Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lenka Burešová

Kohomologie variet

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Vanžura, CSc.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematické struktury

2007

Velmi děkuji svému vedoucímu Doc. RNDr. Jiřímu Vanžurovi, CSc. za cenné připomínky a pomoc s diplomovou prací. Ráda bych poděkovala i rodičům za podporu během celého studia. Dále děkuji RNDr. Zbyňkovi Pawlasovi, Ph.D za pomoc s typografickým systémem TEX a v neposlední řadě Stanislavě Nešporové, DiS. za psychickou podporu při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 8.8.2007 Lenka Burešová

Obsah

Název práce: Kohomologie variet
Autor: Lenka Burešová
Katedra (ústav): Matematický ústav Univerzity Karlovy
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Vanžura, CSc.
e-mail vedoucího: vanzura@ipm.cz

Abstrakt: Grupa $GL(6, \mathbb{R})$ operuje na prostoru $\bigwedge^3 \mathbb{R}^{6*}$ přirozeně, zachovává multisymplektické formy a rozdělí je do tří orbit. Navíc, každá multisymplektická forma indukuje na vektorovém prostoru V nějakou strukturu. V předložené práci studujeme Hodgeův izomorfismus $\star$ na vektorovém prostoru $\bigwedge^3 \mathbb{R}^{6*}$ indukovaný regulární bilineární formou libovolné signatury. Zejména řešíme otázku, kdy platí $\star\omega = \omega$ pro danou multisymplektickou formu ω. Ukážeme, že tento problém má v různých orbitách analogické řešení, bilineární forma totiž musí nějakým způsobem respektovat strukturu na prostoru V indukovanou danou formou.

Klíčová slova: multisymplektická forma, Hodgeův operátor, součinová struktura, komplexní struktura, tečná struktura.

Title: Cohomology of manifolds
Author: Lenka Burešová
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Vanžura, CSc.
Supervisor's e-mail address: vanzura@ipm.cz

Abstract: The group $GL(6, \mathbb{R})$ acts on the space $\bigwedge^3 \mathbb{R}^{6*}$ naturally, it preserves multisymplectic forms. There are three orbits of this action on this space. In addition, every multisymplectic form induces some structure on the vector space V. In the present work we study Hodge isomorphism $\star$ on the vector space $\bigwedge^3 \mathbb{R}^{6*}$ induced by a regular bilinear form of arbitrary signature. Particularly, we solve question, when this operator satisfies $\star\omega = \omega$ for given multisymplectic form ω. We show, that this problem has an analogous solution in different orbits. The bilinear form must in some sense respect the structure on the space V induced by the given form.

Keywords: multisymplectic form, Hodge operator, product structure, complex structure, tangent structure.

Úvod

Hodgeův operátor je izomorfismus vektorových prostorů $\bigwedge^k V$ a $\bigwedge^{n-k} V$, kde n je dimenze vektorového prostoru V. Je to tedy automorfismus prostoru $\bigwedge^3 V^*$, kde dimenze prostoru V^* je šest. Na tomto prostoru přirozeným způsobem operuje grupa $GL(6,\mathbb{R})$ a rozdělí tak multisymplektické formy na tři orbity.

Cílem diplomové práce je pro danou multisymplektickou formu najít Hodgeův operátor, který ji zachová.

Nyní k obsahu práce. V kapitole 1 je definován Hodgeův operátor indukovaný regulární bilineární formou libovolné signatury. Je to tedy rozšíření definice z knihy [3], kde autor uvažuje pouze pozitivně definitní formy. Dále je zde zavedena akce grupy $GL(6,\mathbb{R})$ na $\bigwedge^3 V^*$.

Každá multisymplektická forma indukuje na vektorovém prostoru V další strukturu, tomu se podrobněji věnuje kapitola 2. Je to součinová, komplexní nebo tečná struktura. Využijeme je v další kapitole. Více se těchto strukturách lze dočíst v článcích [1] a [2]. Dále zjistíme, že Hodgeův izomorfismus převádí každou orbitu na sebe.

V poslední kapitole odvodíme, že pokud máme dva různé Hodgeovy operátory (tedy indukované různými bilineárními formami), které se shodují na jedné multisymplektické formě, můžeme sestrojit automorfismus prostoru V, který je kladným násobkem automorfismu této formy. To nás povede ke zkoumání automorfismů jednotlivých forem. Klasifikace grupy automorfismů forem produktového a komplexního typu je známa, v prvním případě je izomorfní grupě $SL(3,\mathbb{R}) \times SL(3,\mathbb{R})$, v druhém případě grupě $SL(3,\mathbb{C})$. Grupa automorfismů forem tečného typu je izomorfní grupě $GL(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^8$, což lze najít například v článku [4].

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Definice vnější algebry

Nechť V je vektorový prostor dimenze n s bází $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Definujeme *k-tou tenzorovou mocninu prostoru V* jako dvojici $(\bigotimes^k V, \iota)$, kde $\bigotimes^k V$ je vektorový prostor a $\iota : V^k \to \bigotimes^k V$, $\iota(v_1, v_2, \ldots, v_k) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ je multilineární zobrazení s následující univerzální vlastností: pro každý vektorový prostor U a pro každé multilineární zobrazení $\phi : V^k \to U$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\Phi : \bigotimes^k V \to U$, že $\phi = \Phi \circ \iota$. Prvky $\bigotimes^k V$ nazveme *k-tenzory.*

Ekvivalentně lze tenzorovou mocninu vyjádřit jako

$$\bigotimes^k V = \{\varphi : (V^*)^{\times k} \to \mathbb{R} | \varphi \text{ je multilineární zobrazení}\}.$$

Báze prostoru $\bigotimes^k V$ je množina $\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} | i_j \in \{1, \ldots, k\}\}$, je tedy $\dim \bigotimes^k V = (\dim V)^k$.

Zobrazení

$$\begin{aligned} \Psi : \bigotimes^k V^* &\to (\bigotimes^k V)^*, \\ v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^* &\mapsto \big(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_k} \mapsto v_{i_1}^*(v_{j_1}) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}^*(v_{j_k})\big) \end{aligned}$$

je izomorfismus a přirozeně definuje dualitu

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigotimes^k V \times \bigotimes^l V^* \to \mathbb{R},$$

$$\langle v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \cdots \otimes v_{j_k}, v_{i_1}^* \otimes v_{i_2}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_l}^* \rangle = \begin{cases} v_{i_1}^*(v_{j_1}) \cdot v_{i_2}^*(v_{j_2}) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}^*(v_{j_k}), & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Definice 1.1.1. *Nechť je $A \neq \emptyset, G = (G, \circ, 1)$ grupa. Zobrazení $\cdot : G \times A \to G$ nazveme* pravou akcí grupy G na množině A*, pokud platí*

a)$\forall a \in A : 1 \cdot a = a,$

b)$\forall a \in A \, \forall g, h \in G : (a \cdot g) \cdot h = a \cdot (g \circ h).$

Zobrazení $\cdot : G \times A \to G$ nazveme levou akcí grupy G na množině A*, pokud je splněna podmínka* a) *a platí podmínka* b')$\forall a \in A \, \forall g, h \in G : h \cdot (g \cdot a) = (h \circ g) \cdot a.$

Na $\bigotimes^k V$ definujme (levou) akci grupy S_k permutací k prvků předpisem

$$\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(k)}.$$

Tenzor $x \in \bigotimes^k V$ nazveme *antisymetrický*, pokud $\pi(x) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot x, \forall \pi \in S_k$. Pak značíme

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(k)}.$$

Prostor $\bigwedge^k V \subset \bigotimes^k V$ všech antisymetrických k-tenzorů nazveme *k-tou vnější mocninou prostoru V*, jeho prvky nazveme *k-vektory*, prvky $\bigwedge^k V^*$ obvykle nazýváme *k-formy*. *Vnější algebra prostoru V* je

$$\bigwedge V = \bigwedge^0 V \oplus \bigwedge^1 V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V \oplus \ldots$$

s násobením definovaným předpisem

$$x \wedge y = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \pi(x \otimes y) \in \bigwedge^{k+l} V,$$

kde $x \in \bigwedge^k V, y \in \bigwedge^l V$. Toto násobení je antikomutativní, přesněji řečeno platí $x \wedge y = (-1)^{kl} y \wedge x, x \in \bigwedge^k V, y \in \bigwedge^l V$.

Bázi prostoru $\bigwedge V$ tvoří množina

$$\{1\} \cup \bigcup_{r=1}^{n} \{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leq n\},$$

proto je dimenze podprostorů $\bigwedge^k V$ rovna $\binom{n}{k}$ pro $0 \leq k \leq n$, vyšší vnější mocniny jsou nulové a $\dim \bigwedge V = 2^n$.

Na $\bigwedge^k V \times \bigwedge^l V^*$ zavedeme dualitu jako restrikci zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle z | \xi \rangle = \begin{cases} k! \langle z, \xi \rangle, & z \in \bigwedge^k V, \xi \in \bigwedge^k V^*, \\ 0, & k \neq l \end{cases} \tag{1.1}$$

a lineárně rozšíříme na celé $\bigwedge V \times \bigwedge V^*$. Prostory $\bigwedge^k V^*$ a $(\bigwedge^k V)^*$ jsou přirozené izomorfní.

Vektor $x \in \bigwedge^k V$ nazveme *rozložitelný*, pokud existuje vyjádření

$$x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, x_i \in V.$$

Jsou-li vektory $z \in \bigwedge^k V$ a $\xi \in \bigwedge^k V^*$ rozložitelné, platí

$$\langle z | \xi \rangle = \langle z_1 \wedge \cdots \wedge z_k | \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k \rangle = \det(\xi_i(z_j)).$$

Lemma 1.1.2. *Je-li* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *báze prostoru* V *a* $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ *báze* V^* *k ní duální, pak je množina* $\{1\} \cup \bigcup_{r=1}^{n} \{\epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_r} | 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leq n\}$ *duální báze (prostoru* $\bigwedge V^*$*) k bázi (prostoru* $\bigwedge V$*)* $\{1\} \cup \bigcup_{r=1}^{n} \{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leq n\}$ *vzhledem k dualitě* (1.1).

Důkaz. Zvolme $\{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}, \{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Pak

$$\begin{aligned}
& \langle e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | \epsilon_{j_1} \wedge \epsilon_{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_r} \rangle = \\
= \; & r! \langle \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} e_{\pi(i_1)} \otimes e_{\pi(i_2)} \otimes \cdots \otimes e_{\pi(i_r)}, \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon_{\sigma(j_1)} \otimes \epsilon_{\sigma(j_2)} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{\sigma(j_r)} \rangle \\
= \; & \langle \sum_{\pi \in S_r} e_{\pi(i_1)} \otimes e_{\pi(i_2)} \otimes \cdots \otimes e_{\pi(i_r)}, \epsilon_{j_1} \otimes \epsilon_{j_2} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{j_r} \rangle \\
= \; & \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \ldots \delta_{i_r j_r}.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. □

Na $\bigwedge V^*$ definujeme (pravé) vnitřní násobení prvkem $u \in \bigwedge V$

$$u \lrcorner \cdot : \bigwedge V^* \to \bigwedge V^*$$

tak, aby

$$\langle x | u \lrcorner y \rangle = \langle u \wedge x | y \rangle, \forall x \in \bigwedge V.$$

Je-li $u \in \bigwedge^r V$ a $y \in \bigwedge^s V^*$, je buď $u \lrcorner y \in \bigwedge^{s-r} V^*$ (pro $s \geq r$), nebo $u \lrcorner y = 0$ (jinak). Speciálně, pokud je $r = s$, vidíme, že $u \lrcorner y = \langle u | y \rangle$. Položme nyní $u = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ a $y = \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_s}$. Pak

$$u \lrcorner y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \epsilon_{k_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{k_{s-r}}, & \text{je-li } \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{j_1, \ldots, j_s\}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{1.2}$$

kde $\{k_1, \ldots, k_{s-r}\} = \{j_1, \ldots, j_s\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ a

$$\pi = \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_r & j_{r+1} & \ldots & j_s \\ i_1 & \ldots & i_r & k_1 & \ldots & k_{s-r} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.1.3. *Nechť* e *a* ϵ *jsou duální báze prostorů* $\bigwedge^n V$ *a* $\bigwedge^n V^*$*. Pak lineární zobrazení* $\perp_e$: $\bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V^*$ *definované jako* $\perp_e (x) = x \lrcorner \epsilon$ *je izomorfismus* $\bigwedge^k V$ *a* $\bigwedge^{n-k} V^*$*. Zobrazuje rozložitelné vektory na rozložitelné.*

Důkaz. Nechť $x, y \in \bigwedge^k V$, pak dle definice vnitřního násobení pro všechna $z \in \bigwedge V$ platí

$$\begin{aligned}
\langle z | (x+y) \lrcorner \epsilon \rangle &= \langle (x+y) \wedge z | \epsilon \rangle = \langle x \wedge z | \epsilon \rangle + \langle y \wedge z | \epsilon \rangle \\
&= \langle z | x \lrcorner \epsilon \rangle + \langle z | y \lrcorner \epsilon \rangle = \langle z | x \lrcorner \epsilon + y \lrcorner \epsilon \rangle.
\end{aligned}$$

Takže je $(x \lrcorner \epsilon) + (y \lrcorner \epsilon) = (x+y) \lrcorner \epsilon$. Zbytek tvrzení je zřejmý nebo plyne ze vztahu (1.2). □

Poznámka: Na $\bigwedge V$ můžeme definovat také (levé) vnitřní násobení prvkem $u \in \bigwedge V^*$ předpisem

$$\langle x \llcorner u | y \rangle = \langle x | u \wedge y \rangle, \forall y \in \bigwedge V^*.$$

Platí pak analogické vlastnosti jako pro (pravé) vnitřní násobení.

1.2 Hodgeův operátor

Nechť $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ je regulární symetrická bilineární forma s libovolnou signaturou. Označme její signaturu jako dvojici $(a, n-a)$, kde a je počet kladných prvků báze. Ta určuje izomorfismus V a V^* předpisem

$$v \in V \mapsto v^* = (v, \cdot) \in V^*. \tag{1.3}$$

Na V^* můžeme přirozeně přenést formu $(\cdot,\cdot)$, kterou označíme také $(\cdot,\cdot)$:

$$(v_1^*, v_2^*) := (v_1, v_2).$$

Pak je $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ duální báze k $\{v_1, \dots, v_n\}$. Zřejmě, je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormální báze V, je $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ ortonormální báze V^*.

Na $\bigotimes V$ definujeme skalární součin tak, že lineárně rozšíříme zobrazení

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes \dots \otimes w_l) = \begin{cases} (v_1, w_1) \cdot \ldots \cdot (v_k, w_k), & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Skalární součin na $\bigwedge^k V$ definujeme jako restrikci součinu z $\bigotimes^k V$

$$(v|w) = k!(v, w)$$

a lineárně rozšíříme na celé $\bigwedge V$. Pro rozložitelné vektory pak platí

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k | w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \det(v_i, w_j).$$

Úmluva: Je-li g bilineární forma na V, indukovanou formu na V^* budeme v dalších kapitolách značit také g a indukovanou formu na $\bigwedge V^*$ označíme G.

Na prostoru V vybereme orientaci, tedy zvolíme prvek (jeden ze dvou možných) $e \in \bigwedge^n V$ takový, že $\|e\|^2 = (e|e) = 1$ (nebo $\|e\|^2 = -1$ v případě, že $n-a$ je liché). Pak lemma 1.1.3 definuje izomorfismus prostorů $\bigwedge^k V$ a $\bigwedge^{n-k} V^*$. Dále, skalární součin na $\bigwedge^{n-k} V$ určuje izomorfismus $\bigwedge^{n-k} V^*$ a $\bigwedge^{n-k} V$, který použijeme v případě, že $n-a$ je sudé. V případě, že $n-a$ je liché, se bude lépe hodit izomorfismus

$$v \in \bigwedge^{n-k} V \mapsto -(v|\cdot) \in \bigwedge^{n-k} V^*. \tag{1.4}$$

Složením těchto dvou izomorfismů získáme izomorfismus

$$\star : \bigwedge^k V \xrightarrow{\perp_e} \bigwedge^{n-k} V^* \to \bigwedge^{n-k} V.$$

Definice 1.2.1. *Zobrazení* $\star$ *se nazývá* Hodgeův operátor.

