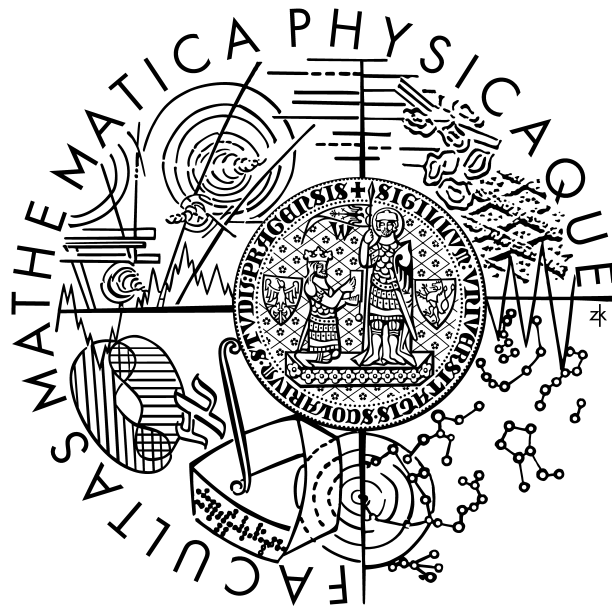


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Kaluža

Časo-prostorové bodové procesy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.
Studijní program: Matematika, Teorie pravděpodobnosti

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval především vedoucímu své diplomové práce Prof. RNDr. Viktoru Benešovi, DrSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky.

Poděkování patří také mým rodičům, kteří mě podporovali během mého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 3. srpna 2007

Jan Kaluža

Obsah

Úvod	3
1 Základy	5
1.1 Lévyho procesy	5
1.2 Procesy Ornstein-Uhlenbeckova typu (OU)	12
1.3 Bodové procesy	16
2 Závislost složek dvourozměrného Coxova bodového procesu	20
2.1 Vícerozměrné OUCP	20
2.2 Tvar křížové korelační funkce	21
2.3 Příklad dvourozměrného modelu	28
3 Filtrování OUCP	31
3.1 Úloha filtrování Coxova bodového procesu	31
3.2 Filtrování pomocí hustot bodových procesů	31
3.3 MCMC algoritmy	38
3.4 Příklad pro BDLP Gamma proces	40
4 Dodatky	53
4.1 Lévy-Itôova věta	53
4.2 Momenty Lévyho procesu	55
Literatura	58

Název práce: Časo-prostorové bodové procesy

Autor: Jan Kaluža

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

e-mail vedoucího: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci jsou vyšetřovány Coxovy bodové procesy řízené procesy Ornstein-Uhlenbeckova (OU) typu. Procesy OU typu jsou odvozeny od Lévyho procesů.

Pro vícerozměrné Coxovy procesy je odvozen tvar křížové korelační funkce v nestacionárním i stacionárním případě. Výpočet je demonstrován na příkladu procesu odvozeného od inverzního Gaussovského Lévyho procesu.

Také je studován problém filtrování Coxova bodového procesu, řízeného procesem OU typu, metodou stochastické simulace pomocí hustot bodových procesů a metody Markov chain Monte Carlo (MCMC). Tento postup je rozšířen pro případ, kdy Coxův bodový proces je založen na Lévyho procesu s nekonečnou aktivitou. Postup je podrobně proveden pro případ Gamma Lévyho procesu.

Klíčová slova: Procesy Ornstein-Uhlenbeckova typu, Coxův bodový proces, filtrování.

Title: Spatio-temporal point processes

Author: Jan Kaluža

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Supervisor's e-mail address: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with Cox point processes driven by processes of Ornstein-Uhlenbeck (OU) type. Processes of OU type are derived from Lévy processes.

A formula for cross-correlation function of multivariate Cox point processes is derived in nonstationary and stationary case. The calculations are illustrated on an example of a process derived from inverse Gaussian Lévy process.

Nonlinear filtering problem for Cox point processes driven by processes of OU type is studied as well, using a stochastic simulation based on densities of point processes and Markov chain Monte Carlo (MCMC) method. This procedure is extended for Cox point processes based on infinite activity Lévy processes. The procedure is demonstrated in detail for a case of Gamma Lévy process.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck type processes, Cox point processes, filtering.

Úvod

Modely založené na Lévyho procesech mají široké uplatnění zejména ve finančních aplikacích, viz. například [1] a [4]. Tomuto účelu slouží také procesy Ornstein-Uhlenbeckova (OU) typu řízené Lévyho procesy (BDLP — Background Driving Levy Process). Ty jsou podrobně studovány v [4] a [10]. V této práci se zabýváme Coxovými bodovými procesy řízenými procesy OU typu (zkráceně OUCP). Coxovy procesy mají náhodnou intenzitu a podmíněně při dané intenzitě jsou Poissonovými procesy. Pro tuto jejich dvoustupňovou skladbu se jedná nejen o flexibilní třídu procesů, ale jsou také matematicky zvládnutelné. Často jsou označovány jako dvojně stochastické. Studovány jsou například v [8].

Náhodná intenzita Coxova procesu je jeho významnou charakteristikou, kterou však často v aplikacích nelze přímo pozorovat. Úloha filtrování Coxova procesu se zabývá jejím odhadem. Klasickým přístupem k tomuto problému je řešení pomocí stochastických diferenciálních rovnic (například [11] nebo [5]). Moderní přístup je založený na metodě Markov chain Monte Carlo (MCMC) a na Bayesové větě. Tímto přístupem se zabývá článek [7] a je žádoucí jeho rozpracování.

Popis závislosti složek vektorového procesu se provádí pomocí křížové korelační funkce. Pro bodové procesy je zajímavou úlohou stanovení křížové korelační funkce v odlišných časových okamžicích.

Tato práce se zabývá Coxovými procesy řízenými procesy OU typu a vícerozměrnými OUCP. Odlišným způsobem než v [7] je odvozen tvar křížové korelační funkce pro vícerozměrný Coxův proces. Odvozen je také její tvar pro stacionární případ. Dále je také předložen příklad vícerozměrného OUCP s výpočtem křížové korelační funkce.

Studován je také problém filtrování OUCP, konkrétně metoda stochastické simulace za pomoci bodových procesů a metody Markov chain Monte Carlo. Zde je nově tento postup pro případ procesu s nekonečnou aktivitou (proces OU typu je řízen Lévyho procesem s nekonečnou aktivitou). Poté je postup zkoumán na konkrétním případě pro BDLP daný Gamma Lévyho procesem.

V první kapitole jsou uvedeny základní poznatky z teorie Lévyho procesů, procesů OU typu a bodových procesů. Cílem je uceleně předložit potřebné poznatky a základní vztahy mezi nimi.

Druhá kapitola se zabývá vícerozměrnými Coxovými procesy řízenými procesy OU

typu. Zde je definována křížová korelační funkce a je odvozen její tvar. Kapitola je zakončena příkladem.

Třetí kapitola se zabývá problémem filtrování OUCP. Podrobně je popsán postup řešení založený na stochastické simulaci. V sekci 3.3 jsou uvedeny algoritmy potřebné pro její provedení. Nakonec je celý postup demonstrován na konkrétním případě, ve kterém je náhodná intenzita odvozena od Gamma Lévyho procesu.

Součástí práce je zdrojový kód pro simulaci se stručným popisem; je v příloze na CD.

Kapitola 1

Základy

1.1 Lévyho procesy

Definice 1.1.1 Funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ je regulovaná (často též càdlàg nebo rcll), jestliže je v každém bodě $x \in [0, \infty)$ spojitá zprava a pro každé $x \in (0, \infty)$ existuje limita zleva.

Definice 1.1.2 Řekneme, že rozdělení náhodné veličiny Z v \mathbb{R}^d je neomezeně dělitelné, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} \exists Z_1, \dots, Z_n$ i.i.d. náhodné veličiny tak, že $Z_1 + \dots + Z_n \stackrel{d}{=} Z$.

Definice 1.1.3 (Lévyho proces) Řekneme, že stochastický proces $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ s hodnotami v \mathbb{R}^d , definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, je Lévyho proces, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $Z_0 \equiv 0$ a všechny trajektorie jsou regulované,
- ii) $\forall n \in \mathbb{N} \forall 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ jsou náhodné veličiny $Z_{t_0}, Z_{t_1} - Z_{t_0}, \dots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ nezávislé (nezávislé přírůstky),
- iii) $Z_{t+h} - Z_t \stackrel{d}{=} Z_h \quad \forall t, h \geq 0$ (stacionární přírůstky),
- iv) $\forall \epsilon > 0 \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|Z_{t+h} - Z_t| \geq \epsilon) = 0$ (stochastická spojitost).

Někteří autoři v definici Lévyho procesu nepožadují regulované trajektorie. Vždy však existuje modifikace s regulovanými trajektoriemi (viz. [10], Theorem 11.5).

Základními představiteli Lévyho procesů jsou Wienerův proces a Poissonův proces. Wienerův proces je spojitý (a gaussovský), zatímco Poissonův proces je ryze skokovitý. Jeho přímým zobecněním je složený Poissonův proces.

Definice 1.1.4 (Složený Poissonův proces) *Stochastický proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ je složený Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a se skoky s rozdělením σ (v \mathbb{R}^d), kde $\sigma(\{0\}) = 0$, jestliže je tvaru¹*

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,$$

kde proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou λ , $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rozdělením σ a procesy $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ a $\{N(t), t \geq 0\}$ jsou nezávislé.

Složeným Poissonovým procesem budeme nazývat také proces $\gamma t + Z_t$ (tj. s případným driftem $\gamma \in \mathbb{R}^d$). Je-li drift takový, že proces je centrováný, pak se nazývá centrováný složený Poissonův proces.

Z následující poznámky a věty 1.1.7 plyne, že se v definici 1.1.4 skutečně jedná o Lévyho proces. Poznamenejme ještě, že podmínka $\sigma(\{0\}) = 0$ není nikterak omezující. Říká, že kdykoliv dojde ke skoku procesu $\{N(t), t \geq 0\}$, dojde také ke skoku (nenulovému) u procesu $\{Z(t), t \geq 0\}$. Podmínka je dána z důvodu jednoznačnosti rozkladu procesu Z na procesy N a Y .

Poznámka 1.1.5 *Označme $\hat{\sigma}$ charakteristickou funkci rozdělení σ a za pomoci definice složeného Poissonového procesu s $\gamma = 0$ počítejme jeho charakteristickou funkci. Pro $z \in \mathbb{R}^d$ počítejme*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{i\langle z, Z_t \rangle} &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left[e^{i\langle z, \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \rangle} \middle| N(t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{E}e^{i\langle z, \sum_{k=1}^n Y_k \rangle} \cdot \mathbb{P}(N(t) = n) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{i\langle z, Y_k \rangle} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t \hat{\sigma}(z))^n}{n!} e^{-\lambda t} \right) = e^{\lambda t (\hat{\sigma}(z) - 1)}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\mathbb{E}e^{i\langle z, Z_t \rangle} = \exp \left\{ t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \lambda \sigma(dx) \right\}. \quad (1.1)$$

□

Poznámka 1.1.6 *Ze stacionarity a nezávislosti přírůstků Lévyho procesu Z plyne, že rozdělení Z_t je neomezeně dělitelné pro každé $t \geq 0$. Naopak se dá dokázat, že pro libovolné neomezeně dělitelné rozdělení Z existuje Lévyho proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ tak, že $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(Z)$. Navíc, rozdělení Lévyho procesu je jednoznačně určeno rozdělením Z_1 (obojí viz. [10], Theorem 7.10).*

Označme $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$.

¹Prázdný součet a součin definujeme jako neutrální prvek vzhledem k dané operaci, tj. $\sum_{k=1}^0 \equiv 0$, $\prod_{k=1}^0 \equiv 1$ a to bez ohledu na sčítance či činitele. Tuto konvenci budeme používat v celém textu.

Věta 1.1.7 (Lévy-Khintchine) *Nechť μ je neomezeně dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d s charakteristickou funkcí $\hat{\mu}(z)$. Pak*

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \delta, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.2)$$

kde A je symetrická pozitivně semidefinitní $d \times d$ matice, $\delta \in \mathbb{R}^d$ a ν je míra na \mathbb{R}^d splňující

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{a} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \quad (1.3)$$

Trojice (A, ν, δ) je určena jednoznačně.

Naopak, pro každou trojici (A, ν, δ) splňující podmínky napsané výše, je $\hat{\mu}$ charakteristickou funkcí neomezeně dělitelného rozdělení.

Důkaz: [10], Theorem 8.1. □

Definice 1.1.8 *Pro neomezeně dělitelné rozdělení μ a pro $\hat{\mu}(z)$ a (A, ν, δ) z Lévy-Khintchinovy věty řekneme, že:*

- (A, ν, δ) je charakteristickou trojicí rozdělení μ ,
- ν je Lévyho míra rozdělení μ ,
- $\psi(z)$ definovaná vztahem $\psi(z) = \log(\hat{\mu}(z))$ je charakteristickým exponentem rozdělení μ .

Charakteristickou trojicí Lévyho procesu $\{Z_t, t \geq 0\}$ rozumíme charakteristickou trojici Z_1 . Pokud má Lévyho míra hustotu vzhledem k d -rozměrné Lebesgueově míře, pak tuto hustotu nazveme Lévyho hustotou rozdělení μ .

Říkejme funkci \mathbb{I}_D z Lévy-Khintchinovy věty usekávací funkce. Pro konvergenci Lévy-Khintchinovy formule (1.2) – a stejně i v Lévy-Itôové větě 4.1.2 – lze použít i jiné usekávací funkce než \mathbb{I}_D , kde $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$. Pro každý Lévyho proces lze obecně použít jako usekávací funkci každou funkci $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, která je omezená měřitelná a splňuje:

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 + O(\|x\|), & \text{pro } \|x\| \rightarrow 0, \\ c(x) &= O(1/\|x\|), & \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vztah (1.2) má pak tvar

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \delta_c, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle c(x)) \nu(dx) \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.4)$$

kde $\delta_c \in \mathbb{R}^d$ je dána vztahem

$$\delta_c = \delta + \int_{\mathbb{R}^d} x (c(x) - \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx), \quad (1.5)$$

kde (A, ν, δ) je charakteristická trojice vzhledem k usekávací funkci \mathbb{I}_D . Trojice $(A, \nu, \delta_c)_c$ se také nazývá charakteristickou trojicí a vztah (1.4) Lévy-Khintchinovou reprezentací. Nebude-li explicitně zdůrazněno, budeme v textu vždy uvažovat usekávací funkci \mathbb{I}_D .

Podobně pro Lévyho proces Z , který splňuje podmínku $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| \nu(dx) < \infty$, může být použita usekávací funkce $c \equiv 0$.

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \delta_0, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx) \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.6)$$

s $\delta_0 \in \mathbb{R}^d$. Konstantu δ_0 pak nazýváme driftem Lévyho procesu (označení je v souladu s driftem složeného Poissonova procesu viz. definice 1.1.4).

Poznámka 1.1.9 *Zdůrazněme ještě, že změna usekávací funkce nemá vliv na Lévyho míru ani na matici A .*

Poznámka 1.1.10 *Jak již bylo řečeno, rozdělení Z_1 určuje jednoznačně rozdělení Lévyho procesu. Speciálně určuje rozdělení Z_t , $\forall t > 0$. Platí ([10], Theorem 8.1):*

$$\log \hat{P}_{Z_t}(z) = t \log \hat{P}_{Z_1}(z) = t\psi(z), \quad (1.7)$$

kde ψ je charakteristický exponent Lévyho procesu a \hat{P}_{Z_t} je charakteristická funkce Z_t . Jinými slovy, charakteristická trojice Z_t je $(tA, t\nu, t\delta)$.

Příklad 1.1.11 *Charakteristická trojice (A, ν, δ) v případě složeného Poissonova procesu bez driftu s intenzitou $\lambda > 0$ a se skoky s rozdělením σ splňuje (srovnáním (1.1) pro $t = 1$ a (1.2)):*

$$A = 0, \quad \nu = \lambda\sigma, \quad \delta = \int_{\|x\| \leq 1} x \lambda \sigma(dx).$$

Speciálně $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$. □

Poznámka 1.1.12 *Pro práci s Lévyho procesy je důležitým výsledkem tzv. Lévy-Itôova věta, viz. dodatek věta 4.1.2. Nyní uvedeme jen její část, která poslouží lepší představě o Lévyho procesech. Uvědomme si, že výsledek se týká trajektorií a ne jen jejich rozdělení jako Lévy-Khintchinova věta.*

Bud' $\{Z_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) . Pak existuje d -dimensionální Brownův pohyb $\{B_t, t \geq 0\}$ ² s kovarianční maticí A tak, že

$$Z_t = \delta t + B_t + Z_t^l + \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{Z}_t^\epsilon, \quad (1.8)$$

²Tj. $B_t = A^{1/2}W_t$, kde W je d -dimensionální Wienerův proces a $A^{1/2}$ je odmocninová matice, tj. $A^{1/2}A^{1/2} = A$, která existuje, protože A je symetrická a pozitivně semidefinitní matice.

kde všechny tři procesy napravo jsou nezávislé a mají po řadě charakteristické trojice $(A, 0, 0)$, $(0, \nu_C, 0)$ a $(0, \nu_D, 0)$, kde $\nu_C(A) = \nu(A \cap D^c)$ a $\nu_D(A) = \nu(A \cap D)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Konvergence posledního výrazu je ve smyslu s.j. a stejnoměrně v t na libovolném $[0, T]$. První dva procesy jsou spojité a zbylé dva ryze skokovité. Z^l je složený Poissonův proces obsahující skoky procesu Z , které mají velikost větší než 1 a procesy \tilde{Z}_t^ϵ jsou centrované složené Poissonovy procesy obsahující skoky procesu Z , jejichž velikost je větší než ϵ a menší nebo rovna 1.

$Z_t^l + \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{Z}_t^\epsilon$ je tedy ryze skokovitý proces, tzv. proces skoků procesu Z .

Pro naše účely budeme potřebovat pouze nezáporné Lévyho procesy, tzv. subordinátory (název je odvozen od toho, že je lze použít pro změnu času jiného Lévyho procesu).

Věta 1.1.13 (Subordinátory) *Bud' $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces s hodnotami v \mathbb{R} a s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- i) $Z_t \geq 0$ s.j. pro nějaké $t > 0$.
- ii) $Z_t \geq 0$ s.j. pro všechny $t > 0$.
- iii) Trajektorie Z jsou s.j. neklesající.
- iv) $A = 0$, $\nu((-\infty, 0]) = 0$, $\int_0^\infty (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ a $\delta - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx) \geq 0$.

Důkaz: [4], Proposition 3.10. □

Definice 1.1.14 Řekneme, že Lévyho proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) má nekonečnou aktivitu (je proces s nekonečnou aktivitou), jestliže $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$.

Poznámka 1.1.15 Lze ukázat ([4], Proposition 3.9), že Lévyho proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ má konečnou variaci³ právě tehdy, když $A = 0$ a $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| \nu(dx) < \infty$.

Pokud má Lévyho proces Z (i pro $A \neq 0$) nekonečnou aktivitu, pak množina skoků je spočetně nekonečná a hustá v \mathbb{R}_+ s.j. ([4], str. 84). Má-li konečnou aktivitu, tj. $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$, pak proces skoků procesu Z je složený Poissonův proces s intenzitou $\nu(\mathbb{R}^d)$ (případně s nějakým driftem).

Důsledek 1.1.16 *Subordinátory sice mohou mít nekonečnou aktivitu, ale vždy mají konečnou variaci.*

Zajímejme se nyní o integrovatelnost Lévyho procesu. Zkoumáním diferencovatelnosti charakteristické funkce, dané Lévy-Khintchinovou větou, poměrně snadno odvodíme postačující podmínky pro existenci konečných momentů z podmínek pro záměnu derivace a integrálu v (1.2). Okamžitě je vidět, že integrovatelnost závisí jen na Lévyho míře (nezávisí na δ ani na matici A). Ze vztahu (1.7) pak plyne, že konečnost momentů nezávisí na volbě $t > 0$. Uveďme nyní výsledek, který popisuje momentovou strukturu přesněji.

³Zde se konečnou variací rozumí, že trajektorie mají lokálně konečnou variaci na \mathbb{R}_+ .

Věta 1.1.17 (Momenty) *Bud' $\{Z_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces na \mathbb{R}^d s Lévyho mírou ν . Pak pro každé $t > 0, a > 0$ a $j \in \{1, \dots, d\}$ platí:*

$$\mathbb{E}\|Z_t\|^a < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\|x\|>1} \|x\|^a \nu(dx) < \infty \quad (1.9)$$

$$\mathbb{E}|Z_j(t)|^a < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\|x\|>1} |x_j|^a \nu(dx) < \infty \quad (1.10)$$

$$\mathbb{E} \log(\|Z_t\| \vee e) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\|x\|>1} \log \|x\| \nu(dx) < \infty. \quad (1.11)$$

Důkaz: [10], Theorem 25.3 a Proposition 25.4. □

Speciálně, z věty 1.1.17 plyne, že konečnost momentů není časově závislá vlastnost v třídě Lévyho procesu (tzn. platí buď pro všechny $t > 0$ nebo pro žádné).

