varnothing) = 0$, musí být díky konvexitě prvek $\frac{z+0}{2} = \frac{z}{2}$ prvkem $\mu(\mathcal{S})$. Proto existuje $A \in \mathcal{S}$, $A \subset [0,1]$ tak, že:

$$\frac{z}{2} = \mu(A) = T(\chi_A)\,.$$

Pak ovšem konečná aditivita $\mu$ dává:

$$\mu([0,1] \setminus A) = \mu([0,1]) - \mu(A) = z - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,.$$

Odtud:

$$\frac{z}{2} = \mu([0,1] \setminus A) = T\left(\chi_{[0,1]\setminus A}\right)\,.$$

Tím jsme dostali spor s prostotou $T$. □

**Věta 4.3.** *Banachův prostor $X$ je konečně dimenzionální, právě když obor hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ je konvexní množina.*

*Důkaz.* Plyne z Vět 3.4 a 4.2. □

**Poznámka 4.4.** *Pokud se týče situace v prvním důkazu Věty 4.2, dá se ukázat, že platí:*

$$T(f) = \int_{[0,1]} f\, d\mu \qquad \textit{pro všechny } f \in L^\infty([0,1])$$

*(Je-li $f$ charakteristická funkce, platí to z definice $\mu$ a pak se použije linearita a spojitost obou stran a hustota jednoduchých funkcí v $L^\infty([0,1])$). Zřejmě tedy $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{S}$, $\mu$, $X$, $\lambda$ a $T$ splňují předpoklady Věty 3.1 (Knowles). Protože $T$ je prostý, není splněna podmínka (1) z této věty, tedy ani ekvivalentní podmínka (2). Tedy existuje $A \in \mathcal{S}$ tak, že množina $\{\mu(A \cap B) : B \in \mathcal{S}\}$ není konvexní nebo není w-kompaktní (pak ovšem ani kompaktní). Odtud plyne, že pro restringovanou míru $\mu \restriction A$ není splněno tvrzení Ljapunovovy věty. Takto se postupuje v [DU77], kde je tedy obrácení Ljapunovy věty dokazováno jako důsledek netriviální Věty 3.1 (Knowles).*

*Dokázat, že $\mu(\mathcal{S})$ není konvexní, lze však elegantně bez použití Věty 3.1 (viz. závěr prvního i druhého důkazu Věty 4.2). Tuto myšlenku lze najít v [KP92] (str.1193). Co se týče první části důkazu Věty 4.2 podstatným krokem je sestrojení* prostého *operátoru $T \in \mathcal{L}(L^p([0,1]), X)$. V [KP92] se uvažuje prostý operátor $T \in \mathcal{L}(L^1([0,1]), X)$, jeho existence však není zdůvodněna. V této práci použitá konstrukce pochází z [DU77], kde $T$ je definován na $L^\infty([0,1])$. Zdá se však, že jednodušší je konstruovat $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]), X)$ (viz. druhý důkaz Věty 4.2). V důkazu se pak lze například vyhnout pracnému zdůvodňování záměny sumace při ověřování $\sigma$-aditivity konstruované míry.*

# 5 Příklady a protipříklady

V této části jsou uvedeny některé příklady či protipříklady týkající se tématu.

Diskutujme nejprve jednoduchý konkrétní příklad na neplatnost Ljapunovovy věty v nekonečné dimenzi.

**Příklad 5.1 ( Uhl (1969)** ([Uh69], srov. též [SS03] 1.2)**.** *Položme $\Omega := [0,1]$. Buď $\mathcal{S}$ $\sigma$-algebra borelovských podmnožin intervalu $[0,1]$ a buď $\lambda$ Lebesgueova míra na $\mathcal{S}$. Dále buď $X := L^p([0,1], \mathcal{S}, \lambda) \equiv L^p$, kde $1 \le p < \infty$. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathcal{S} \to L^p$ vztahem:*

$$\mu(A) := \chi_A \qquad \textit{pro každou } A \in \mathcal{S}\,.$$

*Pak platí:*

*(1) $\mu$ je vektorová míra na $([0,1], \mathcal{S})$ s hodnotami v $L^p$.*

*(2) $\mu$ je neatomická.*

*(3) Obor hodnot $\mu(\mathcal{S})$ je uzavřený, není však konvexní ani kompaktní.*

*(4) Pro $p = 1$ má $\mu$ omezenou variaci, pro $1 < p < \infty$ nemá $\mu$ omezenou variaci.*

*Důkaz.* ad(1): Zřejmě platí $\mu(\varnothing) = 0$.

Volme $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ . Pak platí:

$$\sum_{i=1}^N \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \chi_{\bigcup_{i=1}^N A_i} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\ ,$$

neboť ze spojitosti míry je:

$$\left\|\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i}\right\|_p = \left(\int_{[0,1]} \left|\chi_{\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i}\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\int_{[0,1]} \chi_{\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\lambda\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i\right)\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0\,, \quad N \to \infty\,,$$

neboť $\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i \searrow \varnothing$ a $\lambda$ je na $\mathcal{S}$ konečná.

ad(2): Neatomičnost $\mu$ plyne snadno z neatomičnosti Lebesgueovy míry na $[0,1]$.

ad(3): Ukažme, že $\mu(\mathcal{S})$ je uzavřený. Volme $\{\chi_{A_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mu(\mathcal{S})$ tak, že:

$$\chi_{A_n} \xrightarrow{L^p} f\ .$$

Víme (např. [LM02] 10.9.), že existuje vybraná posloupnost (označme ji stejně) tak, že:

$$\chi_{A_n} \longrightarrow f \qquad \lambda\text{-s.v. v } [0,1]\ .$$

Odtud máme:

$$f(x) \in \{0,1\} \qquad \text{pro } \lambda\text{-s.v. } x \in [0,1]\ ,$$

z čehož plyne $f \in \mu(\mathcal{S})$.

Ukažme, že $\mu(\mathcal{S})$ není konvexní. Máme:

$$\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} = \frac{\chi_{[0,1]} + \chi_{\varnothing}}{2} \in conv\, \mu(\mathcal{S})\ ,$$

Předpokládejme pro spor, že $\mu(\mathcal{S})$ je konvexní. Speciálně tedy platí:

$$\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} \in \mu(\mathcal{S})\ ,$$

Pro všechny $A \in \mathcal{S}$ však je:

$$\left\|\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} - \mu(A)\right\|_p = \left(\int_{[0,1]} \left|\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} - \chi(A)\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\int_{[0,1]} \left(\frac{1}{2}\chi_{[0,1]}\right)^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{p\frac{1}{p}} \int_{[0,1]} d\lambda = \frac{1}{2}\,,$$

Tedy pro žádnou množinu $A \in \mathcal{S}$ nemůže být $\mu(A) = \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}$. Spor.

Ukažme, že $\mu(\mathcal{S})$ není kompaktní. Najdeme nekonečnou množinu v $\mu(\mathcal{S})$, jejíž každé dva prvky mají od sebe vzdálenost $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme:

$$A_n := \{t \in [0,1] : \sin(2^n \pi t) > 0\}$$

( $A_n$ je tedy množina, na níž je $n$-tá Rademacherova funkce, která je na $[0,1]$ definovaná předpisem sign $\sin(2^n \pi t)$, kladná (resp. rovna jedné), srov.[Lu02] *10.5. ). Jinak zapsáno:

$$A_n := \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq 2^n \\ k \text{ liché}}} \left( \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) .$$

Nechť $m > n$, pak:

$$\begin{aligned} \|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\|_p &= \left( \int_{[0,1]} |\chi_{A_n} - \chi_{A_m}|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \int_{[0,1]} (\chi_{B_m})^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \int_{[0,1]} \chi_{B_m} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} , \end{aligned}$$

kde

$$B_m \doteq \left[ \bigcup_{\substack{2 \leq k \leq 2^m \\ k \text{ sudé}}} \left( \frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right) \cap A_n \right] \cup \left[ \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq 2^m \\ k \text{ liché}}} \left( \frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right) \cap A_n^c \right] ,$$

kde "$\doteq$" značí rovnost až na konečnou množinu (některých krajních bodů $m$-tých dyadických intervalů).

ad(4): Pro $1 \leq p < \infty$ a $A \in \mathcal{S}$ snadný výpočet dává:

$$\|\mu(A)\| = (\lambda(A))^{\frac{1}{p}} .$$

Buď nejprve $p = 1$. Zvolme $\{A_i\}_{i=1}^M$ konečný měřitelný rozklad $[0,1]$, pak

$$\sum_{i=1}^M \|\mu(A_i)\|_1 = \sum_{i=1}^M \lambda(A_i) = \lambda([0,1]) = 1 ,$$

tedy variace $\mu$ je omezená, konkrétně $|\mu|([0,1]) = 1$.

Za druhé uvažme $1 < p < \infty$. Buď $\{I_{nk}\}_{1 \leq k \leq 2^n}$ konečný měřitelný rozklad $[0,1]$ na dyadické intervaly délky $\frac{1}{2^n}$ s krajními body $\frac{k-1}{2^n}$, $\frac{k}{2^n}$. Pak máme:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \|\mu(I_{nk})\|_p = \sum_{k=1}^{2^n} (\lambda(I_{nk}))^{\frac{1}{p}} = 2^n \left( \frac{1}{2^n} \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{n - \frac{n}{p}} .$$

Poslední výraz jde k $\infty$ pro $n \to \infty$, tedy $|\mu|([0,1]) = \infty$. $\square$

**Poznámka 5.2.** *Případ $p = \infty$ v předchozím příkladu dává "neatomickou konečně aditivní vektorovou míru", která však není $\sigma$-aditivní. Volíme-li například $A_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{S}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$, přičemž je:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \right\|_{\infty} = \left\| \mu(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \right\|_{\infty} =$$
$$= \left\| \chi_{\bigcup_{i=1}^{N} A_i} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \right\|_{\infty} =$$
$$= \left\| \chi_{\left(0, \frac{1}{N+1}\right]} \right\|_{\infty} = 1 \qquad \text{pro všechna } N \in \mathbb{N} \, .$$

Ukažme naopak některé pozitivní netriviální příklady v nekonečné dimenzi.