Pozorování 1.2.2. *Zobrazení* $\star$ *je lineární.*

Nechť je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormální báze prostoru V, tj. $(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$ dle signatury formy $(\cdot,\cdot)$. Pak $\epsilon_i = (e_i, \cdot) \in V^*$ a $e_i \in V$ jsou prvky odpovídající si v izomorfismu (1.3). Množina $\{(e_i, e_i)\cdot\epsilon_i | i = 1\dots n\}$ je duální báze vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$, neboť

$$(e_i, e_i)\cdot\epsilon_i(e_j) = (e_i, e_i)\cdot\delta_{ij}(e_i, e_i) = \delta_{ij}.$$

Lemma 1.2.3. *Platí*

$$\star(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}) = \operatorname{sgn}(i_1\dots i_p\; j_1\dots j_{n-p})\,\|e_{i_1}\|^2\cdot\ldots\cdot\|e_{i_p}\|^2 e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_{n-p}},$$

kde $\{j_1, \dots, j_{n-p}\} = \{1, \dots, n\}\setminus\{i_1, \dots, i_p\}$.

Důkaz. Je-li $e = e_1\wedge\dots\wedge e_n \in \bigwedge^n V$ takový, že $(e|e) = \pm 1$, pak k němu duální prvek je

$$\epsilon = (e_1, e_1)\cdot\epsilon_1\wedge\dots\wedge(e_n, e_n)\cdot\epsilon_n = (-1)^{n-a}\cdot\epsilon_1\wedge\dots\wedge\epsilon_n \in \bigwedge^n V^*.$$

Podle vztahu (1.2) je

$$e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}\lrcorner\,\epsilon = \operatorname{sgn}(i_1\dots i_p\; j_1\dots j_{n-p})\,\|e_{j_1}\|^2\cdot\epsilon_{j_1}\wedge\dots\wedge\|e_{j_{n-p}}\|^2\cdot\epsilon_{j_{n-p}}$$

a tvrzení plyne z (1.3) a (1.4). $\square$

Lemma 1.2.4. *Na prostoru* $\bigwedge^k V$ *platí* $\star\star = (-1)^{k(n-k)+(n-a)}$.

Důkaz. Nechť $x = e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$. Označme

$$\pi = (i_1\dots i_k\; j_1\dots j_{n-k}), \quad \sigma = (j_1\dots j_{n-k}\; i_1\dots i_k).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\star\star x &= \star\big(\operatorname{sgn}\pi\cdot(e_{i_1}, e_{i_1})\cdot\ldots\cdot(e_{i_k}, e_{i_k})\cdot e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_{n-k}}\big)\\
&= \operatorname{sgn}\pi\cdot\operatorname{sgn}\sigma\cdot(e_{i_1}, e_{i_1})\cdot\ldots\cdot(e_{i_k}, e_{i_k})\cdot(e_{j_1}, e_{j_1})\cdot\ldots\cdot(e_{j_{n-k}}, e_{j_{n-k}})\cdot x\\
&= \operatorname{sgn}(n-k+1\dots n\; 1\dots n-k)\cdot(e|e)\cdot x = (-1)^{k(n-k)+(n-a)}\cdot x
\end{aligned}$$

a z linearity $\star$ plyne tvrzení. $\square$

Lemma 1.2.5. *Pro všechna* $x, y \in \bigwedge^k V$ *platí* $(x|y) = (-1)^{n-a}(\star x|\star y)$.

Důkaz. Na bázových k-vektorech rovnost zřejmě platí, z linearity platí pro všechna x, y. $\square$

Lemma 1.2.6. *Pro všechna* $x, y \in \bigwedge^k V$ *platí* $x\wedge\star y = (x|y)\cdot e$.

Důkaz. Podle definice (pravého) vnitřního násobení a předchozího lemmatu platí

$$\begin{aligned}
(x|y) &= (y|x) = (-1)^{n-a}(\star y|\star x) = (-1)^{n-a}\langle\star y|x\lrcorner\,\epsilon\rangle\\
&= (-1)^{n-a}\langle x\wedge\star y|\epsilon\rangle = (-1)^{n-a}(x\wedge\star y|e).
\end{aligned}$$

Označme $s\cdot e = x\wedge\star y \in \bigwedge^n V, s \in \mathbb{R}$ a počítejme dále

$$(-1)^{n-a}(x\wedge\star y|e) = (-1)^{n-a}s\cdot(e|e) = (-1)^{n-a}s\cdot(-1)^{n-a} = s,$$

takže $s = (x|y)$. $\square$

1.3 Akce grupy $GL(n,\mathbb{R})$ na $\bigwedge^k V^*$

Lemma 1.3.1. *Zobrazení* $(\varphi,\omega)\mapsto\varphi^*\omega$ *z* $GL(n,\mathbb{R})\times\bigwedge^k V^*$ *do* $\bigwedge^k V^*$, *definované jako*

$$(\varphi^*\omega)(v_1,\dots,v_k)=\omega(\varphi^{-1}v_1,\dots,\varphi^{-1}v_k)$$

je levá akce grupy $GL(n,\mathbb{R})$ *na prostoru* $\bigwedge^k V^*$.

Důkaz. Podmínka a) z definice 1.1.1 je triviální. Podmínka b) platí také:

$$\begin{aligned}\psi^*(\varphi^*\omega) &= (\varphi^*\omega)(\psi^{-1}v_1,\dots,\psi^{-1}v_k)=\omega(\varphi^{-1}\psi^{-1}v_1,\dots,\varphi^{-1}\psi^{-1}v_k)\\ &= \omega((\psi\varphi)^{-1}v_1,\dots,(\psi\varphi)^{-1}v_k)=(\psi\varphi)^*\omega.\end{aligned}$$

□

Definice 1.3.2. Orbita prvku $\omega\in\bigwedge^k V^*$ *je množina*

$$\mathbb{O}_\omega=\{\varphi^*\omega|\varphi\in GL(n,\mathbb{R})\}\subset\bigwedge^k V^*.$$

Pozorování 1.3.3. *Pro každé* $\omega\in\bigwedge^k V^*$, *k liché a pro každé* $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *platí* $c\cdot\omega\in\mathbb{O}_\omega$.

Důkaz. Je-li $\varphi^{-1}=diag(\sqrt[k]{c},\dots,\sqrt[k]{c})\in GL(n,\mathbb{R})$, pak

$$\varphi^*\omega(v_1,\dots,v_k)=\omega(\sqrt[k]{c}\cdot v_1,\dots,\sqrt[k]{c}\cdot v_k)=c\cdot\omega(v_1,\dots,v_k).$$

□

Pozorování 1.3.4. *Nechť* $\varphi\in GL(n,\mathbb{R}),\alpha,\beta\in\bigwedge^k V^*$. *Platí*

$$\varphi^*(\alpha+\beta)=\varphi^*\alpha+\varphi^*\beta.$$

Lemma 1.3.5. *Nechť* $\varphi\in GL(n,\mathbb{R}),\alpha\in\bigwedge^k V^*,\beta\in\bigwedge^l V^*$. *Platí*

$$\varphi^*(\alpha\wedge\beta)=\varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta.$$

Důkaz. Podle definice vnějšího násobení platí

$$\begin{aligned}&\varphi^*(\alpha\wedge\beta)(v_1,\dots,v_{k+l})=\alpha\wedge\beta(\varphi^{-1}v_1,\dots,\varphi^{-1}v_{k+l})\\ =\ &\frac{1}{k!l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\pi\cdot\alpha(\varphi^{-1}v_{\pi(1)},\dots,\varphi^{-1}v_{\pi(k)})\cdot\beta(\varphi^{-1}v_{\pi(k+1)},\dots,\varphi^{-1}v_{\pi(k+l)})\\ =\ &\frac{1}{k!l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\pi\cdot(\varphi^*\alpha)(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot(\varphi^*\beta)(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})\\ =\ &(\varphi^*\alpha)\wedge(\varphi^*\beta)(v_1,\dots,v_{k+l}).\end{aligned}$$

□

Dle předchozího lemmatu převádí akce grupy $GL(n,\mathbb{R})$ rozložitelné vektory na rozložitelné.

Pozorování 1.3.6. *Nechť $\varphi \in GL(n,\mathbb{R})$ a θ je forma objemu na $\bigwedge V^*$. Pak*

$$\varphi^*\theta = \det(\varphi^{-1}) \cdot \theta.$$

Důkaz. Plyne z definice determinantu, antikomutativity násobení a z předchozího lemmatu. □

Definice 1.3.7. *K-forma $\omega \in \bigwedge^k V^*$ je* regulární, *pokud je zobrazení*

$$\iota : V \to \bigwedge^{k-1} V^*, \ v \mapsto \iota_v \omega = \omega(v, \dots)$$

prosté. V opačném případě ji nazveme singulární. *Pokud je $k = 3$, regulární formě se říká* multisymplektická.

Definujme jádro formy ω

$$\ker \omega = \{v \in V | \iota_v \omega = 0\}$$

a stupeň formy ω

$$\operatorname{rank} \omega = \dim \langle v \in V | \iota_v \omega \neq 0 \rangle.$$

Zřejmě $\dim V = \dim \ker \omega + \operatorname{rank} \omega$ pro každou nenulovou formu ω.

Lemma 1.3.8. *Akce $GL(n,\mathbb{R})$ na $\bigwedge^k V^*$ zachovává regulární a singulární formy.*

Důkaz. Buď $\varphi \in GL(n,\mathbb{R})$. Následující podmínky jsou zřejmě ekvivalentní:

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \iota_v(\omega) = \omega(v, \dots) \neq 0 \in \bigwedge^{k-1} V^* \Leftrightarrow$$
$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \iota_v(\varphi^*\omega) = \omega((\varphi^{-1})v, \dots) = \iota_{\varphi^{-1}v}(\omega) \neq 0 \in \bigwedge^{k-1} V^*,$$

takže $\ker(\varphi^*\omega) = \varphi(\ker \omega)$ a $\varphi^*\omega$ je regulární, právě když je ω regulární. □

Kapitola 2

Orbity akce grupy $GL(6,\mathbb{R})$ na $\bigwedge^3 V^*$ a jejich vlastnosti

Uvažujme reálný vektorový prostor V dimenze 6. Jeho duální prostor V^* má rovněž dimenzi 6. My se zaměříme na jeho třetí vnější mocninu. Podle lemmatu 1.3.8 stačí klasifikovat orbity singulárních a regulárních forem zvlášť. Množina singulárních forem na $\bigwedge^3 V^*$ se rozpadne na tři orbity. Buď $\{e_1, \ldots, e_6\}$ báze prostoru V. Je-li $\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$ příslušná duální báze, můžeme reprezentanty těchto orbit napsat jako:

S1: $\sigma_1 = 0$,

S2: $\sigma_2 = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$,

S3: $\sigma_3 = \beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge \beta_3 + \beta_4 \wedge \beta_5)$.

Podobně, reprezentanty orbit regulárních forem mají toto vyjádření:

R1: $\omega_+ = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 + \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6$,

R2: $\omega_- = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 + \beta_1 \wedge \beta_4 \wedge \beta_5 + \beta_2 \wedge \beta_4 \wedge \beta_6 - \beta_3 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6$,

R3: $\omega_0 = \beta_1 \wedge \beta_4 \wedge \beta_5 + \beta_2 \wedge \beta_4 \wedge \beta_6 + \beta_3 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6$.

Klasifikaci orbit lze nalézt například v článku [5]. Orbity R1 a R2 jsou otevřené podvariety v $\bigwedge^3 V^*$ dimenze 20. Orbita R3 je podvarieta $\bigwedge^3 V^*$ dimenze 19.

Definice 2.0.1. *Definujme* $\Delta^2(\omega) = \{v \in V | \iota_v(\omega) \wedge \iota_v(\omega) = 0\}$.

Snadno se spočítá, že

$$\Delta^2(\omega_+) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \cup \langle e_4, e_5, e_6 \rangle, \quad \Delta^2(\omega_-) = 0, \quad \Delta^2(\omega_0) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

Tyto množiny jsou invarianty regulárních orbit v následujícím smyslu:

Lemma 2.0.2. *Platí* $\Delta^2(\varphi^*\omega) = \varphi\Delta^2(\omega)$, *z toho plyne*

a) $\omega \in \mathrm{R1} \Leftrightarrow \Delta^2(\omega) = W' \cup W''$, *kde* $W' \bigoplus W'' = V$ *a prostory* W' *a* W'' *mají dimenzi* 3,

b) $\omega \in \mathrm{R2} \Leftrightarrow \Delta^2(\omega) = 0$,

c) $\omega \in \mathrm{R3} \Leftrightarrow \Delta^2(\omega) = V'$, *kde* $\dim V' = 3$.

Důkaz. Pro každé $v \in \Delta^2(\omega)$ je

$$\begin{aligned} 0 &= (\iota_v(\omega))^{\wedge 2} = \iota_v((\varphi\varphi^{-1})^*\omega) \wedge \iota_v((\varphi\varphi^{-1})^*\omega) \\ &= \iota_v(\varphi^*\varphi^{-1*}\omega) \wedge \iota_v(\varphi^*\varphi^{-1*}\omega) = (\varphi^*\omega(\varphi v, \cdot, \cdot))^{\wedge 2} = (\iota_{\varphi v}\varphi^*\omega)^{\wedge 2}, \end{aligned}$$

takže $\varphi\Delta^2(\omega) = \Delta^2(\varphi^*\omega)$. □

2.1 Souvislost orbit

Označme

$$GL^+(6, \mathbb{R}) = \{\varphi \in GL(6, \mathbb{R}) |\det\varphi > 0\}$$

a

$$GL^-(6, \mathbb{R}) = \{\varphi \in GL(6, \mathbb{R}) |\det\varphi < 0\}.$$

Platí $GL(6, \mathbb{R}) = GL^+(6, \mathbb{R}) \cup GL^-(6, \mathbb{R})$, přitom $GL^+(6, \mathbb{R})$ je podgrupa $GL(6, \mathbb{R})$ a $GL^+(6, \mathbb{R})$ i $GL^-(6, \mathbb{R})$ jsou souvislé topologické prostory. Nechť $\mathbb{O}$ je nějaká orbita akce grupy $GL(6, \mathbb{R})$ a $x \in \mathbb{O}$ pevná forma. Uvažujme zobrazení

$$GL(6, \mathbb{R}) \to \mathbb{O}, \quad \varphi \mapsto \varphi^*x.$$

Obraz $GL^+(6, \mathbb{R})$ je souvislá podmnožina v $\mathbb{O}$, stejně tak obraz $GL^-(6, \mathbb{R})$. Takže

$$\mathbb{O} = \left[GL^+(6, \mathbb{R})\right]^* x \cup \left[GL^-(6, \mathbb{R})\right]^* x.$$

Orbita $\mathbb{O}$ má tedy maximálně dvě souvislé komponenty a navíc, pokud mají neprázdný průnik, je souvislá.

Lemma 2.1.1. *Orbity akce grupy* $GL(6, \mathbb{R})$ *jsou souvislé.*

Důkaz. Podle předchozí úvahy, je-li prvek $y \in [GL^+(6, \mathbb{R})]^* x \cap [GL^-(6, \mathbb{R})]^* x$, pak

$$\exists \varphi_+ \in GL^+(6, \mathbb{R}), \varphi_- \in GL^-(6, \mathbb{R}) : y = \varphi_+^* x = \varphi_-^* x.$$

Takže $x = \left(\varphi_+^{-1}\varphi_-\right)^* x$, kde $\det\left(\varphi_+^{-1}\varphi_-\right) < 0$. Stačí tedy pro každou orbitu $\mathbb{O}$ najít prvek $x \in \mathbb{O}$ a $\varphi \in GL^-(6, \mathbb{R})$, že $x = \varphi^*x$.

Orbity S2, S3, R2 a R3: Pro φ takový, že

$$\varphi^*\beta_1 = \beta_1, \quad \varphi^*\beta_2 = \beta_2, \quad \varphi^*\beta_3 = \beta_3,$$

$$\varphi^*\beta_4 = -\beta_4, \quad \varphi^*\beta_5 = -\beta_5, \quad \varphi^*\beta_6 = -\beta_6,$$

platí $\varphi^*\sigma_2 = \sigma_2, \varphi^*\sigma_3 = \sigma_3, \varphi^*\omega_- = \omega_-, \varphi^*\omega_0 = \omega_0$ a $\det\varphi = -1$.

Orbita R1: Pro φ takový, že

$$\varphi^*\beta_1 = \beta_4, \quad \varphi^*\beta_2 = \beta_5, \quad \varphi^*\beta_3 = \beta_6,$$

$$\varphi^*\beta_4 = \beta_1, \quad \varphi^*\beta_5 = \beta_2, \quad \varphi^*\beta_6 = \beta_3,$$

platí $\varphi^*\omega_+ = \omega_+$ a $\det\varphi = -1$. □

2.2 Součinová, komplexní a tečná struktura na V

Uvažujme multisymplektickou formu ω a vyberme na prostoru V 6-formu $\theta \neq 0$, která bude zadávat orientaci tohoto prostoru. Pak existuje právě jeden endomorfismus $Q_\omega : V \to V$, který je definován předpisem

$$\iota_v\omega \wedge \omega = \iota_{Q_\omega(v)}\theta. \tag{2.1}$$

Dá se ukázat, že vhodný násobek endomorfismu Q_ω určuje na V součinovou, komplexní, nebo tečnou strukturu podle toho, z jaké orbity je forma ω.