Nakonec ještě uvedme výsledek týkající se reprezentace Lévyho procesů (nekonečnou) řadou.

Věta 1.1.18 (Rosiński) *Nechť $\{V_i\}_{i \geq 1}, \{U_i\}_{i \geq 1}$ a $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou nezávislé posloupnosti náhodných veličin. Nechť $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin na měřitelném prostoru (S, \mathcal{S}) , $\{U_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$ a $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou okamžiky skoků Poissonova procesu s intenzitou 1. Dále buď*

$$H : ((0, \infty) \times S, \mathcal{B}((0, \infty)) \otimes \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \quad (1.12)$$

měřitelná funkce. Definujme míry na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ následovně:

$$\sigma(r, B) = \mathbb{P}(H(r, V_i) \in B), \quad r > 0, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.13)$$

$$\nu(B) = \int_0^\infty \sigma(r, B) dr. \quad (1.14)$$

Dále položme

$$A(s) = \int_0^s \int_{\|x\| \leq 1} x \sigma(r, dx) dr, \quad s \geq 0. \quad (1.15)$$

1. *Pokud je ν Lévyho míra na \mathbb{R}^d a pokud existuje limita $\delta = \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ v \mathbb{R}^d , pak řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{I}_{U_i \leq t} \quad (1.16)$$

konverguje skoro jistě a stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ k Lévyho procesu s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \delta)$.

2. Pokud ν je Lévyho míra na \mathbb{R}^d a pro každé $v \in S$ je funkce

$$r \rightarrow \|H(r, v)\|$$

nerostoucí, pak řada $\sum_{i=1}^{\infty} (H(\Gamma_i, V_i)\mathbb{I}_{U_i \leq t} - tc_i)$ konverguje skoro jistě a stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ k Lévyho procesu s charakteristickou trojicí $(0, \nu, 0)$, kde $c_i = A(i) - A(i-1)$ jsou konstanty.

Důkaz: [9]. □

V praxi nemusí být zřejmé, jak takovou aproximaci hledat. Následující věta dává návod pro případ subordinátoru. Jedná se o speciální případ Rosiňského věty 1.1.18 pro $H(\Gamma_i, V_i) = U^{(-1)}(\Gamma_i)$, kde $U^{(-1)}$ je definováno ve větě 1.1.19. Pro praktické použití je nutné znát funkci $U^{(-1)}(y)$ explicitně, nebo umět příslušné hodnoty spočítat.

Věta 1.1.19 (Reprezentace subordinátoru) *Nechť $\{Z_t, t \geq 0\}$ je subordinátor s Lévyho mírou ν . Definujme tzv. zbytkový integrál*

$$U(x) = \int_x^{\infty} \nu(d\xi), \quad \forall x > 0.$$

Nechť $\{U_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$, $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou okamžiky skoků Poissonova procesu s intenzitou 1 a nechť posloupnosti $\{U_i\}_{i \geq 1}$ a $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou nezávislé. Pak řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} U^{(-1)}(\Gamma_i)\mathbb{I}_{U_i \leq t}, \tag{1.17}$$

kde $U^{(-1)}$ je zobecněná inverse definována vztahem

$$U^{(-1)}(y) = \inf \{x > 0 : U(x) < y\},$$

konverguje skoro jistě a stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ k Lévyho procesu s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \delta)$, kde $\delta = \int_D x \nu(dx)$.

Důkaz: [4], Example 6.13. □

Poznámka 1.1.20 *Podle věty 1.1.13 subordinátory splňují vztah $\int_D \|x\| \nu(dx) < \infty$, kde (A, ν, δ) je jeho charakteristická trojice. Můžeme tedy v Lévy-Khintchinově reprezentaci použít nulovou usekávací funkci viz. komentář za větou 1.1.7. Dostaneme reprezentaci tvaru (1.6). Řadě (1.17) tedy odpovídá charakteristická trojice $(0, \nu, 0)_0$ vzhledem k nulové usekávací funkci. Drift je nulový.*

Poznámka 1.1.21 (Usekávání řady) Z Rosiňského práce [9] plyne, že pro $\tau > 0$ je

$$Z_t^\tau \equiv \left[\sum_{i:\Gamma_i \leq \tau} H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{I}_{U_i \leq t} \right] - tA(\tau)$$

složený Poissonův proces na $[0, 1]$ s charakteristickou trojicí $(0, \nu_\tau, 0)$, kde $\nu_\tau(A) = \int_0^\tau \sigma(r, A) dr$.

Ve speciálních případech může jít o useknutí právě všech dostatečně malých skoků jako ve větě 1.1.19, ale v případě Rosiňského věty 1.1.18 to obecně není nutností, jak bude vidět ze vztahu (3.26) v tvrzení 3.4.3.

Poznámka 1.1.22 Jeden Lévyho proces může mít více reprezentací tvaru (1.16), viz [9].

Poznámka 1.1.23 Chceme-li reprezentaci Lévyho procesu na konečném intervalu $[0, T]$, stačí v (1.16) nahradit Γ_i za $\frac{\Gamma_i}{T}$ a posloupnost $\{U_i\}_{i \geq 1}$ za posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0, T]$, viz [9].

1.2 Procesy Ornstein-Uhlenbeckova typu (OU)

Procesy Ornstein-Uhlenbeckova typu (dále jen OU typu) lze definovat několika ekvivalentními způsoby. Buď Z Lévyho proces, $\gamma > 0$ a $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici (SDE)

$$dY_t = -\gamma Y_t dt + dZ_t, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = y_0. \quad (1.18)$$

Procesy OU typu lze definovat jako řešení této SDE, které mají regulované trajektorie. (Každé řešení (1.18) má takovou modifikaci viz. [10], kap. 17.) Proces Y je řízený Lévyho procesem Z , proto se procesu Z říká Background driving Lévy process (BDLP). Druhým způsobem je přímo napsat toto řešení:

$$Y(t) = e^{-\gamma t} y_0 + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_s, \quad t \geq 0. \quad (1.19)$$

Lze ukázat, že proces Y je homogenním markovským procesem, tedy třetím způsobem je specifikovat jeho přechodovou funkci, viz. tvrzení 1.2.1. Výše napsané platí obecně pro $\gamma \in \mathbb{R}$, ale procesy OU typu se definují pouze pro $\gamma > 0$.

Pro naše účely budeme potřebovat pouze případ, kdy Lévyho proces Z má konečnou variaci. V tomto případě integrál v (1.19) není stochastický⁴ a ověření výše napsaných výsledků lze najít v [10], kap. 17.

Tvrzení 1.2.1 Nechť Z je Lévyho proces v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (G, ρ, β) a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pak existuje homogenní přechodová funkce $P_t(x, B)$ na \mathbb{R}^d tak, že platí

⁴Tím rozumíme, že integrál je definovaný po trajektoriích, tj. $\forall \omega \in \Omega$ zvlášť.

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, y \rangle} P_t(x, dy) = \exp \left\{ ie^{-\gamma t} \langle z, x \rangle + \int_0^t \psi(e^{-\gamma s} z) ds \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.20)$$

kde $\psi(z) = \log \hat{P}_{Z(1)}(z)$ je charakteristický exponent Z . Pro každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}^d$ je rozdělení $P_t(x, \cdot)$ neomezeně dělitelné a má charakteristickou trojici $(A_t, \nu_t, \delta_{t,x})$, kde

$$A_t = \int_0^t e^{-2\gamma s} ds G, \quad (1.21)$$

$$\nu_t(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\gamma s} y) ds \rho(dy), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.22)$$

$$\delta_{t,x} = e^{-\gamma t} x + \int_0^t e^{-\gamma s} ds \beta + \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t e^{-\gamma s} y [\mathbb{I}_D(e^{-\gamma s} y) - \mathbb{I}_D(y)] ds \rho(dy). \quad (1.23)$$

Důkaz: [10], Lemma 17.1. □

Definice 1.2.2 Pro $\gamma > 0$ budeme homogenní markovský proces s přechodovou funkcí z tvrzení 1.2.1 nazývat procesem Ornstein-Uhlenbeckova typu (OU) generovaného čtveřicí (G, ρ, β, γ) . Je-li speciálně $\beta = 0$ a $\rho = 0$, mluvíme o Ornstein-Uhlenbeckově procesu.

Poznámka 1.2.3 Pokud v (1.18) respektive v (1.19) zvolíme náhodnou počáteční podmínku $Y(0)$, nezávislou s procesem Z , pak proces Y je procesem OU typu.

Definice 1.2.4 Řekneme, že rozdělení μ v \mathbb{R}^d je samorozložitelné, jestliže $\forall b > 1 \exists \rho_b$ pravděpodobnostní míra na \mathbb{R}^d tak, že

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}\left(\frac{z}{b}\right) \hat{\rho}_b(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

Připomeňme, že pravděpodobnostní rozdělení μ na \mathbb{R}^d je limitní rozdělení homogenního markovského procesu v \mathbb{R}^d s přechodovou funkcí P , jestliže

$$P_t(x, \cdot) \xrightarrow{w} \mu \text{ pro } t \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Dále pravděpodobnostní míra (resp. σ -konečná míra) μ je stacionární rozdělení (resp. invariantní rozdělení) homogenního markovského procesu s přechodovou funkcí P , jestliže

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x, B) \mu(dx), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \forall t > 0.$$

Tvrzení 1.2.5 Pokud μ je limitní rozdělení homogenního markovského procesu, pak μ je jeho jediným stacionárním rozdělením.

Důkaz: Plyne ihned z důkazu [10], Corollary 17.9. \square

Věta 1.2.6 *Nechť Z je Lévyho proces v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (G, ρ, β) a $\gamma > 0$. Nechť platí*

$$\int_{\|x\|>1} \log \|x\| \rho(dx) < \infty. \quad (1.24)$$

Pak proces OU typu generovaný (G, ρ, β, γ) má limitní rozdělení μ s charakteristickou funkcí $\hat{\mu}(z) = \exp \left\{ \int_0^\infty \psi(e^{-\gamma s} z) ds \right\}$, kde $\psi(z)$ je charakteristický exponent Lévyho procesu Z . Rozdělení μ je samorozložitelné s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) , kde

$$A = \frac{1}{2\gamma} G, \quad (1.25)$$

$$\nu(B) = \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{I}_B(e^{-s} y) ds \rho(dy), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.26)$$

$$\delta = \frac{1}{\gamma} \beta + \frac{1}{\gamma} \int_{\|y\|>1} \frac{y}{\|y\|} \rho(dy). \quad (1.27)$$

Navíc pro libovolné $\gamma > 0$ a libovolné samorozložitelné rozdělení μ na \mathbb{R}^d existuje právě jedna charakteristická trojice (G, ρ, β) splňující (1.24) tak, že μ je limitním rozdělením procesu OU typu generovaného (G, ρ, β, γ) .

Důkaz: [10], Theorem 17.5. \square

Pro úplnost dodejme, že pokud podmínka (1.24) není splněna, pak pro žádné $x \in \mathbb{R}^d$, přechodová funkce $P_t(x, \cdot)$ nekonverguje pro $t \rightarrow \infty$ k pravděpodobnostní míře. Neexistuje tedy ani limitní ani invariantní rozdělení ([10], Theorem 17.11).

Poznámka 1.2.7 *Podmínka (1.24) je ekvivalentní podmínce konečného logaritmického momentu, přesněji podmínce (pro libovolné $t > 0$)*

$$\mathbb{E} \log(\|Z_t\| \vee 1) < \infty.$$

Poznámka 1.2.8 *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.2.6. Bud' $\gamma > 0$ pevné a uvažujme Lévyho proces $\tilde{Z} = \{Z_{\gamma t}, t \geq 0\}$. Dle poznámky 1.1.10 je jeho charakteristická trojice $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta)$. Lévyho míra $\gamma \rho$ splňuje (1.24) a charakteristická trojice limitního rozdělení procesu OU typu generovaného $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta, \gamma)$ nezávisí na γ . Jinými slovy, pokud SDE*

$$dY_t = -\gamma Y_t dt + dZ_{\gamma t}, \quad t \geq 0 \quad (1.28)$$

má stacionární řešení pro nějaké $\gamma > 0$, pak má stacionární řešení pro všechna $\gamma > 0$ a jeho rozdělení nezávisí na parametru γ . Řešení mají tvar

$$Y(t) = e^{-\gamma t} Y_0 + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s} = e^{-\gamma t} Y_0 + \int_0^{\gamma t} e^{s-\gamma t} dZ_s, \quad t \geq 0, \quad (1.29)$$

kde Y_0 je počáteční podmínka.

Úmluva 1.2.9 Dále se budeme zabývat výhradně procesy OU typu generovanými $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta, \gamma)$, tedy řešenými SDE (1.28). Protože na volbě $\gamma > 0$ nezávisí, budeme mluvit jednoduše o procesu OU typu generovaného (G, ρ, β) .

Tvrzení 1.2.10 Nechť BDLP Z má charakteristickou trojici (G, ρ, β) splňující (1.24) a $\gamma > 0$ je libovolné. Nechť Y je stacionární řešení SDE (1.28). Označme (A, ν, δ) charakteristickou trojici procesu Y . Pak pro každé $p \geq 1$ platí: $Y \in L_p$ právě tehdy, když $Z \in L_p$.

Důkaz: Proces OU typu Y je generovaný $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta, \gamma)$. Podle věty 1.2.6 použité na Lévyho proces s charakteristickou trojici $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta)$, je Lévyho míra ν daná vztahem

$$\nu(B) = \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{I}_B(e^{-s}y) ds \gamma \rho(dy), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Můžeme tedy počítat:

$$\begin{aligned} \int_{\|x\|>1} \|x\|^p \nu(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \|e^{-s}x\|^p \mathbb{I}_{D^c}(e^{-s}x) ds \rho(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty e^{-ps} \|x\|^p \mathbb{I}_{\{\|x\|>e^s\}}(x) ds \rho(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^p \left(\int_0^{0 \vee \log \|x\|} e^{-ps} ds \right) \rho(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^p \mathbb{I}_{\|x\|>1}(x) \frac{(1 - \|x\|^{-p})}{p} \rho(dx) = \frac{1}{p} \left[\int_{\|x\|>1} \|x\|^p \rho(dx) - \int_{\|x\|>1} \rho(dx) \right]. \end{aligned}$$

Protože ρ je Lévyho míra, platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) \rho(dx) < \infty.$$

Odtud

$$\int_{\|x\|>1} \|x\|^p \nu(dx) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\|x\|>1} \|x\|^p \rho(dx) < \infty.$$

Tvrzení nyní plyne z věty 1.1.17. □

Poznámka 1.2.11 Za předpokladů z tvrzení 1.2.10 pro každé $p \geq 1$ platí:

$$\text{je-li } Z \in L_p, \text{ pak } \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s} \in L_p.$$

Důkaz je analogický důkazu tvrzení 1.2.10, jen místo věty 1.2.6 se použije tvrzení 1.2.1.

Předpokládejme, že Lévyho proces Z je subordinátor splňující (1.24). Pak podle poznámky 1.1.15 má konečnou variaci. Podle věty 1.2.6 mají řešení SDE (1.28) limitní rozdělení. Pro práci s limitním rozdělením máme dvě možnosti. Jednak známe charakteristickou trojici tohoto rozdělení (věta 1.2.6) a tedy jeho rozdělení, druhou možností je

využít faktu, že se jedná o limitní rozdělení. Zde se dá s výhodou použít reprezentace tvaru

$$Y(0) = \int_{-\infty}^0 e^{\gamma s} dZ_{\gamma s},$$

pro případ rovnice (1.28). Jak již víme, limitní rozdělení nezávisí na parametru γ . Tuto reprezentaci lze najít v [1].

Pro účely této reprezentace, je potřeba definovat Lévyho proces Z na \mathbb{R} , tedy i pro záporné časy. Definice je analogická definici Lévyho procesu. (Požadují se stacionární a nezávislé přírůstky, stochastická spojitost a trajektorie musí být zprava spojitě s limitami zleva. Není však potřeba požadovat $Z_0 = 0$.) Pak jsou náhodné veličiny

$$U_t = \int_{-t}^0 e^s dZ_s, \quad t > 0, \quad (1.30)$$

dobře definované. Protože exponenciála je nezáporná funkce a Z je neklesající, jsou i U_t neklesající posloupnosti pro $t \rightarrow \infty$ a musí tedy existovat limita s.j., ale mohla by být i nekonečná. Je-li $Z \in L_p$ pro nějaké $p \geq 1$, je i limitní rozdělení z L_p podle tvrzení 1.2.10. Ověříme, že posloupnost U_t je pro $t \rightarrow \infty$ konvergentní v L_p , pokud $Z \in L_p$.

Tvrzení 1.2.12 *Pokud je BDLP Z z L_p pro nějaké $p \geq 1$, pak platí*

$$\int_{-t}^0 e^s dZ_s \xrightarrow{L_p} \int_{-\infty}^0 e^s dZ_s \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

Důkaz: Díky stacionaritě Z máme pro $t \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E} \left\| \int_{-\infty}^0 e^s dZ_s - \int_{-t}^0 e^s dZ_s \right\|^p = \mathbb{E} \left\| \int_{-\infty}^{-t} e^s dZ_s \right\|^p = e^{-pt} \mathbb{E} \left\| \int_{-\infty}^0 e^s dZ_s \right\|^p \rightarrow 0.$$

□

1.3 Bodové procesy

Buď (\mathcal{X}, d) polský prostor (tj. úplný separabilní metrický prostor) a $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ jeho borelovská σ -algebra. Označme \mathcal{B}_0 všechny omezené borelovské množiny v \mathcal{X} (tj. $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$) a pro $x \subseteq \mathcal{X}$ označme $x(\cdot)$ čítací míru na \mathcal{B} (tedy $x(B) = \text{card}(x \cap B)$). Dále označme N systém lokálně konečných podmnožin \mathcal{X} , tj. $N = \{x \subseteq \mathcal{X}; x(B) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0\}$. Nakonec definujme σ -algebru \mathcal{N} jako nejmenší σ -algebru, vůči které jsou zobrazení $x(\cdot)$ měřitelné pro každé $x \in N$. Tedy $\mathcal{N} = \sigma\{\{x \in N; x(B) = m\}; B \in \mathcal{B}_0, m \in \mathbb{N}_0\}$.

Měřitelný prostor (N, \mathcal{N}) se nazývá prostor bodových množin na \mathcal{X} .

Definice 1.3.1 Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (N, \mathcal{N})$ nazýváme bodovým procesem (b.p.) na \mathcal{X} . Rozdělení bodového procesu X je pravděpodobnostní míra \mathbb{P}_X na \mathcal{N} , kde

$$\mathbb{P}_X(F) = \mathbb{P}[X \in F], \quad \forall F \in \mathcal{N}.$$

Definice 1.3.2 (Náhodná míra) Zobrazení $\Lambda : \Omega \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ je náhodná míra na $\Omega \times \mathcal{B}$ (tzv. jádro), jestliže platí:

- i) $\forall \omega \in \Omega$ je $\Lambda(\omega, \cdot)$ míra na \mathcal{B} ,
- ii) $\forall B \in \mathcal{B}_0$ je $\Lambda(\cdot, B)$ náhodná veličina.

Poznámka 1.3.3 Bodový proces X můžeme chápat jako náhodnou čítací míru (s celočíselnými hodnotami).

Definice 1.3.4 Řekneme, že b.p. X je jednoduchý, jestliže $X(\{\xi\}) \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathcal{X}$.

Definice 1.3.5 Řekneme, že b.p. X je konečný, jestliže $X(\mathcal{X}) < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega$.

Tvrzení 1.3.6 Rozdělení b.p. X je jednoznačně určeno prázdnými pravděpodobnostmi. Prázdnými pravděpodobnostmi se rozumí

$$\mathbb{P}(X(B) = 0), \quad \forall B \in \mathcal{B}_0.$$

Důkaz: [8], Appendix B, Lemma B.3 (strana 243). □

Definice 1.3.7 Bud' X jednoduchý b.p. na \mathcal{X} . Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme n -tou momentovou míru bodového procesu X vztahem

$$M^{(n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{E}[X(A_1) \cdots X(A_n)], \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}. \quad (1.31)$$

Speciálně, 1. momentová míra se nazývá míra intenzity b.p. X a značíme ji M . Pokud $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ a λ je hustota míry intenzity b.p. X vzhledem k d -rozměrné Lebesgueově míře, pak tuto hustotu λ nazýváme funkcí intenzity b.p. X .