**Příklad 5.3 ( neatomická vektorová míra s omezenou variací s hodnotami v $l^2$, jejíž obor hodnot je konvexní a kompaktní** ([MR96], 3.2.))**.** *Položme $\Omega := [0,\infty]$. Buď $\mathcal{S}$ $\sigma$-algebra borelovských podmnožin intervalu $[0,\infty)$ a buď $\lambda$ Lebesgueova míra na $\mathcal{S}$. Dále buď $X := l^2$. Definujme množinovou funkci $\mu : \mathcal{S} \to l^2$ vztahem:*

$$\mu \restriction [n, n+1] := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2^n} \lambda \restriction [n, n+1], 0, 0, \dots) \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \, .$$

*Je zřejmé, že $\mu$ je dobře definovaná vektorová míra na $([0,\infty), \mathcal{S})$ s hodnotami v $l^2$. Neatomičnost $\mu$ snadno plyne z neatomičnosti Lebesgueovy míry. Je též zřejmé, že platí:*

$$\mu(\mathcal{S}) = \left\{ x \in l^2 : 0 \le x_n \le \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\} \, .$$

*Odtud se snadno ověří, že $\mu(\mathcal{S})$ je konvexní.*

*Dále na množině $\{x \in l^2 : 0 \le x_n \le \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ zřejmě splývá $\|\cdot\|_2$-normová topologie s topologií bodové konvergence (čili konvergencí "po složkách"). Obor hodnot $\mu(\mathcal{S})$ lze tedy homeomorfně zobrazit na kartézský součin $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ se součinovou topologií. Ten je však podle Tichonovovy věty kompakt (jako kartézský součin kompaktů, viz. [Kr] 7.2.6.). Kompaktnost $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ (tzv. Hilbert cube) lze ověřit též přímější cestou, a sice ověřením sekvenciální kompaktnosti, která pro metrické prostory splývá s kompaktností (ze zvolené posloupnosti v $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ vybereme posloupnost konvergentní v první složce, z ní poslopnost konvergentní v druhé složce atd. Nakonec uvažujeme "diagonální" posloupnost, která již konverguje v každé složce).*

*Ukažme ještě, že $\mu$ má omezenou variaci. Zvolme $\{A_i\}_{i=1}^{M}$ konečný měřitelný rozklad $[0,\infty]$. Uvažme, že platí:*

$$\mu(\mathcal{S}) \subset l^1 \subset l^2$$

*(využíváme toho, že pro $x \in l^1$ je $\|x\|_2 \le \|x\|_1$, což lze odvodit limitním přechodem ve*

*zřejmé nerovnosti* $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$ *). Máme:*

$$\sum_{i=1}^{M} \|\mu(A_i)\|_2 \leq \sum_{i=1}^{M} \|\mu(A_i)\|_1 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \lambda([n, n+1] \cap A_i) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{M} \lambda([n, n+1] \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \ ,$$

*tedy* $|\mu|([0,\infty]) \leq 1$.

**Poznámka 5.4.** *V [MR96] (3.2.) je složitější konstrukce uvedeného typu použita k sestrojení příkladu ukazujícího, že ani v případě neatomické míry nemusí konvexita a/nebo kompaktnost* $\mu(\mathcal{S})$ *implikovat odpovídající vlastnost u oboru hodnot restringované míry* $\mu(\mathcal{S} \restriction A)$*, kde* $A \in \mathcal{S}$.

Následuje pozitivní příklad, který ilustruje Větu 3.1 (Knowles).

**Příklad 5.5 ( Vektorová míra s hodnotami v $L^1(\langle 0,1 \rangle)$ s konvexním a $w$-kompaktním oborem hodnot** ( [KK75], V.1.(str.84), viz. též [DU77], IX.1.8. ) **).** *Buď* $\nu$ *nezáporná konečná míra na měřitelném prostoru* $(\Omega', \mathcal{A})$ *(například Lebesgueova míra na borelovských podmnožinách* $[0,1]$*) a buď* $\lambda$ *Lebesgueova míra na* $([0,1], \mathcal{B})$*, kde* $\mathcal{B}$ *je* $\sigma$*-algebra borelovských podmnožin* $[0,1]$. *Položme:*

$$\Omega := \Omega' \times [0,1] \ ,$$
$$\mathcal{S} := \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad \textit{(součinová } \sigma\textit{-algebra)} \ .$$

*A definujme množinovou funkci* $\mu : \mathcal{S} \to L^1(\Omega', \mathcal{A}, \nu)$ *vztahem:*

$$\mu(E)(\omega) := \int_{[0,1]} \chi_E(\omega, t)\, d\lambda(t) \ , \quad \textit{kde } E \in \mathcal{S},\, \omega \in \Omega' \ .$$

*Tedy* $\mu(E)(\omega)$ *udává Lebesgueovu míru "řezu" množiny* $E$ *při pevné souřadnici* $\omega$.

*Není těžké ověřit, že* $\mu$ *je vektorová míra a že součinová míra* $\nu \otimes \lambda$ *je "control measure" z Věty 3.1 k míře* $\mu$ *a že operátor* $T$ *z Věty 3.1 daný integrováním podle vektorové míry* $\mu$ *funguje v tomto případě takto:*

$$(Tf)(\omega) = \left( \int_{\Omega} f \, d\mu \right)(\omega) = \int_{[0,1]} f(\omega, t)\, d\lambda(t) \ , \quad \textit{kde } f \in L^\infty(\nu \otimes \lambda),\, \omega \in \Omega' \ .$$

*K tomu je rozhodující zjištění, že pro charakteristické funkce množin z* $\mathcal{S}$ *předchozí vztah platí, což plyne přímo z definice míry* $\mu$ *a definice integrálu podle vektorové míry.*

*Naším cílem bude nyní ověřit podmínku (1) z Věty 3.1. Zvolme tedy* $E \in \mathcal{S}$ *tak, že:*

$$(\nu \otimes \lambda)(E) > 0 \ .$$

*Pro $\omega \in \Omega'$ položme:*

$$\alpha(\omega) := \frac{\int_{[0,1]} t\,\chi_E(\omega,t)\,d\lambda(t)}{\int_{[0,1]} \chi_E(\omega,t)\,d\lambda(t)}\ ,$$

*přičemž je použita domluva, že "$\frac{0}{0} = 0$". Zřejmě platí $0 \le \alpha(\omega) \le 1$. Nyní pro $(\omega,t) \in \Omega$ definujme:*

$$f(\omega,t) := [t - \alpha(\omega)]\,\chi_E(\omega,t)\ .$$

*Pak zřejmě $f \in \chi_E L^\infty(\nu \otimes \lambda)$, přičemž $f$ je na $E$ $\nu \otimes \lambda$-s.v. nenulová. Pro každé pevné $\omega \in \Omega'$ existuje totiž nejvýše jedno $t \in [0,1]$ tak, že $(\omega,t) \in E$ a zároveň $f(\omega,t) = 0$, tedy Fubiniova věta dává $(\nu \otimes \lambda)(E \cap \{f = 0\}) = 0$. Protože $(\nu \otimes \lambda)(E) > 0$, je $f \neq 0$. Pro každé $\omega \in \Omega'$ je však:*

$$\begin{aligned}(Tf)(\omega) = \left(\int_\Omega f\,d\mu\right)(\omega) &= \int_{[0,1]} f(\omega,t)\,d\lambda(t) = \\ &= \int_{[0,1]} \left[t - \frac{\int_{[0,1]} t\,\chi_E(\omega,t)\,d\lambda(t)}{\int_{[0,1]} \chi_E(\omega,t)\,d\lambda(t)}\right] \chi_E(\omega,t)\,d\lambda(t) = 0\ .\end{aligned}$$

*Odtud máme $Tf = 0$, čímž jsme dokázali, že $T$ není na podprostoru $\chi_E L^\infty(\nu \otimes \lambda)$ prostý. Podle Věty 3.1 je tedy obor hodnot $\mu$ konvexní a $w$-kompaktní.*

# 6 Banachovy prostory s Ljapunovovou vlastností

Víme již, že obor hodnot neatomické vektorové míry obecně nemusí být konvexní. Uvažujeme-li však slabý uzávěr oboru hodnot, konvexita je již zaručena. Důkaz je založen na aplikaci konečně dimenzionální verze Ljapunovovy věty.

**Lemma 6.1.** *Buď $\mu$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$, která je neatomická. Pak pro každý funkcionál $\varphi \in X^*$ je reálná míra $\varphi \circ \mu$ též neatomická. (srov. [KK75] V.6.3, V.6.4.)*

*Důkaz.* Zvolme funkcionál $\varphi \in X^*$. Podle Věty 2.24 existuje míra $\lambda$ nezáporná konečná na $\mathcal{S}$ taková, že $\mu << \lambda$ a $\lambda << \mu$. Z toto plyne, že $\lambda$ je nutně též neatomická (viz. poslední tvrzení Věty 2.24). Ze vztahu $\mu << \lambda$ plyne zřejmě $\varphi \circ \mu << \lambda$.

Nechť pro spor existuje $A \in \mathcal{S}$ atom reálné míry $\varphi \circ \mu$. Položme $E_0 := A$. Označme $w := (\varphi \circ \mu)(E_0) \neq 0$. Podle Ljapunovovy Věty 3.4 použité na 1-dimenzionální neatomickou nezápornou míru $\lambda$ restringovanou na $E_0$ je obor hodnot této míry interval $[0, \lambda(E_0)]$. Existuje tedy měřitelná $B \subset E_0$ tak, že platí:

$$\lambda(B) = \frac{\lambda(E_0)}{2}\ .$$

Aditivita dává též $\lambda(E_0 \setminus B) = \frac{\lambda(E_0)}{2}$. Protože $E_0$ je $(\varphi \circ \mu)$-atom, platí nutně jeden z následujících vztahů:

$$\begin{aligned}&(1) \quad (\varphi \circ \mu)(B) = w \quad \text{a} \quad (\varphi \circ \mu)(E_0 \setminus B) = 0\ ,\\ &(2) \quad (\varphi \circ \mu)(B) = 0 \quad \text{a} \quad (\varphi \circ \mu)(E_0 \setminus B) = w\ .\end{aligned}$$

Platí-li (1), položíme $E_1 := B$, platí-li (2), položíme $E_1 := E_0 \setminus B$.

Aplikujeme předchozí postup na množinu $E_1$ atd. Indukcí získáme posloupnost měřitelných množin

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots ,$$

takových, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je:

$$\lambda(E_n) = \frac{1}{2^n}\lambda(E_0) \qquad \text{a zároveň}$$
$$(\varphi \circ \mu)(E_n) = w\ .$$

To je spor s $\varphi \circ \mu << \lambda$. □

**Věta 6.2 ( Kluvánek (1973) ([Kl73]) ).** *Buďte $\Omega, \mathcal{S}, \mu, X$ jako v Definici 2.1, přičemž nechť vektorová míra $\mu$ je neatomická. Pak $w$-uzávěr oboru hodnot míry $\mu$ je $w$-kompaktní a konvexní.*

*(srov. [SS03] Lemma 2.3 (Lew,1971), [DU77] str.264)*

*Důkaz.* Slabou kompaktnost $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ zaručuje Důsledek 2.41.

