Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Michal Kraus

Integrální reprezentace pro nekompaktní případ

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: Matematika, Matematická analýza

Rád bych poděkoval vedoucímu této práce Prof. RNDr. Jaroslavu Lukešovi, DrSc., za navrhnutí tématu, za mnoho podnětných připomínek a za pročtení několika verzí tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 9. srpna 2007 Michal Kraus

Obsah

Název práce: Integrální reprezentace pro nekompaktní případ
Autor: Michal Kraus
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
e-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Klasická Choquetova teorie se zabývá kompaktními konvexními podmnožinami lokálně konvexních prostorů. Tato práce se věnuje některým aspektům zobecnění Choquetovy teorie na množiny, u kterých je požadavek kompaktnosti zeslaben, například předpokladem uzavřenosti a omezenosti. Jelikož Radonovy míry se zpravidla definují pro lokálně kompaktní topologické prostory, což například uzavřená jednotková koule v Banachově prostoru nekonečné dimenze nikdy není, používají se v tomto kontextu takzvané baireovské míry. Práce se zabývá především otázkou existence barycenter těchto měr, vlastnostmi barycentrického zobrazení, analogií Bauerovy charakteristiky extremálních bodů a několika dalšími pojmy známými z kompaktní teorie. Na příkladech je ukázáno, že mnohá z těchto tvrzení v nekompaktním případě neplatí, přičemž je uvedeno, v jakém tvaru je možné je vyslovit.
Klíčová slova: nekompaktní Choquetova teorie, baireovské míry, těžiště, extremální body

Title: Integral representation theorems in noncompact cases
Author: Michal Kraus
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: Classical Choquet's theory deals with compact convex subsets of locally convex spaces. This thesis discuss some aspects of generalization of Choquet's theory for a broader class of sets, for example those which are assumed to be only closed and bounded instead of compact. Because Radon measures are usually defined for locally compact topological spaces, and this is not the case of the closed unit ball in a Banach space of infinite dimension, there are used the so called Baire measures in this setting. This thesis particularly deals with the question of existence of resultants of these measures, with the properties of the resultant map, with the analogy of Bauer's characterization of extreme points and with some other concepts known from compact theory. By using some examples we show that many of these theorems doesn't hold in noncompact setting. We also mention forms of these theorems which can be proved.
Keywords: noncompact Choquet theory, Baire measures, barycenter, extreme points

1 Úvod

Klasická Choquetova teorie se zabývá kompaktními konvexními podmnožinami lokálně konvexních prostorů, především pak otázkou, zda je možné body dané množiny reprezentovat pomocí Radonových měr nesených v nějakém smyslu extremálními body této množiny. Tato práce se zabývá některými aspekty zobecnění klasické Choquetovy teorie na množiny, u kterých je požadavek kompaktnosti nahrazen nějakým slabším předpokladem, například předpokladem uzavřenosti a omezenosti či úplnosti a omezenosti.

První pokusy o rozšíření klasické kompaktní Choquetovy teorie na nekompaktní množiny byly učiněny již G. Choquetem, který pracoval s takzvanými *well capped* konvexními kuželi a kónickými měrami na nich, viz například [8] nebo [18]. Dalšími, kteří se pokoušeli o zobecnění Choquetovy teorie na nekompaktní podmnožiny lokálně konvexních prostorů, byli například S. S. Khurana (viz práce [10], [11], [12], [13] a [14]), G. A. Edgar, E. G. F. Thomas, H. von Weizsäcker nebo G. Winkler (kniha [21]). Někteří autoři se omezili na Banachovy prostory a pracovali s jejich uzavřenými, omezenými a konvexními podmnožinami s takzvanou Radon-Nikodýmovou vlastností. Důležitých výsledků na tomto poli dosáhli G. A. Edgar, který v práci [5] dokázal analogii Choquetovy věty o reprezentaci pro separabilní množiny, v práci [6] se zabýval neseparabilním případem a spolu s R. D. Bourginem v práci [3] rozšířil některá tvrzení týkající se pojmu simplexu, či P. Mankiewicz, který v práci [16] zjednodušil Edgarovy metody. Vynikajícím přehledem těchto a mnohých dalších výsledků je Bourginova kniha [2].

V této práci se budeme zabývat především otázkou existence barycenter měr, vlastnostmi barycentrického zobrazení a zobecněním Bauerovy charakteristiky extremálních bodů.