Definice je korektní, protože míra na součinném prostoru $(\mathcal{B}(\mathcal{X}))^{\otimes n}$ je jednoznačně určena svými hodnotami na měřitelných obdélnících, což jsou právě množiny v (1.31). Míra $M^{(n)}$ je tedy jednoznačně určena.

Definice 1.3.8 Řekneme, že míra μ na $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ je

- difuzní, jestliže $\mu(\{\xi\}) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{X}$,
- lokálně konečná, jestliže $\mu(B) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0$.

Definice 1.3.9 (Poissonův b.p.) Bud' μ lokálně konečná difuzní míra na $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Bodový proces X nazveme Poissonovým b.p. s mírou intenzity μ , jestliže platí:

$$i) \mathbb{P}(X(B) = k) = \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(B)} \quad \forall B \in \mathcal{B}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

ii) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ po dvou disjunktní jsou $X(A_1), \dots, X(A_k)$ nezávislé náhodné veličiny.

Značíme $X \sim \text{Poisson}(\mathcal{X}, \mu)$ a pokud je λ jeho funkce intenzity, pak značíme též $X \sim \text{Poisson}(\mathcal{X}, \lambda)$.

Definice 1.3.10 (Coxův b.p.) Necht' Λ je difuzní lokálně konečná náhodná míra na \mathcal{X} . Bodový proces X , který je podmíněně při $\Lambda = \mu$ Poissonův b.p. s mírou intenzity μ , se nazývá Coxův b.p. s řídicí mírou Λ .

Poznámka 1.3.11 Pro svou náhodnou intenzitu se Coxův b.p. často označuje jako dvojně stochastický b.p.

Definice 1.3.12 (OUCP) Bud' Y nezáporný proces OU typu. Bodový proces X na \mathbb{R}_+ je Coxův b.p. řízený procesem Y OU typu, jestliže podmíněně při daném $Y = Y(\omega, \cdot)$ je X Poissonův b.p. na \mathbb{R}_+ s funkcí intenzity $Y(\omega, \cdot)$. X je tzv. OUCP = Ornstein-Uhlenbeck Cox Process.

Poznámka 1.3.13 OUCP je definován korektně, jestliže $\Lambda(\omega, B) = \int_B Y(\omega, y) dy$ je difuzní lokálně konečná náhodná míra. Proces Y je nezáporný a měřitelný jako funkce dvou proměnných ω a t (protože je zprava spojitý). Tedy $\forall \omega \in \Omega$ je $\Lambda(\omega, \cdot)$ míra na \mathcal{B} . Dále proces Y je tvaru (1.19) pro nějaké $\gamma > 0$ a pro vhodný Lévyho proces Z . Proces Z je subordinátor (jinak by proces Y nebyl nezáporný) a má lokálně konečnou variaci. Tedy integrál v (1.29) není stochastický a platí

$$\Lambda(\cdot, B) = \int_B Y(\cdot, y) dy = Y_0 \int_B e^{-\gamma y} dy + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(y-s)} \mathbb{I}_{B \cap [s, \infty)}(y) dy dZ_{\gamma s}(\cdot), \quad \forall B \in \mathcal{B}_0.$$

Vnitřní integrál je měřitelnou a omezenou funkcí proměnné s , navíc s omezeným nosičem pro B omezenou. Odtud plyne (aproximaci vnitřního integrálu jednoduchými funkcemi), že $\Lambda(\cdot, B)$ je náhodná valičina $\forall B \in \mathcal{B}_0$. Λ je tedy dobře definovaná náhodná míra. Náhodná míra Λ je difuzní, protože je dána svou hustotou Y . Je lokálně konečná, protože pro každé $\omega \in \Omega$ a B omezenou je trajektorie $Z(\omega, \cdot)$ omezená na B (je neklesající) a tedy i trajektorie $Y(\omega, \cdot)$ je omezená na B . Odtud $\Lambda(\omega, B) < \infty$. Definice 1.3.12 je tedy korektní.

Konečné bodové procesy lze někdy vyjádřit hustotou vzhledem k Poissonovu b.p. Uvažujme Poissonův bodový proces Y s mírou intenzity μ , splňující $0 < \mu(\mathcal{X}) < \infty$. Označme jeho rozdělení symbolem Π . Pro $F \in \mathcal{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \Pi(F) &= \mathbb{P}(Y \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y \in F \mid Y(\mathcal{X}) = n) \mathbb{P}(Y(\mathcal{X}) = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mathcal{X})^n}{n!} e^{-\mu(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_{[(X_1, \dots, X_n) \in F]} \frac{\mu(dx_1)}{\mu(\mathcal{X})} \cdots \frac{\mu(dx_n)}{\mu(\mathcal{X})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathcal{X})}}{n!} \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_{[(X_1, \dots, X_n) \in F]} \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Kde pro $n = 0$ definujeme

$$\int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_{[(X_1, \dots, X_n) \in F]} \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) = \mathbb{I}_{[\emptyset \in F]}.$$

Definice 1.3.14 Řekneme, že b.p. X má hustotu p vzhledem k Π , jestliže

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A p(x) \Pi(dx), \quad \forall A \in \mathcal{N}.$$

Příklad 1.3.15 Bud' Π rozdělení Poissonova b.p. Y na omezené borelovské množině $B \subseteq \mathbb{R}^d$, s funkcí intenzity rovnou 1 na B (tj. $\mathcal{X} = B$ a míra intenzity značena λ je Lebesgueova míra restringovaná na B). Dále bud' β nezáporná, omezená, borelovsky měřitelná funkce na B . Pak bodový proces X , s hustotou

$$p(x) = \exp \left\{ \lambda(B) - \int_B \beta(x) dx \right\} \prod_{\xi \in x} \beta(\xi), \quad \forall x \in \mathcal{N}, \quad (1.33)$$

vzhledem k Π , je Poissonův b.p. na B s funkcí intenzity β .

Důkaz: Pro $F \in \mathcal{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in F) &= \int_F p(x) \Pi(dx) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(B)}}{n!} \int_B \cdots \int_B \exp \left\{ \lambda(B) - \int_B \beta(x) dx \right\} \prod_{\xi \in x} \beta(\xi) \mathbb{I}_{[(x_1, \dots, x_n) \in F]} dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\int_B \beta(x) dx}}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbb{I}_{[(x_1, \dots, x_n) \in F]} \beta(x_1) dx_1 \cdots \beta(x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Označme μ míru s hustotou β vzhledem k λ a výsledek srovnáme se vztahem (1.32). \square

Tvrzení 1.3.16 Pro $T \subseteq \mathbb{R}^d$, $M \subseteq \mathbb{R}^p$ bud' Y Poissonův b.p. na T s funkcí intenzity ϕ . Dále přiřaďme ke každému bodu $\xi \in Y$ kótu $m_\xi \in M$ tak, že podmíněně při daném Y platí:

- i) kóty m_ξ mají rozdělení s hustotou p_ξ , která nezávisí na $Y \setminus \xi$,
- ii) kóty $\{m_\xi : \xi \in Y\}$ jsou vzájemně nezávislé.

Pak $X = \{(\xi, m_\xi) : \xi \in Y\} \sim \text{Poisson}(T \times M, \rho)$, kde $\rho(\xi, m) = \phi(\xi)p_\xi(m)$.

Důkaz: [8], Proposition 3.9. \square

Kapitola 2

Závislost složek dvourozměrného Coxova bodového procesu

2.1 Vícerozměrné OUCP

V předchozí kapitole jsme definovali Lévyho procesy s hodnotami v \mathbb{R}^d . Kdy je Lévyho proces v \mathbb{R} nezáporný popisuje věta 1.1.13. Dále jsme definovali procesy OU typu řízené Lévyho procesem v \mathbb{R} a v jednorozměrném případě jsme definovali Coxův bodový proces řízený nezáporným procesem OU typu.

Uvědomme si, že je-li $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ Lévyho proces v \mathbb{R}^d , pak také Z_1, \dots, Z_d jsou Lévyho procesy. Předpokládejme, že Z_1, \dots, Z_d jsou navíc nezáporné. Pak proces OU typu $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ definovaný vztahem (1.29) s počáteční podmínkou Y_0 z \mathbb{R}_+^d má trajektorie v \mathbb{R}_+^d . Tedy procesy Y_1, \dots, Y_d můžeme použít jako řídicí intenzity pro Coxovy b.p. X_1, \dots, X_d .

Jestliže proces Z navíc splňuje podmínku (1.24), pak také existuje stacionární proces OU typu Y a Coxův b.p. X je rovněž stacionární.

Definice 2.1.1 (Vícerozměrný OUCP) *Nechť $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ je proces OU typu s hodnotami v \mathbb{R}^d a s nezápornými složkami. Dále buďte X_1, \dots, X_d Coxovy b.p. s řídicími intenzitami pořadě Y_1, \dots, Y_d tak, že podmíněně při daném Y jsou X_1, \dots, X_d nezávislé Poissonovy bodové procesy. Pak $X = (X_1, \dots, X_d)$ nazveme vícerozměrným OUCP (řízeným procesem Y).*

Vícerozměrné OUCP jsou tedy d -tice OUCP, které spolu souvisejí pouze prostřednictvím svých náhodných intenzit.

Je-li $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ proces OU typu, pak také procesy Y_1, \dots, Y_d jsou OU typu. Obrácená implikace však obecně neplatí (triviálně stačí, když budou mít různé tlumící konstanty γ_i). Můžeme tedy najít dva OUCP X_1 a X_2 tak, že proces $X = (X_1, X_2)$ není vícerozměrný OUCP.

Závislosti mezi jednotlivými složkami procesu mohou být různé. Pro jejich popis se zavádí vhodné charakteristiky. Zde se zaměříme na křížovou korelační funkci.

Definice 2.1.2 (Křížová korelační funkce) *Křížovou korelační funkci¹ dvourozměrného Coxova b.p. X s řídicí intenzitou $Y = (Y_1, Y_2)$ definujeme vztahem*

$$g_{12}(t_1, t_2) = \frac{\mathbb{E}[Y_1(t_1)Y_2(t_2)]}{\mathbb{E}Y_1(t_1)\mathbb{E}Y_2(t_2)}, \quad \forall t_1, t_2 \geq 0. \quad (2.1)$$

Jinými slovy se dá říct, že se zajímáme o kovarianční strukturu procesu OU typu Y řízeného vhodným BDLP Z . To že cílem je vypočítat křížovou korelační funkci znamená, že nám stačí omezit se na procesy OU typu s neklesajícími BDLP Z .

2.2 Tvar křížové korelační funkce

Lévyho proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) , kde $\delta = \{\delta_i\}_{i=1}^d$ a $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^d$, má podle věty 1.1.17 konečnou střední hodnotu právě tehdy, když platí $\int_{\|x\|>1} \|x\| \nu(dx) < \infty$. Za tohoto předpokladu platí (derivováním Lévy-Khintchinovy formule)

$$\mathbb{E}Z_j(t) = tI_j \quad \forall j = 1, \dots, d \quad \text{kde} \quad (2.2)$$

$$I_j = \delta_j + \int_{\|x\|>1} x_j \nu(dx). \quad (2.3)$$

Dále předpokládejme, že proces Z má konečný druhý moment, což je podle věty 1.1.17 ekvivalentní podmínce $\int_{\|x\|>1} \|x\|^2 \nu(dx) < \infty$. Pak platí (opět derivováním Lévy-Khintchinovy formule)

$$\mathbb{E}Z_j(t)Z_k(t) = tI_{jk} + t^2I_jI_k \quad \forall j, k \in \{1, \dots, d\} \quad \text{kde} \quad (2.4)$$

$$I_{jk} = A_{jk} + \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_k \nu(dx). \quad (2.5)$$

Potřebné majoranty pro záměnu integrálu a derivace plynou z $\int_{\|x\|>1} \|x\| \nu(dx) < \infty$ a v druhém případě ještě z $\int_{\|x\|>1} \|x\|^2 \nu(dx) < \infty$. Výpočet je pro úplnost v dodatku (tvrzení 4.2.2, tvrzení 4.2.3 a poznámka 4.2.4).

Nejprve uvedme výsledek týkající se křížové korelační funkce vícerozměrného OUCP, jehož náhodná intenzita startuje v čase 0 z daného bodu (v \mathbb{R}_+^2). Výsledek pochází z článku [7].

Věta 2.2.1 *Nechť $0 < t_1 < t_2$ a $y_0 = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$ je pevné. Uvažujme OUCP $X = (X_1, X_2)$ s řídicí intenzitou $Y = (Y_1, Y_2)$ tvaru*

$$Y_t = y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^{\gamma t} e^{s-\gamma t} dZ_s, \quad t \geq 0,$$

¹V anglicky psané literatuře se používá termín cross-correlation function nebo též cross pair-correlation function.

kde $\gamma > 0$ a Z je Lévyho proces v \mathbb{R}^2 s nezápornými složkami a konečným 2. momentem. Pak OUCP X má křížovou korelační funkci

$$g_{12}(t_1, t_2) = 1 + \frac{I_{12} [e^{-\gamma(t_2-t_1)} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}]}{2 [I_1(1 - e^{-\gamma t_1}) + s_1 e^{-\gamma t_1}] [I_2(1 - e^{-\gamma t_2}) + s_2 e^{-\gamma t_2}]}, \quad (2.6)$$

kde I_1, I_2 a I_{12} jsou definovány v (2.3) a (2.5).

Důkaz: [7], Theorem 1. □

Důkaz je založen na markovské vlastnosti náhodné intenzity Y a znalosti charakteristické funkce pravděpodobnosti přechodu. Tu známe z věty 1.2.1, musíme si jen dát pozor na to, že proces Y je tvaru (1.29) místo (1.19). Z markovské vlastnosti pak plyne tvar charakteristické funkce sdruženého rozdělení $(Y(t_1), Y(t_2))$

$$p(z) = \mathbb{E} e^{i \langle (Y(t_1), Y(t_2)), (z_1, z_2) \rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle} P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(y_0, dy_1), \quad (2.7)$$

kde $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$. Po úpravě pomocí (1.20)

$$p(z) = \exp \left\{ \gamma \int_0^{t_2-t_1} \psi(e^{-\gamma r} z_2) dr + \gamma \int_0^{t_1} \psi(e^{-\gamma r} (z_1 + e^{\gamma(t_2-t_1)} z_2)) dr + \right. \\ \left. + i e^{-\gamma t_1} \langle s, z_1 + e^{-\gamma(t_2-t_1)} z_2 \rangle \right\}. \quad (2.8)$$

Položíme-li $z_1 = (u, 0)$ a $z_2 = (0, v)$, pak

$$\mathbb{E} Y_1(t_1) Y_2(t_2) = - \frac{\partial^2 p(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=0}.$$

Při výpočtu je potřeba zdůvodnit záměnu derivace a integrálu, k čemuž se použije konečnost prvního a druhého momentu Z . Podobně se vyjádří i $\mathbb{E} Y_1(t_1)$ a $\mathbb{E} Y_2(t_2)$ a dosadí se do (2.1).

Výhodou tohoto postupu je, že se takto dají počítat první a druhé momenty libovolného procesu OU typu, podstatná je konečnost 2. momentu, ale není potřeba ani nezápornost složek Y ani konečnost variace BDLP Z řídicího Y . Tyto předpoklady jsme potřebovali jen pro definování OUCP X . Analogicky by šlo postupovat i v případě výpočtu vyšších momentů.

Výsledek chceme nyní rozšířit pro stacionární případ. Předpokládejme, že stacionární proces OU typu existuje. Jednou možností jak najít křížovou korelační funkci ve stacionárním případě je opět využít markovské vlastnosti a znalosti stacionárního rozdělení (současné i limitního) a postupovat jako ve větě 2.2.1. Postup nyní naznačíme.

Poznámka 2.2.2 *Proces OU typu $\{Y_t, t \geq 0\}$ je markovský proces v \mathbb{R}^d . Důsledkem markovské vlastnosti je, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, libovolnou omezenou borelovsky měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow \mathbb{R}$ a pro Y_0 s rozdělením π nezávislým s BDLP Z platí:*

$$\mathbb{E}_\pi f(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} [f(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) | Y_0 = x] \pi(dx).$$

Označme tedy π stacionární rozdělení Y a počítejme charakteristickou funkci (2.7) pro stacionární případ.

$$p_\pi(z) = \mathbb{E}_\pi e^{i\langle (Y_{t_1}^{(1)}), (z_1) \rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle (y_1), (z_1) \rangle} P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(y_0, dy_1) \pi(dy_0). \quad (2.9)$$

Nyní můžeme použít znalosti stacionárního rozdělení z věty 1.2.6. Ale protože jeho charakteristická trojice má složitý tvar, pomůžeme si limitním rozdělením. Rozdělení π je také limitním rozdělením procesu Y (věta 1.2.6) a charakteristická funkce je spojitá a omezená. Můžeme tedy psát

$$p_\pi(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle (y_1), (z_1) \rangle} P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t_1}(y_0, dy_1) P_t(0, dy_0). \quad (2.10)$$

Na počátečním bodě (zde 0) nezávisí. Užítím Chapman-Kolmogorovovy rovnosti dostaneme

$$p_\pi(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle (y_1), (z_1) \rangle} P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) P_{t+t_1}(0, dy_1). \quad (2.11)$$

Uvnitř limity je výraz odpovídající větě 2.2.1 pro časy $t_1 + t$ a $t_2 + t$. Tedy pro výpočet $p_\pi(z)$ stačí v (2.8) místo t_1 a t_2 dosadit pořadě $t_1 + t$ a $t_2 + t$ a provést limitní přechod pro $t \rightarrow \infty$.

$$p_\pi(z) = \exp \left\{ \gamma \int_0^{t_2-t_1} \psi(e^{-\gamma r} z_2) dr + \gamma \int_0^\infty \psi(e^{-\gamma r} (z_1 + e^{\gamma(t_2-t_1)} z_2)) dr \right\}. \quad (2.12)$$

Pro $z_1 = (u, 0)$ a $z_2 = (0, v)$ dostaneme

$$\mathbb{E}_\pi Y_1(t_1) Y_2(t_2) = - \frac{\partial^2 p_\pi(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{u=v=0}.$$

Podobně spočteme i $\mathbb{E}_\pi Y_i(t_i)$. Dosazením do vztahu (2.1) dostaneme vztah pro křížovou korelační funkci ve stacionárním případě, viz. (2.18).

Ukážeme nyní jednodušší postup pro případ výpočtu křížové korelační funkce z věty 2.2.1 a její verze pro stacionární případ.

Po zbytek kapitoly uvažujeme tento model: Z je Lévyho proces v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \delta)$, v případě potřeby definovaný na celé reálné přímce. Z má konečný 2. moment, jeho složky jsou neklesající a má konečnou variaci. Proces Y je proces OU typu tvaru (1.29), tedy řešící SDE (1.28) a předpokládáme jeho nezápornost. Proces X je vícerozměrný OUCP řízený procesem Y . Procesy Y a X jsou definovány jen na \mathbb{R}_+ .