Abychom ukázali konvexitu $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$, ukážeme, že $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ splývá s $\overline{conv}\,\mu(\mathcal{S})$. Protože $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w \subset \overline{conv}^w \mu(\mathcal{S}) = \overline{conv}\,\mu(\mathcal{S})$, stačí ověřit opačnou inkluzi. Zvolme $x \in \overline{conv}\,\mu(\mathcal{S})$. Máme ukázat, že $x \in \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$. Zvolme $\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ a $\varepsilon > 0$. Vektorová míra definovaná vztahem:

$$\nu := (\varphi_1 \circ \mu,\ \varphi_2 \circ \mu, \dots, \varphi_n \circ \mu)\ ,$$

je konečně dimenzionální a podle lemmatu 6.1 neatomická. Tedy podle Ljapunovovy Věty 3.4 je $\nu(\mathcal{S})$ kompaktní a konvexní. Odtud plyne:

$$(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in \overline{conv}\,\nu(\mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S})$$

(protože $x \in \overline{conv}\,\mu(\mathcal{S})$, existují $x_i^j \in \mu(\mathcal{S})$, $\lambda_i^j \in [0,1]$, $K_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{K_j} \lambda_i^j = 1$ tak, že $\sum_{i=1}^{K_j} \lambda_i^j x_i^j \to x$, spojitost a linearita $\varphi_k$ dává $\sum_{i=1}^{K_j} \lambda_i^j \varphi_k(x_i^j) \to \varphi_k(x)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$, tedy $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in \overline{conv}\,\nu(\mathcal{S})$ ). Proto existuje $A \in \mathcal{S}$ tak, že:

$$\varphi_k(x) = (\varphi_k \circ \mu)(A) \quad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots, n\ ,$$

neboli

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(\mu(A))| = 0 \quad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots, n\ ,$$

tedy

$$\mu(A) \in U_{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varepsilon}(x) = \{y \in X : |\varphi_k(x - y)| < \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n\}\ .$$

Ukázali jsme, že každé bázové slabé okolí bodu $x$ protíná $\mu(\mathcal{S})$, tedy $x \in \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$. □

**Poznámka 6.3.** *Z předchozího plyne, že leží-li hodnoty vektorové míry $\mu$ v normovaném lineárním prostoru, je $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ konvexní. Uvažuje-li se situace zobecněná v tom smyslu, že hodnoty $\mu$ leží v obecném lokálně konvexním prostoru, pak již $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ nemusí být konvexní a nemusí platit obdoba lemmatu 6.1 (viz. [Kl73], [KK75] str.96). Pro platnost těchto tvrzení je třeba předpokládat navíc např. metrizovatelnost uvažovaného lokálně konvexního prostoru.*

Další otázka se týká konvexity v případě, že budeme uvažovat pouze normový uzávěr oboru hodnot vektorové míry. Díky příkladu 5.1 (Uhl) víme, že obecně již konvexitu nedostaneme.

**Definice 6.4 ( Kadets, Schechtman (1993)).** *Řekneme, že Banachův prostor $X$ má* Ljapunovovu vlastnost*, jestliže uzávěr oboru hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ je konvexní.*

Příklad 5.1 ihned dává, že prostory $L^p([0,1])$ pro $1 \leq p < \infty$ nemají Ljapunovovu vlastnost.

**Poznámka 6.5.** *Zmiňme, které další klasické Banachovy prostory nemají Ljapunovovu vlastnost.*

*Protože prostory $l^2$ a $L^2([0,1])$ jsou (izometricky-)izomorfní (Riesz-Fischerova věta, [Lu02] 1.38.), nemá ani $l^2$ Ljapunovovu vlastnost.*

*Protože Ljapunovova vlastnost se zřejmě zachovává na podprostory, nemá Ljapunovovu vlastnost žádný prostor obsahující izomorfní kopii prostoru $l^2$, což jsou například prostory $\mathcal{C}([0,1])$, $l^\infty$, $L^\infty([0,1])$. Důvody jsou následující.*

*Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ obsahuje izomorfní kopii $l^2$ z toho důvodu, že dokonce každý separabilní Banachův prostor je izometricky-izomorfní podprostoru prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ (Banach-Mazurova věta, [HHZ96] Theorem 97).*

*Dále ukažme, že $l^2$ lze izometricky-izomorfně vnořit do $l^\infty$. Označme $B_{l^2}$ uzavřenou jednotkovou kouli v $l^2$ a $S_{l^2}$ jednotkovou sféru v $l^2$. Protože podprostor separabilního metrického prostoru je též separabilní, existuje posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ prvků z $B_{l^2}$ hustá v $B_{l^2}$. Označme $(\cdot,\cdot)$ skalární součin v $l^2$. Definujme zobrazení $\Phi : l^2 \to l^\infty$ předpisem:*

$$\Phi(x) := \{(x^n, x)\}_{n=1}^\infty \ .$$

*Pro $x \in B_{l^2}$ máme pro každé $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} &|(\Phi(x))_n| = |(x^n, x)| \leq \|x^n\|_2 \|x\|_2 \leq 1 \ , \qquad \textit{tedy} \\ &\|\Phi(x)\|_\infty \leq 1 \ , \end{aligned}$$

*odtud $\Phi \in \mathcal{L}(l^2, l^\infty)$.*

*Zvolme nyní $\varepsilon > 0$ a $x \in S_{l^2}$. Z hustoty existuje vybraná posloupnost tak, že $x^{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$. Ze spojitosti skalárního součinu existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak ,že:*

$$|(\Phi(x))_{n_0} - 1| = |(x^{n_0}, x) - (x, x)| < \varepsilon \ ,$$

*tedy* $\|\Phi(x)\|_\infty = 1$.

*Je-li nyní* $0 \neq x \in l^2$, *pak dle předchozího je* $\|\Phi(\frac{x}{\|x\|_2})\|_\infty = 1$, *tedy* $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_2$. *Tedy* $\Phi$ *je skutečně lineární izometrie.*

*Z Hahn-Banachovy věty plyne dokonce, že každý separabilní Banachův prostor je izometricky-izomorfní podprostoru prostoru* $l^\infty$ *([HHZ96] Proposition 92).*

*Konečně ukážeme, že* $l^\infty$ *lze izometricky-izomorfně vnořit do* $L^\infty([0,1])$. *Definujme zobrazení* $\Psi : l^\infty \to L^\infty([0,1])$ *předpisem:*

$$\Psi : \{x_n\}_{n=1}^\infty \longmapsto \left[ t \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n \chi_{A_n}(t) \right] ,$$

*kde* $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ *je disjunktní rozklad* $[0,1]$ *na měřitelné množiny kladné míry. Pro každé* $x \in l^\infty$ *zřejmě platí:*

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_\infty = \left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \chi_{A_n}(t) \right\|_\infty ,$$

*tedy* $\Psi$ *je skutečně lineární izometrie.*

*Platí též, že* $l^\infty$ *a* $L^\infty([0,1])$ *jsou izomorfní ([AK06] 4.3.10.).*

Ukážeme, že prostor $l^1$ má Ljapunovovu vlastnost. Obecněji každý Banachův prostor mající *Schurovu vlastnost* má Ljapunovovu vlastnost.

**Poznámka 6.6.** *Zmiňme, které další klasické Banachovy prostory mají Ljapunovovu vlastnost.*

*Kadets a Schechtman v roce 1993 ukázali pomocí pravděpodobnostních metod (martingalů), že prostory* $l^p$ *pro* $p \neq 2$ *a prostor* $c_0$ *mají Ljapunovovu vlastnost (viz. též [Vl99], kde jsou též jednodušší důkazy pro* $l^1$ *a* $c_0$ *pocházející od Kadetse).*

**Definice 6.7.** *Řekneme, že Banachův prostor* $X$ *má* Schurovu vlastnost, *jestliže v* $X$ *je každá slabě konvergentní posloupnost též silně (normově) konvergentní.*

**Věta 6.8 ( Schurovo lemma ).** *Prostor* $l^1$ *má Schurovu vlastnost.*

*Důkaz.* viz. např. [Lu02] *3.2. □

**Věta 6.9.** *Jestliže Banachův prostor* $X$ *má Schurovu vlastnost, potom* $X$ *má Ljapunovovu vlastnost.*

*Důkaz.* Zvolme $(\Omega, \mathcal{S})$ měřitelý prostor a neatomickou vektorovou míru $\mu$ na $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$. Ukážeme, že je $\overline{\mu(\mathcal{S})} = \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$. Tím budeme hotovi, neboť množina $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ je podle Věty 6.2 konvexní.

Nejprve ukažme, že $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ je $w$-uzavřená. Podle Eberlein-Šmuljanovy věty ([Lu02] 16.12.) splývá pro slabou topologii kompaktnost a sekvenciální kompaktnost. Uvážíme-li navíc, že $X$ má Schurovu vlastnost, plyne odtud, že v X splývají kompaktní a slabě kompaktní množiny. Odtud plyne, že množina $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$, která je $w$-kompaktní podle Důsledku 2.41, je též kompaktní vzhledem k normové topologii prostoru $X$. Protože $\overline{\mu(\mathcal{S})} \subset$

$\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$, je $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ též kompaktní (jako uzavřená podmnožina kompaktu) a tedy tím spíše $w$-kompaktní, speciálně $w$-uzavřená.

"$\subset$": To, že platí $\overline{\mu(\mathcal{S})} \subset \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$, je zřejmé.

"$\supset$": Zřejmě je $\overline{\mu(\mathcal{S})} \supset \mu(\mathcal{S})$, a díky $w$-uzavřenosti $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ též $\overline{\mu(\mathcal{S})} \supset \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$. □

Uvedený důkaz pochází ze [SS03] (Corollary 4.1.). Uveďme ještě jeden důkaz Věty 6.9 pocházející od Kadetse ([Vl99] 1.4.14), který nepoužívá hlubokou Eberlein-Šmuljanovu větu.

**Lemma 6.10 ( Kadets, Popov ).** *Buď $\mu$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami v $X$. Jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $B \subset A$, $B \in \mathcal{S}$ tak, že*

$$\left\| \mu(B) - \frac{\mu(A)}{2} \right\| < \varepsilon \, ,$$

*pak $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ je konvexní.* *(srov. [Vl99] 1.4.5, [KP92] lemma 2)*

*Důkaz.* Zvolme $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \overline{\mu(\mathcal{S})}$ a $\lambda \in (0,1)$. Máme ukázat, že $\lambda\widetilde{x} + (1-\lambda)\widetilde{y} \in \overline{\mu(\mathcal{S})}$. Stačí ukázat platnost předchozího vztahu pro $\lambda = \frac{1}{2}$, čili že platí:

$$\frac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{2} \in \overline{\mu(\mathcal{S})}$$

(odtud se iterací dostane dokazované pro případ, že $\lambda$ je dyadický zlomek z $(0,1)$ a odtud již snadno plyne dokazované pro každé $\lambda \in (0,1)$ ).

Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují $x, y \in \mu(\mathcal{S})$ tak, že $\|x - \widetilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\|y - \widetilde{y}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Níže ukážeme, že existuje $z \in \mu(\mathcal{S})$ tak, že $\left\|\frac{x+y}{2} - z\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tím budeme hotovi, neboť pak máme:

$$\left\| \frac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{2} - z \right\| \leq \left\| \frac{\widetilde{x} - x}{2} + \frac{\widetilde{y} - y}{2} \right\| + \left\| \frac{x + y}{2} - z \right\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

Zbývá ukázat existenci $z \in \mu(\mathcal{S})$ aproximujícího $\frac{x+y}{2}$. Existují množiny $A, B \in \mathcal{S}$ tak, že $x = \mu(A)$ a $y = \mu(B)$. Podle předpokladu existují $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$, $U_1 \subset A \setminus B$, $U_2 \subset B \setminus A$ tak, že platí:

$$\left\| \mu(U_1) - \frac{1}{2}\mu(A \setminus B) \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \, , \qquad \left\| \mu(U_2) - \frac{1}{2}\mu(B \setminus A) \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \, .$$

Nyní stačí položit:

$$z := \mu(W) \, , \qquad \text{kde} \qquad W := U_1 \cup U_2 \cup (A \cap B) \in \mathcal{S} \, .$$

Pak s využitím aditivity $\mu$ máme:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x+y}{2} - z \right\| &= \left\| \frac{\mu(A) + \mu(B)}{2} - \mu(W) \right\| = \\
&= \left\| \frac{1}{2}\mu(A \setminus B) + \frac{1}{2}\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) - [\mu(A \cap B) + \mu(U_1) + \mu(U_2)] \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{2}\mu(A \setminus B) - \mu(U_1) \right\| + \left\| \frac{1}{2}\mu(B \setminus A) - \mu(U_2) \right\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \, .
\end{aligned}$$

□

**Definice 6.11.** *Buď $\lambda$ nezáporná konečná míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$, která je neatomická. Buď $A \in \mathcal{S}$ taková, že $\lambda(A) > 0$. Z Ljapunovovy Věty 3.4 plyne existence měřitelné množiny $A_{11} \subset A$ takové, že $\lambda(A_{11}) = \frac{\lambda(A)}{2}$. Položíme-li $A_{12} := A \setminus A_{11}$, je $\lambda(A_{12}) = \frac{\lambda(A)}{2}$. Nyní podobně každou z množin $A_{11}$, $A_{12}$ disjunktně rozložíme na dvě měřitelné podmnožiny tak, aby každá z nich měla míru $\frac{\lambda(A)}{4}$ atd. Dostaneme tak jistý "strom podmnožin", jehož účelem je imitovat dyadické dělení intervalu $[0,1]$, které leží v základu Rademacherova systému funkcí (srov. [Di84] str.204). Situace je znázorněna na následujícím schématu:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & A & & & \\
 & & / & & \backslash & & \\
 & A_{11} & & & & A_{12} & \\
 / & & \backslash & & / & & \backslash \\
A_{21} & & A_{22} & & A_{23} & & A_{24} \\
/\ \backslash & & /\ \backslash & & /\ \backslash & & /\ \backslash
\end{array}
$$

*V každém řádku schématu je disjunktní rozklad množiny $A$. Spojnice značí, že spodní množina je podmnožinou vrchní.*

*Definujme (zobecněné)* Rademacherovy funkce na množině $A$ *("Rademacher-like" systém na $A$). Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $r_n : \Omega \to \mathbb{R}$ vztahem:*

$$r_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda(A)}} \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^{i+1} \chi_{A_{ni}} \, .$$

*Buďte nyní $n, m \in \mathbb{N}$ taková, že $m > n$. Pak máme:*

$$\int_\Omega r_n r_m \, d\lambda = \frac{1}{\lambda(A)} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{i=(j-1)2^{m-n}+1}^{j2^{m-n}} (-1)^{j+1}(-1)^{i+1}\lambda(A_{mi}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda(A)} \frac{\lambda(A)}{2^m} \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{j+1} \sum_{i=(j-1)2^{m-n}+1}^{j2^{m-n}} (-1)^{i+1} = 0 \, ,$$

*neboť při pevném $j$ je každá suma přes i nulová, protože sčítáme sudý počet čísel, z nichž polovina je rovna $1$ a polovina $-1$. Neformálně řečeno, $r_n$ je konstantní na každé "periodě" $r_m$. Dále pro $n \in \mathbb{N}$ platí:*

$$\|r_n\|_2 = \sqrt{\int_\Omega |r_n|^2 \, d\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda(A)} \sum_{i=1}^{2^n} 1 \, \frac{\lambda(A)}{2^n}} = \sqrt{1} = 1 \, .$$

*Tedy $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ je ortonormální systém v $L^2(\lambda)$. Dále systém $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ je stejně omezený, neboť $|r_n| \leq 1$.*

*Zřejmě $r_n \in L^\infty(\lambda) \cong (L^1(\lambda))^*$.*

Dále dokážeme tvrzení, které je jakousi obdobou známého Riemann-Lebesgueova lemmatu.

**Tvrzení 6.12.** *Buďte* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Rademacherovy funkce z Definice 6.11. Pak platí:*

$$r_n \xrightarrow{w^*} 0\ , \quad \textit{neboli} \quad r_n \overset{\sigma((L^1)^*, \varepsilon L^1)}{\longrightarrow} 0\ .$$

*(srov. [KS89] I.3.5.)*

*Důkaz.* Volme $g \in L^1(\lambda)$. Máme ukázat, že $r_n(g) \to 0$. Volme $\varepsilon > 0$. Jednoduché funkce, které jsou díky konečnosti $\lambda$ prvky $L^2(\lambda)$, jsou husté v $L^1(\lambda)$ (viz. Tvrzení 9.1 ). Existuje tedy $\widetilde{g} \in L^2(\lambda)$ tak, že $\|\widetilde{g} - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální soustava v $L^2(\lambda)$ a $\widetilde{g} \in L^2(\lambda)$, platí pro Fourierovy koeficienty:

$$(\widetilde{g}, r_n) \to 0$$

(to plyne z Besselovy nerovnosti ([Lu02] 1.32.), podle které platí $\sum_{n=1}^{\infty} |(\widetilde{g}, r_n)|^2 \leq \|\widetilde{g}\|_2^2$, kde $(\cdot, \cdot)$ značí skalární součin v $L^2(\lambda)$ ). Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ je:

$$|(\widetilde{g}, r_n)| = \left| \int_\Omega r_n \widetilde{g}\, d\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Nyní pro $n \geq n_0$ máme:

$$\begin{aligned} |r_n(g)| = \left| \int_\Omega r_n g\, d\lambda \right| &= \left| \int_\Omega r_n(g - \widetilde{g}) + r_n \widetilde{g}\, d\lambda \right| \\ &\leq \left| \int_\Omega r_n(g - \widetilde{g})\, d\lambda \right| + \left| \int_\Omega r_n \widetilde{g}\, d\lambda \right| \\ &\leq \|r_n\|_\infty \|\widetilde{g} - g\|_1 + |(\widetilde{g}, r_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ . \end{aligned}$$

□

*Druhý důkaz Věty 6.9.* Buď $\mu$ vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami $X$, která je neatomická. Buď $\lambda$ nezáporná konečná míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ taková, že $\mu << \lambda$ a že $\lambda$ je též neatomická (existuje podle Věty 2.24).

Volme $A \in \mathcal{S}$ libovolně. Uvažme nejprve případ, že $\lambda(A) > 0$. Uvažujme $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ Rademacherovy funkce na množině $A$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ vztahem:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1 + r_n(x)}{2} & \text{pro } x \in A\ , \\ 0 & \text{pro } x \notin A\ . \end{cases}$$

Pak podle Tvrzení 6.12 platí:

$$f_n \xrightarrow{w^*} \frac{1}{2}\chi_A\ .$$

Z Důsledku 2.39 plyne:

$$T(f_n) \xrightarrow{w} \frac{1}{2}T(\chi_A) \ ,$$

kde $T$ je operátor daný integrováním dle $\mu$. Protože $X$ má Schurovu vlastnost je též:

$$T(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_X} \frac{1}{2}T(\chi_A) \ ,$$

Z definice $f_n$ plyne, že $f_n$ je charakteristická funkce jisté měřitelné podmnožiny $A_n$ množiny $A$, pro $n \in \mathbb{N}$ lze tedy psát:

$$f_n = \chi_{A_n} \ , \quad \text{kde} \quad A_n \subset A, \ A_n \in \mathcal{S} \ .$$

Uvážíme-li, že platí:

$$T(\chi_{A_n}) = \mu(A_n) \ , \quad T(\chi_A) = \mu(A) \ ,$$

dostáváme:

$$\|\mu(A_n) - \frac{1}{2}\mu(A)\|_X \to 0 \ .$$

Odtud snadno vidíme, že jsou splněny předpoklady lemmatu 6.10 (případ $\lambda(A) = 0$, a tedy $\mu(A) = 0$ je triviální), tedy $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ je konvexní. □

V [SS03] je uvedena následující nutná a postačující podmínka k tomu, aby Banachův prostor měl Ljapunovovu vlastnost.

**Věta 6.13.** *Banachův prostor $X$ má Ljapunovovu vlastnost, právě když uzávěr oboru hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ je $w$-uzavřený.*

*Důkaz.* "$\Rightarrow$": Plyne ihned z faktu, že pro konvexní množiny splývá normový a slabý uzávěr ( [Lu02] 16.2.).

"$\Leftarrow$": Buď $\mu$ neatomická vektorová míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami $X$. Díky předpokladu, že $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ je $w$-uzavřený, se snadno odvodí, že $\overline{\mu(\mathcal{S})} = \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ (viz. (první) důkaz Věty 6.9) a množina $\overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ je konvexní podle Věty 6.2.

□

**Poznámka 6.14.** *Byla též studována konvexita uzávěru oboru hodnot v případě, že se uvažují pouze míry s* omezenou *variací. K tomu slouží následující definice z [SS03]: Banachův prostor $X$ má* slabou Ljapunovovu vlastnost*, jestliže uzávěr oboru hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ s omezenou variací je konvexní.*

*Postačující podmínka pro to, aby prostor měl slabou Ljapunovovu vlastnost je obsažena v následujícím výsledku z [Uh69] (viz. též [DU77] IX.1.10, [KK75] V.6. theorem 2).* Buď $X$ Banachův prostor, který má Radon-Nikodýmovu vlastnost (dále jen RNP, viz. [Lu02] 22.5.). Pak uzávěr oboru hodnot každé neatomické vektorové míry s hodnotami v $X$ s omezenou variací je kompaktní a konvexní.

*Důkaz.* (podle [KK75] V.6.2.)

Buď $\mu$ neatomická vektorová míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ s hodnotami $X$, která má omezenou variaci. Zřejmě platí $\mu << |\mu|$. Protože $X$ má RNP, existuje (z definice RNP) bochnerovsky integrovatelná funkce $f : \Omega \to X$ taková, že platí:

$$\mu(E) = {\scriptstyle(B)}\!\int_E f \, d|\mu| \quad \text{pro} \quad E \in \mathcal{S} \ ,$$

kde ${\scriptstyle(B)}\!\int$ značí Bochnerův integrál.