V této souvislosti ihned vyvstává několik otázek, například jakých měr by se měla tato teorie týkat. Radonovy míry, často nazývané regulární borelovské míry, které jsou díky Rieszově větě o reprezentaci přirozeným rámcem pro kompaktní Choquetovu teorii, se zpravidla definují pro lokálně kompaktní prostory. Je samozřejmě možné je definovat i pro libovolné topologické prostory, jak se také činí, ale množina těchto měr již netvoří duál k prostoru spojitých omezených funkcí na dané množině jako v kompaktní teorii, což přináší řadu potíží. Přitom například uzavřená omezená množina s neprázdným vnitřkem v Banachově prostoru nekonečné dimenze není podle známého Rieszova lemmatu nikdy lokálně kompaktní. Obvykle se pak v této nekompaktní teorii skutečně pracuje s takzvanými *tight* mírami, což jsou vlastně Radonovy míry (tj. míry regulární vzledem k aproximaci kompaktními množinami zevnitř) definované pro libovolné úplně regulární topologické prostory, při práci s nimi je ale třeba překonávat mnoho překážek.

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola jsou spíše přípravné. Ve druhé kapitole shrneme základní definice a tvrzení z topologie a z teorie lokálně konvexních prostorů potřebné v dalších kapitolách. Ve třetí kapitole zopakujeme ve stručnosti základní poznatky klasické kompaktní Choquetovy teorie.

Čtvrtá kapitola pak shrne základní výsledky o zobecnění Rieszovy věty o reprezentaci pro nekompaktní topologické prostory (tzv. Alexandrovově větě) a o měrách na těchto prostorech. Jak jsme již naznačili, tight míry netvoří duál k prostoru spojitých omezených funkcí. Abychom tento duál dostali, je třeba uvažovat konečně aditivní míry na slabší algebře množin než tvoří borelovské množiny. Tyto míry se pak nazývají baireovské míry. Jelikož baireovské míry nemají příliš pěkné vlastnosti, vyčleňují se dále různé jejich podmnožiny, například již zmiňované tight míry. V této kapitole také zavádíme značení a zmíníme základní poznatky z teorie lokálně konvexních prostorů, na které se budeme v dalším odkazovat.

Základním pojmem Choquetovy teorie je pojem těžiště míry. Opustíme-li rámec kompaktních množin, kde každá Radonova míry má těžiště, setkáme se již zde s problémy, jelikož baireovské míry na uzavřených omezených množinách těžiště mít nemusí. Touto problematikou se zabýváme v páté kapitole, kde uvádíme příklady ilustrující tento fenomén, a dále věty, zaručující za určitých předpokladů existenci těžiště a několik vět týkajících se spojitosti barycentrického zobrazení. Věty v této kapitole jsou z článků [10] a [11], důkaz Věty 5.7 je původní, stejně jako Příklad 5.6.

Šestá kapitola je věnována možnostem zobecnění známé Bauerovy charakteristiky extremálních bodů, podle které v konvexním kompaktu je bod x extremální, právě když jediná Radonova míra reprezentující x je míra Diracova koncentrovaná v tomto bodě. Tato věta vlastně říká, že množina extremálních bodů je nejmenší množinou, pro kterou je možné vyslovit větu o integrální reprezentaci, přesněji, májí-li být hledané reprezentující míry nesené nějakou pevnou množinou, musí tato množina obsahovat extremální body. Je tedy důležité vědět, zda podobné tvrzení platí i pro nekompaktní množiny. Opět se ukazuje, že obecně toto tvrzení neplatí, což je ukázáno na příkladech, nicméně uvedeme podmínky, za kterých je možné je vyslovit. Tvrzení uvedená v této kapitole jsou zpracována z článků [10] a [12], příklady v této kapitole jsou pak původní.

V poslední, sedmé kapitole, se zaměříme na několik dalších tvrzení známých z kompaktní teorie, na to, zda platí i pro nekompakty, případně v jakém tvaru. Půjde zde o jistou analogii ekvivalence Krein-Milmanovy věty s integrální reprezentací, o Milmanovu větu, obálky funkcí a Choquetovo uspořádání. Původní jsou Věty 7.3, 7.9, druhá rovnost ve Větě 7.8 a Věta 7.12, která je verzí již známé Winklerovy věty, viz text u této věty.

2 Předběžnosti

V této kapitole shrneme stručně základní definice a tvrzení užívané v dalším textu.