Pro výpočet křížové korelační funkce X , potřebujeme spočítat výrazy

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \int_0^{\gamma t_2} e^{s-\gamma t_2} Z_2(ds) \right] \quad \text{a} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \right].$$

Lemma 2.2.3 *Nechť $Z = (Z_1, Z_2)$ je Lévyho proces v \mathbb{R}^2 , kde Z_1 a Z_2 jsou subordinátory, $T > 0$ a f, g jsou nezáporné (borelovsky) měřitelné funkce na $(0, T]$. Nechť proces Z má konečný druhý moment a I_1, I_2, I_{12} jsou jako v (2.3) a (2.5), kde $A = 0$. Pak*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t) Z_1(dt) \right] = I_1 \int_0^T f(t) dt, \quad (2.13)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t) Z_1(dt) \int_0^T g(t) Z_2(dt) \right] = I_1 I_2 \int_0^T f(t) dt \int_0^T g(t) dt + I_{12} \int_0^T f(t) g(t) dt. \quad (2.14)$$

Důkaz: Z_j mají konečnou variaci protože to jsou subordinátory (viz. poznámka 1.1.15). Proto integrály v (2.13) a (2.14) jsou Lebesgue-Stieltjesovy (pro každý elementární jev zvlášť). Připomeňme, že pro $0 \leq a \leq b$ je

$$\int_a^b Z_1(ds) \equiv \int_{(a,b]} Z_1(ds) = Z_1(b+) - Z_1(a+) = Z_1(b) - Z_1(a),$$

díky spojitosti zprava Z_1 . Nechť f, g jsou nezáporné jednoduché funkce. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou tvaru

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \mathbb{I}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad g(t) = \sum_{i=1}^n g_i \cdot \mathbb{I}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad (2.15)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ a $f_i, g_i \in \mathbb{R}_+$. Za pomoci vztahu (2.2) a (2.4) počítejme

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t) Z_1(dt) \int_0^T g(t) Z_2(dt) \right] = \\ & = \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j (Z_1(t_i) - Z_1(t_{i-1})) (Z_2(t_j) - Z_2(t_{j-1})) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_i g_j \mathbb{E} [(Z_1(t_i) - Z_1(t_{i-1})) (Z_2(t_j) - Z_2(t_{j-1}))] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n f_i g_i \mathbb{E} [(Z_1(t_i) - Z_1(t_{i-1})) (Z_2(t_i) - Z_2(t_{i-1}))] = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_i g_j I_1(t_i - t_{i-1}) I_2(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=1}^n f_i g_i [I_1 I_2(t_i - t_{i-1})^2 + I_{12}(t_i - t_{i-1})] = \\
&= I_1 I_2 \int_0^T f(t) dt \int_0^T g(t) dt + I_{12} \int_0^T f(t) g(t) dt.
\end{aligned}$$

Nechť jsou nyní f a g nezáporné (borelovsky) měřitelné. Pak existují f_n, g_n jednoduché funkce tvaru (2.15) tak, že $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$ a $f_n g_n \nearrow fg$ na $(0, T]$. Z Léviho věty pak máme:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t) Z_1(dt) \int_0^T g(t) Z_2(dt) \right] = \mathbb{E} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^T f_n(t) Z_1(dt) \int_0^T g_n(t) Z_2(dt) \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T f_n(t) Z_1(dt) \int_0^T g_n(t) Z_2(dt) \right] = I_1 I_2 \int_0^T f(t) dt \int_0^T g(t) dt + I_{12} \int_0^T f(t) g(t) dt.
\end{aligned}$$

Vztah (2.13) se dokáže zcela analogicky, navíc stačí konečný 1. moment. \square

Nyní snadno dokážeme větu 2.2.1.

Důkaz věty 2.2.1:

Volme $f(s) = e^{s-\gamma t_1} \cdot \mathbb{I}_{(0, \gamma t_1]}(s)$ a $g(s) = e^{s-\gamma t_2} \cdot \mathbb{I}_{(0, \gamma t_2]}(s)$. Za použití lemmatu 2.2.3 počítejme

$$\mathbb{E} X_i(t_i) = \mathbb{E} \left(s_i e^{-\gamma t_i} + \int_0^{\gamma t_i} e^{s-\gamma t_i} Z_i(ds) \right) = s_i e^{-\gamma t_i} + I_i (1 - e^{-\gamma t_i}) \quad (2.16)$$

a dále

$$\mathbb{E} X_1(t_1) X_2(t_2) = \mathbb{E} \left(s_1 e^{-\gamma t_1} + \int_0^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \right) \left(s_2 e^{-\gamma t_2} + \int_0^{\gamma t_2} e^{s-\gamma t_2} Z_2(ds) \right) =$$

$$\begin{aligned}
& s_1 s_2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + s_1 e^{-\gamma t_1} \mathbb{E} \left(\int_0^{\gamma t_2} e^{s-\gamma t_2} Z_2(ds) \right) + s_2 e^{-\gamma t_2} \mathbb{E} \left(\int_0^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \right) + \\
& + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \right) \left(\int_0^{\gamma t_2} e^{s-\gamma t_2} Z_2(ds) \right) \right] = \\
& s_1 s_2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + s_1 e^{-\gamma t_1} I_2 (1 - e^{-\gamma t_2}) + s_2 e^{-\gamma t_2} I_1 (1 - e^{-\gamma t_1}) + \\
& + I_1 I_2 (1 - e^{-\gamma t_1}) (1 - e^{-\gamma t_2}) + I_{12} \int_0^{\gamma t_1 \wedge \gamma t_2} e^{s-\gamma t_1} e^{s-\gamma t_2} ds = \\
& = \mathbb{E} X_1(t_1) \mathbb{E} X_2(t_2) + I_{12} \frac{e^{-\gamma|t_2-t_1|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}}{2}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Odtud

$$g_{12}(t_1, t_2) = 1 + \frac{I_{12} [e^{-\gamma|t_2-t_1|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}]}{2 [s_1 e^{-\gamma t_1} + I_1 (1 - e^{-\gamma t_1})] [s_2 e^{-\gamma t_2} + I_2 (1 - e^{-\gamma t_2})]}.$$

□

Z tvrzení 1.2.10 víme, že předpoklad konečnosti 2. momentu BDLP Z je ekvivalentní konečnosti 2. momentu procesu Y , navíc zaručuje existenci stacionárního procesu Y . Z první kapitoly víme, že náhodná veličina $\int_{-\infty}^0 e^s dZ_s$ má rozdělení odpovídající stacionárnímu rozdělení procesu OU typu řešícímu SDE (1.28) s BDLP Z . Víme také, že podle tvrzení 1.2.12 platí:

$$U_t = \int_{-t}^0 e^s dZ_s \xrightarrow{L_2} \int_{-\infty}^0 e^s dZ_s$$

a

$$U_t = \int_{-t}^0 e^s dZ_s \xrightarrow{s.j.} \int_{-\infty}^0 e^s dZ_s.$$

Nyní spočteme křížovou korelační funkci ve stacionárním případě.

Věta 2.2.4 *Nechť $Z = (Z_1, Z_2)$ je Lévyho proces v \mathbb{R}^2 definovaný na \mathbb{R} , kde Z_1 a Z_2 jsou subordinátory a $\gamma > 0$. Nechť proces Z má konečný druhý moment a I_1, I_2, I_{12} jsou jako v (2.3) a (2.5). Nechť*

$$Y_t = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^{\gamma t} e^{s-\gamma t} dZ_s, \quad \forall t \geq 0$$

je náhodná intenzita 2-rozměrného OUCP X , kde $Y_0 = \int_{-\infty}^0 e^{s\gamma} dZ_s$. Pak

$$g_{12}(t_1, t_2) = 1 + \frac{I_{12}}{2I_1I_2} e^{-\gamma|t_2-t_1|} \quad (2.18)$$

je křížová korelační funkce X .

Důkaz:

Protože $Z \in L_2$, platí

$$\int_{-t}^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} dZ_s \xrightarrow{L_2} \int_{-\infty}^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} dZ_s \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

Označme

$$U_t = \int_{-t}^{\gamma t_1} e^{s-\gamma t_1} Z_1(ds) \quad \text{a} \quad V_t = \int_{-t}^{\gamma t_2} e^{s-\gamma t_2} Z_2(ds).$$

Ukážeme, že $U_t V_t \xrightarrow{L_1} Y_1(t_1) Y_2(t_2)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|U_t V_t - Y_1(t_1) Y_2(t_2)| &\leq \mathbb{E}|U_t| |V_t - Y_2(t_2)| + \mathbb{E}|Y_2(t_2)| |U_t - Y_1(t_1)| \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}|U_t|^2 \mathbb{E}|V_t - Y_2(t_2)|^2} + \sqrt{\mathbb{E}|Y_2(t_2)|^2 \mathbb{E}|U_t - Y_1(t_1)|^2} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Použitím stacionarity Z a vztahů (2.13) a (2.14) můžeme počítat

$$\mathbb{E}Y_1(t_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}U_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^{\gamma(t+t_1)} e^{s-\gamma(t+t_1)} Z_1(ds) = \lim_{t \rightarrow \infty} I_1 (1 - e^{-\gamma(t+t_1)}) = I_1,$$

$$\mathbb{E}Y_2(t_2) = I_2,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_1(t_1) Y_2(t_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}U_t V_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\gamma(t+t_1)} e^{s-\gamma(t+t_1)} Z_1(ds) \int_0^{\gamma(t+t_2)} e^{s-\gamma(t+t_2)} Z_2(ds) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[I_1 (1 - e^{-\gamma(t+t_1)}) I_2 (1 - e^{-\gamma(t+t_2)}) + I_{12} \frac{e^{\gamma|t_2-t_1|} - e^{\gamma(2t+t_1+t_2)}}{2} \right] = \\ &= I_1 I_2 + I_{12} \frac{e^{\gamma|t_2-t_1|}}{2}. \end{aligned}$$

Odtud již plyne vztah (2.18). □

Poznámka 2.2.5 Křížová korelační funkce má ve stacionárním případě prostý tvar a na BDLP závisí jen prostřednictvím jediného parametru. Všimněme si také významu parametru γ , udávajícího rychlost tlumení v SDE (1.28). Jednorozměrná rozdělení procesu OU typu nezávisí ve stacionárním případě na γ , ale kovarianční struktura ano.

2.3 Příklad dvourozměrného modelu

Nechť $d = 2$ a ν je míra na \mathbb{R}^2

$$\nu(B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \mathbb{I}_B(r \cos a, r \sin a) \tilde{w}(r, a) dr da \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

s hustotou danou v polárních souřadnicích vztahem

$$\tilde{w}(r, a) = g(r) b(a) \mathbb{I}_{(0, \infty)}(r) \mathbb{I}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(a). \quad (2.19)$$

Zde $b(a)$ je hustota pravděpodobnosti rozdělení na $[0, 2\pi]$, ($p, q > 0$):

$$b(a) = \frac{2 \sin^{2p-1} a \cos^{2q-1} a}{B(p, q)} \mathbb{I}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(a),$$

a necht' $g(r)$ je Lévyho hustota subordinátoru Z^* v \mathbb{R} s charakteristickou trojicí $(0, \rho, \beta^*)$, s konečným 2. momentem a nulovým driftem. Tedy $\beta^* - \int_{|x| \leq 1} xg(x) dx = 0$.

Podle věty 1.1.13 je Lévyho míra ρ koncentrována na \mathbb{R}_+ a

$$\int_0^{\infty} (x \wedge 1) g(x) dx < \infty.$$

Podle věty 1.1.17 je navíc $\int_0^{\infty} x^2 g(x) dx < \infty$.

Dosažením do vztahu (2.2) a (2.4) dostaneme:

$$\mathbb{E}Z^*(1) = \beta^* + \int_{|x| > 1} x g(x) dx = \int_0^{\infty} r g(r) dr \quad \text{a} \quad \text{var } Z^*(1) = \int_0^{\infty} r^2 g(r) dr. \quad (2.20)$$

Míra ν je Lévyho míra protože platí:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|x\|^2 \nu(dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r^2 g(r) b(a) dr da = \int_0^{\infty} r^2 g(r) dr < \infty. \quad (2.21)$$

Uvažujme Lévyho proces Z v \mathbb{R}^2 s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \delta)_0$ vzhledem k nulové usekávací funkci, kde

$$\delta_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.22)$$

Složky Z jsou subordinátory podle předpokladu (2.22) a tvrzení 4.1.4. Lévyho proces Z má konečný druhý moment, jak plyne z tvrzení 1.1.17 a nerovnosti (2.21).

Proces Z je tedy dobře definovaný Lévyho proces s hodnotami v \mathbb{R}_+^2 a existuje stacionární proces OU typu Y tvaru (1.29), pro libovolné pevně zvolené $\gamma > 0$. Proces Y je nezáporný a proto můžeme definovat dvou-rozměrný OUCP X řízený stacionárním procesem Y .

Chceme spočítat křížovou korelační funkci stacionárního dvou-rozměrného OUCP s BDLP Z .

Křížovou korelační funkci vypočteme podle věty 2.2.4. Proces Z máme daný charakteristickou trojicí vzhledem k nulové usekávací funkci, použijeme tedy převodní vztah (1.5) a poznámku 1.1.9.

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta_1 + \int_{\|x\| \leq 1} x_1 \nu(dx) + \int_{\|x\| > 1} x_1 \nu(dx) = \delta_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \cos a g(r) b(a) dr da = \\ &= \delta_1 + \frac{B(p, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \int_0^\infty r g(r) dr = \delta_1 + \frac{B(p, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \mathbb{E}Z^*(1), \end{aligned}$$

$$I_2 = \delta_2 + \int_{\mathbb{R}^2} x_2 \nu(dx) = \delta_2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \sin a g(r) b(a) dr da = \delta_2 + \frac{B(p + \frac{1}{2}, q)}{B(p, q)} \mathbb{E}Z^*(1),$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \nu(dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^2 \sin a \cos a g(r) b(a) dr da = \\ &= \frac{B(p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \int_0^\infty r^2 g(r) dr = \frac{B(p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \text{var } Z^*(1). \end{aligned}$$

Křížová korelační funkce je podle věty 2.2.4 rovna

$$\begin{aligned} g_{12}(t_1, t_2) &= 1 + \frac{I_{12}}{2I_1 I_2} e^{-\gamma|t_2 - t_1|} = \\ &= 1 + \frac{\frac{B(p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \text{var } Z^*(1)}{2 \left(\delta_1 + \frac{B(p, q + \frac{1}{2})}{B(p, q)} \mathbb{E}Z^*(1) \right) \left(\delta_2 + \frac{B(p + \frac{1}{2}, q)}{B(p, q)} \mathbb{E}Z^*(1) \right)} e^{-\gamma|t_2 - t_1|}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Poznámka 2.3.1 Lévyho míra ν má hustotu v polárních souřadnicích tvaru $\tilde{w}(r, a) = g(r)b(a)$, kde b je hustota pravděpodobnosti na $[0, 2\pi]$. Tento tvar míry je výhodný pro simulaci. Pokud umíme simulovat Lévyho proces Z^* , pak snadno simulujeme i Lévyho proces Z (příklad viz. [1]).

Z Lévy-Itôovy věty plyne rovnost $\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = Z^*$. Jinými slovy, každý skok r procesu Z^* , je nezávisle rozdělen na skoky velikosti $r \cos a$ respektive $r \sin a$ procesů Z_1 respektive Z_2 , kde a má rozdělení s hustotou b a je nezávisle s Z^* .

To platí také v případě, kdy hustota b_r je různá pro různé r , tj. $\tilde{w}(r, a) = g(r)b_r(a)$.

Konkrétně volme Lévyho proces Z^* tak, že $Z^*(1)$ má inverzní Gaussovo rozdělení $IG(\xi, \eta)$ s hustotou

$$f(x) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi\eta} x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\xi^2 \frac{1}{x} + \eta^2 x \right) \right\} \mathbb{I}_{x>0}.$$

Rozdělení $IG(\xi, \eta)$ je samorozložitelné (viz. [6]), speciálně neomezeně dělitelné. Lévyho proces Z^* je tedy podle poznámky 1.1.6 korektně definovaný. Protože hustota $f(x)$ je nezáporná právě pro $x > 0$, je proces Z^* podle věty 1.1.13 subordinátor. Navíc má nulový drift (kdyby byl drift kladný $b > 0$, pak by hustota $f(x)$ musela být koncentrována na $[b, \infty]$), tedy $\beta^* = \int_{|x| \leq 1} x \rho(dx)$, kde $(0, \rho, \beta^*)$ je charakteristická trojice Z^* . Je známo, že platí ($Z_1^* \sim IG(\xi, \eta)$)

$$\mathbb{E}Z_1^* = \frac{\xi}{\eta} \quad \text{a} \quad \text{var} Z_1^* = \frac{\xi}{\eta^3}.$$

Lévyho proces Z volme jako výše a opět s nulovým driftem, tj. $\delta_i = 0$, $i = 1, 2$, kde $(0, \nu, \delta)_0$ je charakteristická trojice Z vzhledem k nulové usekávací funkci. Dále poloźme $p = q = \phi > 0$, tedy rozdělení Z_1 a Z_2 je stejné — ze symetrie.

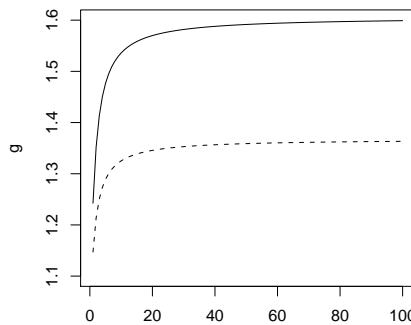
Odtud dosazením do vztahu (2.23) dostaneme tvar křížové korelační funkce:

$$g_{12}(t_1, t_2) = 1 + \frac{B(2\phi + \frac{1}{2}, 2\phi + \frac{1}{2})}{B(2\phi, 2\phi + 1)} \frac{1}{2\xi\eta} e^{-\gamma|t_2 - t_1|},$$

kde jsme použili vztah

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad p, q > 0, \quad \Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt.$$

Poznámka 2.3.2 *Parametr ϕ určuje závislost mezi složkami Lévyho procesu Z . Pro $\phi \rightarrow \infty$ jsou složky stále více podobné (limitně totožné) a pro $\phi \rightarrow 0$ se složky stávají nezávislé. Závislost křížové korelační funkce na parametru ϕ je graficky znázorněna na obrázku 2.1.*



Obrázek 2.1: Závislost křížové korelační funkce na parametru ϕ pro $\xi = 1$, $\eta = 1$, $\gamma = 1$ a $t_2 - t_1 = 0.5$ (plná čára) a pro $t_2 - t_1 = 1$ (přerušovaná čára).

Kapitola 3

Filtrování OUCP

3.1 Úloha filtrování Coxova bodového procesu

Úloha filtrování bodových procesů pochází z aplikací v medicínské diagnostice a optických komunikacích. Uvažujme situaci, kdy v reálném čase pozorujeme události modelované nehomogenním b.p. X s náhodnou intenzitou Y . Filtrování se zabývá odhadem intenzity, který v čase T závisí jen na událostech pozorovaných do času T . Kvalitu odhadu posuzujeme podle střední kvadratické chyby. V tomto smyslu nejlepším odhadem intenzity v čase T je podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E} [Y(T) \mid X|_{[0,T]}]. \quad (3.1)$$

Úloha byla řešena již v minulosti a jsou známé výsledky pro různé typy procesů. Řešení bylo nejprve popisováno pomocí stochastických diferenciálních rovnic, ale jejich numerické řešení je problematické. Jiným přístupem k řešení jsou stochastické simulace. Podmíněná střední hodnota (3.1), kterou nelze analyticky vyjádřit, se získá ze simulací z příslušného podmíněného rozdělení. Toto rozdělení lze vyjádřit pro Coxův bodový proces X hierarchickým Bayesovským modelem a simulovat pomocí Markov chain Monte Carlo.

Zde jsou známy dva postupy. První z nich vychází z předpokladu, že řídicí intenzita je Markovský proces a používá diskretizaci na časové ose. Filtrování a znalost přechodové hustoty umožňuje navíc predikci v čase (viz. [3]).

Jinou možností aproximace se budeme zabývat v této práci. Metoda je založená na hustotách vzhledem k Poissonovu b.p., konkrétně se budeme zabývat filtrováním OUCP, tj. náhodná intenzita je dána nezáporným procesem OU typu.

3.2 Filtrování pomocí hustot bodových procesů

Předpokládejme pro zbytek kapitoly, že máme pozorování $\{\tau_j\}_{j=1}^m$, které je realizací Coxova b.p. X na $[0, T]$, řízeného stacionárním procesem OU typu $\{Y_t, t \in [0, T]\}$,

který je tvaru

$$Y_t = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s}, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

kde $\gamma > 0$, Z je nezáporný Lévyho proces (subordinátor) splňující (1.24) a počáteční rozdělání Y_0 je nezávislé s procesem Z . Proces Y je tedy řešením SDE (1.28). Předpokládáme, že parametry modelu ($\gamma > 0$ a rozdělání Z) známe. Charakteristickou trojici procesu Z označme (G, ρ, β) . Zajímá nás odhad intenzity v čase T na základě pozorování $\{\tau_j\}_{j=1}^m$, neboli hodnota

$$\mathbb{E}[Y(T) \mid X = \{\tau_j\}_{j=1}^m]. \quad (3.3)$$

Poznámka 3.2.1 Nezápornost Z je podle věty 1.1.13 ekvivalentní s

$$G = 0, \quad \rho((-\infty, 0]) = 0, \quad \int_0^\infty (x \wedge 1) \rho(dx) < \infty \quad \text{a} \quad \beta \geq \int_D x \rho(dx).$$

Tedy proces Z nemá gaussovskou složku (viz. poznámka 1.1.12), má konečnou variaci, ale nemusí mít konečnou aktivitu (obojí viz. důsledek 1.1.16). Díky konečnosti variace není integrál v (3.2) stochastický, ale počítá se po trajektoriích. Navíc trajektorie Z jsou s.j. neklesající a zprava spojité.

Protože předpokládáme, že proces Z splňuje podmínku (1.24), existuje podle věty 1.2.6, tvrzení 1.2.5 a poznámky 1.2.8 stacionární řešení SDE

$$dY_t = -\gamma Y_t dt + dZ_{\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Toto řešení je tvaru (3.2) a proces Y je s.j. nezáporný — volbou degenerovaného počátečního rozdělání $Y_0 \equiv 0$ dostaneme řešení, které je s.j. nezáporné a jeho limitní rozdělání (existuje podle věty 1.2.6) je rovné stacionárnímu rozdělání, které je jediné, a musí být koncentrováno na \mathbb{R}_+ . Z tvaru řešení Y plyne jeho spojitost zprava.