Definice 2.2.1. *Nechť V je vektorový prostor a $E : V \to V$ endomorfismus. Označme $V' = \ker(E - \mathrm{Id}|_V)$ a $V'' = \ker(E + \mathrm{Id}|_V)$. Řekneme, že E je* součinová struktura na prostoru V, *pokud $V = V' \oplus V''$ a $\dim V' = \dim V''$.*

Buď (V, E) $2n$-rozměrný vektorový prostor se součinovou strukturou E a $\mathbb{D}$ algebra parakomplexních čísel. Připomeňme, že se jedná o dvourozměrnou komutativní a asociativní algebru. Za její bázi můžeme vzít jednotkový prvek 1 a prvek e splňující $e^2 = 1$. Prostor (V, E) můžeme chápat jako $\mathbb{D}$-modul, když definujeme násobení prvkem $a + be \in \mathbb{D}$

$$(a + be)v = av + bEv.$$

Pak je V n-rozměrný volný $\mathbb{D}$-modul s volnou bází $\{1,\mathrm{e}\}$.

Strukturu E můžeme přirozeně přenést na duální prostor V^* tak, že definujeme

$$E^*\alpha(v) = \alpha(Ev), \ \alpha \in V^*, v \in V.$$

Prvky duálního modulu jsou $\mathbb{D}$-lineární zobrazení z $\mathbb{D}$-modulu V do $\mathbb{D}$, které splňují

$$E^*\alpha(v) = \alpha(ev) = e\alpha(v), \ \alpha \in V^*, v \in V.$$

Věta 2.2.2. *Nechť $\omega \in \mathrm{R1}$, označme $\Delta^2(\omega) = V' \cup V''$. Pak existuje právě jedna (až na znaménko) součinová struktura $E_\omega \neq \mathrm{Id}$, která splňuje relaci*

$$\omega(E_\omega v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, E_\omega v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, E_\omega v_3) \ \textit{pro všechna} \ v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Pro endomorfismus E_ω platí (až na znaménko) $E_\omega|_{V'} = \mathrm{Id}, E_\omega|_{V''} = -\mathrm{Id}$.

Důkaz. Je uveden v článku [1]. □

Definice 2.2.3. *Nechť V je reálný vektorový prostor sudé dimenze a J buď reálně lineární izomorfismus na V takový, že $J^2 = -\operatorname{Id}|_V$. Pak J se nazývá* komplexní struktura na V.

Podobně jako výše, můžeme na prostoru (V, J) zavést strukturu komplexního vektorového prostoru. Definujme

$$(a + ib)v = av + bJv,\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Snadno zkontrolujeme, že s takto definovaným násobením vektoru komplexním číslem je (V, J) komplexní vektorový prostor. Obráceně, pokud je V komplexní vektorový prostor, můžeme ho považovat za reálný vektorový prostor s komplexní strukturou (která je dána násobením komplexní jednotkou i). Dále, pokud je $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathbb{C}$-báze V, tak $\{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$ je $\mathbb{R}$-báze V, proto v definici komplexní struktury požadujeme reálný prostor V sudé dimenze.

Poznámka: Prostor (V, J) je izomorfní prostoru

$$V^{1,0} = \{v \in V_c = V \oplus iV | Jv = i \cdot v, i = \sqrt{-1}\}$$

pomocí zobrazení $u \mapsto u - iJu$. Více informací o komplexifikaci vektorového prostoru lze nalézt například v knize [6].

Buď $V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, J)$ komplexní duál k prostoru (V, J). Pak můžeme komplexní strukturu J přirozeně přenést na prostor V^*. Máme tak $J^* : V^* \to V^*$ dáno jako

$$J^*(\xi)(v) = \xi(Jv) = \xi(iv) = i\xi(v),\ \text{kde } \xi \in V^*,\ v \in V.$$

Věta 2.2.4. *Nechť $\omega \in$ R2. Pak existuje právě jeden (až na znaménko) endomorfismus $J_\omega : V \to V, J_\omega^2 = -\operatorname{Id}$, který splňuje relaci*

$$\omega(J_\omega v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, J_\omega v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, J_\omega v_3)\ \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Důkaz. Je možno nalézt v článku [2]. □

Endomorfismus J_ω je komplexní struktura na prostoru V. Pokud je $\omega = \omega_-$, snadno se spočítá, že pro endomorfismus $J = J_{\omega_-}$ platí (až na znaménko)

$$Je_1 = -e_6, \quad Je_2 = e_5, \quad Je_3 = e_4, \quad Je_4 = -e_3, \quad Je_5 = -e_2, \quad Je_6 = e_1.$$

Lemma 2.2.5. *Pokud je $0 \neq v \in V$, jsou vektory v a Jv lineárně nezávislé. Navíc platí*

$$\ker \iota_v\omega = \langle v, Jv \rangle.$$

Důkaz. Připomeňme nejprve, že endomorfismus J je násobkem endomorfismu Q.

Pokud na vztah (2.1) aplikujeme ι_v, máme

$$0 \neq \iota_v\omega \wedge \iota_v\omega = \iota_v\iota_{Q(v)}\theta,$$

z čehož plyne, že vektory v a Qv jsou lineárně nezávislé.

Protože pro každé $0 \neq v \in V$ je $(\iota_v\omega) \wedge (\iota_v\omega) \neq 0$, platí $\operatorname{rank} \iota_v\omega \geq 4$. Na druhé straně zřejmě $\operatorname{rank} \iota_v\omega \leq 4$. Takže pro každé $0 \neq v \in V$ je $\operatorname{rank} \iota_v\omega = 4$, proto $\dim\ker(\iota_v\omega) = 2$. Zřejmě $v \in \ker(\iota_v\omega)$. Na vztah (2.1) aplikujme nyní $\iota_{Q(v)}$ a máme

$$\begin{aligned}
(\iota_{Q(v)}\iota_v\omega) \wedge \omega + (\iota_v\omega) \wedge (\iota_{Q(v)}\omega) &= 0 \\
-(\iota_v\iota_{Q(v)}\omega) \wedge \omega + (\iota_v\omega) \wedge (\iota_{Q(v)}\omega) &= 0 \\
-\iota_v[(\iota_{Q(v)}\omega) \wedge \omega] + 2(\iota_v\omega) \wedge (\iota_{Q(v)}\omega) &= 0.
\end{aligned}$$

Aplkujme ι_v a máme

$$(\iota_v\omega) \wedge (\iota_v\iota_{Q(v)}\omega) = 0.$$

Pokud by $\iota_v\iota_{Q(v)}\omega$ nebyla nulová 1-forma, pak by existovala 1-forma σ, že $\iota_v\omega = \sigma \wedge \iota_v\iota_{Q(v)}\omega$ a měli bychom

$$\iota_v\omega \wedge \iota_v\omega = \sigma \wedge \iota_v\iota_{Q(v)}\omega \wedge \sigma \wedge \iota_v\iota_{Q(v)}\omega = 0,$$

což je spor s tím, že $\omega \in$ R2. Takže $\iota_v\iota_{Q(v)}\omega = 0$ a $Q(v) \in \ker \iota_v\omega$. □

Definice 2.2.6. *Nechť V je vektorový prostor a $F : V \to V$ endomorfismus. Řekneme, že F je* tečná struktura na prostoru V, *pokud $F^2 = 0$ a* $\operatorname{im} F = \ker F$.

Buď (V, F) vektorový prostor s tečnou strukturou F a $\mathbb{E}$ algebra duálních čísel, tj. dvourozměrná komutativní a asociativní algebra generovaná prvky 1 a ϵ, kde $\epsilon^2 = 0$. Na prostoru (V, F) zavedeme násobení duálním číslem $a+b\epsilon \in \mathbb{E}$

$$(a + b\epsilon)v = av + bFv, \;\; v \in V.$$

Prostor (V, F) je pak volný $\mathbb{E}$-modul s volnou bází $\{1, \epsilon\}$.

Strukturu F přeneseme na duální prostor V^* tak, že definujeme

$$F^*\alpha(v) = \alpha(Fv), \;\; \alpha \in V^*, v \in V.$$

Prvky duálního modulu jsou $\mathbb{E}$-lineární zobrazení z V do $\mathbb{E}$, pro které platí

$$F^*\alpha = \epsilon\alpha.$$

Věta 2.2.7. *Nechť $\omega \in$ R3. Pak na V existuje právě jedna (až na nenulový násobek) tečná struktura F_ω, která splňuje relaci*

$$\omega(F_\omega v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, F_\omega v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, F_\omega v_3) \; \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Důkaz. Je možné nalézt v článku [1]. □

Je-li $\omega = \omega_0$, pak endomorfismus $F = F_{\omega_0}$ splňuje (až na nenulový násobek)

$$Fe_1 = Fe_2 = Fe_3 = 0, \quad Fe_4 = e_3, \quad Fe_5 = -e_2, \quad Fe_6 = e_1.$$

Nechť ω je multisymplektická forma na V. Označme symbolem $\mathcal{A}_\omega$ množinu všech endomorfismů prostoru V takových, že

$$\omega(Av_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, Av_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, Av_3), \ \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Pak $\mathcal{A}_\omega$ je tvaru

$$\mathcal{A}_\omega = \{a \cdot S + b \cdot Id_V | a, b \in \mathbb{R}\},$$

kde $S = E_\omega$ pro $\omega \in$ R1, $S = J_\omega$ pro $\omega \in$ R2, nebo $S = F_\omega$ pro $\omega \in$ R3 (viz [1] a [2]). Navíc, $\mathcal{A}_\omega$ tvoří komutativní algebru pro každou ω multisymplektickou. Pro každé $A, B \in \mathcal{A}_\omega$ a pro všechna $v_1, v_2, v_3 \in V$ totiž platí

$$\begin{aligned}
\omega(ABv_1, v_2, v_3) &= \omega(Bv_1, Av_2, v_3) = \omega(v_1, Av_2, Bv_3) \\
&= \omega(Av_1, v_2, Bv_3) = \omega(BAv_1, v_2, v_3),
\end{aligned}$$

takže $\iota_{[A,B]v}\omega = 0 \ \forall v \in V$, proto $[A, B] = 0$.

2.3 Vztah orbit a Hodgeova operátoru

V této sekci odvodíme, že Hodgeův operátor zachovává orbity. Budeme potřebovat následující technické lemma.

Nechť $g : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ je regulární symetrická bilineární forma, množina $\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$ je ortonormální báze V^*, tj. $g(\beta_i, \beta_j) = \pm\delta_{ij}$. Označme $c_i = g(\beta_i, \beta_i)$ a $c_{ijk} = c_i c_j c_k$. Buď $\star$ Hodgeův izomorfismus indukovaný formou g.

Lemma 2.3.1. *Pro každou orbitu akce grupy $GL(6, \mathbb{R})$ na $\bigwedge^3 V^*$ a nějakého jejího reprezentanta ρ platí:*

$$\exists \varphi \in GL(6, \mathbb{R}) : \star\rho = \varphi^*\rho.$$

Důkaz. Pro orbitu S1= $\{0\}$ tvrzení zřejmě platí.

Reprezentant orbity S2 je σ_2. Pak $\star\sigma_2 = \star\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 = c_{123} \cdot \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6 = \varphi^*\sigma_2$, kde φ^* splňuje

$$\varphi^*\beta_1 = c_{123} \cdot \beta_4, \quad \varphi^*\beta_2 = \beta_5, \quad \varphi^*\beta_3 = \beta_6,$$

$$\varphi^*\beta_4 = \beta_1, \quad \varphi^*\beta_5 = \beta_2, \quad \varphi^*\beta_6 = \beta_3.$$

Reprezentant orbity S3 je σ_3. Pak $\star\sigma_3 = \star(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 + \beta_1 \wedge \beta_4 \wedge \beta_5) = c_{123} \cdot \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6 + c_{145} \cdot \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_6 = \varphi^*\sigma_3$, kde φ^* splňuje

$$\varphi^*\beta_1 = \beta_6, \quad \varphi^*\beta_2 = c_{145} \cdot \beta_2, \quad \varphi^*\beta_3 = \beta_3,$$

$$\varphi^*\beta_4 = c_{123} \cdot \beta_4, \quad \varphi^*\beta_5 = \beta_5, \quad \varphi^*\beta_6 = \beta_1.$$

Reprezentant orbity R1 je ω_+. Pak $\star\omega_+ = \star(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 + \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6) = c_{123} \cdot \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6 - c_{456} \cdot \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 = \varphi^*\omega_+$, kde φ^* splňuje

$$\varphi^*\beta_1 = -c_{456} \cdot \beta_1, \quad \varphi^*\beta_2 = \beta_2, \quad \varphi^*\beta_3 = \beta_3,$$

$$\varphi^*\beta_4 = c_{123}\cdot\beta_4, \quad \varphi^*\beta_5 = \beta_5, \quad \varphi^*\beta_6 = \beta_6.$$

Reprezentant orbity R2 je ω_-. Pak

$$\star\omega_- = \star(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3 + \beta_1\wedge\beta_4\wedge\beta_5 + \beta_2\wedge\beta_4\wedge\beta_6 - \beta_3\wedge\beta_5\wedge\beta_6) =$$

$$= c_{123}\cdot\beta_4\wedge\beta_5\wedge\beta_6 + c_{145}\cdot\beta_2\wedge\beta_3\wedge\beta_6 + c_{246}\cdot\beta_1\wedge\beta_3\wedge\beta_5 - c_{356}\cdot\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_4 = \varphi^*\omega_-,$$

kde φ^* splňuje

$$\varphi^*\beta_1 = \beta_6, \quad \varphi^*\beta_2 = \beta_5, \quad \varphi^*\beta_3 = c_{123}\cdot\beta_4,$$

$$\varphi^*\beta_4 = c_{124}\cdot\beta_3, \quad \varphi^*\beta_5 = c_{25}\cdot\beta_2, \quad \varphi^*\beta_6 = c_{16}\cdot\beta_1.$$

Reprezentant orbity R3 je ω_0. Pak

$$\star\omega_0 = \star(\beta_1\wedge\beta_4\wedge\beta_5 + \beta_2\wedge\beta_4\wedge\beta_6 + \beta_3\wedge\beta_5\wedge\beta_6) =$$

$$= c_{145}\cdot\beta_2\wedge\beta_3\wedge\beta_6 + c_{246}\cdot\beta_1\wedge\beta_3\wedge\beta_5 + c_{356}\cdot\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_4 = \varphi^*\omega_0,$$

kde φ^* splňuje

$$\varphi^*\beta_1 = c_{145}\cdot\beta_6, \quad \varphi^*\beta_2 = c_{246}\cdot\beta_5, \quad \varphi^*\beta_3 = c_{356}\cdot\beta_4,$$

$$\varphi^*\beta_4 = \beta_3, \quad \varphi^*\beta_5 = \beta_2, \quad \varphi^*\beta_6 = \beta_1.$$

Tím je důkaz hotov. □

Nyní ukážeme jedno pomocné lemma.

Lemma 2.3.2. *Je-li $b : V\times V \to \mathbb{R}$ regulární symetrická bilineární forma a $\varphi : V \to V$ endomorfismus, pak $\exists!$ endomorfismus $\bar\varphi : V \to V$, že $b(\varphi v, v') = b(v, \bar\varphi v')$, pro všechna $v, v' \in V$. Navíc platí $\det\bar\varphi = \det\varphi$.*

Důkaz. Nechť je $v' \in V$ pevné. Pak je $v \mapsto b(\varphi v, v')$ lineární zobrazení, takže pro každé existuje právě jedno $v' \in V$ $w_{v'} \in V$ tak, že $b(\varphi v, v') = b(v, w_{v'})$. Zobrazení $\bar\varphi$ definujeme jako $\bar\varphi v' = w_{v'}$.