Zmiňme nejprve základní značení, které budeme v textu používat. Symboly $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ budou po řadě značit množinu přirozených a reálných čísel. Symbol c_0 bude označovat prostor všech reálných posloupností konvergujících k nule (se supremovou normou), c_{00} prostor všech reálných posloupností s pouze konečně mnoha nenulovými členy, l^1 pak prostor takových reálných posloupností, které jsou absolutně sčítatelné a l^∞ prostor těch, které jsou omezené. Je-li X normovaný lineární prostor s normou $\|.\|$, pak symbolem B_X budeme značit uzavřenou jednotkovou kouli v tomto prostoru, tj. množinu $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Je-li f funkce na nějaké množině X a $Y \subset X$, pak $f|_Y$ bude značit restrikci funkce f na množinu Y.

Topologické prostory a nety

Nechť T je topologický prostor. Symbolem $\mathcal{C}_b(T)$ budeme značit prostor všech spojitých omezených reálných funkcí na T opatřený supremovou normou ($\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in T\}$). Prostor $\mathcal{C}_b(T)$ s touto normou tvoří Banachův prostor. Symbol $\mathcal{C}(T)$ bude pak značit množinu všech spojitých funkcí na T. Je-li K kompakt, pak samozřejmě $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_b(K)$.

Zopakujme dále pojem netu, někdy též nazývaný zobecněná posloupnost. Množina I opatřená relací $\prec$ se nazývá *usměrněná*, je-li částečně uspořádaná (tj. relace $\prec$ je reflexivní, transitivní a antisymetrická) a pro každé dva prvky $x, y \in I$ existuje $z \in I$ tak, že $x \prec z$ a $y \prec z$. *Net (zobecněná posloupnost)* prvků topologického prostoru T je pak zobrazení $x : I \to T$, jehož definiční obor je nějaká usměrněná množina I. Hodnotu zobrazení x v bodě $\alpha \in I$ budeme značit zkráceně x_α, celý net pak budeme značit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ nebo $\{x_\alpha\}$. Množina I se nazývá *indexová množina* netu $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dle definice konverguje k prvku $x \in T$, což budeme značit $x_\alpha \to x$ nebo $\lim x_\alpha = x$, pokud pro každé okolí U bodu x existuje index $\alpha_0 \in I$ takový, že pro $\alpha_0 \prec \alpha$ platí $x_\alpha \in U$.

Analogicky pojmu podposloupnost posloupnosti se definuje pojem podnetu. Net $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ se nazývá *podnet (zobecněná podposloupnost)* netu $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, pokud existuje zobrazení $\varphi : J \to I$ tak, že:

i) $\varphi(\alpha_1) \prec \varphi(\alpha_2)$, pokud $\alpha_1 \prec \alpha_2$,

ii) pro každé $\alpha \in I$ existuje $\beta \in J$ tak, že $\alpha \prec \varphi(\beta)$,

iii) pro každé $\beta \in J$ platí $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$.

Pomocí těchto pojmů lze nyní charakterizovat mnohé vlastnosti různých objektů. Například zobrazení $f : T \to S$, kde T, S jsou topologické prostory, je spojité v bodě $x \in T$, právě když $f(x_\alpha) \to f(x)$ pro každý net $\{x_\alpha\}$ takový, že $x_\alpha \to x$. Dalším důležitým tvrzením je, že podmnožina K topologického prostoru T je kompaktní, právě když z každého netu prvků množiny K lze vybrat konvergentní podnet s limitou v množině K.

Zmiňme ještě, že topologický prostor T se nazývá *úplně regulární*, pokud pro každou uzavřenou $F \subset T$ a bod $x \in T \setminus F$ existuje $f \in \mathcal{C}_b(T)$ taková, že $f = 0$ na F a $f(x) = 1$.

Detaily o topologických prostorech lze nalézt v [15, str. 302–311] nebo v klasické učebnici [9].

Lokálně konvexní prostory a slabé topologie

Lokálně konvexní prostory, stejně jako topologické vektorové prostory, budeme vždy uvažovat nad tělesem $\mathbb{R}$ a budeme předpokládat, že jejich topologie je Hausdorffova. Známé tvrzení říká, že topologie na vektorovém prostoru je lokálně konvexní, právě když je generována nějakým systémem pseudonorem. Každá lokálně konvexní topologie (dokonce každá lineární topologie, tj. topologie, v níž daný vektorový prostor je topologický vektorový prostor) je úplně regulární (pro lokálně konvexní prostory to plyne snadno z existence pseudonorem generujících danou topologii), takže i každá podmnožina lokálně konvexního prostoru je v relativní topologii úplně regulární.