Bodový proces X je korektně definovaný (viz. poznámka 1.3.13).

Pro výpočet (3.3) nám stačí znát podmíněné rozdělání $Y(T)$ při daném $X = \{\tau_j\}_{j=1}^m$. O tom žádnou představu nemáme, ale známe rozdělání Coxova b.p. X při dané intenzitě Y . Z Bayesovy věty máme (předpokládáme existenci hustot)

$$f_{Y|X}(\{y_s, s \in [0, T]\} \mid \{\tau_j\}_{j=1}^m) \propto f_{X|Y}(\{\tau_j\}_{j=1}^m \mid \{y_s, s \in [0, T]\}) f_Y(\{y_s, s \in [0, T]\}), \quad (3.4)$$

kde \propto značí rovnost až na normující konstantu. Lévy-Itôova věta (věta 4.1.2) popisuje úzkou souvislost Poissonových b.p. a Lévyho procesů. Tuto souvislost chceme využít k popisu Lévyho procesu Z a následně i procesu OU typu Y pomocí konečného b.p. — konečnost je potřeba pro použitelnost v simulaci. Podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$ při známé trajektorii procesu Y známe z příkladu 1.3.15. Střední hodnotu (3.3) pak odhadneme simulací.

Potřebujeme najít hustotu f_Y . Uvažujme na chvíli, že BDLP Z je nezáporný složený Poissonův proces s driftem $b = \beta - \int_D x \rho(dx)$. Označme $\tilde{Z} \equiv \{\tilde{Z}_t, t \geq 0\} = \{Z_{\gamma t}, t \geq 0\}$.

Dále označme okamžiky skoků procesu \tilde{Z} po řadě t_i a jejich velikostí z_i (tj. $z_i \in (0, \infty)$). Z definice složeného Poissonova procesu plyne, že proces $\{t_i\}$ je Poissonův proces na \mathbb{R}_+ . Současně na něj lze pohlížet jako na b.p. — je to Poissonův b.p. na \mathbb{R}_+ . Pokud časovou osu rozšíříme o další souřadnici (zde $(0, \infty)$), zjistíme (viz. tvrzení 1.3.16), že proces $\{t_i, z_i\}$ je Poissonův b.p. na $\mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$. Označme Ψ b.p. $\{t_i, z_i\}$ na $[0, T] \times (0, \infty)$, který odpovídá skokům procesu \tilde{Z} do času T , kde $T, \gamma > 0$ jsou pevně zvolené konstanty. Platí

$$\Psi = \{t_i, z_i\}_{i=1}^n \sim \text{Poisson}([0, T] \times (0, \infty), \lambda(t, z)),$$

kde $\lambda(t, z) = \gamma\tau p(z)$, p je hustota rozdělení skoků z_i a $\tau = \rho(\mathbb{R})$. Bodový proces Ψ tak popisuje proces $\{\tilde{Z}_t, t \in [0, T]\}$ a naopak.¹

Chceme najít hustotu b.p. Ψ vzhledem k Poissonovému bodovému procesu. Jako praktický se může zdát b.p. $\text{Poisson}([0, T] \times (0, \infty), 1)$, jenže ten není konečný. Ale vhodný není ani v případě, že hustota $p(z)$ je koncentrována na konečném intervalu. Důvod bude vidět v poznámce 3.4.5. Rozdělení Ψ je

$$\mathbb{P}(Y \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\gamma\tau T}}{n!} \int_0^T \int_0^{\infty} \cdots \int_0^T \int_0^{\infty} \mathbb{I}_{[(t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)] \in F} \gamma\tau p(z_1) \cdots \gamma\tau p(z_n) dz_1 dt_1 \cdots dz_n dt_n \right\},$$

kde $\mathcal{X} = [0, T] \times (0, \infty)$ a $F \in \mathcal{N}$. Tedy hustota bodového procesu Ψ vzhledem k rozdělení $\text{Poisson}([0, T] \times (0, \infty), p(z))$ je:

$$f_{\Psi}(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = e^{T-\gamma\tau T} (\gamma\tau)^n. \quad (3.5)$$

Poznámka 3.2.2 Realizace b.p. Ψ reprezentují trajektorie procesu $\{\tilde{Z}_t, t \in [0, T]\}$. Uvědomme si, že s.v. trajektorie procesu $\{\tilde{Z}_t, t \in [0, T]\}$ (složený Poissonův proces) mají reprezentaci tvaru $\{t_i, z_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, protože počet skoků je s.j. konečný (počet skoků má rozdělení $Po(\gamma\tau T)$).

Složený Poissonův proces $\{Z_t, t \in [0, \gamma T]\}$ s driftem b , respektive $\{\tilde{Z}_t, t \in [0, T]\} = \{Z_{\gamma t}, t \in [0, T]\}$ ztotožníme s bodovým procesem Ψ takto:

$$\Psi = \{t_i, z_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow Z_t = tb + \sum_{i=1}^n z_i \mathbb{I}_{t \geq \gamma t_i}, \quad \forall t \in [0, \gamma T],$$

respektive

$$\Psi = \{t_i, z_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow \tilde{Z}_t = t\gamma b + \sum_{i=1}^n z_i \mathbb{I}_{t \geq t_i}, \quad \forall t \in [0, T].$$

¹Takovýto popis samozřejmě funguje i pro obecný složený Poissonův proces, Ψ pak je bodový proces na $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Proces Y uvažujeme jako řešení SDE (1.28) a je tedy tvaru

$$Y_t = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s}, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

Proces $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ je zprava spojitý a má skoky velikosti z_i v časech t_i . Pokud bychom znali hodnotu Y_0 , pak by b.p. Ψ rovněž popisoval proces Y na $[0, T]$. Tedy proces Y popisuje dvojici (Y_0, Ψ) a obráceně. Proces $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ ztotožníme s dvojicí (Y_0, Ψ)

$$(Y_0, \Psi) = (y_0, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n) \longleftrightarrow \quad (3.7)$$

$$\longleftrightarrow Y_t = y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \gamma b ds + \sum_{i=1}^n z_i e^{-\gamma(t-t_i)} \mathbb{I}_{t \geq t_i}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Už jsme ukázali, že dvojice (Y_0, Ψ) popisuje proces $\{Y_t, t \in [0, T]\}$, speciálně hodnotu $Y(T)$. Pomocí metody MCMC (Markov chain Monte Carlo, viz. sekce 3.3) budeme simulovat markovský řetězec s limitním rozdělením $\mathcal{L}(Y_0, \Psi \mid X = \{\tau_j\}_{j=1}^m)$. Ze stavů řetězce pro vybrané časy (např. každý stý čas) vypočteme hodnotu $Y(T)$. Pro simulaci je podstatné, že b.p. Ψ je konečný, což platí v případě, že Z je složený Poissonův proces. Podmíněnou střední hodnotu (3.3) odhadneme (podle ergodické věty) aritmetickým průměrem hodnot takto vzniklé posloupnosti.

V práci se zabýváme též situací, kdy BDLP Z není složený Poissonův proces. Pak proces $\Psi = \{t_i, z_i\}$ není konečný b.p., protože množina skoků $\{t_i\}$ je nekonečná viz. poznámka 1.1.15. Navíc Ψ není b.p., protože množina $[0, T] \times (0, 1)$ je omezená a $\Psi([0, T] \times (0, 1)) = \infty$ s.j.

Popsat BDLP Z pomocí b.p. lze například volbou $\tilde{\Psi} = \{t_i, z_i^{-1}\}$. $\tilde{\Psi}$ je Poissonův b.p. na $[0, T] \times (0, \infty)$ a podobně jako Ψ popisuje BDLP Z . Zůstaneme však u popisu pomocí Ψ , protože to, že se nejedná o b.p., je jen formální problém. Pokud totiž na $[0, T]$ uvažujeme obvyklou metriku (tj. $m(x, y) = |x - y|$) a na $(0, \infty)$ například metriku $d(x, y) = |x^{-1} - y^{-1}|$, pak v součinnové metrice na $[0, T] \times (0, \infty)$ nejsou množiny tvaru $A \times (0, \epsilon)$ pro $\epsilon > 0$ a $\emptyset \neq A \in \mathcal{B}([0, T])$ omezené. Tedy na prostoru se součinnovou metrikou se již jedná o b.p. a přitom borelovské množiny jsou stejné jako dříve.

Skutečným problémem je, že se nejedná o konečný bodový proces. Musíme tedy přejít k aproximaci nezáporným složeným Poissonovým procesem. Jednou možností je zanedbat skoky velikosti menší než zvolené $\epsilon > 0$, čemuž odpovídá restrikce Ψ na $[0, T] \times (\epsilon, \infty)$. Obecnější možnost popisuje poznámka 1.1.21.

Předpokládejme, že máme reprezentaci Lévyho procesu Z řadou, jako v Rosiňského větě 1.1.18. Zvolíme $\tau > 0$, neboli aproximaci procesu $\{Z_t, t \in [0, 1]\}$ složeným Poissonovým procesem² tvaru

$$Z_t^\tau \equiv \sum_{i: \Gamma_i \leq \tau} H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{I}_{U_i \leq t}, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

²Všimněme si, že τ má význam intenzity složeného Poissonova procesu $\{Z_t^\tau, t \in [0, 1]\}$; označíme-li jeho charakteristickou trojici $(0, \bar{\rho}, \bar{\beta})$, pak $\tau = \bar{\rho}(\mathbb{R})$.

Podle poznámky 1.1.23 má proces $\{\tilde{Z}_t^\tau, t \in [0, T]\} = \{Z_{\gamma t}^\tau, t \in [0, T]\}$ následující reprezentaci:

$$\tilde{Z}_t^\tau \equiv \sum_{i=1}^{N(\tau\gamma T)} H(\Gamma_i^*, V_i^*) \mathbb{1}_{U_i^* \leq t}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.9)$$

kde $\{U_i^*\}_{i \geq 1}$ posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0, T]$, $\{\Gamma_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny rovnoměrně rozdělené na $[0, T]$, posloupnost $\{V_i^*\}_{i \geq 1}$ má stejné rozdělení jako posloupnost $\{V_i\}_{i \geq 1}$, $N(\tau\gamma T)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\tau\gamma T$ a kde $N(\tau\gamma T)$, $\{V_i^*\}_{i \geq 1}$, $\{U_i^*\}_{i \geq 1}$ a $\{\Gamma_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou vzájemně nezávislé. Samozřejmě procesy Z a \tilde{Z} existují na celém \mathbb{R}_+ , jen jejich reprezentace máme pouze na konečných intervalech. Proces $\{\tilde{Z}_t^\tau, t \in [0, T]\}$ je složený Poissonův proces s charakteristickou trojicí $(0, \gamma\nu, \gamma\delta)$.

Kvalita aproximace Lévyho procesu složeným Poissonovým procesem je vyšetřována v [4], odstavec 6.3, ale týká se případu, kdy aproximace je daná zanedbáním právě všech skoků menších než $\epsilon > 0$. To odpovídá situaci z věty 1.1.19. V obecném případě lze postupovat podobně, jak ukážeme na konci sekce 3.4.

Výsledkem je tedy přechod od modelu s procesy Z , Y a X , k modelu Coxova b.p. X^τ s řídicí intenzitou $\{Y_t^\tau, t \in [0, T]\}$, kde $\{Y_t^\tau, t \in [0, T]\}$ je stacionární řešení SDE (1.28) s BDLP Z^τ , tedy

$$Y_t^\tau = Y_0^\tau e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s}^\tau, \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Hodnotu (3.3) tedy nahradíme výrazem

$$\mathbb{E}[Y^\tau(T) \mid X^\tau = \{\tau_j\}_{j=1}^m]. \quad (3.11)$$

Bodový proces Ψ najdeme pro $\{Z_t^\tau, t \in [0, \gamma T]\}$ a jako výše ztotožníme (Y_0^τ, Ψ) s procesem $\{Y_t^\tau, t \in [0, T]\}$. Díky tomu můžeme místo (3.4) psát

$$f_{Y_0^\tau, \Psi \mid X}(y, \psi \mid \{\tau_j\}_{j=1}^m) \propto f_{X \mid Y_0^\tau, \Psi}(\{\tau_j\}_{j=1}^m \mid y, \psi) f_{Y_0^\tau, \Psi}(y, \psi). \quad (3.12)$$

Díky nezávislosti Y_0^τ a Z^τ je dosazením (3.5)

$$f_{Y_0^\tau, \Psi}(y, \psi) = f_\Psi(\psi) f_{Y_0^\tau}(y) = e^{T-\gamma\tau T} (\gamma\tau)^n f_{Y_0^\tau}(y), \quad (3.13)$$

kde $f_{Y_0^\tau}$ je hustota rozdělení počáteční podmínky Y_0^τ v SDE (1.28), tedy hustota limitního rozdělení. Hustota (3.13) je dána vzhledem k míře $Leb \times \Pi$, kde Π je rozdělení b.p. $Poisson([0, T] \times (0, \infty), p(z))$.

Hustotu Coxova b.p. při dané intenzitě $\{y_s^\tau, s \in [0, T]\}$ jsme spočítali v příkladu 1.3.15. Dosazením do (1.33) dostaneme hustotu Coxova b.p. při dané intenzitě:

$$f_{(X \mid Y_0^\tau, \Psi)}(\{\tau_j\}_{j=1}^m \mid y, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = \exp \left\{ T - \int_0^T y_s^\tau ds \right\} \prod_{j=1}^m y^\tau(\tau_j), \quad (3.14)$$

kde $\{y_s^\tau, s \in [0, T]\}$ je trajektorie Y^τ odpovídající reprezentaci $(Y_0^\tau, \Psi) = (y, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n)$. Hustota je vzhledem k rozdělení b.p. $Poisson([0, T], 1)$.

Na závěr ještě zhodnotíme kvalitu aproximace. Předpokládejme, že BDLP Z má neklesající trajektorie a že máme jeho reprezentaci řadou, jako v Rosiňského větě 1.1.18. Lévyho proces Z aproximujeme složeným Poissonovým procesem Z^τ tvaru (3.8). Podle poznámky 1.1.23 existuje analogická reprezentace na libovolném konečném intervalu. Připomeňme, že procesy existují na celém \mathbb{R}_+ , jen jejich reprezentace máme pouze na konečných intervalech.

Charakteristickou trojici Z jsme značili $(0, \rho, \beta)$ (matice G je nulová) a charakteristickou trojici Z^τ označme $(0, \rho^\tau, \beta^\tau)$.

Protože Z je subordinátor, tedy nezáporný Lévyho proces, je funkce H z Rosiňského věty nezáporná. Proces Z^τ tedy aproximuje proces Z zdola.

Proces $R^\tau = Z - Z^\tau$ je Lévyho proces s charakteristickou trojicí $(0, \rho - \rho^\tau, \beta - \beta^\tau)$, má neklesající trajektorie a je tvaru

$$R_t^\tau = \sum_{i:\Gamma_i > \tau}^{\infty} H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{1}_{U_i \leq t}, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že procesy R^τ a Z^τ jsou nezávislé (viz. dodatek o Lévy-Itôové větě) a že řada konverguje s.j. a stejnoměrně na $[0, 1]$ podle Rosiňského věty.

Procesy OU typu Y a Y^τ uvažujeme tvaru (1.29) po řadě pro BDLP Z a Z^τ a jejich rozdíl označme ΔY^τ , tedy

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{-\gamma t} Y_0 + \int_0^{\gamma t} e^{s-\gamma t} dZ_s, \quad t \geq 0, \\ Y^\tau(t) &= e^{-\gamma t} Y_0^\tau + \int_0^{\gamma t} e^{s-\gamma t} dZ_s^\tau, \quad t \geq 0, \\ \Delta Y^\tau(t) &= Y_t - Y_t^\tau = e^{-\gamma t} \Delta Y_0^\tau + e^{-\gamma t} \int_0^{\gamma t} e^s dR_s^\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Za předpokladu konečného 1. respektive 2. momentu Lévyho procesu R^τ odhadneme střední hodnotu respektive rozptyl ΔY_t^τ v čase $t > 0$. Předpokládáme nezávislost Y_0^τ a $\{R_s^\tau, t \geq 0\}$.

Za předpokladu $\mathbb{E}R_1^\tau < \infty$ máme podle lemmatu 2.2.3 pro každé $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\Delta Y_t^\tau = e^{-\gamma t} \mathbb{E}\Delta Y_0^\tau + e^{-\gamma t} \mathbb{E} \int_0^{\gamma t} e^s dR_s^\tau = e^{-\gamma t} \mathbb{E}\Delta Y_0^\tau + (1 - e^{-\gamma t}) \mathbb{E}R_1^\tau. \quad (3.17)$$

Pokud je $\mathbb{E}[R_1^\tau]^2 < \infty$, pak podle lemmatu 2.2.3 máme pro $t \geq 0$

$$\text{var } \Delta Y_t^\tau = e^{-2\gamma t} \text{var } \Delta Y_0^\tau + e^{-2\gamma t} \text{var} \int_0^{\gamma t} e^s dR_s^\tau = e^{-2\gamma t} \text{var } \Delta Y_0^\tau + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2} \text{var } R_1^\tau. \quad (3.18)$$

Pokud BDLP Z splňuje podmínku (1.24), pak také R^τ splňuje podmínku (1.24) a podle věty 1.2.6 existuje stacionární řešení SDE (1.28) pro Lévyho proces R^τ (řešení odpovídá rozdílu stacionárních procesů Y a Y^τ). Ve stacionárním případě má ΔY_0^τ rozdělení odpovídající limitnímu rozdělení procesu ΔY^τ .

Rozdělení ΔY_0^τ můžeme reprezentovat ve tvaru

$$\Delta Y_0^\tau = \int_{-\infty}^0 e^s dR_s^\tau,$$

po rozšíření Lévyho procesu R^τ na \mathbb{R} .

Pokud pro $p \geq 1$ je $R_1^\tau \in L_p$, pak je podle tvrzení 1.2.10 také $\Delta Y_0^\tau \in L_p$ a podle tvrzení 1.2.12 platí pro $t \rightarrow \infty$

$$\int_{-\gamma t}^0 e^s dR_s^\tau \xrightarrow{L_p} \Delta Y_0^\tau.$$

Za předpokladu, že Lévyho proces R^τ má konečný 1. moment tak pomoci lemmatu 2.2.3 dostaneme

$$\mathbb{E} \Delta Y_0^\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{-\gamma t}^0 e^s dR_s^\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-\gamma t}) \mathbb{E} R_1^\tau = \mathbb{E} R_1^\tau$$

a ze stacionarity také

$$\mathbb{E} \Delta Y_t^\tau = \mathbb{E} R_1^\tau \quad \forall t \geq 0.$$

Podobně, pokud má Lévyho proces R^τ konečný 2. moment, dostaneme pro $t \geq 0$ pomoci lemmatu 2.2.3

$$\text{var} \Delta Y_t^\tau = \text{var} \Delta Y_0^\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{var} \int_{-\gamma t}^0 e^s dR_s^\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\gamma t}}{2} \text{var} R_1^\tau = \frac{\text{var} R_1^\tau}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

Poznámka 3.2.3 *Poznamenejme, že je-li Lévyho proces $Z \in L_p$, pak také $R^\tau \in L_p$. Také v případě, že aproximace Z^τ procesu Z vznikla zanedbáním skoků menších než $\epsilon(\tau)$, pak podle věty 1.1.17 platí $R_1^\tau \in L_p$, $\forall p \geq 1$.*

Za předpokladu konečného 1. respektive 2. momentu ΔY_T^τ platí

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[|\Delta Y_T^\tau| \mid X|_{[0,T]} \right] \right) = \mathbb{E} \Delta Y_T^\tau$$

respektive

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[(\Delta Y_T^\tau)^2 \mid X|_{[0,T]} \right] \right) = \mathbb{E} [\Delta Y_T^\tau]^2.$$

3.3 MCMC algoritmy

Metody MCMC (Markov Chain Monte Carlo) jsou založeny na simulaci markovského řetězce s množinou stavů S , jehož limitní rozdělení na měřitelném prostoru (S, \mathcal{S}) je to, z kterého chceme simulovat (tzv. cílové rozdělení).

Nechť Ψ je cílové rozdělení (náhodné veličiny nebo bodového procesu) na (S, \mathcal{S}) s hustotou $f(x)$ vzhledem k σ -konečné míře μ . MCMC metody nám umožňují generovat posloupnost bodových procesů X_0, X_1, \dots s rozděleními $\mathbb{P}_{X_0}, \mathbb{P}_{X_1}, \dots$ tak, aby v jistém smyslu $\mathbb{P}_{X_i} \rightarrow \Psi$, např. ve smyslu totální variace, tj. $\|\mathbb{P}_{X_i} - \Psi\| \rightarrow 0$ pro $i \rightarrow \infty$, kde $\|\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{N}} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{N}} \mu(A)$.