Nechť $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je báze V. Endomorfismy φ a $\bar\varphi$ vyjádříme v souřadnicích: $\varphi e_i = \sum_{k=1}^{n}\varphi_{ki}e_k$, $\bar\varphi e_j = \sum_{k=1}^{n}\bar\varphi_{kj}e_k$. Nechť B je matice bilineární formy b v této bázi. Pak máme:

$$b(\varphi e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_{ki}b(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n}\varphi^T_{ik}b(e_k, e_j) = (\varphi^T\cdot B)_{ij},$$

$$b(e_j, \bar\varphi e_j) = \sum_{k=1}^{n}\bar\varphi_{kj}b(e_i, e_k) = (B\cdot\bar\varphi)_{ij}.$$

Takže je $B\cdot\bar\varphi = \varphi^T\cdot B$. Protože je forma b regulární, platí $\det\bar\varphi = \det\varphi^T = \det\varphi$. □

Nyní lemma použijeme pro endomorfismus $\varphi^* : \bigwedge^3 V^* \to \bigwedge^3 V^*, \omega \mapsto \varphi^*\omega$ a bilineární formu $G : \bigwedge^3 V^* \to \bigwedge^3 V^*$.

Lemma 2.3.3. $\alpha \in \mathbb{O}_\rho \Leftrightarrow \star\alpha \in \mathbb{O}_{\star\rho}$

Důkaz. " $\Rightarrow$ " : Označme $\varphi \in GL(6,\mathbb{R})$ takový, že $\alpha = \varphi\rho$. Podle definice Hodgeova operátoru platí pro libovolnou nenulovou 3-formu ω

$$((\bar{\varphi}^{-1})^*\omega) \wedge (\star\varphi^*\rho) = G((\bar{\varphi}^{-1})^*\omega, \varphi^*\rho) \cdot \theta = G(\bar{\varphi}^*(\bar{\varphi}^{-1})^*\omega, \rho) \cdot \theta = G(\omega, \rho) \cdot \theta.$$

Na rovnici aplikujeme akci prvku $\bar{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
(\bar{\varphi}^*((\bar{\varphi}^{-1})^*\omega)) \wedge (\bar{\varphi}^* \star \varphi^*\rho) &= G(\omega, \rho) \cdot \bar{\varphi}^*\theta \\
\omega \wedge (\bar{\varphi}^* \star \varphi^*\rho) &= \det \bar{\varphi}^{-1} \cdot G(\omega, \rho)\theta \\
\omega \wedge (\bar{\varphi}^* \star \varphi^*\rho) &= \det \varphi^{-1} \cdot \omega \wedge (\star\rho) \\
\omega \wedge \left(\bar{\varphi}^* \star \varphi^*\rho - \frac{1}{\det \varphi} \cdot \star\rho\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí pro všechna $\omega \in \bigwedge^3 V^*$, takže musí být

$$(\det \varphi)^{-1} \cdot (\bar{\varphi}^{-1})^* \star \rho = \star\varphi^*\rho. \tag{2.2}$$

Protože je $(\det \varphi)^{-1} \cdot (\bar{\varphi})^{-1} \in GL(6,\mathbb{R})$, platí $\star\varphi\rho = \star\alpha \in \mathbb{O}_{\star\rho}$.

" $\Leftarrow$ " : Pokud je $\star\alpha \in \mathbb{O}_{\star\rho}$, pak podle předchozí části i $\star\star\alpha \in \mathbb{O}_{\star\star\rho}$. Víme, že $\star\star = (-1)^{(a-6)}$, a podle pozorování 1.3.3 je tedy $\alpha \in \mathbb{O}_\rho$. ☐

Věta 2.3.4. *Hodgeův operátor* $\star : \bigwedge^3 V^* \to \bigwedge^3 V^*$ *zachovává orbity akce grupy* $GL(6,\mathbb{R})$ *na* $\bigwedge^3 V^*$.

Důkaz. Nechť je $\alpha \in \mathbb{O}_\rho$, kde ρ má kanonický tvar v ortonormální bázi. Pak platí $\star\alpha \in \mathbb{O}_{\star\rho}$. Dle lemmatu 2.3.1 je i $\star\rho \in \mathbb{O}_\rho$, takže je $\star\alpha \in \mathbb{O}_\rho$. ☐

Kapitola 3

Hodgeův operátor na prostoru $\bigwedge^3 \mathbb{R}^{6*}$

Buď V reálný vektorový prostor dimenze 6, pak Hodgeův operátor je izomorfismus

$$\star : \bigwedge^3 V^* \to \bigwedge^{6-3} V^*.$$

Lemma 1.2.4 ukazuje, že máme-li na prostoru V formu g signatury $(5,1)$, $(3,3)$, nebo $(1,5)$, je $\star^2 = \mathrm{Id}$. V této kapitole se budeme věnovat tomu, jakou nutnou a postačující podmínku dát na formu g, aby pro danou multisymplektickou 3-formu ω platilo $\star\omega = \pm\omega$.

3.1 Konformní automorfismus formy

V této sekci odvodíme obecnou podmínku, kterou postupně aplikujeme na všechny tři orbity.

Buď V reálný vektorový prostor dimenze n a buďte g a $\tilde{g}$ dvě regulární symetrické bilineární formy (mající případně i různou signaturu). Dostáváme tak dva izomorfismy

$$\iota_g : V \to V^*, (\iota_g v)(v') = g(v, v'), \quad \text{a} \quad \iota_{\tilde{g}} : V \to V^*, (\iota_{\tilde{g}} v)(v') = \tilde{g}(v, v').$$

S použitím těchto izomorfismů definujeme dvě regulární symetrické bilineární formy na V^*. Označíme je opět symboly g a $\tilde{g}$. Pro $l, l' \in V^*$ položíme

$$g(l, l') = g(\iota_g^{-1}(l), \iota_g^{-1}(l')) \quad \text{a} \quad \tilde{g}(l, l') = \tilde{g}(\iota_{\tilde{g}}^{-1}(l), \iota_{\tilde{g}}^{-1}(l')).$$

Buď $v \in V$. Uvažujme lineární formu $\iota_{\tilde{g}} v$. Zřejmě existuje právě jeden vektor $w \in V$ takový, že $\iota_g w = \iota_{\tilde{g}} v$. Odtud $w = \iota_g^{-1} \iota_{\tilde{g}} v$. Tedy pro každý vektor $x \in V$ máme

$$\tilde{g}(v, x) = g(\iota_g^{-1} \iota_{\tilde{g}} v, x).$$

Pro jednoduchost označíme $S = \iota_g^{-1} \iota_{\tilde{g}}$. Je zřejmé, že S je automorfismus vektorového prostoru V. Máme

$$g(v, Sv') = g(Sv', v) = \tilde{g}(v', v) = \tilde{g}(v, v') = g(Sv, v'),$$

což ukazuje, že automorfismus S je symetrický vzhledem k bilineární formě g. Navíc platí

$$g(v, S^{-1}v') = g(SS^{-1}v, S^{-1}v') = g(S^{-1}v, SS^{-1}v') = g(S^{-1}v, v'),$$

což ukazuje, že rovněž automorfismus S^{-1} je symetrický vzhledem k bilineární formě g.

Symbolem G (resp. $\tilde{G}$) označíme standardní rozšíření g (resp. $\tilde{g}$) na vnější algebru $\bigwedge V$. Buď $v_1, \ldots, v_n$ báze prostoru V. Potom

$$G(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det(g(v_i, v_j)).$$

Protože

$$\tilde{g}(v_i, v_j) = g(Sv_i, v_j) = \sum_{k=1}^{n} g(s_{ik}v_k, v_j) = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}g(v_k, v_j),$$

vidíme ihned, že

$$\tilde{G}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det(\tilde{g}(v_i, v_j)) = \det S \cdot \det(g(v_i, v_j)).$$

To znamená, že platí

$$||v_1 \wedge \cdots \wedge v_n||^2_{\tilde{G}} = \det S \cdot ||v_1 \wedge \cdots \wedge v_n||^2_G.$$

Budeme se nyní věnovat duálnímu prostoru V^*. Platí

$$\begin{aligned} \tilde{g}(l, l') &= \tilde{g}(l', l) = \tilde{g}(\iota_{\tilde{g}}^{-1}l', \iota_{\tilde{g}}^{-1}l) = g(S\iota_{\tilde{g}}^{-1}l', \iota_{\tilde{g}}^{-1}l) = g(\iota_g^{-1}\iota_{\tilde{g}}\iota_{\tilde{g}}^{-1}l', \iota_{\tilde{g}}^{-1}l) \\ &= g(\iota_g^{-1}l', \iota_{\tilde{g}}^{-1}l) = g(\iota_g\iota_g^{-1}l', \iota_g\iota_{\tilde{g}}^{-1}l) = g(\iota_g\iota_{\tilde{g}}^{-1}l, l'). \end{aligned}$$

Když označíme $S^* = \iota_g\iota_{\tilde{g}}^{-1}$ dostáváme

$$\tilde{g}(l, l') = g(S^*l, l').$$

Dále platí

$$\begin{aligned} (\iota_g\iota_{\tilde{g}}^{-1}l)(v) &= g(\iota_{\tilde{g}}^{-1}l, v) = g(S^{-1}S\iota_{\tilde{g}}^{-1}l, v) = g(S\iota_{\tilde{g}}^{-1}l, S^{-1}v) \\ &= \tilde{g}(\iota_{\tilde{g}}^{-1}l, S^{-1}v) = l(S^{-1}v), \end{aligned}$$

což dává vztah

$$(S^*l)(v) = l(S^{-1}v).$$

Buď $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ příslušná duální báze prostoru V^* k bázi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Potom platí

$$\begin{aligned} ((S^*\alpha_1) \wedge \cdots \wedge (S^*\alpha_n))(v_1, \ldots, v_n) &= (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)(S^{-1}v_1, \ldots, S^{-1}v_n) \\ &= (\det S)^{-1}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)(v_1, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Vidíme tak, že $\det S^* = (\det S)^{-1}$. Potom stejně jako výše dostáváme

$$||\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n||^2_{\tilde{G}} = \det S^* \cdot ||\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n||^2_G = (\det S)^{-1}||\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n||^2_G.$$

Odtud dále budeme předpokládat, že $\dim V = 6$ a V je orientovaný. Budeme předpokládat, že obě formy g a $\tilde{g}$ mají jednu ze signatur $(5,1)$, $(3,3)$ a $(1,5)$. (Neznamená to, že by obě musely mít stejnou signaturu.) Za těchto předpokladů pro každou nenulovou 6-formu θ platí $||\theta||^2_G < 0$ a $||\theta||^2_{\tilde{G}} < 0$. Je tedy nutně $\det S > 0$.

Označíme $\star$ ($\tilde{\star}$) Hodgeův operátor asociovaný s bilineární formou g ($\tilde{g}$). Za daných předpokladů platí $\star^2 = \mathrm{Id}$ a $\tilde{\star}^2 = \mathrm{Id}$. Je zřejmé, že existuje právě jedna 6-forma θ taková, že θ zadává kladnou orientaci a platí $||\theta||^2_G = -1$. Analogicky existuje právě jedna 6-forma $\tilde{\theta}$ zadávající kladnou orientaci a taková, že $||\tilde{\theta}||^2_{\tilde{G}} = -1$. Zřejmě existuje $c \neq 0$ takové, že $\tilde{\theta} = c\theta$. Potom

$$-1 = ||\tilde{\theta}||^2_{\tilde{G}} = c^2||\theta||^2_{\tilde{G}} = c^2(\det S)^{-1}||\theta||^2_G = -c^2(\det S)^{-1}.$$

Protože θ a $\tilde{\theta}$ zadávají stejnou orientaci, musí být $c > 0$. Je tedy

$$c = (\det S)^{1/2} > 0.$$

Lemma 3.1.1. *Nechť jsou $\star$ a $\tilde{\star}$ dva Hodgeovy operátory a S automorfismus prostoru V stejně jako výše. Předpokládejme, že pro nenulovou formu $\beta \in \bigwedge^3 V^*$ platí $\star\beta = \pm\beta$. Pak*

$$\star\beta = \tilde{\star}\beta \Leftrightarrow S^*\beta = (\det S)^{-1/2}\beta, \ \textit{kde}\ (\det S)^{1/2} > 0. \tag{3.1}$$

Důkaz. Zvolme libovolné $\alpha \in \Lambda^3 V^*$, pak podle lemmatu 1.2.6 máme

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\tilde{\star}\beta) &= \alpha \wedge (\star^2\tilde{\star}\beta) = G(\alpha, \star\tilde{\star}\beta)\cdot\theta, \\ \alpha \wedge (\tilde{\star}\beta) &= \tilde{G}(\alpha,\beta)\cdot\tilde{\theta} = G(S^*\alpha,\beta)\cdot(\det S)^{1/2}\theta = G(\alpha, S^*\beta)\cdot(\det S)^{1/2}\theta. \end{aligned}$$

Porovnáním pravých stran získáme

$$\begin{aligned} \star\tilde{\star}\beta &= (\det S)^{1/2} S^*\beta \\ \tilde{\star}\beta &= (\det S)^{1/2} \star S^*\beta. \end{aligned}$$

Potom $\tilde{\star}\beta = \pm\beta$ právě tehdy, když

$$\begin{aligned} \pm\beta &= (\det S)^{1/2} \star S^*\beta \\ S^*\beta &= \pm(\det S)^{-1/2} \star \beta \\ S^*\beta &= (\det S)^{-1/2}\beta. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. ∎

Definice 3.1.2. *Automorfismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(V)$ se nazývá* konformní automorfismus formy ω, *jestliže existuje $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že*

$$\varphi^*\omega = c \cdot \omega.$$

Je-li $c = 1$ říkáme jen automorfismus formy ω.

Podle předchozího lemmatu je třeba pro každou formu ω najít bilineární formu g (a tím i Hodgeův operátor), že platí $\star\omega = \pm\omega$. Poté budeme zkoumat všechny konformní automorfismy S, pro které platí $g(Sv, v') = g(v, Sv')$ a splňují vztah (3.1). To nám zaručí, že takto najdeme všechny bilineární formy, pro které platí $\star\omega = \pm\omega$.

Poznámka: Snadno vidíme, že pokud pro nějakou formu ω platí $\star\omega = \pm\omega$, pak musí nutně být

$$||\omega||_G^2 = 0.$$

Platí totiž

$$0 = \omega \wedge (\pm\omega) = \omega \wedge \star\omega = G(\omega, \omega) \cdot \theta.$$

Označme

$$Aut(\omega) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(V) | \varphi^*\omega = \omega\}$$

a

$$CAut(\omega) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(V) | \exists 0 \neq c \in \mathbb{R} : \varphi^*\omega = c \cdot \omega\}.$$

Množiny $Aut(\omega)$ a $CAut(\omega)$ jsou zřejmě grupy s násobením definovaným jako skládání automorfismů a jednotkový prvek je identický automorfismus. Zřejmě máme krátkou exaktní posloupnost

$$1 \to Aut(\omega) \hookrightarrow CAut(\omega) \xrightarrow{a} \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow 1,$$

kde $a : \varphi \mapsto c$, pokud $\varphi\omega = c \cdot \omega$. Takže

$$CAut(\omega) = Aut(\omega) \oplus \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Můžeme nyní zavést dvě podmnožiny grupy $CAut(\omega)$.

$$Aut_+ = Aut_+(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | \det A > 0\},$$

$$Aut_- = Aut_-(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | \det A < 0\}.$$

Přitom platí

$$Aut_+Aut_+ \subset Aut_+, \quad Aut_-Aut_- \subset Aut_+, \quad Aut_+Aut_- = Aut_-Aut_+ \subset Aut_-.$$

Definujme ještě

$$SAut(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | \det A = 1\}.$$

Lemma 3.1.3. *Platí $H = \mathbb{R}^+ \cdot SAut(\omega)$, kde*

$$H = \{A \in \mathrm{Aut}(V) | (\det A > 0)^{1/2}, A^*\omega = (\det A)^{-1/2}\omega\}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že S je automorfismus reálného vektorového prostoru V takový, že

$$(\det S)^{1/2} > 0 \quad \text{a} \quad S^*\omega = (\det S)^{-1/2}\omega.$$

Automorfismus můžeme napsat jako $S = cA$, kde $\det A = 1$ a $\det S = c^6$.

Potom

$$c^{-3}\omega = (c^6 \det A)^{-1/2}\omega = (\det(cA))^{-1/2}\omega = (cA)^*\omega = c^{-3}A^*\omega,$$

takže $A^*\omega = \omega$, $c > 0$ a $\det S = c^6$. Dále zřejmě $\mathbb{R}^+ \cdot Aut(\omega) \subset H$, tím je důkaz hotov. $\square$

Snadno lze ukázat, že množina H má strukturu grupy.

Poznámka: Všechny determinanty uvažované v této sekci budeme v následujícím značit $\det_{\mathbb{R}}$.