Z definice bochnerovské integrovatelnosti funkce $f$ existují jednoduché funkce $f_n : \Omega \to X$ tak, že:

$$\int_\Omega \|f - f_n\| \, d|\mu| \to 0 \ , \quad n \to \infty \ .$$

Pro $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, |\mu|) \equiv L^\infty(|\mu|)$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme:

$$T(g) := {\scriptstyle(B)}\!\int_\Omega gf \, d|\mu| \ ,$$
$$T_n(g) := {\scriptstyle(B)}\!\int_\Omega gf_n \, d|\mu| \ .$$

Operátory $T, T_n : L^\infty(|\mu|) \to X$ jsou lineární. Dále platí:

$$\|T(g)\| = \left| {\scriptstyle(B)}\!\int_\Omega gf \, d|\mu| \right| \leq \int_\Omega \|gf\| \, d|\mu| = \int_\Omega |g| \, \|f\| \, d|\mu| \leq \|g\|_\infty \int_\Omega \|f\| \, d|\mu| \ .$$

Protože z bochnerovské integrovatelnosti $f$ plyne $\int_\Omega \|f\| \, d|\mu| < \infty$, jsou operátory $T, T_n$ též omezené.

Zvolme $g \in L^\infty(|\mu|)$ tak, aby $\|g\|_\infty \leq 1$. Pak obdobně jako výše máme:

$$\|(T - T_n)(g)\| \leq \cdots \leq \|g\|_\infty \int_\Omega \|f - f_n\| \, d|\mu| \leq \int_\Omega \|f - f_n\| \, d|\mu| \ .$$

Odtud $\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(|\mu|), X)} \to 0, \ n \to \infty$. Neboli $T_n$ konvergují k $T$ v operátorové normě.

Protože $f_n$ jsou jednoduché funkce, je obor hodnot každého $T_n$ konečně dimenzionální. Operátory $T_n$ jsou tedy konečně dimenzionální, a tedy kompaktní ([Lu02] 2.47.). Protože kompaktní operátory tvoří uzavřený podprostor prostoru spojitých lineárních operátorů ([Lu02] 2.47.), je též $T$ kompaktní.

Zřejmě platí:

$$\mu(\mathcal{S}) = \{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} = \{T(\chi_E) : E \in \mathcal{S}\} = T(\{\chi_E : E \in \mathcal{S}\}) \ .$$

Protože množina $\{\chi_E : E \in \mathcal{S}\}$ je omezená (jako podmnožina jednotkové koule v prostoru $L^\infty(|\mu|)$ ), je $\mu(\mathcal{S})$ relativně kompaktní (kompaktní operátor ze své definice zobrazuje omezené množiny na relativně kompaktní tj. na množiny s kompaktním uzávěrem).

Zbývá ověřit konvexitu $\overline{\mu(\mathcal{S})}$. Ukažme, že $\overline{\mu(\mathcal{S})} = \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$ a díky Větě 6.2 budeme hotovi.

"$\subset$": To, že platí $\overline{\mu(\mathcal{S})} \subset \overline{\mu(\mathcal{S})}^w$, je zřejmé.

"$\supset$": Zřejmě stačí ukázat, že množina $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ je $w$-uzavřená. Podle první části důkazu je $\overline{\mu(\mathcal{S})}$ kompaktní, tedy je tím spíše $w$-kompaktní a tedy $w$-uzavřená. □

*Mezi Banachovy prostory s RNP patří například každý reflexivní prostor nebo každý separabilní prostor, který má preduál (tj. je duálem jistého Banachova prostoru) (viz. [Lu02] 22.6.). Snadno čitelný důkaz těchto tvrzení (který nezahrnuje případ neseparabilních prostorů, což nebude při naší aplikaci vadit) lze nalést v [Ku] (kapitola Bochner integral, podkapitola Vector measures) nebo v [Ku98] (23.25, 23.26).*

*Protože prostory $l^2$ a $L^p([0,1])$ pro $1 < p < \infty$ jsou reflexivní ([Lu02] 2.35.), mají RNP a podle předchozí věty mají slabou Ljapunovovu vlastnost, ačkoli Ljapunovovu vlastnost nemají. Pokud jde o ostatní výše diskutované klasické Banachovy prostory, je odpověď na otázku, mají-li slabou Ljapunovovu vlastnost, stejná jako v případě Ljapunovovy vlastnosti (Příklad 5.1 ihned dává, že prostor $L^1([0,1])$ nemá slabou Ljapunovovu vlastnost. Protože $L^1([0,1])$ je separabilní, nemají slabou Ljapunovovu vlastnost ani prostory $\mathcal{C}([0,1])$, $l^\infty$, $L^\infty([0,1])$, neboť $L^1([0,1])$ lze do nich (izometricky-)izomorfně vnořit (viz. poznámku 6.5). Naopak má-li prostor Ljapunovovu vlastnost, má zřejmě též slabou Ljapunovovu vlastnost.).*

*V [KP92] lze najít následující charakterizaci pomocí tzv.* narrow *operátorů:* Banachův prostor $X$ má slabou Ljapunovovu vlastnost, právě když každý operátor $T \in \mathcal{L}(L^1([0,1]), X)$ je narrow, tj. jestliže pro každou měřitelnou podmnožinu $A \subset [0,1]$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $f \in L^1([0,1])$ tak, že $f^2 = \chi_A$ a $\|T(f)\| < \varepsilon$.

# 7 Aplikace Ljapunovovy věty

V této části aplikujeme klasickou Ljapunovovu větu na důkaz faktu, že žádný konečně dimenzionální podprostor prostoru $L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$, kde míra $\lambda$ je nezáporná, konečná a neatomická, není Čebyševův. Tento výsledek byl v této obecnosti poprvé dokázán v [Ph60] (2.5.), kde je za autora označen Henry Dye. Následující věta je jen jiná forma Ljapunovovy věty.

**Věta 7.1 ( "Bang-bang" princip ).** *Buď $\mu$ konečně dimenzionální neatomická vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Buď $\lambda$ konečná nezáporná míra na $(\Omega, \mathcal{S})$ taková, že $\mu << \lambda$. Pak platí:*

$$\left\{ \int_\Omega f\, d\mu : f \in L^\infty(\lambda),\ -1 \le f(x) \le 1 \ \ pro \ \ x \in \Omega \right\} =$$
$$= \left\{ \int_\Omega f\, d\mu : f \in L^\infty(\lambda),\ f(x) \in \{-1, 1\} \ \ pro \ \ x \in \Omega \right\} \ .$$

*Důkaz.* Ljapunovova Věta 3.4 a Důsledek 2.44 dávají:

$$\left\{ \int_\Omega f\, d\mu : f \in L^\infty(\lambda),\ f(x) \in \{0, 1\} \ \ pro \ \ x \in \Omega \right\} = \mu(\mathcal{S}) =$$
$$= \overline{conv}\mu(\mathcal{S}) = \left\{ \int_\Omega f\, d\mu : f \in L^\infty(\lambda),\ 0 \le f(x) \le 1 \ \ pro \ \ x \in \Omega \right\} \ .$$

Zbytek je pouze afinní transformace předchozího:

$$\left\{\int_\Omega 2\left(f-\frac{1}{2}\right)\,d\mu : f\in L^\infty(\lambda),\ f(x)\in\{0,1\}\ \ pro\ \ x\in\Omega\right\} =$$
$$= \left\{\int_\Omega 2\left(f-\frac{1}{2}\right)\,d\mu : f\in L^\infty(\lambda),\ 0\le f(x)\le 1\ \ pro\ \ x\in\Omega\right\}\ .$$

Tedy:

$$\left\{\int_\Omega \widetilde{f}\,d\mu : \widetilde{f}\in L^\infty(\lambda),\ \widetilde{f}(x)\in\{-1,1\}\ \ pro\ \ x\in\Omega\right\} =$$
$$= \left\{\int_\Omega \widetilde{f}\,d\mu : \widetilde{f}\in L^\infty(\lambda),\ -1\le \widetilde{f}(x)\le 1\ \ pro\ \ x\in\Omega\right\}\ .$$

□

**Definice 7.2.** *Buď $X$ normovaný lineární prostor a $M\subset X$ jeho podmnožina. Pro $x\in X$ definujme vzdálenost $x$ od $M$*

$$dist(x,M) := \inf\{\|x-y\| : y\in M\}\ ,$$

*a množinu* nejlepších aproximací prvku $x$ z množiny M*:*

$$P_M(x) := \{m\in M : \|x-m\| = dist(x,M)\}\ .$$

*Řekneme, že $M$ je* proximinální*, jestliže $P_M(x)\neq\emptyset$ pro každé $x\in X$, neboli existuje-li pro každý prvek $x\in X$ v $M$ nejbližší prvek.*

*Řekneme, že $M$ je* Čebyševova*, jestliže $P_M(x)$ je jednobodová pro každé $x\in X$, neboli existuje-li pro každý prvek $x\in X$ v $M$ jediný nejbližší prvek (je-li $M$ podprostor, říká se též, že $M$ má* Haarovu vlastnost *([Lu02] *2.10.) ).*

*Platí, že* každý konečně dimenzionální podprostor $U$ normovaného lineárního prostoru je proximinální.

*Volíme-li totiž $x\in X$, pak při hledání nejbližší aproximace $x$ v $U$ se stačí omezit na průnik $U$ s uzavřenou koulí $B$ se středem v $x$ tak velkého poloměru, aby tento průnik byl neprázdný (za poloměr $B$ lze volit $\|x-v\|$, kde $v$ je libovolný prvek z $U$). Protože $B\cap U$ je kompakt (jako uzavřená omezená podmnožina konečně dimenzionálního prostoru) nabývá spojitá funkce $y\mapsto\|x-y\|$ na $B\cap U$ minima. Zajímavá je v tomto případě tedy jen otázka jednoznačnosti nejlepší aproximace.*

**Věta 7.3.** *Buď $\lambda$ konečná nezáporná neatomická míra na $(\Omega,\mathcal{S})$. Pak žádný konečně dimenzionální podprostor prosoru $L^1(\Omega,\mathcal{S},\lambda)$ není Čebyševův.*
*(srov. [Pi89] 2.7.)*

*Důkaz.* Buď $U$ konečně dimenzionální podprostor $L^1(\Omega,\mathcal{S},\lambda)\equiv L^1(\lambda)$. Buď $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ báze $U$. Uvažme konečně dimenzionální vektorovou míru $\mu$ na $(\Omega,\mathcal{S})$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ definovanou pro $A\in\mathcal{S}$ vztahem:

$$\mu(A) := \left(\int_A u_1\,d\lambda, \int_A u_2\,d\lambda, \cdots, \int_A u_n f\,d\lambda\right)\ .$$