Metropolis-Hastingsův algoritmus a Gibbsův výběrový plán jsou patrně nejznámější MCMC algoritmy, které nevyžadují znalost normující konstanty. Algoritmus označovaný jako „Metropolis within Gibbs“, je jejich zkrácením.

Nejprve uvedeme dva algoritmy Metropolis-Hastingsova typu.

Uvažujme případ, kdy cílové rozdělení na (S, \mathcal{S}) má nenormovanou hustotu f vzhledem k σ -konečné míře μ a předpokládejme, že $f(x) > 0 \forall x \in S$. Zvolme pro každé $x \in S$ návrhovou hustotu $q(x, \cdot)$ vzhledem k míře μ a definujme pro $x, y \in S$

$$r(x, y) = \frac{f(y)q(y, x)}{f(x)q(x, y)},$$

kde definujeme $a/0 = 1$ pro $a \geq 0$. $r(x, y)$ se nazývá Hastingsův poměr a

$$\alpha(x, y) = \min\{1, r(x, y)\}$$

je pravděpodobnost přijetí návrhu y , je-li současný stav x .

Algoritmus 3.3.1 (Metropolis-Hastingsův algoritmus) *Volme $X_0 = x_0 \in S$. Máme-li X_m , označme $X_m = x$ a generujme X_{m+1} následovně:*

1. generuj $y_m \sim q(x, \cdot)$ a R_m rovnoměrně rozdělené na $[0, 1]$,
2. polož

$$X_{m+1} = \begin{cases} y_m & \text{pro } R_m \leq r(x, y_m) \\ x & \text{pro } R_m > r(x, y_m). \end{cases}$$

Náhodné veličiny $R_m, m = 0, 1, \dots$, jsou vzájemně nezávislé a y_m je podmíněně při R_m nezávislé na R_m a všech ve náhodných veličinách použitých pro generování X_0, \dots, X_m .

Dále uvedeme algoritmus pro bodové procesy. Buď Π rozdělení Poissonova b.p. $Poisson(\mathcal{X}, \mu)$, kde $0 < \mu(\mathcal{X}) < \infty$. Dále buď Ψ cílové rozdělení (b.p.) s nenormovanou hustotou f vzhledem k Π . Zde je tedy $(S, \mathcal{S}) = (N, \mathcal{N})$ prostor bodových množin \mathcal{X} a vztahná míra je Π .

Nechť x je aktuální konfigurace. V každé iteraci se s pravděpodobností $k(x)$ pokusíme přidat bod, nebo s pravděpodobností $1 - k(x)$ se pokusíme bod odebrat. Při přidávání

bodů generujeme bod $\xi \in \mathcal{X}$ z rozdělení s hustotou $q_b(x, \cdot)$ vzhledem k míře μ . $q_b(x, \cdot)$ je tzv. návrhová hustota. Při ubírání bodů pro $x = \emptyset$ ponecháme konfiguraci nezměněnou a pro $x \neq \emptyset$ vybereme bod $\eta \in x$ z diskrétní hustoty $q_d(x, \cdot)$.

Návrh $x \rightarrow x \cup \xi$ pro přidání bodu přijmeme s pravděpodobností

$$\alpha_b(x, \xi) = \min\{1, r_b(x, \xi)\}, \quad (3.19)$$

s Hastingsovým poměrem

$$r_b(x, \xi) = \frac{f(x \cup \xi)(1 - k(x \cup \xi))q_d(x \cup \xi, \xi)}{f(x)k(x)q_b(x, \xi)}. \quad (3.20)$$

Návrh $x \rightarrow x \setminus \eta$ pro ubrání bodu přijmeme s pravděpodobností

$$\alpha_d(x, \eta) = \min\{1, r_d(x, \eta)\}, \quad (3.21)$$

s Hastingsovým poměrem

$$r_d(x, \eta) = \frac{f(x \setminus \eta)k(x \setminus \eta)q_b(x \setminus \eta, \eta)}{f(x)(1 - k(x))q_d(x, \eta)}. \quad (3.22)$$

Hastingsovy poměry jsou brány s konvencí $a/0 = 1$ pro $a \geq 0$.

Algoritmus 3.3.2 (Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku)

Volme X_0 (např. $X_0 = \emptyset$ nebo jako realizaci Poissonova b.p.) a pro $m = 0, 1, \dots$ a $X_m = x \in \mathcal{N}$ generujme X_{m+1} následovně:

1. generuj R'_m, R''_m rovnoměrně rozdělené na $[0, 1]$;
2. pokud $R'_m \leq k(x)$, generuj $\xi_m \sim q_b(x, \cdot)$ a polož

$$X_{m+1} = \begin{cases} x \cup \xi_m & \text{pro } R''_m \leq r_b(x, \xi_m) \\ x & \text{pro } R''_m > r_b(x, \xi_m); \end{cases}$$

3. pokud $R'_m > k(x)$, pak pro

- a) $x = \emptyset$ polož $X_{m+1} = x$
- b) $x \neq \emptyset$ generuj $\eta_m \sim q_d(x, \cdot)$ a polož

$$X_{m+1} = \begin{cases} x \setminus \eta_m & \text{pro } R''_m \leq r_d(x, \eta_m) \\ x & \text{pro } R''_m > r_d(x, \eta_m). \end{cases}$$

Náhodné veličiny R'_m, R''_m a ξ_m nebo η_m (pro generování X_{m+1}) jsou vzájemně nezávislé při daných náhodných veličinách použitých pro generování (X_0, \dots, X_m) .

Dalším algoritmem bude Gibbsův výběrový plán. Uvažujme rozdělení náhodného vektoru $X = (X_1, \dots, X_d)$ s hustotou f na $S = S_1 \times \dots \times S_d$, kde (S_j, \mathcal{S}_j) jsou měřitelné prostory - např. \mathbb{R}^d nebo \mathbb{N} . Gibbsův výběrový plán spočívá v obměňování jednotlivých složek vektoru na základě plně podmíněných rozdělení.

Algoritmus 3.3.3 (Gibbsův výběrový plán) *Volíme počáteční stav $X^{(0)} = x^{(0)}$. Máme-li $X^{(m)} = x^{(m)}$, generujeme $X^{(m+1)}$ takto:*

- 1) *simulujeme $X_1^{(m+1)}$ z podmíněného rozdělení $\mathcal{L}(X_1 \mid x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots, x_d^{(m)})$*
- 2) *simulujeme $X_2^{(m+1)}$ z podmíněného rozdělení $\mathcal{L}(X_2 \mid x_1^{(m+1)}, x_3^{(m)}, \dots, x_d^{(m)})$*
- \vdots
- d) *simulujeme $X_d^{(m+1)}$ z podmíněného rozdělení $\mathcal{L}(X_d \mid x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_{d-1}^{(m+1)})$.*

Algoritmus tedy vyžaduje, abychom uměli simulovat z příslušných podmíněných rozdělení. Zeslabení tohoto požadavku umožňuje algoritmus Metropolis within Gibbs. Jedná se o Gibbsův výběrový plán, přičemž z jednoho nebo více podmíněných rozdělení neumíme přímo simulovat. Místo přímé simulace tedy provedeme jeden krok Metropolis-Hastingsova algoritmu s daným podmíněným rozdělením jako cílovým. V našem případě chceme simulovat z podmíněného sdruženého rozdělení $\mathcal{L}(Y_0, \Psi \mid X = \{\tau_j\}_{j=1}^m)$.

Algoritmus 3.3.4 (Metropolis within Gibbs) *Volíme počáteční stav $(Y_0^{(0)}, \Psi^{(0)}) = (y_0^{(0)}, \psi^{(0)})$. Máme-li $(Y_0^{(k)}, \Psi^{(k)}) = (y_0^{(k)}, \psi^{(k)})$, generujeme $(Y_0^{(k+1)}, \Psi^{(k+1)})$ takto:*

- 1) *simulujeme $\Psi^{(k+1)}$ pomocí jednoho kroku Metropolis-Hastingsova algoritmu 3.3.2 pro simulaci z cílového rozdělení $\mathcal{L}(\Psi \mid y_0^{(k)}, \{\tau_j\}_{j=1}^m)$ (s počátečním stavem $\psi^{(k)}$),*
- 2) *simulujeme $Y_0^{(k+1)}$ pomocí jednoho kroku Metropolis-Hastingsova algoritmu 3.3.1 pro simulaci z cílového rozdělení $\mathcal{L}(Y_0 \mid \psi^{(k+1)}, \{\tau_j\}_{j=1}^m)$.*

Konvergence algoritmů MCMC je podrobně studována v [8], kap. 7.

3.4 Příklad pro BDLP Gamma proces

V této kapitole jsme popsali, jak lze využít bodové procesy při řešení úlohy filtrování. Konkrétně pro vyjádření hustoty intenzity při dané realizaci bodového procesu. Cílem této části je demonstrovat tento postup na konkrétním případě. Odhad parametru lze za jistých předpokladů zakomponovat přímo do algoritmu pro odhad intenzity, ale není předmětem této studie - tj. parametry modelu budou známé.

V článku [7] je popsán příklad, kdy Lévyho proces Z je složený Poissonův proces se skoky s exponenciálním rozdělením, rozdělení příslušného OU procesu je potom typu gamma. Zde uvažujeme jiný model.

Definice 3.4.1 *Gamma procesem s parametry (c, λ) nazýváme Lévyho proces Z , kde Z_1 má gamma rozdělení s parametry (c, λ) .*

To znamená, že hustota rozdělení Z_t je $p_t(x) = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{x>0}$. Charakteristická trojice Gamma procesu je (G, ρ, β) , kde w je hustota míry ρ a

$$G = 0, \quad \beta = \frac{c}{\lambda} [1 - e^{-\lambda}], \quad w(x) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x} \mathbb{I}_{x>0}, \quad (3.23)$$

a drift Gamma procesu $b = \beta - \int_D x \rho(dx) = 0$, viz. [10], Example 8.10.

Tvrzení 3.4.2 *Nechť Z_t je Gamma proces s parametry (c, λ) a charakteristickou trojicí (G, ρ, β) danou vztahy (3.23). Pak pro $\gamma > 0$ existuje stacionární proces Y OU typu generovaný (G, ρ, β) , tj. stacionární řešení SDE (1.28). Navíc, Y_t má neomezeně dělitelné rozdělení s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \delta)$, kde*

$$\delta = \beta + \int_1^\infty \frac{ce^{-\lambda y}}{y} dy \quad (3.24)$$

a míra ν má hustotu u , koncentrovanou na \mathbb{R}_+ , tvaru

$$u(x) = \frac{c}{x} \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda xy}}{y} dy. \quad (3.25)$$

Důkaz

Pro Gamma proces platí

$$\int_{\|x\|>1} \log \|x\| \rho(dx) \leq \int_{\|x\|>1} \|x\| \rho(dx) = \int_0^\infty ce^{-\lambda x} dx = c\lambda e^{-\lambda} < \infty.$$

Z věty 1.2.6 aplikované na Lévyho proces $\tilde{Z} = \{Z_{\gamma t}, t \geq 0\}$ (tj. s charakteristickou trojicí $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta)$) plyne, že proces OU typu generovaný $(\gamma G, \gamma \rho, \gamma \beta, \gamma)$ má limitní rozdělení, které je neomezeně dělitelné a má charakteristickou trojici (A, ν, δ) danou vztahy (1.25)-(1.27). Tedy

$$A = \frac{1}{2\gamma} \gamma G = 0,$$

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{I}_B(e^{-s}y) ds \gamma \rho(dy) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{I}_B(e^{-s}y) ds w(y) dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^s \mathbb{I}_B(x) w(e^s x) ds dx = \int_B \int_1^\infty w(yx) dy dx, \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{1}{\gamma} \gamma \beta + \frac{1}{\gamma} \int_{\|y\|>1} \frac{y}{\|y\|} \gamma \rho(dy) = \beta + \int_1^\infty w(y) dy = \beta + \int_1^\infty \frac{ce^{-\lambda y}}{y} dy.$$

Míra ν má tedy hustotu

$$u(x) = \int_1^\infty w(yx)dy = \frac{c}{x} \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda xy}}{y} \mathbb{I}_{xy>0} dy.$$

Ukázali jsme, že řešení SDE (1.28) mají limitní rozdělení. Tedy existuje i stacionární řešení a jeho rozdělení je rovno limitnímu rozdělení (tvrzení 1.2.5). \square

Tvrzení 3.4.3 (Reprezentace Gamma procesu) *Nechť $\{V_i\}_{i \geq 1}$, $\{U_i\}_{i \geq 1}$ a $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou nezávislé posloupnosti náhodných veličin. Nechť $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1, $\{U_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$ a $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou okamžiky skoků Poissonova procesu s intenzitou 1. Pak řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-1} e^{(-\Gamma_i/c)} V_i \mathbb{I}_{U_i \leq t} \quad (3.26)$$

konverguje skoro jistě a stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ ke Gamma procesu s parametry (c, λ) .

Tato reprezentace pochází původně od Bondessona, viz. [2], ale lze ji snadno dokázat pomocí Rosiňského věty.

Důkaz:

Srovnáním vztahu (1.16) a (3.26) vidíme, že $H(r, v) = \lambda^{-1} e^{-r/c} v$. Dosazením do (1.13) a (1.14) dostaneme pro $r > 0$ a $t > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma(r, (-\infty, 0]) &= 0, \\ \sigma(r, (0, t]) &= \mathbb{P}(\lambda^{-1} e^{-r/c} V_i \leq t) = \mathbb{P}(V_i \leq \lambda e^{r/c} t) = \int_0^{\lambda e^{r/c} t} e^{-x} dx = 1 - e^{-\lambda e^{r/c} t}, \quad (3.27) \\ \nu((t, \infty)) &= \int_0^\infty e^{-\lambda e^{r/c} t} dr = \int_1^\infty e^{-\lambda t y} \frac{c}{y} dy = \int_t^\infty e^{-\lambda x} \frac{c}{x} dx. \end{aligned}$$

Radon-Nikodýmova derivace míry ν vzhledem k Lebesgueově míře je tedy

$$\bar{\rho}(x) = e^{-\lambda x} \frac{c}{x} \mathbb{I}_{x>0}.$$

Protože pro $\lambda > 0$ je

$$\int_0^\infty x^2 \bar{\rho}(x) dx < \infty,$$

je ν Lévyho míra na \mathbb{R} .

Derivováním vztahu (3.27) podle t , dostaneme hustotu míry $\sigma(r, \cdot)$:

$$\sigma(r, dt) = \lambda e^{r/c} e^{-\lambda e^{r/c} t} \mathbb{1}_{t>0} dt. \quad (3.28)$$

Nyní bychom mohli počítat funkci $A(s)$ definovanou vztahem (1.15). Ale protože nás zajímá pouze její limita pro $s \rightarrow \infty$, počítejme přímo tuto limitu. Za použití (3.28) a Léviho věty máme

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = \int_0^\infty \int_0^1 x \lambda e^{r/c} e^{-\lambda e^{r/c} x} dx dr = \int_1^\infty \int_0^1 cx \lambda e^{-\lambda xy} dx dy = \\ &= c \int_0^1 [-e^{-\lambda xy}]_1^\infty dx = c \int_0^1 e^{-\lambda x} dx = \frac{c}{\lambda} [1 - e^{-\lambda}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tvrzení nyní plyne z první části Rosinského věty 1.1.18 a vztahu (3.23). \square

Tedy proces $\{\tilde{Z}_t^\tau, t \in [0, T]\} = \{Z_{\gamma t}^\tau, t \in [0, T]\}$ má podle poznámky 1.1.23 reprezentaci

$$\tilde{Z}_t^\tau = \sum_{i=1}^{N(\gamma\tau T)} \lambda^{-1} e^{(-\Gamma_i^*/c)} V_i^* \mathbb{1}_{U_i^* \leq t}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.30)$$

kde $N(\gamma\tau T)$, $\{V_i^*\}_{i \geq 1}$, $\{U_i^*\}_{i \geq 1}$ a $\{\Gamma_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou vzájemně nezávislé, $N(\gamma\tau T)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\gamma\tau T$, $\{\Gamma_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny rovnoměrně rozdělené na $[0, \tau]$, $\{U_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny rovnoměrně rozdělené na $[0, T]$ a $\{V_i^*\}_{i \geq 1}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem 1.

Tvrzení 3.4.4 *Chyba aproximace Gamma Lévyho procesu řadou (3.26) exponenciálně klesá s rostoucím τ , ve smyslu střední hodnoty (absolutní chyby).*

Důkaz:

Podle poznámky 1.1.23 můžeme uvažovat reprezentaci na libovolném $[0, T]$. Chyba má v čase $T > 0$ reprezentaci tvaru

$$R_T^\tau = \sum_{i: \Gamma_i > \tau} H(\Gamma_i, V_i),$$

kde $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou okamžiky skoků Poissonova procesu s intenzitou T (viz. poznámka 1.1.23) a $\{V_i\}_{i \geq 1}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1, $H(r, v) = \lambda^{-1} e^{-r/c} v$ a posloupnosti jsou vzájemně nezávislé. Konvergence je ve smyslu s.j. a stejnoměrně na $[0, T]$. Za použití Rosinského věty, Léviho věty a vlastnosti Poissonova procesu počítejme.

$$\mathbb{E} R_T^\tau = \mathbb{E} \sum_{i: \Gamma_i > \tau} H(\Gamma_i, V_i) = \mathbb{E} \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \sum_{i: \tau < \Gamma_i \leq \tau^*} H(\Gamma_i, V_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{i: \tau < \Gamma_i \leq \tau^*} H(\Gamma_i, V_i) = \\
&= \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{i: \tau < \Gamma_i \leq \tau^*} H(\Gamma_i, V_i) \mid \text{počet sčítancu v sumě} = n \right] \cdot \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. \mathbb{P}(\text{počet sčítancu v sumě} = n) \right\} = \\
&= \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E} H(\Gamma, V) e^{T\gamma(\tau^* - \tau)} \frac{[T\gamma(\tau^* - \tau)]^n}{n!},
\end{aligned}$$

kde Γ má rovnoměrné rozdělení na $[\tau, \tau^*]$, V má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1 a Γ a V jsou vzájemně nezávislé.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} H(\Gamma, V) &= \mathbb{E} \lambda^{-1} e^{-\Gamma/c} V = \lambda^{-1} \mathbb{E} e^{-\Gamma/c} \mathbb{E} V = \\
&= \lambda^{-1} \int_{\tau}^{\tau^*} \frac{e^{-\frac{x}{c}}}{\tau^* - \tau} dx = \frac{[-ce^{-\frac{x}{c}}]_{\tau}^{\tau^*}}{\lambda(\tau^* - \tau)} = \frac{c \left(e^{-\frac{\tau}{c}} - e^{-\frac{\tau^*}{c}} \right)}{\lambda(\tau^* - \tau)}.
\end{aligned}$$

Po dosazení

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} R_T^{\tau} &= \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{T\gamma(\tau^* - \tau)} \frac{[T\gamma(\tau^* - \tau)]^{n-1}}{(n-1)!} \frac{T\gamma c}{\lambda} \left(e^{-\frac{\tau}{c}} - e^{-\frac{\tau^*}{c}} \right) = \\
&= \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} \frac{T\gamma c}{\lambda} \left(e^{-\frac{\tau}{c}} - e^{-\frac{\tau^*}{c}} \right) = \frac{T\gamma c}{\lambda} e^{-\frac{\tau}{c}}.
\end{aligned}$$

Střední hodnota chyby tedy exponenciálně klesá s rostoucím τ . Protože funkce H je nezáporná, je i náhodná veličina R_T^{τ} nezáporná. Tedy $\mathbb{E}|R_T^{\tau}| = \mathbb{E}R_T^{\tau}$. \square

Počítejme rozdělení velikosti skoků. Pro $K > 0$ platí (integrand je nezáporný, tedy lze použít Fubiniho větu)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S > K) &= \mathbb{P}(\lambda^{-1} e^{(-\Gamma_1^*/c)} V_1^* > K) = \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \mathbb{I}_{[K\lambda e^{x/c} < y]} e^{-y} \frac{1}{\tau} dx dy = \\
&= \int_0^{\tau} \int_{K\lambda e^{x/c}}^{\infty} e^{-y} dy \frac{1}{\tau} dx = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-K\lambda e^{x/c}} dx.
\end{aligned}$$

Derivováním výsledného vztahu dostaneme hustotu rozdělení skoků. Pro $K > 0$ máme (majoranta pro $K > \eta$, kde $\eta > 0$, je $\frac{\lambda}{\tau} e^{x/c} e^{-\eta \lambda e^{x/c}}$)

$$\frac{d}{dK} \mathbb{P}(S \leq K) = \frac{d}{dK} \left(1 - \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-K\lambda e^{x/c}} dx \right) = \int_0^{\tau} \frac{\lambda}{\tau} e^{\frac{x}{c}} e^{-K\lambda e^{x/c}} dx =$$

$$= \int_1^{e^{\tau/c}} \frac{c\lambda}{\tau} e^{-K\lambda y} dy = \left[\frac{c\lambda e^{-K\lambda y}}{-\tau K\lambda} \right]_1^{e^{\tau/c}} = \frac{c}{\tau K} \left(e^{-K\lambda} - e^{-K\lambda e^{\tau/c}} \right).$$

Tedy hustota rozdělení skoků je

$$p(x) = \frac{c}{\tau x} \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x e^{\tau/c}} \right) \mathbb{I}_{x>0}. \quad (3.31)$$

Hustotu stacionárního rozdělení procesu OU typu Y (generovaného (G, ρ, β)) značíme f_{Y_0} . Její charakteristickou trojicí známe z tvrzení 3.4.2. Hustota je rovna inverzní Fourierově transformaci charakteristické funkce, ale neumíme ji vyjádřit explicitně. Odhadneme ji simulací jako limitní rozdělení procesu Y^τ definovaného v (3.10) a značíme $f_{Y_0^\tau}$.