Nechť W je topologický vektorový prostor. Symbolem W^* budeme značit *duál* k prostoru W, tj. množinu všech spojitých lineárních forem na W.

Je-li E lokálně konvexní prostor, pak slabou topologií na E nazýváme topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_\varphi\}_{\varphi \in E^*}$, kde $p_\varphi(x) := |\varphi(x)|$ pro $x \in E$. Takto definovanou topologii nazýváme slabou topologií a značíme ji symbolem ω. Net $\{x_\alpha\}$ prvků z E konverguje v této topologii k prvku $x \in E$, právě když $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$ pro každé $\varphi \in E^*$. Tato konvergence se značí $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$.

Na prostoru E^* pak můžeme definovat topologii pomocí systému pseudonorem $\{p_x\}_{x \in E}$, kde $p_x(\varphi) := |\varphi(x)|$ pro $\varphi \in E^*$. Tato topologie se pak nazývá ω^*-topologie a značí se symbolem ω^*. Net $\{\varphi_\alpha\}$ prvků z E^* pak konverguje ve ω^*-topologii k prvku $\varphi \in E^*$, právě když $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ pro každé $x \in E$, což značíme $\varphi_\alpha \xrightarrow{\omega^*} \varphi$.

Uveďme jednu důležitou větu týkající se ω^*-topologií:

Věta 2.1 (Alaoglu)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak uzavřená jednotková koule $B_{X^*} := \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ je ω^*-kompaktní.*

Pro podrobnosti viz například [15].

Konvexita

Zmiňme nyní několik pojmů týkajících se konvexity. Jedním ze základních pojmů Choquetovy teorie je pojem extremálního bodu:

Definice 2.2. Nechť X je konvexní podmnožina vektorového prostoru V a $x \in X$. Pak x se nazývá *extremálním bodem* množiny X, pokud pro libovolné body $y, z \in X$, splňující $x = \frac{y+z}{2}$, již nutně platí $y = z$. Množinu všech extremálních bodů množiny X budeme značit $\mathrm{ext}X$.

Je-li M podmnožina vektorového prostoru V, pak symbolem $\mathrm{conv}(M)$ značíme *konvexní obal* množiny M, tj. průnik všech konvexních podmnožin W, které jsou nadmnožinou M. Snadno se ukáže (například indukcí), že

$$\mathrm{conv}(M) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Je-li dále M podmnožina topologického vektorového prostoru W, pak symbol $\overline{\mathrm{conv}}(M)$ značí *uzavřený konvexní obal* množiny M, tj. průnik všech uzavřených konvexních podmnožin W, které jsou nadmnožinou M. Platí $\overline{\mathrm{conv}}(M) = \overline{\mathrm{conv}(M)}$, což opět není složité ukázat.

Definice 2.3. Nechť M je konvexní podmnožina topologického vektorového prostoru W. Označme jako $A(M)$ množinu všech $h \in \mathcal{C}_b(M)$, které jsou afinní, tj.pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).$$

Omezené množiny

Pojem omezenosti v lokálně konvexních prostorech je dobře známý, přesto ho připomeneme (pro detaily viz [15, str. 127]). Upozorněme, že omezenost ve smyslu Definice 2.4 není u metrizovatelných lokálně konvexních prostorů to samé co metrická omezenost (viz opět [15, str. 127]).

Definice 2.4. Podmnožina A lokálně konvexního prostoru E se nazývá *omezená*, jestliže ke každému okolí nuly U existuje $\lambda > 0$ tak, že $A \subset \lambda U$.

Poznámka 2.5. Není těžké si rozmyslet, že množina A je omezená, právě když $p(A)$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$ pro každou pseudonormu p z kolekce pseudonorem generujících topologii E.

Úplné množiny

Úplnost v kontextu lokálně konvexních prostorů je analogií úplnosti pro metrické prostory, jelikož ale lokálně konvexní prostory nemusí být metrizovatelné, je třeba uvažovat nety místo posloupností.

Definice 2.6. Net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ prvků lokálně konvexního (topologického vektorového) prostoru E se nazývá *cauchyovský*, jestliže ke každému okolí nuly U existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $x_\alpha - x_\beta \in U$ pro každé $\alpha, \beta \succ \alpha_0$.

Poznámka 2.7. Snadno se nahlédne, že net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ prvků lokálně konvexního prostoru E je cauchyovský, právě když pro každou pseudonormu p z kolekce pseudonorem generujících topologii E a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $p(x_\alpha - x_\beta) < \varepsilon$ pro každé $\alpha, \beta \succ \alpha_0$.