3.2 Orbita R1

Budeme uvažovat formu typu R1 na $\bigwedge^3 V^*$, tj. formu produktového typu. Je-li ω forma typu R1, potom můžeme zvolit vhodnou bázi $\{e_1, \ldots, e_6\}$ prostoru V tak, že s použitím duální báze $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$ máme

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6.$$

Víme, že $\Delta^2(\omega) = V' \cup V''$, kde $V' = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ a $V'' = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$. S formou ω je asociovaný automorfismus E (určený jednoznačně až na znaménko) takový, že $E|_{V'} = \mathrm{Id}$ a $E|_{V''} = -\mathrm{Id}$, viz věta 2.2.2.

Na prostoru V vybereme orientaci, buď $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$ kladně orientovaná báze.

Pro studium formy ω použijeme algebru $\mathbb{D}$ parakomplexních čísel. Snadno lze uvidět, že V je třírozměrný volný $\mathbb{D}$-modul. Protože

$$Ee_1 = -e_1, Ee_2 = -e_2, Ee_3 = -e_3 \quad \text{a} \quad Ee_4 = e_4, Ee_5 = e_5, Ee_6 = e_6,$$

je zřejmé, že

$$e_6 - e_1, \quad e_5 + e_2, \quad e_4 + e_3$$

je báze tohoto modulu.

Poznamenejme, že strukturu E jsme vybrali tak, aby báze

$$\{e_6 - e_1, e_5 + e_2, e_4 + e_3, E(e_6 - e_1), E(e_5 + e_2), E(e_4 + e_3)\}$$

prostoru V byla kladně orientovaná.

Prvky duálního modulu jsou $\mathbb{D}$-lineární zobrazení z $\mathbb{D}$-modulu V do $\mathbb{D}$. Budeme uvažovat tři lineární formy $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ s hodnotami v algebře $\mathbb{D}$, totiž

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}(\alpha_6 - \alpha_1) + e \cdot \frac{1}{2}(\alpha_6 + \alpha_1) = \frac{1}{2}(1+e)\alpha_6 - \frac{1}{2}(1-e)\alpha_1, \\
\beta_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_5 + \alpha_2) + e \cdot \frac{1}{2}(\alpha_5 - \alpha_2) = \frac{1}{2}(1+e)\alpha_5 + \frac{1}{2}(1-e)\alpha_2, \\
\beta_3 &= \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_3) + e \cdot \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3) = \frac{1}{2}(1+e)\alpha_4 + \frac{1}{2}(1-e)\alpha_3.
\end{aligned}$$

Zatím ovšem víme pouze, že tyto formy jsou lineární nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Snadno zjistíme, že platí

$$E^*[(1+e)\alpha_6 - (1-e)\alpha_1] = -(1+e)\alpha_6 + (1-e)\alpha_1 = e[(1+e)\alpha_6 - (1-e)\alpha_1],$$

odkud ihned plyne, že forma β_1 je $\mathbb{D}$-lineární. Analogicky dokážeme $\mathbb{D}$-linearitu forem β_2 a β_3.

Protože je $(1+e)(1-e) = 0, (1+e)^3 = 4 \cdot (1+e)$ a $(1-e)^3 = 4 \cdot (1-e)$, můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 &= -\frac{1}{8}(1+e)^3\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6 + \frac{1}{8}(1-e)^3\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\
&= \frac{1}{2}(1-e)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 - \frac{1}{2}(1+e)\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6 \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{\omega} - e\omega),
\end{aligned}$$

kde $\tilde{\omega} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 - \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$.

Nyní zavedeme regulární symetrickou bilineární formu g na V předpisem

$$\begin{gathered}
g(e_1, e_1) = 1, \quad g(e_2, e_2) = 1, \quad g(e_3, e_3) = 1, \\
g(e_4, e_4) = -1, \quad g(e_5, e_5) = -1, \quad g(e_6, e_6) = -1, \\
g(e_i, e_j) = 0 \text{ pro } i \neq j.
\end{gathered}$$

Tato forma indukuje bilineární formu na reálném duálním prostoru V^*, kterou označíme stejným symbolem g. Máme

$$\begin{gathered}
g(\alpha_1, \alpha_1) = 1, \quad g(\alpha_2, \alpha_2) = 1, \quad g(\alpha_3, \alpha_3) = 1, \\
g(\alpha_4, \alpha_4) = -1, \quad g(\alpha_5, \alpha_5) = -1, \quad g(\alpha_6, \alpha_6) = -1, \\
g(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ pro } i \neq j.
\end{gathered}$$

Snadno spočítáme, že pak pro Hodgeův operátor $\star$ indukovaný formou g platí $\star\omega = \omega$. Tuto bilineární formu rozšíříme obvyklým způsobem nejprve na třetí vnější mocninu $\Lambda^3 V^*$. Toto rozšíření označíme symbolem G. Dále bilineární formu g na V^* rozšíříme na $\mathbb{R}$-lineární formy na V s hodnotami v algebře $\mathbb{D}$, a to tak, abychom dostali $\mathbb{D}$-bilineární formu. Toto rozšíření označíme opět symbolem g. Definujeme

$$g(\alpha_0 + e\alpha_1, \alpha_0' + e\alpha_1') = (g(\alpha_0, \alpha_0') + g(\alpha_1, \alpha_1')) + e(g(\alpha_0, \alpha_1') + g(\alpha_1, \alpha_0')).$$

Bilineární formu g na V^* rozšíříme na $\mathbb{R}$-lineární formy na V s hodnotami v algebře $\mathbb{D}$, ale tentokrát tak, abychom dostali $\mathbb{D}$-hermitovskou formu. Zde definujeme

$$h(\alpha_0 + e\alpha_1, \alpha_0' + e\alpha_1') = (g(\alpha_0, \alpha_0') - g(\alpha_1, \alpha_1')) + e(-g(\alpha_0, \alpha_1') + g(\alpha_1, \alpha_0')).$$

Konečně obě tyto formy rozšíříme na $\mathbb{R}$-lineární 3-formy s hodnotami v algebře $\mathbb{D}$. Vznikne tak $\mathbb{D}$-bilineární forma, kterou označíme opět G a $\mathbb{D}$-hermitovská forma, kterou označíme H. Máme

$$g(\beta_1, \beta_1) = \frac{1}{4}g((1+e)\alpha_6 - (1-e)\alpha_1, (1+e)\alpha_6 - (1-e)\alpha_1) = -e,$$

$$g(\beta_2,\beta_2)=\frac{1}{4}g((1+e)\alpha_5+(1-e)\alpha_2,(1+e)\alpha_5+(1-e)\alpha_2)=-e,$$
$$g(\beta_3,\beta_3)=\frac{1}{4}g((1+e)\alpha_4+(1-e)\alpha_3,(1+e)\alpha_4+(1-e)\alpha_3)=-e,$$
$$g(\beta_1,\beta_2)=0,\quad g(\beta_1,\beta_3)=0,\quad g(\beta_2,\beta_3)=0.$$

Takže
$$G(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3,\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3)=(-e)^3=-e. \tag{3.2}$$

Podobně je
$$\begin{aligned}h(\beta_1,\beta_1) &= \frac{1}{4}h((1+e)\alpha_6-(1-e)\alpha_1,(1+e)\alpha_6-(1-e)\alpha_1)=\\ &= \frac{1}{4}(1+e)(1-e)(g(\alpha_1,\alpha_1)+g(\alpha_6,\alpha_6))=0,\end{aligned}$$
$$h(\beta_1,\beta_2)=0,\quad h(\beta_1,\beta_3)=0,$$

takže celkem máme
$$H(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3,\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3)=0. \tag{3.3}$$

Z rovnosti (3.2) plyne
$$-e=G(\frac{1}{2}(\tilde\omega-e\omega),\frac{1}{2}(\tilde\omega-e\omega))=\frac{1}{4}(G(\omega,\omega)+G(\tilde\omega,\tilde\omega))-\frac{1}{4}e(G(\omega,\tilde\omega)+G(\tilde\omega,\omega)),$$

a proto je
$$G(\omega,\omega)+G(\tilde\omega,\tilde\omega)=0,\quad G(\omega,\tilde\omega)=2.$$

Podobně z (3.3) máme
$$\begin{aligned}0 &= H(\frac{1}{2}(\tilde\omega-e\omega),\frac{1}{2}(\tilde\omega-e\omega))=\\ &= \frac{1}{4}(G(\tilde\omega,\tilde\omega)-G(\omega,\omega))+\frac{1}{4}e(-G(\omega,\tilde\omega)+G(\tilde\omega,\omega))=\\ &= \frac{1}{4}(G(\tilde\omega,\tilde\omega)-G(\omega,\omega)),\end{aligned}$$

odkud plyne
$$G(\omega,\omega)-G(\tilde\omega,\tilde\omega)=0.$$

Celkem tedy máme
$$G(\omega,\omega)=0,\quad G(\tilde\omega,\tilde\omega)=0,\quad G(\omega,\tilde\omega)=2.$$

Budeme-li vyšetřovat případ, kdy $\star\omega=-\omega$, snadno zjistíme, že pro bilineární formu g' na V definovanou jako
$$g'(e_i,e_j)=-g(e_i,e_j),\ i,j=1,\dots,6$$
a Hodgeův operátor $\star$ indukovaný touto formou platí výše uvedená rovnost. Dále, pro $\mathbb{D}$-bilineární formu G' na $\bigwedge^3 V^*$ pak bude vycházet
$$G'(\omega,\omega)=0,\quad G'(\tilde\omega,\tilde\omega)=0,\quad G'(\omega,\tilde\omega)=-2.$$

Dokažme nyní pomocné lemma.

Lemma 3.2.1. *Je-li S automorfismus prostoru V splňující $ES = SE$, platí*

$$\det_{\mathbb{R}} S = \det_{\mathbb{D}} S \cdot \overline{\det_{\mathbb{D}} S},$$

kde $\det_{\mathbb{D}} S$ *je determinant automorfismu S na prostoru (V, E).*

Důkaz. Protože pro $\mathbb{D}$-lineární formy β_i platí $\overline{\beta_i}(v) = \overline{\beta_i(v)}$, máme i $S^*\overline{\beta_1}(v) = \overline{\beta_1}(S^{-1}v) = \overline{S^*\beta_1(v)}$. Dále,

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \overline{\beta_1} \wedge \overline{\beta_2} \wedge \overline{\beta_3} = e \cdot \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6 = e \cdot \theta.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \overline{\beta_1} \wedge \overline{\beta_2} \wedge \overline{\beta_3}) &= S^*(e \cdot \theta) \\ S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)(\overline{S^*\beta_1 \wedge S^*\beta_2 \wedge S^*\beta_3}) &= e(\det_{\mathbb{R}} S)^{-1}\theta \\ (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1} \cdot \overline{(\det_{\mathbb{D}} S)^{-1}}\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \overline{\beta_1} \wedge \overline{\beta_2} \wedge \overline{\beta_3} &= e(\det_{\mathbb{R}} S)^{-1}\theta \\ (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1} \cdot \overline{(\det_{\mathbb{D}} S)}^{-1}\theta &= (\det_{\mathbb{R}} S)^{-1}\theta. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. □

Budeme nyní zkoumat grupu $Aut(\omega)$ automorfismů formy ω. Protože každý automorfismus A je reálné lineární zobrazení, které musí zachovat množinu $\Delta^2(\omega)$, je zřejmé, že musí platit

$$AV' = V', AV'' = V'' \quad \text{nebo} \quad AV' = V'', AV'' = V'.$$

Označme

$$Aut_0(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | AV' = V', AV'' = V''\},$$
$$Aut_1(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | AV' = V'', AV'' = V'\}.$$

Snadno ihned vidíme, že platí

$$Aut_0(\omega)Aut_1(\omega) = Aut_1(\omega)Aut_0(\omega) \subset Aut_1(\omega),$$

$$Aut_0(\omega)Aut_0(\omega) \subset Aut_0(\omega), \qquad Aut_1(\omega)Aut_1(\omega) \subset Aut_0(\omega).$$

Zkoumáme-li prvek $A \in Aut_0(\omega)$ snadno vidíme, že restrikce $A|_{V'} : V' \to V'$ musí zachovávat formu

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6)|_{V'} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3,$$

tj. musí patřit do grupy $SL(V')$. Stejnou úvahou pro prostor V'' zjistíme, že platí

$$Aut_0(\omega) = SL(V') \times SL(V'') \cong SL(3, \mathbb{R}) \times SL(3, \mathbb{R}).$$

Dále je zřejmé, že podgrupa $Aut_0(\omega)$ je souvislá a že pro každý automorfismus $A \in Aut_0(\omega)$ je $\det_{\mathbb{R}} A = 1$. Zaveďme nyní reálný automorfismus K prostoru V předpisem

$$K(e_1) = e_4, K(e_2) = e_5, K(e_3) = e_6, K(e_4) = e_1, K(e_5) = e_2, K(e_6) = e_3.$$

Snadno vidíme, že platí

$$K^*\alpha_1 = \alpha_4, K^*\alpha_2 = \alpha_5, K^*\alpha_3 = \alpha_6, K^*\alpha_4 = \alpha_1, K^*\alpha_5 = \alpha_2, K^*\alpha_6 = \alpha_3,$$

a tudíž $K^*\omega = \omega$. Vidíme ihned, že $K \in Aut_1(\omega)$, $\det_{\mathbb{R}} K = -1$ a $KE = -EK$. Navíc platí $K^2 = I$. Snadno nyní vidíme, že $KA \in Aut_1(\omega)$ právě tehdy, když $A \in Aut_0(\omega)$. Dostáváme tak následující větu.

Věta 3.2.2. *$Aut(\omega) = (SL(V') \times SL(V'')) \cup (K(SL(V') \times SL(V''))$.*

Pozorování 3.2.3. *Pro $B \in \mathrm{Aut}(V)$ platí*

$$\exists c \in \mathbb{R}, A \in Aut_0(\omega) : B = c \cdot A \Rightarrow BE = EB.$$

Lemma 3.2.4. *Pro automorfismus $B \in \mathrm{Aut}(V)$ splňující $BE = EB$ platí*

$$\det_{\mathbb{D}} B = 1 \Leftrightarrow B \in Aut(\omega).$$

Důkaz. Označme $(\det_{\mathbb{D}} B)^{-1} = (d_0 + ed_1)$, pak máme

$$\begin{aligned} B^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= (\det_{\mathbb{D}} B)^{-1}\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \\ \frac{1}{2}B^*(\tilde{\omega} - e\omega) &= \frac{1}{2}(d_0 + ed_1)(\tilde{\omega} - e\omega) \\ B^*\tilde{\omega} - eB^*\omega &= (d_0\tilde{\omega} - d_1\omega) + e(d_1\tilde{\omega} - d_0\omega). \end{aligned}$$

Protože jsou formy ω a $\tilde{\omega}$ $\mathbb{R}$-lineárně nezávislé, vidíme, že $B^*\omega = \omega$ (a také $B^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$) právě tehdy, když $d_0 = 1$ a $d_1 = 0$. □

Lemma 3.2.5. *Je-li $S \in H$, pak $\det_{\mathbb{D}} S = c^3$, kde $S = c \cdot A, A \in Aut_0(\omega)$.*

Důkaz. Podle lemmatu 3.1.3 je $S = cA$, kde $A \in Aut_0(\omega)$. Zřejmě pak také $A^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$. Dále máme

$$\begin{aligned} (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1}\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 &= S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = (cA)^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = \\ &= \frac{1}{2}c^{-3}(A^*\tilde{\omega} - eA^*\omega) = c^{-3}\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \end{aligned}$$

takže $\det_{\mathbb{D}}^{-1} S = c^{-3}$, a tedy $\det_{\mathbb{D}} S = c^3$. □

Věta 3.2.6. *Nechť je $\tilde{g}$ regulární symetrická bilineární forma na prostoru V. Buď $\tilde{G}$ bilineární forma indukovaná formou $\tilde{g}$ na $\bigwedge^3 V^*$ a $\tilde{\star}$ Hodgeův operátor indukovaný formou $\tilde{g}$. Pak*

$$\tilde{\star}\omega = \omega$$

právě tehdy, když

(i) $\tilde{g}(Ev, Ev') = \tilde{g}(v, v')$ *pro všechna* $v, v' \in V$,

(ii) $\tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \quad \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) > 0.$

Důkaz. Nechť $\tilde{\star}\omega = \omega$, g buď symetrická bilineární forma, která je popsána výše. Protože platí $\tilde{\star}\omega = \star\omega$, podle lemmatu 3.1.1 automorfismus S, pro který $\tilde{g}(v, v') = g(Sv, v')$, splňuje $S^*\omega = (\det_{\mathbb{R}} S)^{-1/2}\omega$ a $\det_{\mathbb{R}} S > 0$, takže $S \in H$. Podle lemmatu 3.1.3 lze S napsat jako $S = cA$, kde $c > 0$, $\det_{\mathbb{R}} A = 1$ a $A \in Aut(\omega)$, tedy $A \in Aut_0(\omega)$. Proto $SE = ES$ a snadno spočítáme, že

$$\tilde{g}(Ev, Ev') = g(SEv, Ev') = g(ESv, Ev') = g(Sv, v') = \tilde{g}(v, v'),$$

což je podmínka (i).