Hustota dvojice (Y_0^τ, Ψ) reprezentující proces $\{Y_s^\tau, s \in [0, T]\}$ je dána vztahem (3.13).

Upravme ještě vyjádření procesu $\{Y_s^\tau, s \in [0, T]\}$ (vztah (3.10))

$$Y_t^\tau = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dZ_{\gamma s}^\tau = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} d\tilde{Z}_s^\tau,$$

tedy

$$Y_t^\tau = Y_0 e^{-\gamma t} + \sum_{i=1}^{N(\gamma\tau T)} z_i e^{-\gamma(t-t_i)} \mathbb{I}_{t_i \leq t} = Y_0 e^{-\gamma t} + \sum_{\substack{i:t_i \leq t \\ 1 \leq i \leq N(\gamma\tau T)}} z_i e^{-\gamma(t-t_i)}, \quad \forall t \in [0, T],$$

kde t_i jsou časy skoků $\tilde{Z}_t^\tau = Z_{\gamma t}^\tau$ a z_i jsou jejich velikosti.

Víme, že trajektorie procesu OU typu Y_t^τ jsou jednoznačně určeny dvojicí (Y_0^τ, Ψ) , tj. svou hodnotou y v čase 0 a procesem skoků $\{t_i, z_i\}_{i=1}^n$. Předpokládáme nezávislost těchto dvou složek. Průběh trajektorií závisí na počáteční hodnotě y , ale proces skoků nikoliv. Pro výpočet podmíněné hustoty Coxova b.p. při dané intenzitě $\{y_s^\tau, s \in [0, T]\}$ odpovídající dvojici $(y, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n)$, potřebujeme vyjádřit integrál $\int_0^T y_t^\tau dt$ (viz. (3.14); suma je s.j. konečná)

$$\begin{aligned} \int_0^T y_t^\tau dt &= \int_0^T \left(e^{-\gamma t} y + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i:t_i \leq t}} z_i e^{-\gamma(t-t_i)} \right) dt = \\ &= y \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \sum_{i=1}^n z_i \frac{1 - e^{-\gamma(T-t_i)}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Podmíněná hustota X při $(Y_0^\tau, \Psi) = (y, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n)$ je

$$f_{X|Y_0^\tau, \Psi}(\{\tau_j\}_{j=1}^m | y, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = \exp \left\{ T - \int_0^T y_t^\tau dt \right\} \prod_{j=1}^m y^\tau(\tau_j) = \quad (3.33)$$

$$= e^T \exp \left\{ -y \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} - \sum_{i=1}^n z_i \frac{1 - e^{-\gamma(T-t_i)}}{\gamma} \right\} \prod_{j=1}^m y^\tau(\tau_j), \quad (3.34)$$

kde τ_j jsou časy skoků Coxova procesu X na $[0, T]$.

Konečně součin (3.13) a (3.34) dává hledanou aproximaci nenormované hustoty (3.12), z které chceme simulovat:

$$\begin{aligned} f_{Y_0^\tau, \Psi | X}(y_0, \psi | \{\tau_j\}_{j=1}^m) &\propto f_{X | Y_0^\tau, \Psi}(\{\tau_j\}_{j=1}^m | y, \psi) f_{Y_0^\tau, \Psi}(y, \psi) \propto \\ &\propto (\gamma\tau)^n \exp \left\{ -y \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} - \sum_{i=1}^n z_i \frac{1 - e^{-\gamma(t_i - T)}}{\gamma} \right\} \prod_{j=1}^m y^\tau(\tau_j) f_{Y_0^\tau}(y). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nyní přistoupíme k vlastní simulaci. Volíme parametry

$$c = 1, \quad \lambda = 0.37, \quad \gamma = 3, \quad T = 5 \quad \text{a} \quad \tau = 100. \quad (3.36)$$

Nejprve simulujeme realizaci Coxova b.p. na intervalu $[0, T]$.

V tvrzení 3.4.4 jsme ukázali, že střední hodnota absolutní chyby aproximace Gamma procesu konverguje (v τ) exponenciální rychlostí. Srovnáním aproximací pro různé hodnoty parametru τ určíme jeho vhodnou volbu. Dodejme, že očekávaný počet skoků procesu OU typu Y^τ závisí lineárně na τ a T . Přibližně to znamená, že složitost simulace závisí přibližně lineárně na τ (i na T). Závislost kvality aproximace na τ je vidět na obrázku 3.1. Dodejme, že grafy trajektorií pro $\tau = 100$ a $\tau = 1000$ splývají na obrázku 3.1 s trajektoriemi pro $\tau = 10$.

Generujeme Y_0^τ z rozdělení s hustotou $f_{Y_0^\tau}$. K tomu využijeme faktu, že se jedná o limitní rozdělení $\{Y_t^\tau, t \geq 0\}$ s počáteční podmínkou $Y_0^\tau = 0$. Simulujeme $Y^\tau(kT)$ pro $k = 1, \dots, 1000$. Připomeňme, že ve skutečnosti simulujeme b.p. Ψ a z něj počítáme realizaci procesu Y^τ . Z obrázku 3.2 je patrné, že rozdělení $Y^\tau(1000 \cdot T)$ lze považovat za limitní. Položíme $Y_0^\tau = Y^\tau(1000 \cdot T)$.

Pro filtrování potřebujeme také znát hustotu $f_{Y_0^\tau}$. Její aproximaci simulujeme. Zde je vidět, proč potřebujeme znát parametry modelu. Kdybychom parametry odhadovali v průběhu filtrování, museli bychom tuto hustotu simulovat při každé změně parametrů, což je časově neúnosné. (Tento problém odpadá, pokud známe hustotu explicitně, jako třeba u gamma OU procesu.)

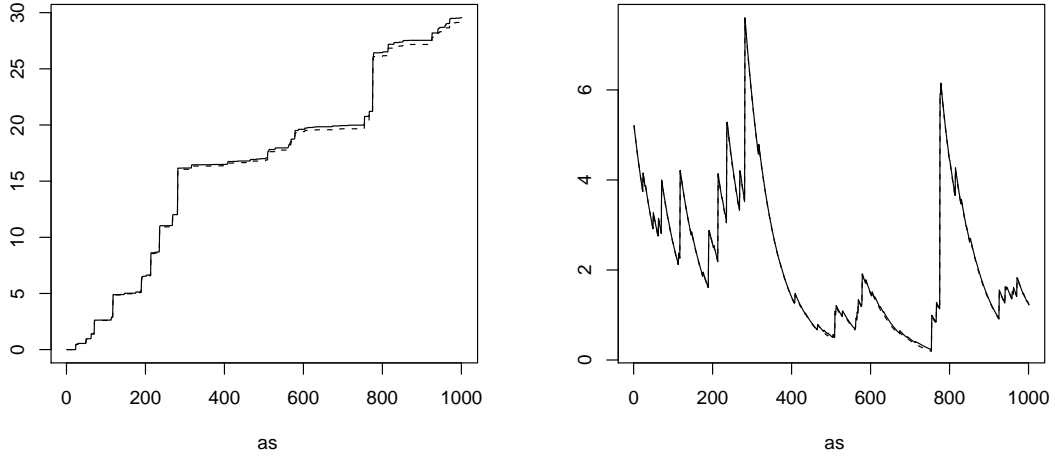
Dále simulujeme realizaci procesu \tilde{Z}^τ na $[0, T]$ a vypočteme realizaci procesu Y^τ na intervalu $[0, T]$ (obrázek 3.3).

Nakonec simulujeme (na principu ztenčení) realizaci Coxova b.p. jako Poissonův b.p. s intenzitou danou grafem Y^τ .

Vlastní filtrování probíhá pomocí algoritmu 3.3.4 (Metropolis within Gibbs). Budeme simulovat markovský řetězec $\{M_k\} = \{Y_0^{\tau, (k)}, \Psi^{(k)}\}$, kde

$$M_k = \{y^{(k)}, \psi^{(k)}\}, \quad \psi^{(k)} = \{(t_i^{(k)}, z_i^{(k)})\}_{i=1}^{n^{(k)}}$$

s cílovým rozdělením daným hustotou (3.35). Jako počáteční rozdělení volíme $M_0 = \{\mathbb{E}Y_0^\tau, \emptyset\}$.



Obrázek 3.1: Vlevo je výsledek simulace Gamma Lévyho procesu pro parametry $c = 1$, $\lambda = 0.37$, $T = 5$ a pro $\tau = 5$ (přerušovaná čára) a pro $\tau = 10$ (plná čára). Podobně na obrázku vpravo jsou odpovídající trajektorie procesu OU typu s počáteční podmínkou generovanou ze stacionárního rozdělení. Opět pro $\tau = 5$ přerušovaná čára a pro $\tau = 10$ plná čára.

Generujeme $\Psi^{(k+1)}$ provedením jednoho kroku Metropolis-Hastingsova algoritmu 3.3.2 s cílovým rozdělením s hustotou

$$f_{\Psi|X, Y_0^\tau}(\psi \mid \{\tau_j\}_{j=1}^m, y^{(k)}) \quad (3.37)$$

a počátečním rozdělením $\psi^{(k)}$. V algoritmu volíme

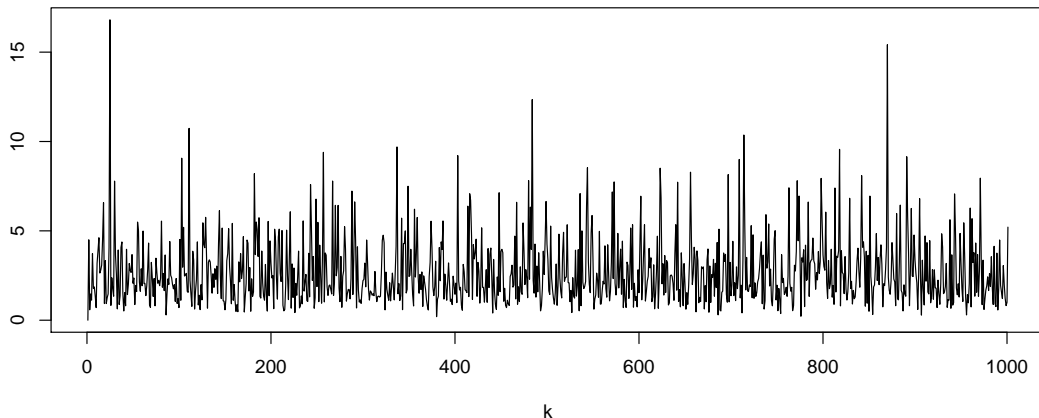
$$k(x) = 1/2,$$

tedy stejná pravděpodobnost přidávání a ubírání bodu. Volíme také návrhové hustoty pro přidávání a ubírání bodu. Připomeňme si, že hustotu $f_{\Psi|X, Y_0^\tau}$ vyjádříme vzhledem k rozdělení b.p. $Poisson([0, T] \times (0, \infty), \lambda(t, z))$, kde $\lambda(t, z) = \gamma \tau p(z)$ je funkce intenzity. Proto návrhovou hustotu q_b musíme vyjádřit vzhledem k míře s hustotou $\lambda(t, z)$. Volíme

$$q_b(\psi^{(k)}, \{t, z\}) = \frac{1}{T} \mathbb{I}_{[0, T]}(t),$$

$$q_d(\psi^{(k)}, \cdot) \text{ rovnoměrné rozdělení na množině } \{t_i^{(k)}, z_i^{(k)}\}_{i=1}^{n^{(k)}}.$$

To znamená, že návrh přidání bodu (t, z) generujeme takto: t rovnoměrně na $[0, T]$ a z z rozdělení s hustotou $p(x)$ danou vztahem (3.31) vzhledem k Lebesgueově míře na \mathbb{R}_+ .



Obrázek 3.2: Proces OU typu $Y^\tau(kT)$ pro $k = 1, \dots, 1000$ a parametry modelu (3.36).

Poznámka 3.4.5 Pokud bychom chtěli generovat velikost skoku z rozdělení s hustotou $h(x)$ vzhledem k Leb. míře, pak by návrhová hustota q_b byla tvaru

$$q_b(\psi^{(k)}, \{t, z\}) = \frac{1}{T} \mathbb{I}_{[0, T]}(t) \frac{h(z)}{p(z)}.$$

Pro její vyjádření už potřebujeme znát hustotu rozdělení skoků $p(x)$, protože návrhové hustoty určují pravděpodobnosti přijetí návrhu.

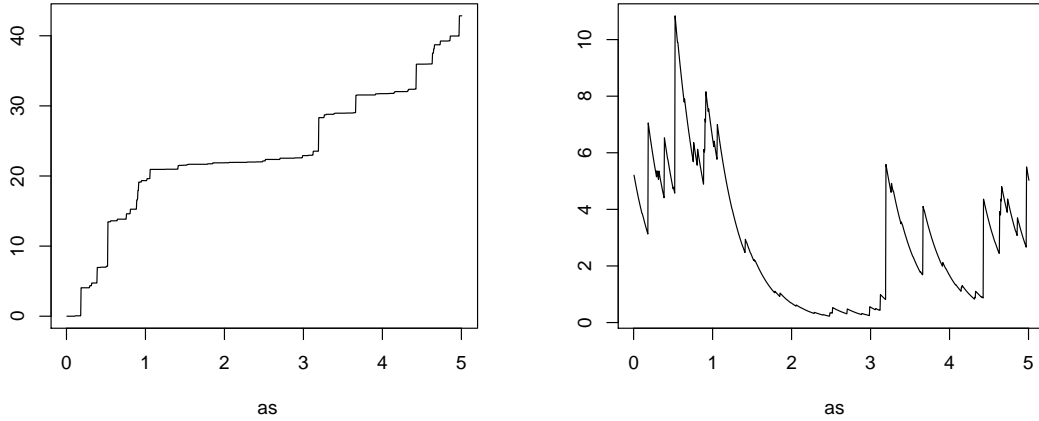
Generovat z rozdělení $p(x)$ je snadné i v případě, že tvar hustoty neznáme — toto rozdělení mají náhodné veličiny $\lambda^{-1} e^{(-\Gamma_i^*/c)} V_i^*$ ze vztahu (3.30). Volba $h(x) = p(x)$ vede k simulaci, při které nepotřebujeme znát tvar hustoty $p(x)$.

Návrh přijmeme z pravděpodobností $\min\{1, r_b\}$ při přidávání bodu nebo s pravděpodobností $\min\{1, r_d\}$ při ubírání bodu, jinak položíme $\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)}$.

Pak pomocí jednoho kroku algoritmu 3.3.1 generujeme $y^{(k+1)}$ z cílové hustoty

$$f_{Y_0^\tau | X, \Psi}(y | \{\tau_j\}_{j=1}^m, \psi^{(k+1)}) \quad (3.38)$$

a s počátečním rozdělením $y^{(k)}$. Návrhovou hustotu $q(y^{(k)}, \cdot)$ volíme jako hustotu normálního rozdělení $N(\mathbb{E}Y_0^\tau, \sigma)$, kde σ volíme. Protože předpokládáme, že náhodná intenzita pochází ze stacionárního rozdělení, volíme návrhovou hustotu blízkou tomuto rozdělení (přímo stacionární rozdělení neznáme). Tato hustota je dána vzhledem k Lebesgueově míře, protože i hustota Y^τ je dána vzhledem k Lebesgueově míře. Návrh přijmeme s pravděpodobností $\min\{1, r\}$, jinak položíme $y^{(k+1)} = y^{(k)}$. Nový stav markovského řetězce je $M_{k+1} = (y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})$.



Obrázek 3.3: Vlevo je realizace BDLP Z^τ a vpravo odpovídající realizace procesu OU typu Y^τ . Parametry modelu jsou v (3.36).

Realizace M_k popisuje celou trajektorii procesu Y^τ na $[0, T]$. Hodnotu $y_T^{\tau, (k)}$ dostaneme dosazením do vztahu (3.7):

$$y_T^{(k)} = y^{(k)} e^{-\gamma T} + \sum_{i=1}^{n^{(k)}} z_i^{(k)} e^{-\gamma(T-t_i^{(k)})}. \quad (3.39)$$

Odhadneme dobu zapálení řetězce $b \in \mathbb{N}$, pro kterou lze realizaci M_b považovat za realizaci z limitního rozdělení. Volíme $K \in \mathbb{N}$ a intenzitu v čase T odhadneme výrazem

$$\bar{y}_T = \frac{1}{A+1} \sum_{a=0}^A y_T^{(b+aK)}. \quad (3.40)$$

Odhad konverguje ke skutečné hodnotě $\mathbb{E}[Y_T^\tau \mid X^\tau = \{\tau_j\}_{j=1}^m]$ z ergodické věty, protože generovaný řetězec $\{M_k\}$ je ergodický. Ergodicita řetězce $\{M_k\}$ umožňuje použít libovolné K .

Takto můžeme odhadnout intenzitu pro každé T^* (pokud známe realizaci Coxova b.p. na daném $[0, T^*]$). Novému časovému intervalu však odpovídají jiné cílové hustoty — závisí na T . Pro každý čas T^* musíme simulovat jeden markovský řetězec.

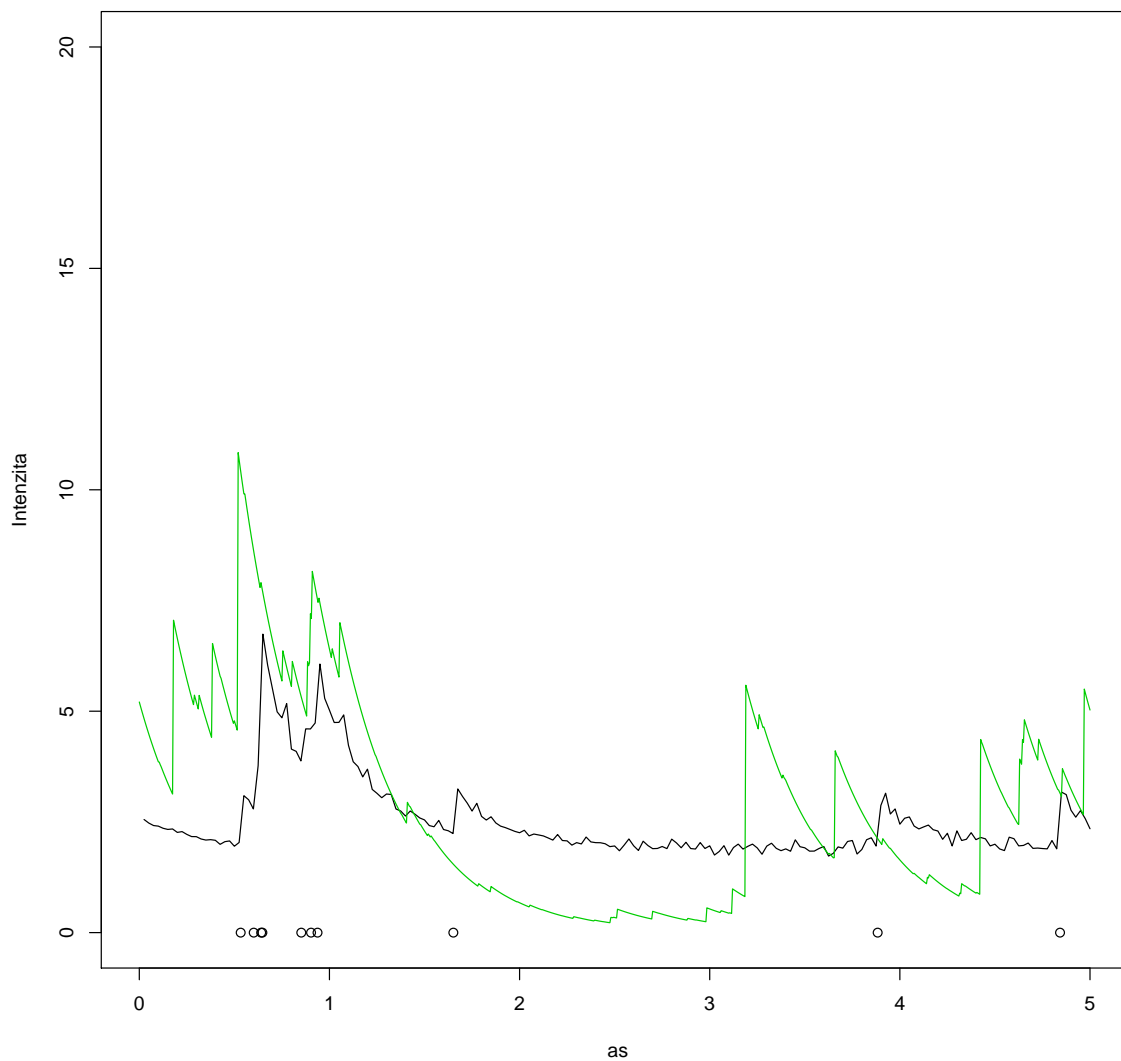
Simulovali jsme 1001500 iterací (zapálení řetězce po 2000 iteracích, pozorování brána po 500 iteracích); tedy celkem 2000 pozorování pro odhadnutí intenzity v jednotlivých časech. Parametry modelu: $c = 1$, $\lambda = 0.37$, $T = 5$ a $\gamma = 3$, dále jsme volili $\sigma = 2$ a $\tau = 100$. Interval $[0, T]$ jsme rozdělili na 200 ekvidistantních časových okamžiků a pro

každý z nich jsme odhadli intenzitu. Výsledek je na obrázku 3.4. Průběh filtrování pro čas T je dokumentován na obrázku 3.5, kde na obrázku d) je vidět poměrně vysoká korelace v generovaném řetězci (přestože $a = 500$). Větší korelace způsobuje větší rozptyl odhadu (poznamenejme, že rozptyl klesá s počtem pozorování).