Definice 2.8. Podmnožina A lokálně konvexního (topologického vektorového) prostoru E se nazývá *úplná*, pokud každý cauchyovský net v A konverguje k nějakému prvku A.

Následující vlastnosti plynou snadno z definice.

- Kompaktní podmnožiny E jsou úplné.
- Je-li X úplná podmnožina E, pak je již uzavřená.

Dále platí následující tvrzení:

Věta 2.9. *Pokud X je úplná a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $K \subset X$ je kompaktní, je $\overline{conv}(K)$ také kompaktní (a samozřejmě $\overline{conv}(K) \subset X$).*

Věta 2.10. *Ke každému lokálně konvexnímu (Hausdorffovu) prostoru existuje jeho zúplnění, tj. úplný lokálně konvexní (Hausdorffův) prostor obsahující původní jako hustý podprostor.*

Věta 2.11. *Nechť E je lokálně konvexní prostor, ρ původní topologie na prostoru E a ω slabá topologie na E. Nechť $\tilde{E}$ je zúplnění prostoru (E, ω). Pak je-li $A \subset E$ omezená podmnožina (E, ρ), je $\overline{A}^{\tilde{E}}$, její uzávěr v prostoru $\tilde{E}$, kompaktní.*

Pro podrobnosti o úplných množinách viz [15, str. 253].

3 Kompaktní teorie

V této úvodní kapitole zopakujeme základní poznatky z klasické Choquetovy teorie pro kompaktní konvexní podmnožiny lokálně konvexních prostorů. Jde vesměs o známá tvrzení, takže jejich důkazy nebudeme uvádět. Detaily lze nalézt například v knihách [8], [15] či [18].

Základním výsledkem kompaktní teorie je následující věta:

Věta 3.1 (Krein-Milman)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}K)$.*

V konečné dimenzi se dá říci mnohem více:

Věta 3.2 (Carathéodory-Minkowski)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak každý bod $x \in K$ je konvexní kombinací nejvýše $n+1$ extremálních bodů množiny K. Speciálně $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}K)$.*

Krein-Milmanova věta lze přeformulovat v řeči barycenter Radonových měr. Zopakujme v rychlosti pojem Radonovy míry a Rieszovu větu o reprezentaci.

Definice 3.3. Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor. *Radonovou (regulární borelovskou) mírou* na K rozumíme nezápornou, konečnou a spočetně aditivní (tj. přiřazující sjednocení spočetně mnoha disjunktních množin součet hodnot na těchto množinách) množinovou funkci μ na borelovských podmnožinách prostoru K takovou, že

$$\mu(A) = \sup\{\mu(T) : T \text{ kompaktní}, T \subset A\}$$

pro každou borelovskou množinu $A \subset K$. Množinu všech těchto měr označme $M^+(K)$. Rozdílům dvou měr z $M^+(K)$ se říká *znaménkové Radonovy míry* a množina všech těchto měr se značí $M(K)$. Dále množinu všech Radonových měr $\mu \in M^+(K)$ takových, že $\mu(K) = 1$ budeme značit $M^1(K)$ a říkat jim *pravděpodobnostní Radonovy míry.*

Jedním z nejdůležitějších tvrzení o Radonových měrách je následující věta o reprezentaci:

Věta 3.4 (Riesz)**.** *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak duál prostoru $\mathcal{C}(K)$ je izometricky izomorfní prostoru $M(K)$, a to ve smyslu zobrazení, které každé $\mu \in M(K)$ přiřadí funkcionál $f \mapsto \int_K f \,\mathrm{d}\mu$, $f \in \mathcal{C}(K)$.*

Definice 3.5 (Těžiště míry)**.** Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in M^1(K)$. Bod $x \in K$ se nazývá *těžištěm (barycentrem) míry* μ, jestliže platí

$$\varphi(x) = \int_K \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každé } \varphi \in E^*. \tag{1}$$

Někdy se také říká, že míra μ *reprezentuje* bod x.