Není těžké ověřit z definice, že z neatomičnosti $\lambda$ plyne neatomičnost $\mu$. Protože zřejmě platí:

$$\int_\Omega 0\, d\mu = \left(\int_\Omega 0\, u_1\, d\lambda, \int_\Omega 0\, u_2\, d\lambda, \cdots, \int_\Omega 0\, u_n f\, d\lambda\right) = 0\ ,$$

existuje podle "Bang-bang" principu (Věta 7.1) $h \in L^\infty(\lambda)$, $|h(x)| = 1$ pro $x \in \Omega$ tak, že:

$$\int_\Omega h\, d\mu = \left(\int_\Omega h\, u_1\, d\lambda, \int_\Omega h\, u_2\, d\lambda, \cdots, \int_\Omega h\, u_n f\, d\lambda\right) = 0\ .$$

Odtud dostáváme:

$$\int_\Omega h\, u\, d\lambda = 0 \quad \text{pro všechny } \ u \in U\ .$$

Zvolme $0 \neq u^* \in U$ a položme:

$$f := h|u^*| \in L^1(\lambda)\ .$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$ platí:

$$h(f - \alpha u^*) = h(h|u^*| - \alpha u^*) = h^2|u^*| - h\alpha u^* = |u^*| - h\alpha u^* \geq 0\ ,$$

neboť $|h\alpha| \leq 1$. Zvolme nyní $u \in U$. Díky předchozímu platí:

$$\begin{aligned}
\|f - \alpha u^*\|_1 &= \int_\Omega |f - \alpha u^*|\ d\lambda = \int_\Omega |h|\,|f - \alpha u^*|\ d\lambda = \int_\Omega h(f - \alpha u^*)\, d\lambda = \\
&= \int_\Omega h\, f\, d\lambda - \underbrace{\int_\Omega h\alpha u^*\, d\lambda}_{=0} = \int_\Omega h\, f\, d\lambda = \int_\Omega h\, f\, d\lambda - \underbrace{\int_\Omega h\, u\, d\lambda}_{=0} = \\
&= \int_\Omega h(f - u)\, d\lambda \leq \int_\Omega |h(f - u)|\ d\lambda = \int_\Omega |h|\,|(f - u)|\ d\lambda = \\
&= \int_\Omega |(f - u)|\ d\lambda = \|f - u\|_1\ ,
\end{aligned}$$

tedy každý prvek $\alpha u^*$ pro $\alpha \in [-1, 1]$ je nejlepší aproximace prvku $f$ z podprostoru $U$. □

**Poznámka 7.4.** *Zmiňme se velmi stručně o významu "Bang-bang" principu pro "control theory". Uvažujme dynamický systém (tzv. "control" systém) popsaný soustavou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \textit{pro} \quad \textit{s.v.} \quad t \in [0, T]\ , \quad x(0) = 0\ ,$$

*kde řešení $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ je z třídy absolutně spojitých funkcí, $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ je "kontrola" (viz. níže) a $A : [0, T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : [0, T] \to \mathbb{R}^{n \times m}$ jsou (po složkách) integrovatelné maticové funkce. Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ představuje "stav" systému v čase $t$. Vektor $u(t) \in \mathbb{R}^m$ představuje "kontrolu", kterou lze v každém čase volit libovolně z jistého omezeného n-rozměrného intervalu za účelem ovlivnit stav systému. Konkrétně předpokládáme, že pro každou složku u platí, že $u_i$ je měřitelná a $|u_i| \leq 1$.*

*Uvažujme nyní množinu všech možných stavů, kam systém může v čase $T$ dospět, použijeme-li všechny "přípustné" kontroly (tzv. "reachable set" nebo "attainable set"). "Bang-bang" princip v tomto případě tvrdí, že tato množina je* stejná *jako množina, kterou bychom dostali, pokud bychom za "přípustné" považovali pouze kontroly, pro jejichž složky platí $|u_i| = 1$ (tj. takové, kdy v každý čas používáme "plnou sílu" (kladnou či zápornou), tzv. "Bang-bang" kontroly).*

*Uvažujeme-li speciální případ, kdy $n = m$, $A(t) = 0$,* $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2(t) & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n(t) \end{pmatrix}$, *$u_i(t) = u(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ (skalární kontrola), dostáváme pro stav systému v čase $T$:*

$$x(T) = \left( \int_0^T u(t)\, b_1(t)\, dt, \int_0^T u(t)\, b_2(t)\, dt, \cdots, \int_0^T u(t)\, b_n(t)\, dt \right) ,$$

*a výše uvedený "Bang-bang" princip plyne snadno z Věty 7.1. Obecný případ, který se ze speciálního získá s jistou dávkou techniky, je zpracován zejm. v monografii [HL69], viz. též [Ho75](II.15.12).*

*Zobecnění Ljapunovovy věty do nekonečné dimenze (viz. Větu 3.1 (Knowles)) umožňuje zobecňovat "Bang-bang" princip na systémy řízené parciálními diferenciálními rovnicemi - viz. [KK75].*

*Pro nelineární systémy obecně "Bang-bang" princip neplatí. Příkladem je následující "control" systém ([NS98]):*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1 - y(t)^2 \\ \dot{y}(t) &= u(t) , \end{aligned}$$

*kde počáteční stav je $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ a skalární kontrola $u(t)$ nabývá hodnoty z intervalu $[-1, 1]$.*

*Zvolíme-li $u(t) := 0$ pro $t \in [0, 1]$, dostáváme řešení $(x(t), y(t)) = (t, 0)$ pro $t \in [0, 1]$. Tedy pomocí této kontroly se systém v čase $t = 1$ dostane ze stavu $(0, 0)$ do stavu $(1, 0)$. Je-li nyní $(x(t), y(t))$ libovolné řešení, takové, že $(x(1), y(1)) = (1, 0)$, pak máme:*

$$1 = x(1) - x(0) = \int_0^1 \dot{x}(t)\, dt = \int_0^1 \left[1 - y(t)^2\right] dt \leq 1 - 0 = 1 ,$$

*tedy nerovnost je nutně rovností, což platí pouze v případě, že $y(t) \equiv 0$, odkud plyne $u(t) \equiv 0$. Tedy jediná kontrola, která umožňuje přesunout stav $(0, 0)$ do $(1, 0)$, je kontrola $u(t) \equiv 0$, která není "Bang-bang".*

*"Bang-bang" princip v uvedené formě nezaručuje, že "Bang-bang" kontrola nebude mít nekonečně mnoho skoků, což není příznívé z hlediska praktické realizovatelnosti. Zesílení "Bang-bang" principu v tomto směru lze dosáhnout za předpokladu, že matice $A(t)$, $B(t)$ jsou (po částech) reálně analytické (viz. [NS98] - přehledný článek o tomto tématu). Bez těchto zesílených předpokladů na $A(t)$, $B(t)$ lze dokázat alespoň hustotu stavů dosažitelných*

*pomocí "Bang-bang" kontrol s konečně mnoha skoky v množině stavů dosažitelných obecnou měřitelnou omezenou kontrolou.*

**Poznámka 7.5.** *Obsáhlý seznam literatury s anotacemi o oboru hodnot vektorové míry a aplikacích na problémy spravedlivého dělení ("fair division" či "cake cutting") asi do roku 1996 lze nalést na stránkách [Hi].*

# 8 Jiné důkazy Ljapunovovy věty a některé poznámky

Za nejelegantnější důkaz Ljapunovovy věty bývá považován Lindenstraussův důkaz z [Li66], jehož jádrem je aplikace Krejn-Milmanovy věty (viz. též např. [Ru73], kde je uvedena modifikovaná verze nepoužívající indukci). Relativní stručnost důkazu je vyvážena použitím pokročilých vět funkcionální analýzy. Bylo publikováno mnoho jiných důkazů Ljapunovovy věty. Před tím, než se o některých z nich stručně zmíníme, uveďme důkaz nejjednodušší verze Ljapunovovy věty pro 1-dimenzionální nezápornou konečnou míru, který používá Zornovo lemma.

**Tvrzení 8.1 ( "Darbouxova vlastnost" neatomické míry ).** *Buď $\mu$ konečná nezáporná neatomická míra na $(\Omega, \mathcal{S})$. Pak $\mu(\mathcal{S}) = [0, \mu(\Omega)]$.* *(srov. [Ol90])*

*Důkaz.* Volme $0 < \alpha < \mu(\Omega)$. Máme ukázat, že existuje $B \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(B) = \alpha$. Zaveďme následující podsystém měřitelných množin:

$$S_\alpha := \{A \in \mathcal{S} : \mu(A) \geq \alpha\} .$$

Zřejmě $S_\alpha \neq \varnothing$, neboť $\Omega \in S_\alpha$. Definujme na $S_\alpha$ částečné uspořádání pomocí "inkluze $\mu$-s.v." takto:

$$A_1 \leq A_2 , \qquad \text{pokud} \qquad \mu(A_1 \setminus A_2) = 0 .$$

Zvolme $\{A_\tau\}_{\tau \in \Gamma}$ řetězec v $S_\alpha$. Položme:

$$\beta := \inf \{\mu(A_\tau) : \tau \in \Gamma\} \geq \alpha .$$

Z definice infima existuje spočetný podřetězec indexovaný pomocí množiny $\Gamma_0 = \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ tak, že:

$$\beta = \inf \{\mu(A_\tau) : \tau \in \Gamma_0\}$$

(indexy $\tau_n$ volme například tak, aby $\mu(A_{\tau_n}) < \beta + \frac{1}{n}$ ). Položme:

$$A_0 := \bigcap_{\tau \in \Gamma_0} A_\tau \in \mathcal{S} .$$

Zřejmě $A_0 \leq A_\tau$ pro všechna $\tau \in \Gamma$. Spojitost míry dává $\mu(A_0) \geq \alpha$, tedy $A_0 \in S_\alpha$. Ověřili jsme, že $A_0$ je dolní závorou řetězce $\{A_\tau\}_{\tau \in \Gamma}$ v $S_\alpha$. Podle Zornova lemmatu existuje v $S_\alpha$ minimální prvek $B$. Tvrdíme, že je nutně $\mu(B) = \alpha$ (Nechť pro spor $\mu(B) > \alpha$. Protože

$\mu$ je neatomická, obsahuje každá množina kladné míry měřitelnou podmnožinu libovolně malé kladné míry. Existuje tedy $A \subset B$, $A \in \mathcal{S}$ tak, že:

$$0 < \mu(A) < \frac{\mu(B) - \alpha}{2} \ .$$

Potom však máme:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) > \mu(B) - \frac{\mu(B) - \alpha}{2} = \frac{\mu(B) + \alpha}{2} > \alpha \ ,$$

tedy $B \setminus A \in S_\alpha$ a zároveň $\mu(B \setminus A) < \mu(B)$, z čehož již ihned plyne spor s minimalitou $B$ ). $\square$

**Poznámka 8.2.** *Návod na důkaz předchozího tvrzení bez použití Zornova lemmatu (axiomu výběru) lze nalést v [LM02] 2.15.*