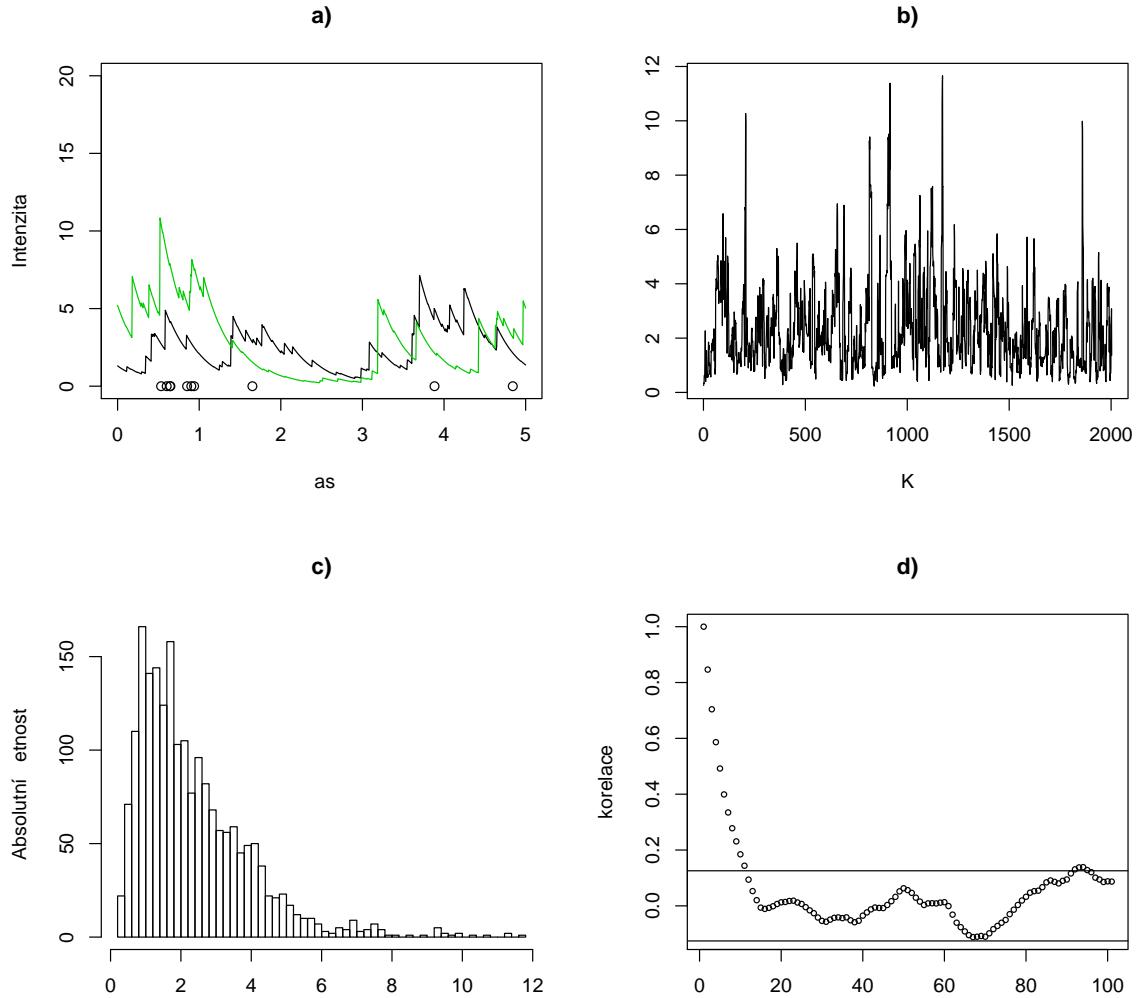
V poznámce (1.28) jsme odvodili, že stacionární rozdělení procesu OU typu nezávisí na volbě parametru γ . Filtrování však na parametru γ závisí, jak je vidět z tvaru cílového rozdělení (3.35).

Poznamenejme, že pro relativně malé hodnoty T (závisí na modelu) je informace obsažená v realizaci b.p. malá a odhad je značně ovlivněn návrhovou hustotou. Návrhovou hustotu můžeme chápat jako apriorní informaci a ta může být silnější, než informace obsažená v b.p. do času T (v extrémním případě pro návrhovou hustotu degenerovanou v bodě y , bude odhad v čase T větší nebo roven $ye^{-\gamma T}$).

Ukázali jsme na příkladu, že filtrování lze provést i pro BDLP proces s nekonečnou aktivitou, konkrétně pro Gamma proces. Aproximace gamma procesu složeným Poissonovým procesem není jediná, je tedy možné, že pro jiný způsob aproximace najdeme také explicitní tvar hustoty limitního rozdělení procesu OU typu generovaného Gamma procesem. Pak by bylo možné zahrnout odhad parametrů modelu do simulace. Pro praktické využití prozatím zůstává problém, jak odhadnout parametry modelu.



Obrázek 3.4: Simulováno 1001500 iterací (zapálení řetězce po 2000 iteracích, pozorování brána po 500 iteracích). Tedy celkem 2000 pozorování pro odhad intenzity v jednotlivých časech. Parametry modelu: $c = 1$, $\lambda = 0.37$, $T = 5$, $\gamma = 3$, $\sigma = 2$ a $\tau = 100$. Interval $[0, T]$ jsme rozdělili na 200 ekvidistantních časových okamžiků a pro každý z nich jsme odhadli intenzitu. Na obrázku je znázorněna skutečná realizace intenzity (zeleně), ze které byla simulována realizace Coxova b.p. (kolečka) a odhadnutá intenzita (černě).



Obrázek 3.5: Všechny čtyři obrázky odpovídají simulaci pro odhad intenzity v čase T . Bylo simulováno 1001500 iterací (zapálení řetězce po $b = 2000$ iteracích, pozorování brána po $a = 500$ iteracích). Tedy celkem 2000 pozorování pro odhad intenzity v čase T . Parametry modelu: $c = 1$, $\lambda = 0.37$, $T = 5$, $\gamma = 3$, $\sigma = 2$ a $\tau = 100$. Na obrázku a) je zobrazena trajektorie odpovídající poslednímu stavu markovského řetězce M (černě), skutečná intenzita Y (zeleně) a daná realizace Coxova b.p. X na $[0, T]$ (kolečka). Dále pro posloupnost $y_T^{(b+aK)}$ pro $K = 1, \dots, 2000$ je vykreslen její průběh (obrázek b)), její histogram (obrázek c)) a autokorelační funkce (obrázek d)).

Kapitola 4

Dodatky

4.1 Lévy-Itôova věta

Speciálním případem náhodné míry je Poissonova náhodná míra.

Definice 4.1.1 (Poissonova náhodná míra) *Bud' $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ σ -konečný měřitelný prostor. Rodina $\overline{\mathbb{Z}}_+$ -hodnotových náhodných veličin $\{N(B) : B \in \mathcal{B}\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Theta, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se nazývá Poissonová náhodná míra na Θ s mírou intenzity ρ , jestliže platí:*

- i) $\forall B \in \mathcal{B}$ má $N(B)$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\rho(B)$,*
- ii) $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ po dvou disjunktní jsou $N(B_1), \dots, N(B_n)$ nezávislé,*
- iii) $\forall \omega \in \Omega$ je $N(\cdot, \omega)$ míra na Θ .*

Každý Poissonův b.p. definuje Poissonovou náhodnou míru vztahem (4.1). Při řešení úlohy filtrování OUCP jsme složený Poissonův proces ztotožnili s Poissonovým b.p. Obecněji, Lévy-Itôova věta dává do souvislosti skoky Lévyho procesů s Poissonovou náhodnou mírou J_Z .

Věta 4.1.2 (Lévy-Itô) *Nechť $\{Z_t, t \geq 0\}$ je Lévyho proces v \mathbb{R}^d a ν je jeho Lévyho míra. Definujme*

$$J_Z(B) = \#\{s > 0 : \Delta Z_s \neq 0, (s, \Delta Z_s) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}((0, \infty) \times (\mathbb{R}^d)). \quad (4.1)$$

Pak platí

- ν je Radonová míra na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ a splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\| \wedge 1 \nu(dx) < \infty$.*
- J_Z je Poissonova náhodná míra na $\mathcal{B}((0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ s mírou intenzity $dt \times \nu(dx)$.*

- Existuje $\gamma \in \mathbb{R}^d$ a d -rozměrný Brownův pohyb B_t s kovarianční maticí $A \geq 0$ tak, že

$$Z_t = t\gamma + B_t + Z_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{Z}_t^\epsilon, \quad (4.2)$$

kde

$$Z_t^l = \int_{\|x\| \geq 1, s \in (0, t]} x J_Z(ds \times dx),$$

$$\tilde{Z}_t^\epsilon = \int_{\|x\| < 1, s \in (0, t]} x \{J_Z(ds \times dx) - ds \times \nu(dx)\} \equiv \int_{\|x\| < 1, s \in (0, t]} x \tilde{J}_Z(ds \times dx)$$

Výrazy v (4.2) jsou nezávislé a konvergence posledního členu je s.j. a stejnoměrně v t na každém $[0, T]$. Pro $t = 0$ je $(0, t]$ prázdná množina a integrál přes prázdnou množinu je 0.

Důkaz: [4], Proposition 3.7. □

Poznámka 4.1.3 V [4] je Lévyho míra Lévyho procesu definována takto: Nechť $\{Z_t, t \geq 0\}$ je Lévyho proces v \mathbb{R}^d . Pak míra ν na \mathbb{R}^d , definována předpisem

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in (0, 1] : \Delta Z_t \neq 0, \Delta Z_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (4.3)$$

kde $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$, je Lévyho míra procesu Z .

Srovnáním Lévy-Itôovy věty v [4] a v [10] plyne, že takto definována Lévyho míra splývá s Lévyho mírou z definice 1.1.8.

Dále z Lévy-Itôovy věty plyne nezávislost jednotlivých složek jejího rozkladu (4.2). Speciálně Brownovská část je nezávislá se skokovitou částí a vzájemně nezávislé jsou i složky popisující skoky v D a skoky v D^C , kde $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$. Dokonce se dá dokázat ještě více. Je-li (Z_t, Y_t) Lévyho proces, Y_t nechť je složený Poissonův proces a procesy Z_t a Y_t nikdy neskočí najednou, pak jsou nezávislé (viz. [4], Lemma 3.2).

Díky členu $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{Z}_t^\epsilon$ může mít Lévyho proces nekonečně mnoho skoků na omezeném časovém intervalu, ale až na konečně mnoho jsou všechny menší než libovolné $\epsilon > 0$.

Usekávací funkce \mathbb{I}_D funguje tak, že skoky menší než 1 jsou kompenzovány („centrovány“). Tím je vytvářen „drift“, který je v případě $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| \nu(dx) = \infty$ „nekonečně silný“. To je důvod proč subordinátory musí splňovat nerovnost $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\| \nu(dx) < \infty$. Lévyho proces, který tuto podmínku nesplňuje, nemůže být subordinátor (viz. věta 1.1.13).

Tvrzení 4.1.4 *Bud' $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ Lévyho proces v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) . Pak Z_1 je Lévyho proces s charakteristickou trojicí (G, ρ, β) , kde*

$$G = A_{11},$$

$$\rho(\{0\}) = 0, \quad \text{a} \quad \rho(C) = \nu(C \times \mathbb{R}^{d-1}), \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$\beta = \delta + \int_{\mathbb{R}^d} x_1 (\mathbb{I}_{\|x_1\| \leq 1} - \mathbb{I}_{\|x\| \leq 1}) \nu(dx).$$

Důkaz: Z tvaru charakteristické funkce pro Z a Z_1 plyne, že Z_1 je Lévyho proces a že má charakteristická funkce požadovaný tvar. \square

4.2 Momenty Lévyho procesu

Lemma 4.2.1 *Pro libovolné $u \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} + \theta \frac{|u|^n}{n!}$$

pro nějaké $\theta \in \mathbb{C}$ splňující $|\theta| \leq 1$.

Speciálně tedy platí:

$$e^{iu} \leq 1 + |u| \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Předpokládejme, že Z je Lévyho proces v \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) . Pak charakteristická funkce $Z(1)$ je

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \delta, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

Charakteristická funkce $Z(t)$ pro $t > 0$ je podle poznámky 1.1.10 $(\hat{\mu}(z))^t$.

Tvrzení 4.2.2 *Nechť Z je Lévyho proces s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) která splňuje*

$$\int_{\|x\| > 1} |x_k| \nu(dx) < \infty.$$

Pak pro libovolné $t > 0$

$$\mathbb{E}Z_k(t) = t\delta_k + t \int_{\|x\| > 1} x_k \nu(dx).$$

Důkaz: Volme $t > 0$ libovolně.

$$\frac{\partial \hat{\mu}^t(z)}{\partial z_k} = t (\hat{\mu}(z))^{t-1} \hat{\mu}(z) \cdot \left[-\sum_{j=1}^d A_{jk} z_j + i\delta_k + \frac{\partial}{\partial z_k} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right]$$

Integrand je zřejmě měřitelnou funkcí proměnné x pro každé z , je diferencovatelnou funkcí proměnné z pro každé x , integrál konverguje dokonce pro každé z . Pro $\|z\| < 1$ platí (pomocí (4.4))

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_k} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \right| = |e^{i\langle z, x \rangle} i x_k - i x_k \mathbb{I}_D(x)| \leq$$

$$\leq |x_k| |\langle z, x \rangle| \mathbb{I}_{\|x\| \leq 1}(x) + |x_k| \mathbb{I}_{\|x\| > 1}(x) \leq \|x\|^2 \mathbb{I}_{\|x\| \leq 1}(x) + |x_k| \mathbb{I}_{\|x\| > 1}(x).$$

Podle předpokladu a vlastnosti Lévyho míry je funkce $\|x\|^2 \mathbb{I}_{\|x\| \leq 1}(x) + |x_k| \mathbb{I}_{\|x\| > 1}(x)$ integrovatelná. Tedy předpoklady věty o záměně derivace a integrálu jsou splněny pro $\|z\| < 1$. Odtud

$$\frac{\partial \hat{\mu}^t(z)}{\partial z_k} = t \hat{\mu}^t(z) \left[-\sum_{j=1}^d A_{jk} z_j + i\delta_k + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} i x_k - i x_k \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right] \text{ pro } \|z\| < 1, \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\mu}^t(z)}{\partial z_k} \right|_{z=0} = it \left[\delta_k + \int_{\|x\| > 1} x_k \nu(dx) \right].$$

□

Tvrzení 4.2.3 *Nechť Z je Lévyho proces s charakteristickou trojicí (A, ν, δ) která splňuje*

$$\int_{\|x\| > 1} |x_j| \nu(dx) < \infty \quad \text{a} \quad \int_{\|x\| > 1} |x_k| \nu(dx) < \infty.$$

Pokud navíc $\int_{\mathbb{R}^d} |x_j x_k| \nu(dx) < \infty$, pak pro libovolné $t > 0$

$$\mathbb{E} Z_j(t) Z_k(t) = \mathbb{E} Z_j(t) \mathbb{E} Z_k(t) + t A_{jk} + t \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_k \nu(dx).$$

Důkaz: Označme hranatou závorku v (4.5) symbolem $[]_k$ a derivujme vztah (4.5) pro $\|z\| < 1$:

$$\frac{\partial^2 \hat{\mu}^t(z)}{\partial z_k \partial z_j} = t^2 \hat{\mu}^t(z) []_j []_k + t \hat{\mu}^t(z) \left[-A_{jk} + \frac{\partial}{\partial z_j} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} i x_k - i x_k \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right].$$

Integrand je zřejmě měřitelnou funkcí proměnné x pro každé z , je diferencovatelnou funkcí proměnné z pro každé x , integrál konverguje pro $z = 0$ díky předpokladu $\int_{\|x\|>1} |x_k| \nu(dx) < \infty$. Pro $\|z\| < 1$ platí $\|e^{i\langle z, x \rangle} i x_j i x_k\| \leq |x_j x_k|$, a podle předpokladu je funkce $|x_j x_k|$ integrovatelná. Tedy předpoklady věty o záměně derivace a integrálu jsou splněny pro $\|z\| < 1$. Odtud

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} i x_k - i x_k \mathbb{1}_D(x)) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (-e^{i\langle z, x \rangle} x_j x_k) \nu(dx) \text{ pro } \|z\| < 1.$$

Tedy

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\mu}^t(z)}{\partial z_k \partial z_j} \right|_{z=0} = - \left[t^2 \mathbb{E} Z_j(1) \mathbb{E} Z_k(1) + t \left(A_{jk} + \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_k \nu(dx) \right) \right].$$

□

Poznámka 4.2.4 Víme, že Lévyho míra ν splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) < \infty$. Tedy platí:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_j x_k| \nu(dx) < \infty \iff \int_{\|x\|>1} |x_j x_k| \nu(dx) < \infty.$$

Pro $k \in \{1, \dots, d\}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_k|^n \leq \|x\|^n \leq \sum_{i=1}^d (\sqrt{d})^n |x_i|^n.$$

Proto také pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_{\|x\|>1} \|x\|^n \nu(dx) < \infty \iff \int_{\|x\|>1} |x_k|^n \nu(dx) < \infty \forall k \in \{1, \dots, d\}.$$

Literatura

- [1] Barndorff-Nielsen, Ole E. and Shephard, Neil. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 63(2):167–241, 2001.
- [2] Bondesson, L. On simulation from infinitely divisible distributions. *Adv. in Appl. Probab.*, 14(4):855–869, 1982.
- [3] Brix, Anders and Diggle, Peter J. Spatiotemporal prediction for log-Gaussian Cox processes. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 63(4):823–841, 2001.
- [4] Cont R. a Tankov P. *Financial Modeling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [5] Daley, D. J. and Vere-Jones, D. *An introduction to the theory of point processes*. Springer, New York, 1988.
- [6] Halgreen, C. Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 47(1):13–17, 1979.
- [7] Lechnerová R., Helisová K., a Beneš V. Cox point processes driven by Ornstein-Uhlenbeck type processes. *KPMS preprint 53, Charles University*, 2006.
- [8] Møller J. a Waagepetersen R. P. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [9] Rosiński J. Series representation of Lévy processes from the perspective of point processes. *v Lévy Processes – Theory and Applications, Barndorff-Nielsen, O., Mikosch, T. a Resnick, S., Birkhäuser, Boston*, pages 401–415, 2001.
- [10] Sato K.-I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [11] Snyder, D. L. Filtering and detection for doubly stochastic Poisson processes. *IEEE Trans. Information Theory*, IT-18:91–102, 1972.