Počítejme

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= G(S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)\\ &= (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1} \cdot G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)\\ &= -c^{-3}e.\end{aligned}$$

Na druhé straně

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= \tilde{G}(\frac{1}{2}(\tilde{\omega} - e\omega), \frac{1}{2}(\tilde{\omega} - e\omega))\\ &= \frac{1}{4}(\tilde{G}(\omega, \omega) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})) - \frac{1}{2}e\tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}),\end{aligned}$$

takže celkem

$$\tilde{G}(\omega, \omega) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) = 2c^{-3} > 0.$$

Podobně, pro bilineární formu $\tilde{H}$ máme

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= H(S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)\\ &= (\det_D S)^{-1} \cdot H(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)\\ &= 0\end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= \tilde{H}(\frac{1}{2}(\tilde{\omega} - e\omega), \frac{1}{2}(\tilde{\omega} - e\omega))\\ &= \frac{1}{4}(\tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) - \tilde{G}(\omega, \omega)),\end{aligned}$$

což dává

$$\tilde{G}(\omega, \omega) - \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0.$$

Celkem tedy

$$\tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \quad \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) > 0,$$

což je podmínka (ii).

Obráceně, nechť

$$\tilde{g}(Ev, Ev') = \tilde{g}(v, v') \quad \text{a} \quad \tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) = 2b > 0.$$

Pak existuje právě jeden automorfismus S prostoru V, že $\tilde{g}(v, v') = g(Sv, v')$ a pro všechna $v, v' \in V$ je

$$g(SEv, Ev') = \tilde{g}(Ev, Ev') = \tilde{g}(v, v') = g(Sv, v') = g(ESv, Ev').$$

Z toho vyplývá, že $SE = ES$.

Dále

$$\tilde{G}(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3, \beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3) = \frac{1}{4}(\tilde{G}(\omega,\omega)+\tilde{G}(\tilde{\omega},\tilde{\omega}))-\frac{1}{4}e(\tilde{G}(\omega,\tilde{\omega})+\tilde{G}(\tilde{\omega},\omega)) = -b\cdot e.$$

A na druhé straně

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3, \beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3) &= G(S^*(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3), \beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3)\\ &= (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1}\cdot G(\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3, \beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3)\\ &= -(\det_{\mathbb{D}} S)^{-1}\cdot e.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že $\det_{\mathbb{D}} S = b^{-1} > 0$, takže i $\det_{\mathbb{R}} S > 0$. Označme $A = (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1/3} S$. Pak

$$\det_{\mathbb{D}} A = (\det_{\mathbb{D}} S)^{-1}(\det_{\mathbb{D}} S) = 1.$$

Podle lemmatu 3.2.4 je $A \in Aut(\omega)$, a protože rovněž $\det_{\mathbb{R}} A = 1$, je podle lemmatu 3.1.3 $S \in H$, z čehož podle lemmatu 3.1.1 plyne tvrzení. $\square$

Poznámka: Pokud formu ω zapíšeme ve tvaru $\omega = \alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3+\alpha_4\wedge\alpha_5\wedge\alpha_6$, snadno vidíme, že v případě $\tilde{\star}\omega = \omega$ jsou podmínky (i) a (ii) z předchozí věty ekvivalentní podmínkám

(i') $\tilde{g}(V, V') = 0$,

(ii') $0 < ||\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3||^2_{\tilde{G}} = -||\alpha_4\wedge\alpha_5\wedge\alpha_6||^2_{\tilde{G}}$.

Poznámka: Předchozí větu lze vyslovit i pro vztah $\tilde{\star}\omega = -\omega$. Změní se pouze část podmínky (ii), přesněji, bude platit $\tilde{G}(\omega,\tilde{\omega}) < 0$. Důkaz je zcela analogický.

3.3 Orbita R2

Nechť ω je forma typu R2 a zvolme kladně orientovanou bázi $\{e_1,\dots,e_6\}$ prostoru V a tím i příslušnou duální bázi $\{\alpha_1,\dots,\alpha_6\}$ takovou, že forma ω má tvar

$$\omega = \alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3+\alpha_1\wedge\alpha_4\wedge\alpha_5+\alpha_2\wedge\alpha_4\wedge\alpha_6-\alpha_3\wedge\alpha_5\wedge\alpha_6.$$

Na prostoru V vybereme komplexní strukturu J asociovanou s formou ω tak, aby $\{e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, Je_3\}$ byla kladně orientovaná báze prostoru V. Takže máme

$$Je_1 = -e_6,\quad Je_2 = e_5,\quad Je_3 = e_4,\quad Je_4 = -e_3,\quad Je_5 = -e_2,\quad Je_6 = e_1.$$

Podle lemmatu 2.2.5 pro každé $v \in V$ platí

$$\ker(\iota_v\omega) = \langle v, Jv\rangle.$$

Můžeme říci, že $\ker(\iota_v\omega)$ je jednorozměrný komplexní podprostor komplexního vektorového prostoru (V, J) generovaný vektorem v. Na druhou stranu je jasné, že každý jednorozměrný komplexní podprostor má tvar $\ker(\iota_v\omega)$ pro nějaké $v \in V$. Buď nyní A automorfismus formy ω, tj. reálné lineární zobrazeni takové, že

$$\omega(A^{-1}v_1, A^{-1}v_2, A^{-1}v_3) = \omega(v_1, v_2, v_3) \text{ pro všechna } v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Lemma 3.3.1. *Buď $A \in Aut(\omega)$. Potom*

$$A(\ker \iota_v\omega) = \ker \iota_{Av}\omega.$$

Důkaz. Buď $v' \in \ker(\iota_v\omega)$ a buď v'' libovolné. Potom

$$0 = \omega(v, v', v'') = \omega(A^{-1}v, A^{-1}v', A^{-1}v'') = A^*\omega(v, v', v''),$$

takže $A^{-1}(\ker \iota_v\omega) = \ker \iota_{A^{-1}v}\omega$. Odtud tvrzení snadno plyne. □

Z předchozího lemmatu snadno vyplývá, že automorfismus formy ω (což je reálné lineární zobrazení) zobrazuje jednorozměrné komplexní podprostory na jednorozměrné komplexní podprostory.

Lemma 3.3.2. *Buď $A : V \to V$ reálné lineární zobrazení zobrazující jednorozměrné komplexní podprostory na jednorozměrné komplexní podprostory. Potom A je komplexní lineární (tj. $A(iv) = iA(v)$), nebo komplexní antilineární zobrazení (tj. $A(iv) = -iA(v)$).*

Důkaz. Vektor v určuje jednorozměrný komplexní podprostor $\langle v\rangle$, který se zobrazuje na jednorozměrný komplexní podprostor $\langle Av\rangle$. V tomto jednorozměrném prostoru leží také vektor iv, jehož obraz $A(iv)$ leží opět v podprostoru $\langle Av\rangle$. Existuje tedy jednoznačně určené komplexní číslo $\lambda(v)$ takové, že

$$A(iv) = \lambda(v)Av.$$

Buďte v, v' dva (komplexně) lineárně nezávislé vektory. Pak i vektory Av a Av' jsou lineárně nezávislé a máme

$$\begin{aligned} \lambda(v+v')Av + \lambda(v+v')Av' &= \lambda(v+v')A(v+v') = A(i(v+v')) \\ &= A(iv) + A(iv') = \lambda(v)Av + \lambda(v')Av'. \end{aligned}$$

Dostáváme $\lambda(v+v') = \lambda(v) = \lambda(v')$ a odtud je snadno vidět, že λ je konstantní funkce. Pišme tedy $\lambda = c \in \mathbb{C}$. Máme dále

$$-A(v) = A(i(iv)) = cA(iv) = c^2A(v).$$

Je tedy $c = \pm i$ a důkaz je ukončen. □

Označme nyní symbolem G množinu reálných automorfismů $A : V \to V$, které jsou buď komplexní lineární nebo komplexní antilineární. Je zřejmé, že G je grupa. Navíc můžeme psát $G = G_0 \cup G_1$, kde G_0 je podmnožina komplexních lineárních automorfismů a G_1 je podmnožina komplexních antilineárních automorfismů. Snadno je vidět, že platí

$$G_0G_0 = G_0, \quad G_0G_1 = G_1G_0 = G_1, \quad G_1G_1 = G_0.$$

Vidíme tak, že G_0 je podgrupa grupy G. Zaveďme nyní reálný automorfismus K předpisem

$$K(e_i) = e_i \text{ pro } i = 1, 2, 3, \quad K(e_i) = -e_i \text{ pro } i = 4, 5, 6.$$

Snadno se přesvědčíme, že $K(iv) = -iK(v)$, tj. $K \in G_1$. Je-li $A \in G_1$ libovolný prvek, potom $KA \in G_0$.

Budeme nyní zkoumat, které prvky z grupy G_0 jsou automorfismy formy ω. Označíme

$$\beta_1 = \alpha_1 - i\alpha_6, \quad \beta_2 = \alpha_2 + i\alpha_5, \quad \beta_3 = \alpha_3 + i\alpha_4.$$

Snadno vidíme, že tyto formy jsou $\mathbb{C}$-lineární a tvoří bázi $\mathbb{C}$-modulu V. Platí

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 = \omega + i\tilde{\omega},$$

kde $\tilde{\omega} = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_4 - \beta_1 \wedge \beta_3 \wedge \beta_5 - \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_6 - \beta_4 \wedge \beta_5 \wedge \beta_6$. Pro libovolný prvek $A \in G_0$ dostáváme

$$(\det_{\mathbb{C}} A)^{-1} \cdot \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 = A^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = A^*\omega + iA^*\tilde{\omega},$$

kde $\det_{\mathbb{C}} A$ značí determinant komplexního automorfismu. Pišme $(\det_{\mathbb{C}} A)^{-1} = d_0 + id_1$. Potom

$$A^*\omega + iA^*\tilde{\omega} = (d_0 + id_1)(\omega + i\tilde{\omega}) = (d_0\omega - d_1\tilde{\omega}) + i(d_0\tilde{\omega} + d_1\omega).$$

Protože formy ω a $\tilde{\omega}$ jsou lineárně nezávislé v reálném vektorovém prostoru $\bigwedge^3 V^*$, vidíme ihned, že $A^*\omega = \omega$ právě tehdy, když $d_0 = 1$ a $d_1 = 0$. Dokázali jsme tak následující tvrzení.

Lemma 3.3.3. *Komplexní lineární automorfismus $A : (V, J) \to (V, J)$ je automorfismem formy ω právě tehdy, když $\det_{\mathbb{C}} A = 1$.*

Navíc si můžeme povšimnout, že jestliže $\det_{\mathbb{C}} A = 1$, potom $A^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$.

Lemma 3.3.4. *Je-li S komplexní lineární automorfismus, pak platí*

$$\det_{\mathbb{R}} S = \det_{\mathbb{C}} S \cdot \overline{\det_{\mathbb{C}} S}.$$

Důkaz. Je analogický důkazu podobného tvrzení 3.2.1. □

Zaměřme se na to, kdy je komplexní antilineární automorfismus A, tj. prvek $A \in G_1$, automorfismem formy ω. Zřejmě máme

$$K^*\alpha_i = \alpha_i \text{ pro } i = 1, 2, 3, \quad K^*\alpha_i = -\alpha_i \text{ pro } i = 4, 5, 6.$$

Potom platí

$$K^*\beta_i = \bar{\beta}_i \text{ pro } i = 1,2,3 \quad \text{a} \quad K^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = \overline{\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3}.$$

Dostáváme

$$\omega - i\tilde{\omega} = \overline{\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3} = K^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = K^*\omega + iK^*\tilde{\omega}.$$

Odtud vyplývá, že

$$K^*\omega = \omega, \quad K^*\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}.$$

Je-li nyní $B \in G_1$, potom $B = K(KB)$ a $KB \in G_0$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} & B^*\omega + iB^*\tilde{\omega} = B^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = (K(KB))^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ = \ & K^*((KB)^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)) = K^*((\det_{\mathbb{C}}(KB))^{-1} \cdot \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ = \ & (\det_{\mathbb{C}}(KB))^{-1} \cdot K^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = (\det_{\mathbb{C}}(KB))^{-1} \cdot \overline{\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3}. \end{aligned}$$

Píšeme-li podobně jako dříve $(\det_{\mathbb{C}}(KB))^{-1} = d_0 + id_1$, dostáváme

$$B^*\omega + iB^*\tilde{\omega} = (d_0 + id_1) \cdot (\omega - i\tilde{\omega}) = (d_0\omega + d_1\tilde{\omega}) + i(-d_0\tilde{\omega} + d_1\omega).$$

Odtud vidíme, že B je automorfismem formy ω právě tehdy, když $d_0 = 1$ a $d_1 = 0$. Máme tak následující lemma.

Lemma 3.3.5. *Komplexní antilineární automorfismus $B : (V, J) \to (V, J)$ je automorfismem formy ω právě tehdy, když $\det_{\mathbb{C}}(KB) = 1$.*

Vidíme opět, že jestliže $\det_{\mathbb{C}}(KB) = 1$, potom $B^*\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}$. Označme

$$SL(V, J) = \{A \in Aut(\omega) | AJ = JA\}.$$

Potom snadno vidíme, že platí

Věta 3.3.6. $Aut(\omega) = SL(V, J) \cup K(SL(V, J))$.

Lemma 3.3.7. *Platí*

$$SL(V, J) = \{A \in Aut(\omega) | \det_{\mathbb{R}} A = 1\} = \{A \in Aut(\omega) | \det_{\mathbb{C}} A = 1\}.$$

Důkaz. Zřejmě $SL(V, J) \subseteq \{A \in Aut(\omega) | \det_{\mathbb{R}} A = 1\}$, neboť podle lemmatu 3.3.3 je $\det_{\mathbb{C}} A = 1$, a tudíž $\det_{\mathbb{R}} A = 1$.

Obráceně, protože A je automorfismus formy ω, platí

$$\begin{aligned} \omega(AJA^{-1}v_1, v_2, v_3) &= \omega(JA^{-1}v_1, A^{-1}v_2, A^{-1}v_3) = \omega(A^{-1}v_1, JA^{-1}v_2, A^{-1}v_3) \\ &= \omega(v_1, AJA^{-1}v_2, v_3). \end{aligned}$$

Musí tedy existovat $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $AJA^{-1} = aI + bJ$. Potom $(aI + bJ)^2 = -Id$ a dostáváme vztahy $a^2 - b^2 = -1$ a $2ab = 0$. Protože $a \in \mathbb{R}$, zřejmě nemůže být $b = 0$. Je tedy $a = 0$ a $b = \pm 1$. Platí proto $AJA^{-1} = \pm J$ odkud $AJ = \pm JA$.

Předpokládejme nyní, že pro automorfismus A platí $AJ = -JA$. Potom podle lemmatu 3.3.5 je $\det_{\mathbb{C}} KA = 1$, a tudíž $1 = \det_{\mathbb{R}} KA = -\det_{\mathbb{R}} A$, což je spor. Takže nutně $AJ = JA$ a podle lemmatu 3.3.5 platí i

$$\{A \in Aut(\omega) | \det_{\mathbb{R}} A = 1\} \subseteq SL(V, J).$$

Druhá rovnost množin je s pomocí lemmatu 3.3.4 zřejmá. Tím je důkaz hotov. $\square$

Nyní definujeme symetrickou bilineární formu g předpisem

$$\begin{gathered} g(e_1, e_1) = -1, \quad g(e_2, e_2) = -1, \quad g(e_3, e_3) = 0, \\ g(e_4, e_4) = 0, \quad g(e_5, e_5) = 1, \quad g(e_6, e_6) = 1, \\ g(e_3, e_4) = g(e_4, e_3) = 2, \\ g(e_j, e_k) = 0 \text{ v ostatních případech.} \end{gathered}$$

Snadno se zjistí, že pro tuto bilineární formu platí

$$g(Jv, Jv') = -g(v, v') \text{ pro všechna } v, v' \in V.$$

Lemma 3.3.8. *Regulární bilineární forma splňující vztah*

$$g(v_1, v_2) = -g(Jv_1, Jv_2)$$

má signaturu $(3, 3)$.