V článku [Ar90] (viz. též [Ol90]) je Zornovo lemma použito též k důkazu Ljapunovovy věty v její plné obecnosti. Naznačme pouze hlavní myšlenku. Nechť $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ je neatomická konečně dimenzionální vektorová míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Máme dokázat, že $\mu(\mathcal{S}) = \overline{conv}\mu(\mathcal{S})$, zejména netriviální inkluzi $\mu(\mathcal{S}) \supset \overline{conv}\mu(\mathcal{S})$. Zvolme $x \in \overline{conv}\mu(\mathcal{S})$. Máme najít $D \in \mathcal{S}$ tak, aby $\mu(D) = x$. Pro $A \in \mathcal{S}$ označme $\mathcal{S}_{\mathrm{A}} := \{B \in \mathcal{S} : B \subset A\}$ restrikci $\sigma$-algebry $\mathcal{S}$ na množinu $A$. Zaveďme následující podsystém měřitelných množin:

$$S^x := \{A \in \mathcal{S} : x \in \overline{conv}\mu(\mathcal{S}_{\mathrm{A}})\} \ .$$

Zřejmě $S^x \neq \varnothing$, neboť $\Omega \in S^x$. Pomocí Zornova lemmatu lze nyní dokázat, že $S^x$ obsahuje minimální prvek $D$ vzhledem k částečnému uspořádání "inkluzí $|\mu|$-s.v." (uspořádání je definováno tak, že $A_1 \leq A_2$, pokud $|\mu|(A_1 \setminus A_2) = 0$). Druhým krokem důkazu je potom ověření, že je nutně $\mu(D) = x$. V důkazu se používá "pouze" teorie míry (Radon-Nikodýmova věta) a konvexní geometrie v $\mathbb{R}^n$ (existence opěrné nadroviny v bodě hranice konvexní množiny v $R^n$ apod.). Důkaz patří k relativně kratším.

Ljapunovovu větu lze dokázat bez Zornova lemmatu či jiné formy axiomu výběru (důkaz uvedený v této práci užívá axiom výběru, neboť využívá Hahn-Banachovu větu (resp. duální vyjádření normy v důkazu Věty 2.24) a Krejn-Milmanovu větu, které se dokazují pomocí Zornova lemmatu). Takovým příkladem je důkaz podaný v [Ta90]. Tento důkaz také nepoužívá žádný z nástrojů funkcionální analýzy, nýbrž zůstává na poli teorie míry (Radon-Nikodýmova věta) a konvexní geometrie v $\mathbb{R}^n$. Je založen na Shapley-Folkmanově větě, což je věta z konvexní geometrie blízce příbuzná známé Caratheodoryho větě (její elementární důkaz viz. [Zh93]).

Na závěr připojme dvě s tématem volněji související poznámky.

**Poznámka 8.3.** *Tato poznámka se týká měr, které nejsou neatomické. Uvažme následující příklad. Definujme (pravděpodobnostní) míru na borelovských podmnožinách intervalu* $[0,1]$ *předpisem:*

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varepsilon_{\frac{1}{2^n}} \ ,$$

*kde* $\varepsilon_{\frac{1}{2^n}}$ *je Dirakova míra v bodě* $\frac{1}{2^n}$*. Pak* $\mu$ *je dokonce* čistě atomická *( v tom smyslu, že každá množina* $\{\frac{1}{2^n}\}$ *je* $\mu$*-atomem a* $\mu\left([0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^n}\right\}\right) = 0$ *). Přitom však obor hodnot* $\mu$ *je celý interval* $[0,1]$*, tedy kompaktní a konvexní množina v* $\mathbb{R}^n$*. Zvolíme-li totiž* $x \in [0,1]$*, pak stačí sjednotit ty body, které "odpovídají" dyadickému rozvoji* $x$*, abychom dostali množinu, na níž má* $\mu$ *hodnotu* $x$*. Pro "mnohé" podmnožiny* $A \subset [0,1]$ *však platí, že restrikce* $\mu$ *na* $A$ *nemá konvexní obor hodnot (např. je-li* $A$ *některý z* $\mu$*-atomů, je obor hodnot* $\mu \restriction A$ *dvoubodová množina).*

*V případě konečně dimenzionálních vektorových měr (ne nutně neatomických) byly odvozeny jisté nutné a zároveň postačující podmínky konvexity oboru hodnot (viz. např. [MR96], [Dv94]). V obecném případě však takové podmínky zřejmě nejsou známy.*

**Poznámka 8.4.** *Tato poznámka se týká následujícího pozorování (viz. např. [KK75] VII.3.Lemma 1, či [Bo69] str.323 ).* Obor hodnot vektorové míry $\mu$ na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ je středově symetrická množina.

*Skutečně, zvolíme-li* $A \in \mathcal{S}$*, pak platí:*

$$\frac{\mu(A) + \mu(A^c)}{2} = \frac{\mu(\Omega)}{2} \ ,$$

*tedy bod* $\frac{\mu(\Omega)}{2}$ *je středem symetrie množiny* $\mu(\mathcal{S})$.

*Platí (Bolker, [Bo69]), že množina* $0 \in K \subset \mathbb{R}^n$ *je uzavřeným konvexním obalem oboru hodnot nějaké vektorové míry (což platí, právě když* $K$ *je oborem hodnot nějaké neatomické vektorové míry ([KK75] VII.1.) ) , právě když* $K$ *je* zonoid*, tj. uzavřená konvexní středově symetrická množina libovolně přesně aproximovatelná v Hausdorffově metrice* zonotopem*, přičemž zonotop je Minkowského součet konečného počtu úseček (připomeňme, že dvě neprázdné kompaktní množiny v* $\mathbb{R}^n$ *mají Hausdorffovu vzdálenost menší nebo rovnu než* $\varepsilon$*, právě když jedna leží v eulidovském* $\varepsilon$*-okolí druhé a naopak). Například krychle nebo koule (obsahující* $0$*) v* $\mathbb{R}^3$ *jsou oborem hodnot vektorové míry, ale pravidelný osmistěn nikoli (platí totiž, že každá hrana zonoidu je též zonoid, speciálně středově symetrická množina, což pravidelný osmistěn, jehož některé hrany mají tvar trojúhelníku, nesplňuje), v* $\mathbb{R}^2$ *je každá uzavřená konvexní středově symetrická množina obsahující* $0$ *oborem hodnot vektorové míry (viz. např. [Bo71]).*

*Charakterizace množin v Banachových prostorech, které jsou oborem hodnot nějaké vektorové míry je složitý problém ([DU77] str.275, kde je přehled některých výsledků).*

# 9 Dodatek: Duál k $L^1$

Tento dodatek obsahuje důkaz věty o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na prostoru $L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$, v případě, že míra $\lambda$ je konečná.

**Tvrzení 9.1 ( hustota jednoduchých funkcí v $L^1$ ).** *Buď $\lambda$ konečná nezáporná míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce. Pak existují $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ jednoduché funkce tak, že $s_n \to f$ na $\Omega$ a zároveň $|s_n| \leq |f|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (dokonce $|s_n| \nearrow |f|$ ). Je-li navíc $f \in L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$, pak $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$.*

*Důkaz.* Základ konstrukce je stejný jako v důkazu Tvrzení 2.34.

(a) Buď nejprve $f$ navíc nezáporná. Použijeme obvyklou konstrukci (viz. např. [LM02] 3.9.) k sestrojení pospoupnosti $\{s_n\}$ nezáporných jednoduchých funkcí takových, že $s_n \nearrow f$.

(b) V obecném případě použijeme rozklad $f = f^+ - f^-$ a na každou z nezáporných funkcí $f^+, f^-$ aplikujeme bod (a). Získáme tak posloupnosti $s_n^+$ a $s_n^-$ takové, že $s_n^+ \nearrow f^+$ a $s_n^- \nearrow f^-$. Funkce $s_n := s_n^+ - s_n^-$ jsou zřejmě jednoduché a platí:

$$|s_n| = \left|s_n^+ - s_n^-\right| = s_n^+ + s_n^- \nearrow f^+ + f^- = |f| \ .$$

Dále platí:

$$|s_n - f| \leq |s_n| + |f| \leq 2|f| \ .$$

Pro důkaz posledního tvrzení stačí tedy použít Lebesgueovu větu s konvergentní majorantou $2|f|$. □

**Věta 9.2 ($\left(L^1\right)^* \cong L^\infty$ ).** *Buď $\lambda$ konečná nezáporná míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$ a buď $\varphi \in (L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda))^*$. Pak existuje právě jedno $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$ tak, že platí:*

$$\varphi(f) = \int_\Omega fg \, d\lambda \ , \quad \textit{pro všechny} \quad f \in L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$$

*a $\|\varphi\| = \|g\|_\infty$.* *(srov. [Ru03] 6.12, [Co90] appendix B)*

*Důkaz.* Pro stručnost pišme dále $L^1(\Omega, \mathcal{S}, \lambda) \equiv L^1$ a $L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \lambda) \equiv L^\infty$.

*jednoznačnost*: Nechť existují $g_1, g_2 \in L^\infty$ splňující tvrzení věty. Protože $\lambda(\Omega) < \infty$ (konečnost míry), je $\chi_E \in L^1$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Máme tedy:

$$\int_\Omega \chi_E g_1 \, d\lambda = \int_\Omega \chi_E g_2 \, d\lambda \ , \quad \text{pro všechny} \quad E \in \mathcal{S} \ ,$$

čili:

$$\int_E (g_1 - g_2) \, d\lambda = 0 \ , \quad \text{pro všechny} \quad E \in \mathcal{S} \ ,$$

odtud plyne ( [LM02] 8.17.):

$$g_1 - g_2 = 0 \quad \lambda\text{-s.v.} \ .$$

*existence*: Pro $E \in \mathcal{S}$ definujme:

$$\nu(E) := \varphi(\chi_E) \ .$$

Ukážeme, že $\nu$ je konečná znaménková míra na $(\Omega, \mathcal{S})$.

Z linearity $\varphi$ a faktu, že $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ pro disjunktní $A, B \subset \Omega$ plyne, že $\nu$ je konečně aditivní reálná množinová funkce na $\mathcal{S}$. Platí $\nu(\emptyset) = \varphi(\chi_\emptyset) = \varphi(0) = 0$. Ověřme, že $\nu$ je $\sigma$-aditivní. Volme $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ . Pak platí:

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^N A_i} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \ .$$

To plyne ze spojitosti míry takto:

$$\begin{aligned}
\left\| \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} - \chi_{\bigcup_{i=1}^N A_i} \right\|_1 &= \int_\Omega \left| \chi_{\bigcup_{i=N+1}^\infty A_i} \right| d\lambda = \\
&= \int_\Omega \chi_{\bigcup_{i=N+1}^\infty A_i} \, d\lambda = \\
&= \lambda\left( \bigcup_{i=N+1}^\infty A_i \right) \longrightarrow 0 \ , \quad N \to \infty \ ,
\end{aligned}$$

neboť $\bigcup_{i=N+1}^\infty A_i \searrow \emptyset$ a $\lambda$ je na $\mathcal{S}$ konečná. Nyní stačí použít linearitu a spojitost $\varphi$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(\chi_{A_i}) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \varphi(\chi_{A_i}) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \varphi\left( \chi_{\bigcup_{i=1}^N A_i} \right) = \varphi\left( \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \right) = \nu\left( \bigcup_{i=1}^\infty A_i \right) \ .
\end{aligned}$$

Ukažme, že $\nu << \lambda$, tj. že $\nu$ je absolutně spojitá vzhledem k $\lambda$. Volme $E \in \mathcal{S}$ tak ,aby $\lambda(E) = 0$. Pak $\|\chi_E\|_1 = \int_\Omega \chi_E \, d\lambda = \lambda(E) = 0$, tedy $\chi_E = 0$ (jako prvek $L^1$), a tedy $\nu(E) = \varphi(\chi_E) = \varphi(0) = 0$.