Důkaz. Nechť $0 \neq v \in V$ je takový, že $g(v, v) > 0$, pak $g(Jv, Jv) < 0$. Vektory v a Jv jsou lineárně nezávislé, můžeme uvážit 2-dimenzionální prostor $\langle v, Jv \rangle$. Jeho ortogonální doplněk je

$$\langle v, Jv \rangle^{\perp} = \{w \in V | g(w, v) = 0 = g(w, Jv)\}.$$

Nechť $z \in \langle v, Jv \rangle \cap \langle v, Jv \rangle^{\perp}$. Pak $z = av + bJv$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Počítejme

$$g(z, z) = a \cdot g(z, v) + b \cdot g(z, Jv) = 0,$$

takže nutně $z = 0$, protože je g regulární. A máme

$$V = \langle v, Jv \rangle \oplus \langle v, Jv \rangle^{\perp}.$$

Pro $w \in \langle v, Jv \rangle^{\perp}$ platí $Jw \in \langle v, Jv \rangle^{\perp}$, neboť

$$g(Jw, v) = g(w, Jv) = 0, \quad g(Jw, Jv) = -g(w, v) = 0.$$

Takže máme $J\langle v, Jv \rangle^{\perp} \subset \langle v, Jv \rangle^{\perp}$.

Restrikce formy $g|_{\langle v, Jv \rangle}$ má signaturu (1,1), restrikce $g|_{\langle v, Jv \rangle^{\perp}}$ je opět regulární a můžeme postupovat indukcí. $\square$

Poznámka: Pokud pro bilineární formu platí $g(v_1, v_2) = g(Jv_1, Jv_2)$, podobně jako výše se dá ukázat, že má signaturu $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(0, 6)$ nebo $(6, 0)$.

Bilineární forma g indukuje na prostoru V^* symetrickou bilineární formu, kterou označíme opět g. Pro tuto formu platí

$$g(\alpha_1,\alpha_1) = -1, g(\alpha_2,\alpha_2) = -1, g(\alpha_3,\alpha_3) = 0,$$
$$g(\alpha_4,\alpha_4) = 0, g(\alpha_5,\alpha_5) = 1, g(\alpha_6,\alpha_6) = 1,$$
$$g(\alpha_3,\alpha_4) = g(\alpha_4,\alpha_3) = 2,$$
$$g(\alpha_j,\alpha_k) = 0 \text{ v ostatních případech.}$$

Nyní ověříme, že výše definovaná forma g indukuje Hodgeův operátor $\star$, pro který $\star\omega = \omega$. Je-li $\theta = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$, pak $G(\frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta) = -1$ a můžeme počítat

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5) \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6) &= (\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5) \wedge \star(\alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5) \\ &= G(\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5, \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5) \cdot \frac{1}{2}\theta = -\theta,\end{aligned}$$

podobně vyjde $\star(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) = -\alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$. Dál počítat nemusíme, protože z předchozího lemmatu plyne, že $\star\star = \mathrm{Id}$, takže $\star\omega = \omega$.

Symetrickou bilineární formu g můžeme rozšířit na reálné lineární formy s komplexními hodnotami, tj. na prostor $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. Máme k tomu dokonce dvě možnosti. Buď ji rozšíříme na komplexní bilineární formu, kterou označíme opět symbolem g, potom pro reálné lineární formy $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0', \alpha_1'$ máme

$$g(\alpha_0 + i\alpha_1, \alpha_0' + i\alpha_1') = (g(\alpha_0,\alpha_0') - g(\alpha_1,\alpha_1')) + i(g(\alpha_0,\alpha_1') + g(\alpha_1,\alpha_0')).$$

Nebo ji rozšíříme na hermitovskou formu, kterou budeme značit symbolem h. Potom máme

$$h(\alpha_0 + i\alpha_1, \alpha_0' + i\alpha_1') = (g(\alpha_0,\alpha_0') + g(\alpha_1,\alpha_1')) + i(-g(\alpha_0,\alpha_1') + g(\alpha_1,\alpha_0')).$$

Jak bilineární formu g, tak i hermitovskou formu h rozšíříme obvyklým způsobem na komplexifikaci prostoru $\bigwedge^3 V^*$. Tato rozšíření označíme G a H. Snadno vypočteme

$$\begin{aligned}g(\beta_1,\beta_1) &= g(\alpha_1 - i\alpha_6, \alpha_1 - i\alpha_6) \\ &= (g(\alpha_1,\alpha_1) - g(\alpha_6,\alpha_6)) + i(-g(\alpha_1,\alpha_6) - g(\alpha_6,\alpha_1)) = -2,\end{aligned}$$

$$g(\beta_2,\beta_2) = g(\alpha_2 + i\alpha_5, \alpha_2 + i\alpha_5) = -2, \quad g(\beta_3,\beta_3) = g(\alpha_3 + i\alpha_4, \alpha_3 + i\alpha_4) = 4i,$$
$$g(\beta_1,\beta_2) = g(\beta_1,\beta_3) = g(\beta_2,\beta_3) = 0.$$

Odtud tedy vidíme, že platí

$$G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = 16i. \tag{3.4}$$

Podobně můžeme počítat

$$\begin{aligned}h(\beta_1,\beta_1) &= h(\alpha_1 - i\alpha_6, \alpha_1 - i\alpha_6) \\ &= (g(\alpha_1,\alpha_1) + g(\alpha_6,\alpha_6)) + i(g(\alpha_1,\alpha_6) - g(\alpha_6,\alpha_1)) = 0,\end{aligned}$$

$$h(\beta_1,\beta_2) = h(\alpha_1 - i\alpha_6, \alpha_2 + i\alpha_5) = 0, \quad h(\beta_1,\beta_3) = h(\alpha_1 - i\alpha_6, \alpha_3 + i\alpha_4) = 0.$$

Dále není třeba počítat, neboť už odtud je zřejmé, že

$$H(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) = 0. \tag{3.5}$$

Z rovnosti (3.4) vyplývá

$$16i = G(\omega + i\tilde{\omega}, \omega + i\tilde{\omega}) = (G(\omega, \omega) - G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})) + 2iG(\omega, \tilde{\omega}),$$

takže

$$G(\omega, \omega) - G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0 \quad G(\omega, \tilde{\omega}) = 8.$$

Podobně ze vytahu (3.5) dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= H(\omega + i\tilde{\omega}, \omega + i\tilde{\omega}) = (G(\omega, \omega) + G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})) + i(-G(\omega, \tilde{\omega}) + G(\tilde{\omega}, \omega)) \\ &= G(\omega, \omega) + G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

odkud vyplývá

$$G(\omega, \omega) + G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0.$$

Celkem tedy vychází

$$G(\omega, \omega) = 0, \quad G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad G(\omega, \tilde{\omega}) = 8.$$

Definujme nyní bilineární formu g' na V jako

$$g'(e_i, e_j) = -g(e_i, e_j), \ i, j = 1, \ldots, 6.$$

Snadno zjistíme, že pro Hodgeův operátor $\star$ indukovaný touto formou platí $\star\omega = -\omega$. Podobně jako výše vypočítáme pro rozšíření G' na komplexifikaci $\bigwedge^3 V^*$, že

$$G'(\omega, \omega) = 0, \quad G'(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad G'(\omega, \tilde{\omega}) = -8.$$

Věta 3.3.9. *Buď $\tilde{g}$ regulární symetrická bilineární forma na 6-rozměrném vektorovém prostoru V. Nechť $\tilde{G}$ je bilineární forma indukovaná formou $\tilde{g}$ na $\bigwedge^3 V^*$. Potom*

$$\tilde{\star}\omega = \omega$$

právě tehdy, když jsou splněny tyto podmínky:

(i) $\tilde{g}(Jv, Jv') = -\tilde{g}(v, v')$ *pro všechna* $v, v' \in V$,

(ii) $\tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) > 0.$

Důkaz. Předpokládejme, že $\tilde{\star}\omega = \omega$ a buď g bilineární forma, která je popsána výše. Buď $S = \iota_g^{-1}\iota_{\tilde{g}}$ automorfismus prostoru V. Pak podle lemmatu 3.1.1 je $S \in H$. Podle lemmatu 3.1.3 existuje $c > 0$, že $S = cA$, $A \in Aut(\omega)$ a $\det_{\mathbb{R}} A = 1$, takže $A \in SL(V, J)$. Proto platí $SJ = cAJ = cJA = JS$.

Pro formy g a $\tilde{g}$ platí vztah $\tilde{g}(v, v') = g(Sv, v')$ a máme

$$\tilde{g}(Jv, Jv') = g(SJv, Jv') = g(JSv, Jv') = -g(Sv, v') = -\tilde{g}(v, v').$$

Pro automorfismus $S = cA$ formy ω dále platí

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= G((cA)^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= c^{-3} G(A^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= c^{-3} \cdot 16i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= \tilde{G}(\omega + i\tilde{\omega}, \omega + i\tilde{\omega}) \\ &= (\tilde{G}(\omega, \omega) - \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})) + 2i\tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}).\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\tilde{G}(\omega, \omega) - \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})) = 0 \quad \text{a} \quad \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) = c^{-3}8 > 0.$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= H(S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= (\det_{\mathbb{C}} S)^{-1} \cdot H(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= \tilde{H}(\omega + i\tilde{\omega}, \omega + i\tilde{\omega}) \\ &= \tilde{G}(\omega, \omega) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + i(-\tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \omega)) \\ &= \tilde{G}(\omega, \omega) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}).\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\tilde{G}(\omega, \omega) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0.$$

Celkem tedy máme

$$\tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) > 0.$$

Nyní postupujme v obráceném směru, tj. předpokládejme, že

$$\tilde{g}(Jv, Jv') = -\tilde{g}(v, v') \quad \text{a} \quad \tilde{G}(\omega, \omega) = 0, \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) = 8b > 0.$$

Existuje jednoznačně určený automorfismus S takový, že $\tilde{g}(v, v') = g(Sv, v')$. Potom máme

$$g(SJv, Jv') = \tilde{g}(Jv, Jv') = -\tilde{g}(v, v') = -g(Sv, v') = g(JSv, Jv'),$$

odkud vyplývá, že $SJ = JS$. Dále máme

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= \tilde{G}(\omega + i\tilde{\omega}, \omega + i\tilde{\omega}) \\ &= \tilde{G}(\omega, \omega) - \tilde{G}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + i(\tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) + \tilde{G}(\tilde{\omega}, \omega)) \\ &= 16b \cdot i,\end{aligned}$$

na druhé straně

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= G(S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3), \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= (\det_{\mathbb{C}} S)^{-1} \cdot G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ &= (\det_{\mathbb{C}} S)^{-1} 16i.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\det_{\mathbb{C}} S = b^{-1} > 0$, takže i $\det_{\mathbb{R}} S > 0$. Označme $A = (\det_{\mathbb{C}} S)^{-1/3} S$. Pak

$$\det_{\mathbb{C}} A = (\det_{\mathbb{C}} S)^{-1} (\det_{\mathbb{C}} S) = 1.$$

Podle lemmatu 3.3.3 je $A \in Aut(\omega)$ a $\det_{\mathbb{R}} A = 1$. Takže podle lemmatu 3.1.3 je $S \in H$, z čehož podle lemmatu 3.1.1 plyne tvrzení. $\square$

Poznámka: Opět platí analogické tvrzení předchozímu. Podmínka $\tilde{\star}\omega = -\omega$ je ekvivalentní podmínce (i) z předchozí věty a podmínce (ii), kde změníme $\tilde{G}(\omega, \tilde{\omega}) < 0$.

3.4 Orbita R3

Budeme zkoumat formu typu R3. Pro každou formu ω typu R3 můžeme nalézt bázi $\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ reálného duálu V^* takovou, že

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 + \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6.$$

Nechť $\{e_1, \dots, e_6\}$ je příslušná záporně orientovaná duální báze. Označíme symbolem $Aut(\omega)$ grupu automorfismů formy ω.

Připomeňme, že $\Delta^2(\omega) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = V_0$. Dále označme $\langle e_4, e_5, e_6 \rangle = V_1$. Snadno vidíme, že je-li S automorfismem formy ω, automorfismus S zachovává podprostor V_0. Znamená to, že automorfismus S indukuje automorfismus $\hat{S}$ faktorprostoru $\hat{V} = V/V_0 \cong V_1$. Prvky prostoru $\hat{V}$ budeme značit $[v]$, pro $v \in V$.

Zaveďme na vektorovém prostoru V regulární symetrickou bilineární formu g předpisem

$$g(e_1, e_6) = -1, g(e_2, e_5) = -1, g(e_3, e_4) = -1,$$

$$g(e_i, e_j) = 0 \text{ v ostatních případech.}$$

Ta indukuje regulární symetrickou bilineární formu na prostoru V^*, kterou označíme opět g. Podobně platí

$$g(\alpha_1, \alpha_6) = -1, \quad g(\alpha_2, \alpha_5) = -1, \quad g(\alpha_3, \alpha_4) = -1,$$

$$g(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ v ostatních případech.}$$

Nechť $\star$ značí Hodgeův izomorfismus vzhledem k formě g. Potom snadno vypočteme, že $\star\omega = \omega$. Platí například

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_6) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5) &= (\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_6) \wedge \star(\alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5) \\ &= G(\alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5, \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_6) \cdot \theta = \theta, \end{aligned}$$

kde $\theta = -\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$ je kladně orientovaný objemový element a $G(\theta, \theta) = -1$. Forma g má zřejmě signaturu $(3, 3)$.

Podle věty 2.2.7 je s formou ω svázán endomorfismus F (určený až na nenulový násobek) splňující $F^2 = 0$ a $\operatorname{im} F = \ker F$. Tento endomorfismus má tvar

$$Fe_1 = 0, \quad Fe_2 = 0, \quad Fe_3 = 0, \quad Fe_4 = e_3, \quad Fe_5 = -e_2, \quad Fe_6 = e_1.$$

Jeho násobek jsme zvolili tak, aby $\{e_4, e_5, e_6, Fe_4, Fe_5, Fe_6\}$ byla také záporně orientovaná báze prostoru V.

Připomeňme, že na reálném vektorovém prostoru V může být zavedena struktura modulu nad algebrou $\mathbb{F}$. Snadno vidíme, že V je 3-rozměrný volný $\mathbb{F}$-modul s bazí e_4, e_5, e_6. Rovněž tak snadno ověříme, že formy

$$\beta_1 = \alpha_4 + \varepsilon\alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_5 - \varepsilon\alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_6 + \varepsilon\alpha_1$$

jsou $\mathbb{F}$-lineární. Máme

$$\begin{gathered}\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 = (\alpha_4 + \varepsilon\alpha_3) \wedge (\alpha_5 - \varepsilon\alpha_2) \wedge (\alpha_6 + \varepsilon\alpha_1) = \\ = \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6 + \varepsilon[\alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 + \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6] = \tilde{\omega} + \varepsilon\omega.\end{gathered}$$

Rozšíříme-li bilineární formu g na prostor $\mathbb{R}$-lineárních forem s hodnotami v $\mathbb{F}$ (značíme ji stejným symbolem g) dostáváme

$$g(\beta_1, \beta_1) = -2\varepsilon, \quad g(\beta_2, \beta_2) = 2\varepsilon, \quad g(\beta_3, \beta_3) = -2\varepsilon,$$

$$g(\beta_i, \beta_j) = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

Dostáváme potom

$$\begin{aligned} G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= 8\varepsilon^3 = 0, \\ G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= G(\tilde{\omega} + \varepsilon\omega, \tilde{\omega} + \varepsilon\omega) = G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + \varepsilon G(\omega, \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

odkud vyplývá

$$G(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = 0, \quad G(\omega, \tilde{\omega}) = 0.$$

Příslušnou hermitovskou formu nebudeme tentokrát uvažovat, protože nám nedává žádnou další relaci.

Buď A automorfismus formy ω. Potom pro libovolné vektory $v_1, v_2, v_3 \in V$ platí

$$\begin{aligned} \omega(AFA^{-1}v_1, v_2, v_3) &= \omega(FA^{-1}v_1, A^{-1}v_2, A^{-1}v_3) = \omega(A^{-1}v_1, FA^{-1}v_2, A^{-1}v_3) \\ &= \omega(v_1, AFA^{-1}v_2, v_3). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že existují $c, d \in \mathbb{R}$ taková, že $AFA^{-1} = c \operatorname{Id} + dF$. Protože poslední endomorfismus je při $c \neq 0$ automorfismem, je zřejmé, že $AFA^{-1} = dF$. Budeme psát $d = \chi(A)$. Snadno pak vidíme, že pro dva automorfismy A a B formy ω platí

$$\chi(AB)F = (AB)F(AB)^{-1} = A(BFB^{-1})A^{-1} = A(\chi(B)F)A^{-1} = \chi(A)\chi(B)F.$$

Vidíme tak, že $\chi : Aut(\omega) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je grupový homomorfismus. Označíme

$$Aut_0(\omega) = \{A \in Aut(\omega) | \det A > 0, \chi(A) = 1\}.$$

Je zřejmé, že prvky grupy $Aut_0(\omega)$ jsou automorfismy formy ω, které jsou současně automorfismy $\mathbb{F}$-modulu V.

Buď $t \neq 0$ libovolné reálné číslo. Definujeme pomocný automorfismus A_t reálného vektorového prostoru V předpisem

$$A_t e_i = t^{2/3} e_i \text{ pro } i = 1,2,3, \quad A_t e_i = t^{-1/3} e_i \text{ pro } i = 4,5,6.$$

Zřejmě A_t je automorfismem formy ω a $\det A_t = t$.

Lemma 3.4.1. *Pro výše zavedený automorfismus $A_t \in Aut(\omega)$ platí $\chi(A_t) = t$.*

Důkaz. Počítejme například

$$A_t F e_4 = A_t e_3 = t^{2/3} e_3, \quad F A_t e_4 = F(t^{-1/3} e_4) = t^{-1/3} e_3,$$

odtud ihned vidíme, že $\chi(A_t) = t$. $\square$

Lemma 3.4.2. *Je-li $S \in \mathrm{Aut}(V)$, pro který $SF = FS$, pak*

$$\det_{\mathbb{R}} S = (\det_{\mathbb{R}}(S|_{V_0}))^2.$$

Pokud $\det_{\mathbb{F}} S = d_0 + \varepsilon d_1$, je $\det_{\mathbb{R}} S = d_0^2$.

Navíc, má smysl uvažovat automorfismus $\hat{S}$ prostoru $\hat{V}$ a pro něj platí $\det_{\mathbb{R}} \hat{S} = \det(S|_{V_0})$.

Důkaz. Budeme psát $S(e_i) = \sum_{j=1}^{6} s_{ij} e_j$. Pro $e_i \in V_0$ máme

$$SF(e_i) = 0,$$
$$FS(e_i) = \sum_{j=1}^{6} s_{ij} F(e_j) = s_{i4} e_3 - s_{i5} e_2 + s_{i6} e_1,$$

takže zřejmě

$$s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{24} = s_{25} = s_{26} = s_{34} = s_{35} = s_{36} = 0.$$

Dále potom dostáváme například

$$SF(e_4) = S(e_3) = \sum_{j=1}^{6} s_{3j} e_j,$$
$$FS(e_4) = \sum_{j=1}^{6} s_{4j} F e_j = s_{44} e_3 - s_{45} e_2 + s_{46} e_1.$$

Celkem máme

$$s_{44} = s_{33}, s_{45} = -s_{32}, s_{46} = s_{31}, \quad s_{54} = -s_{23}, s_{55} = s_{22}, s_{56} = -s_{21},$$
$$s_{64} = s_{13}, s_{65} = -s_{12}, s_{66} = s_{11}.$$

Matice automorfismu S má tedy tvar

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{33} & -s_{32} & s_{31} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & -s_{23} & s_{22} & -s_{21} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{13} & -s_{12} & s_{11} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li $S_0 = S|_{V_0}$, potom ihned vidíme, že $\det S = (\det S_0)^2$.

Uvažujme automorfismus S jako automorfismus $\mathbb{F}$-modulu V. Pak máme

$$\begin{aligned} S(e_4) &= (s_{44} + \varepsilon s_{41})e_4 + (s_{45} + \varepsilon s_{42})e_5 + (s_{46} + \varepsilon s_{43})e_6, \\ S(e_5) &= (s_{54} + \varepsilon s_{51})e_4 + (s_{55} + \varepsilon s_{52})e_5 + (s_{56} + \varepsilon s_{53})e_6, \\ S(e_6) &= (s_{64} + \varepsilon s_{61})e_4 + (s_{65} + \varepsilon s_{62})e_5 + (s_{66} + \varepsilon s_{63})e_6. \end{aligned}$$

Takže

$$\det_{\mathbb{F}} S = \begin{vmatrix} s_{44} + \varepsilon s_{41} & s_{45} + \varepsilon s_{42} & s_{46} + \varepsilon s_{43} \\ s_{54} + \varepsilon s_{51} & s_{55} + \varepsilon s_{52} & s_{56} + \varepsilon s_{53} \\ s_{64} + \varepsilon s_{61} & s_{65} + \varepsilon s_{62} & s_{66} + \varepsilon s_{63} \end{vmatrix} = d_0 + \varepsilon d_1,$$

kde

$$d_0 = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

Z toho je vidět, že $d_0 = \det_{\mathbb{R}} S_0$, takže $\det_{\mathbb{R}} S = d_0^2$.

Protože automorfismus S zachovává prostor V_0, můžeme uvažovat $\hat{S} \in Aut(\hat{V})$. Platí např. $\hat{S}([e_4]) = \sum_{j=4}^{6} s_{4j}[e_j]$, z čehož je ihned vidět, že $\det_{\mathbb{R}} \hat{S} = \det_{\mathbb{R}} S_0$. □

Lemma 3.4.3. *Pro každý prvek $A \in Aut(\omega)$ platí $\chi(A) = \det_{\mathbb{R}} A$. Speciálně, $\det_{\mathbb{R}} A = 1$, právě když $AF = FA$.*

Důkaz. Buď $A \in Aut(\omega)$ a označme $t = \chi(A)^{-1}$. Potom platí

$$\chi(AA_t) = \chi(A)\chi(A_t) = \chi(A)t = \chi(A)\chi(A)^{-1} = 1.$$

Vidíme tak, že AA_t je automorfismem $\mathbb{F}$-modulu V. Označme $B = AA_t$ a $(\det_{\mathbb{F}} B)^{-1} = b_0 + \varepsilon b_1$. Protože B je zároveň automofismem formy ω platí

$$\begin{aligned} (\det_{\mathbb{F}} B)^{-1} \cdot \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 &= B^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) \\ (b_0 + \varepsilon b_1)(\tilde{\omega} + \varepsilon\omega) &= B^*\tilde{\omega} + \varepsilon B^*\omega \\ b_0\tilde{\omega} + \varepsilon(b_0\omega + b_1\tilde{\omega}) &= B^*\tilde{\omega} + \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

Odtud plyne $b_0 = 1$ a $b_1 = 0$. Je tedy $\det_{\mathbb{F}} B = 1$ a $B^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$. Zároveň podle předchozího lemmatu vidíme, že platí $\det_{\mathbb{R}} B = 1$. Dostáváme tak

$$1 = \det_{\mathbb{R}}(AA_t) = \det_{\mathbb{R}} A \cdot \det_{\mathbb{R}} A_t = \det_{\mathbb{R}} A \cdot t = \det_{\mathbb{R}} A \cdot \chi(A)^{-1}.$$

Tím je důkaz hotov. □

Lemma 3.4.4. *Pro $S \in H$ platí $SF = FS$.*

Důkaz. Podle lemmatu 3.1.3 existují $c > 0$ a $A \in Aut(\omega), \det_{\mathbb{R}} A = 1$ tak, že $S = c \cdot A$. Podle lemmatu 3.4.3 je $AF = FA$, takže i $SF = FS$. □

Vraťme se nyní opět k formě g. Výpočtem snadno zjistíme, že endomorfismus F je symetrický vůči formě g, tj. že pro každé dva vektory $v, v' \in V$ platí $g(Fv, v') = g(v, Fv')$. Znamená to, že forma $q(v, v') = g(Fv, v')$ je symetrická bilineární forma (nikoliv regulární). Jsou-li $v_0, v'_0 \in V_0$, potom

$$q(v + v_0, v' + v'_0) = g(F(v + v_0), v' + v'_0) = g(Fv, v' + v'_0) = g(Fv, v') = q(v, v').$$

Můžeme tedy pro $[v], [v'] \in \hat{V}$ definovat $\hat{q}([v], [v']) = q(v, v')$. Takto dostáváme na $\hat{V}$ regulární symetrickou bilineární formu $\hat{q}$, která má signaturu $(2, 1)$. Její standardní rozšíření na prostor $\bigwedge^3 \hat{V}^*$ budeme značit $\hat{Q}$.

Uvažujeme-li 3-formu $\tilde{\omega}(v, v', v'') = \omega(Fv, v', v'')$, vidíme snadno, že patří-li jeden z vektorů v, v', v'' do V_0, potom $\tilde{\omega}(v, v', v'') = 0$. Snadno potom vidíme, že 3-forma $\tilde{\omega}$ indukuje na $\hat{V}$ 3-formu, kterou označíme $\hat{\omega}$. Pak spočítáme, že

$$\hat{Q}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) = 1,$$

je totiž

$$\begin{aligned} q(e_4, e_4) &= g(e_3, e_4) = -1, \\ q(e_5, e_5) &= g(-e_2, e_5) = 1, \\ q(e_6, e_6) &= g(e_1, e_6) = -1. \end{aligned}$$

Lemma 3.4.5. *Je-li $S \in \mathrm{Aut}(V)$, pro který $SF = FS$, pak $\det_{\mathbb{F}} S = \det_{\mathbb{R}} \hat{S}$.*

Důkaz. Pro $v, v', v'' \in V$ máme

$$\begin{aligned} \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3(v, v', v'') &= \tilde{\omega}(v, v', v'') + \omega(v, v', v'') = \\ &= \omega(Fv, v', v'') + \omega(v, v', v''), \end{aligned}$$

takže

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3(Fv, v', v'') = \omega(Fv, v', v'') = \tilde{\omega}(v, v', v'') = \hat{\omega}([v], [v'], [v'']).$$

Počítejme

$$\begin{aligned} S^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \\ (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)(S^{-1}v, S^{-1}v', S^{-1}v'') &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3)(v, v', v''). \end{aligned}$$

Zavedeme substituci $v \mapsto Fv$ a rovnost budeme dále uvažovat jen pro $v, v', v'' \in V_1$. Nyní máme

$$\begin{aligned} \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3(S^{-1}Fv, S^{-1}v', S^{-1}v'') &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3(Fv, v', v'') \\ \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3(FS^{-1}v, S^{-1}v', S^{-1}v'') &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} \hat{\omega}([v], [v]', [v'']) \\ \hat{\omega}(\hat{S}^{-1}[v], \hat{S}^{-1}[v'], \hat{S}^{-1}[v'']) &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} \hat{\omega}([v], [v]', [v'']) \\ (\det_{\mathbb{R}} \hat{S})^{-1} \hat{\omega} &= (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1} \hat{\omega}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. ∎

Nyní jsme připraveni dokázat následující větu.

Věta 3.4.6. *Buď $\tilde{g}$ regulární symetrická bilineární forma na V a buď $\tilde{\star}$ příslušný Hodgeův isomorfismus. Potom*

$$\tilde{\star}\omega = \omega$$

právě tehdy, když jsou splněny následující dvě podmínky:

(i) $\tilde{g}(Fv, v') = \tilde{g}(v, Fv')$ *pro všechna* $v, v' \in V$,

(ii) $\hat{\tilde{Q}}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) > 0$,

kde $\hat{\tilde{Q}}$ je forma indukovaná formou $\tilde{G}$ na prostor $\bigwedge^3 \hat{V}^*$ stejně jako výše.

Důkaz. Nechť $\tilde{\star}\omega = \omega$. Pak podle lemmatu 3.1.1 pro endomorfismus S splňující $\tilde{g}(v, v') = g(Sv, v')$ platí $S \in H$. Dále podle lemmatu 3.4.4 platí $SF = FS$ a máme

$$\tilde{g}(Fv, v') = g(SFv, v') = g(FSv, v') = g(Sv, Fv') = \tilde{g}(v, Fv'),$$

což je podmínka (i).

Podle lemmatu 3.1.3 platí $S = cA$, kde $c > 0$, $A \in Aut(\omega)$, $\det_{\mathbb{R}} A = 1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
(\det_{\mathbb{R}} \hat{S})^{-1}\hat{\omega} &= \hat{S}^*\hat{\omega}([v], [v'], [v'']) = \hat{\omega}(\hat{S}^{-1}[v], \hat{S}^{-1}[v'], \hat{S}^{-1}[v'']) \\
&= c^{-3}\hat{\omega}(\hat{A}^{-1}[v], \hat{A}^{-1}[v'], \hat{A}^{-1}[v'']) \\
&= c^{-3}\hat{\omega}([\hat{A}^{-1}v], [\hat{A}^{-1}v'], [\hat{A}^{-1}v'']) = c^{-3}\tilde{\omega}(A^{-1}v, A^{-1}v', A^{-1}v'') \\
&= c^{-3}\omega(FA^{-1}v, A^{-1}v', A^{-1}v'') = c^{-3}\omega(A^{-1}Fv, A^{-1}v', A^{-1}v'') \\
&= c^{-3}\omega(Fv, v', v'') = c^{-3}\hat{\omega}([v], [v'], [v'']),
\end{aligned}$$

takže $\det_{\mathbb{R}} \hat{S} = c^3, c > 0$. Pro příslušnou bilineární formu $\hat{\tilde{Q}}$ na $\bigwedge^3 \hat{V}^*$ máme

$$\hat{\tilde{Q}}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) = \hat{Q}(\hat{S}^*\hat{\omega}, \hat{\omega}) = (\det_{\mathbb{R}} \hat{S})^{-1} \cdot \hat{Q}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) = c^{-3} > 0.$$

Takže je splněna i podmínka (ii).

Zbývá dokázat, že jestliže výše uvedené podmínky jsou splněny, potom $\tilde{\star}\omega = \omega$. Z první podmínky vyplývá

$$g(SFv, v') = \tilde{g}(Fv, v') = \tilde{g}(v, Fv') = g(Sv, Fv') = g(FSv, v')$$

pro všechna $v, v' \in V$. Odtud ihned plyne, že $SF = FS$. Druhá podmínka nám dává

$$0 < \hat{\tilde{Q}}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) = \hat{Q}(\hat{S}^*\hat{\omega}, \hat{\omega}) = (\det_{\mathbb{R}} \hat{S})^{-1} \cdot \hat{Q}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) = (\det_{\mathbb{R}} \hat{S})^{-1},$$

odkud podle lemmat 3.4.5 a 3.4.2 plyne, že $(\det_{\mathbb{F}} S) = (\det_{\mathbb{R}} \hat{S}) = (\det_{\mathbb{R}} S_0) = (\det_{\mathbb{R}} S)^{1/2} > 0$. Definujme nyní automorfismus A prostoru (V, F) vztahem $A = (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1/3}S$. Pak

$$\det_{\mathbb{F}} A = (\det_{\mathbb{F}} S)^{-1}(\det_{\mathbb{F}} S) = 1$$

a samozřejmě $AF = FA$. Máme

$$\begin{aligned} A^*(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3) &= A^*\tilde{\omega} + A^*\varepsilon\omega \\ (\det_{\mathbb{F}} A)^{-1} \cdot \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 &= A^*\tilde{\omega} + \varepsilon A^*\omega \\ \tilde{\omega} + \varepsilon\omega &= A^*\tilde{\omega} + \varepsilon A^*\omega. \end{aligned}$$

Protože jsou formy $\tilde{\omega}$ a ω reálně lineárně nezávislé, je $A \in Aut(\omega)$ a z lemmatu 3.1.3 plyne $S = (\det_{\mathbb{F}} S)^{1/3} A \in H$. Podle lemmatu 3.1.1 platí $\tilde{\star}\omega = \omega$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Poznámka: Platí analogické tvrzení předchozímu. Podmínka $\tilde{\star}\omega = -\omega$ je ekvivalentní podmínkám

(i) $\tilde{g}(Fv, v') = \tilde{g}(v, Fv')$ pro všechna $v, v' \in V$,

(ii') $\hat{\hat{Q}}(\hat{\omega}, \hat{\omega}) < 0$.

Literatura

[1] Bureš J., Vanžura J.: *Unified treatment of multisymplectic 3-forms in dimension 6*, **arXiv:math.DG/0405101**.

[2] Panák M., Vanžura J.: *3-forms and almost complex structures on 6-dimensional manifolds*, **arXiv:math.DG/0305312**.

[3] Sternberg S.: *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[4] Vanžura J.: *One kind of multisymplectic structures on* 6*-manifolds*, Steps in Differential Geometry, Proceedings of the Colloquium on Differential Geometry, **25–30 July** (2000) 375–391.

[5] Vanžura J.: *Restrictions of 3-forms in dimension 7 to subspace of codimension 1*, Proc. 24th Winter School "Geometry and Physics", Srní, January, 17-24, 2004, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II **75** (2005) 325–332.

[6] Wells R.O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer, New York, 1980.