Podle Radon-Nikodýmovy věty (verze pro $\lambda$ konečnou nezápornou, $\nu$ konečnou znaménkovou, $\nu << \lambda$) existuje $g \in L^1$ tak, že pro všechny $E \in \mathcal{S}$ platí:

$$\varphi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g \, d\lambda = \int_\Omega \chi_E g \, d\lambda \ . \qquad (1)$$

Tím dostáváme platnost dokazovaného vztahu pro charakteristické funkce měřitelných množin a z linearity $\varphi$ a linearity integrálu též pro všechny jednoduché funkce (lineární kombinace charakteristických) $s : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(s) = \int_\Omega s \, g \, d\lambda \ . \qquad (2)$$

Rozšiřme nejprve platnost dokazovaného vztahu z jednoduchých funkcí na funkce $f \in L^\infty \subset L^1$ (poslední inkluze platí díky konečnosti míry $\lambda$). Zvolme tedy $f \in L^\infty$. Protože

$f$ je měřitelná (jako člen $L^\infty$ či $L^1$), existuje podle Tvrzení 9.1 posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $s_n \to f$ taková, že $|s_n| \le |f|$ a protože $f \in L^1$, platí též $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$. Ukažme, že platí $\int_\Omega s_n\, g\, d\lambda \longrightarrow \int_\Omega f\, g\, d\lambda$. Zřejmě platí $s_n g - fg \to 0$. Nyní stačí použít Lebesgueovu větu s konvergentní majorantou $2\|f\|_\infty |g|$, neboť platí:

$$|s_n g - fg| = |s_n - f||g| \le (|s_n| + |f|)|g| \le 2\|f\|_\infty |g| \ .$$

Ve vztahu (2) aplikovaném na $s_n$ lze tedy přejít na obou stranách k limitám, přičemž vlevo použijeme spojitost $\varphi$. Dostáváme:

$$\varphi(f) = \int_\Omega f\, g\, d\lambda \ , \quad \text{pro všechny} \quad f \in L^\infty \ . \qquad (3)$$

Nyní ukážeme, že je $\|g\|_\infty \le \|\varphi\|$, tedy speciálně $g \in L^\infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Definujme následující měřitelnou množinu:

$$H_\varepsilon := \{x \in \Omega : |g(x)| > \|\varphi\| + \varepsilon\} \ .$$

Ukážeme, že $\lambda(H_\varepsilon) = 0$. Položme $f := \chi_{H_\varepsilon} \operatorname{sign} g \in L^\infty$. Pak platí:

$$\left| \int_\Omega f\, g\, d\lambda \right| = \left| \int_\Omega \chi_{H_\varepsilon} \operatorname{sign} g \ g\ d\lambda \right| = \int_{H_\varepsilon} |g|\, d\lambda \ge (\|\varphi\| + \varepsilon)\, \lambda(H_\varepsilon) \ .$$

Zároveň však s využitím (3) máme:

$$\left| \int_\Omega f\, g\, d\lambda \right| = |\varphi(f)| \le \|\varphi\| \|f\|_1 = \|\varphi\| \int_\Omega |\chi_{H_\varepsilon} \operatorname{sign} g|\ d\lambda =$$

$$= \|\varphi\| \int_\Omega \chi_{H_\varepsilon}\, d\lambda = \|\varphi\|\, \lambda(H_\varepsilon) \ .$$

Celkem dostáváme:

$$(\|\varphi\| + \varepsilon)\, \lambda(H_\varepsilon) \le \|\varphi\|\, \lambda(H_\varepsilon) \ .$$

Odtud nutně plyne, že $\lambda(H_\varepsilon) = 0$. Protože $H_\varepsilon \nearrow \{x \in \Omega : |g(x)| > \|\varphi\|\}$, je ze spojitosti míry též $\lambda(\{x \in \Omega : |g(x)| > \|\varphi\|\}) = 0$, a tedy z definice esenciálního suprema je

$$\|g\|_\infty \le \|\varphi\| \qquad (*)$$

( $\|g\|_\infty := \inf\{\, \alpha > 0 : \lambda(\{x \in \Omega : |g(x)| > \alpha\}) = 0 \,\}$ ).

Nyní lze ukázat, že zobrazení $f \mapsto \int_\Omega f\, g\, d\lambda$ je spojitý lineární funkcionál na $L^1$. Linearita je zřejmá. Spojitost plyne z následujícího:

$$\left| \int_\Omega f\, g\, d\lambda \right| \le \int_\Omega |f|\, |g|\, d\lambda \le \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\, d\lambda = \|g\|_\infty \|f\|_1 \ .$$

Protože jednoduché funkce jsou husté v $L^1$ (Tvrzení 9.1), plyne z platnosti (2) a ze zjištění, že na obou stranách dokazovaného tvrzení jsou spojité funkce (funkcionály) na $L^1$, požadovaný závěr:

$$\varphi(f) = \int_\Omega f\, g\, d\lambda\,, \quad \text{pro všechny} \quad f \in L^1\,. \qquad (4)$$

Z (4) plyne pro $f \in L^1$, $\|f\|_1 \le 1$ odhad:

$$|\varphi(f)| \le \cdots \le \|g\|_\infty \|f\|_1 \le \|g\|_\infty\,,$$

tedy

$$\|\varphi\| \le \|g\|_\infty\,. \qquad (**)$$

Vztahy $(*)$, $(**)$ dávají konečně zbytek tvrzení:

$$\|\varphi\| = \|g\|_\infty\,.$$

□

# Literatura


[AK06] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Springer-Verlag, 2006.

[Ar90] Z. Artstein, *Yet another proof of the Lyapunov convexity theorem*, Proc. Amer. Math. Soc.**108**(1)(1990), 89–91.

[Ba02] A. Barvinok, *A course in convexity*, AMS, 2002.

[BDS55] R. G. Bartle, N. Dunford and J. T. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math.**7**(1955), 289–305.

[Bo69] E. D. Bolker, *A class of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc.**145**(1969), 323–345.

[Bo71] E. D. Bolker, *The zonoid problem*, Amer. Math. Monthly**78**(1971), 529–531.

[Co80] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser Boston, 1980.

[Co90] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[Di84] Joseph Diestel, *Sequences and Series in Banach spaces*, Springer-Verlag, 1984.

[DS58] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I*, Interscience Publishers, 1958.

[DU77] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, AMS, 1977.

[Dv94] A. Dvoretzky, *On Liapunov's convexity theorem*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA**91**(6)(1994), 2145.

[Go65] G. G. Gould, *Integration over vector-valued measures*, Proc. London Math. Soc.**15**(3)(1965), 193–225.

[HHZ96] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaceces I,II*, Matfyzpress Praha, 1996.

[Hi] T. P. Hill, *http://www.math.gatech.edu/~ hill/publications/fdhome.html*, List of Fair Division References.

[HL69] E. Hermes and J. P. LaSalle, *Functional analysis and time optimal control*, Academic Press, London, 1969.

[Ho75] R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, 1975.

[HS69] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 1969.

[Kl73] I. Kluvánek, *The range of a vector-valued measure*, Math. Systems Theory**7**(1)(1973), 44–54.

[KK75] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[Kn75] G. Knowles, *Lyapunov vector measures*, SIAM J. Control**13**(2)(1975), 294–303.

[KP92] V. Kadets and M. Popov, *On the Lyapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings*, Ukr. Math. J.**44**(9)(1992), 1192–1200.

[Kr] O. Krupková, *http://kag.upol.cz/krupkova/index.html*, studijní text k přednášce topologie.

[KS89] B. S. Kashin and A. A. Saakyan, *Orthogonal Series*, AMS, 1989.

[Ku] K. L. Kuttler, *http://www.math.byu.edu/klkuttle/SobolevSpacesB.pdf*, Topics in analysis.

[Ku98] K. L. Kuttler, *Modern analysis*, CRC Press, 1998.

[Li66] J. Lindenstrauss, *A short proof of Liapounoff's convexity theorem*, J. Math. Mech.**15**(1966), 971–972.

[LM02] J. Lukeš and J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum,UK Praha, 2002.

[Lu02] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, UK Praha, 2002.

[NS98] J. A. Nohel and H. J. Sussmann, *Commentary on Norman Levinson's paper: Minimax, Liapunov and "Bang-Bang" (J. Differ. Equations* ***2****(1966), 218–241.)*, in *Selected Papers of Norman Levinson*, Volume 2, J. A. Nohel, D. H. Sattinger Eds., Birkhäuser Boston (1998), 463–475. (http://www.rutgers.edu/∼ sussmann/currentpapers.html)

[MR96] J. Mill and A. Ran, *On a generalization of Lyapounov's theorem*, Indag. Mathem.**7**(2)(1996), 227–242.

[Ol90] C. Olech, *The Lyapunov theorem: its extensions and applications*, in *Methods of nonconvex analysis*, A. Cellina Ed., volume 1446 of series *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin (1990), 84–103.

[Ph60] R. R. Phelps, *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc.**95**(1960), 238–255.

[Pi89] A. Pinkus, *On $L^1$-approximation*, Cambridge University Press, 1989.

[Ru03] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, 2003.

[Ru73] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[SS03] E. Saab and P. Saab, *Lyapunov convexity type theorems for non-atomic vector measures*, Quaestiones Mathematicae**26**(2003), 371–383.

[Ta90] F. Tardella, *A new proof of the Lyapunov convexity theorem*, SIAM J. Control Optim.**28**(2)(1990), 478–481.

[Uh69] J. J. Uhl, Jr., *The range of a vector-valued measure*, Proc. Amer. Math. Soc.**23**(1969), 158–163.

[Ve97] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele I,II*, Matfyzpress Praha, 1997.

[Vl99] O. I. Vladimirskaya, *Classes of Banach spaces connected with the Lyapunov convexity theorem* Ph.D. thesis, Berlin, 1999. (http://www.diss.fu-berlin.de/1999/42/index.html)

[Zh93] L. Zhou, *A simple proof of the Shapley-Folkman theorem*, Econ. Theory**3**(1993), 371–372.