Základní vlastnosti barycenter udává tato věta:

Věta 3.6. *Nechť K je kompakní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in M^1(K)$ má právě jedno těžiště. Navíc zobrazení $r : (M^1(K), \omega^*) \longrightarrow K$, přiřazující každé míře $\mu \in M^1(K)$ její těžiště $r(\mu)$, je afinní a spojité.*

Barycentrická formule (1) platí pro větší systém funkcí než jen pro prvky E^*, jmenovitě například pro množinu všech afinních spojitých funkcí na K, které značíme $A(K)$ (viz Definici 2.3). Upozorněme, že ne každá afinní spojitá funkce na K je tvaru $\varphi + r$, kde $\varphi \in E^*$ a r je konstantní, pro které barycentrická formule triviálně platí, takže má smysl se takovým problémem zabývat. Příklad afinní spojité funkce, která není tvaru $\varphi + r$, kde $\varphi \in E^*$ a r je konstantní, je uveden v [18, str. 22].

Věta 3.7. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in M^1(K)$ má těžiště $x \in K$. Pak $h(x) = \int_K h \, \mathrm{d}\mu$ pro každou $h \in A(K)$.*

Pomocí pojmu reprezentující míry lze charakterizovat pojem extremálního bodu. Navíc tato charakterizace vede k definici Choquetovy hranice v kontextu funkčních prostorů na libovolném kompaktu. Symbolem ε_x značíme Diracovu míru v bodě x, tj. $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$.

Věta 3.8 (Bauer)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $x \in K$. Pak $x \in \mathrm{ext}K$, právě když ε_x je jediná pravděpodobnostní Radonova míra na množině K reprezentující bod x.*

Další užitečnou větou je následující tvrzení:

Věta 3.9 (Milman)**.** *Nechť K je kompaktní, konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $M \subset K$ taková, že $K = \overline{\mathrm{conv}}(M)$. Pak $\mathrm{ext}K \subset \overline{M}$.*

Zkombinujeme-li Milmanovu větu s větou Krein-Milmanovou, dostáváme, že množina $\overline{\mathrm{ext}K}$ je ve skutečnosti nejmenší (ve smyslu inkluze) uzavřená podmnožina K, jejíž uzavřený konvexní obal je množina K. Speciálně tedy platí

$$\overline{\mathrm{ext}K} = \bigcap\{M : M \subset K, M \text{ uzavřená}, K = \overline{\mathrm{conv}}(M)\}.$$

Jak již bylo řečeno výše, Krein-Milmanova věta lze přeformulovat v řeči barycenter Radonových měr. Následující věta lze snadno odvodit z věty Krein-Milmanovy a naopak. Symbolem $\mathrm{supt}\mu$ značíme nosič míry μ, tj. nejmenší uzavřenou množinu (ve smyslu inkluze), jejíž doplněk má nulovou míru. Jak je známo z Teorie míry, taková množina existuje.

Věta 3.10. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $x \in K$. Pak existuje míra $\mu \in M^1(K)$ reprezentující bod x taková, že* $\mathrm{supt}\mu \subset \overline{\mathrm{ext}K}$.

Jelikož může být $K = \overline{\mathrm{ext}K}$, a tedy předchozí věta v takovém případě nic zajímavého neříká (stačí vzít Diracovu míru v bodě x), je přirozené se ptát, zda nelze najít míru nesenou přímo extremálními body. Tuto otázku pro metrizovatelné kompakty zodpověděl G. Choquet. Nejdříve je ale třeba vyřešit otázku měřitelnosti množiny extremálních bodů.

Lemma 3.11 (Hervé). *Nechť K je metrizovatelná, kompaktní a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak množina* $\mathrm{ext}K$ *je typu G_δ a je tedy borelovsky měřitelná.*

Věta 3.12 (Choquet). *Nechť K je metrizovatelná, kompaktní a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak pro každé $x \in X$ existuje míra $\mu \in M^1(K)$ reprezentující bod x taková, že $\mu(\mathrm{ext}K) = 1$.*

V důkazu Choquetovy věty se využívá vlastností obálek funkcí, zmiňme tedy stručně jejich základní vlastnosti. Obálek se dále využívá i v nemetrizovatelném případě.

Definice 3.13. Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $f \in C(K)$. Pak definujme

$$\overline{f}(x) := \inf\{g(x) : g \geq f, g \in A(K)\}.$$

Analogicky se definuje $\underline{f}$.

Lemma 3.14. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Nechť $f \in C(K)$. Pak $\overline{f}$ je omezená, konkávní a shora polospojitá funkce na K. Dále zobrazení $f \mapsto \overline{f}$ je sublineární na $C(K)$, tj. pro každé $\lambda \geq 0$ a pro každé $f, g \in C(K)$ platí $\overline{\lambda f} = \lambda\overline{f}$ a $\overline{f+g} \leq \overline{f} + \overline{g}$.*

Jedna z nejdůležitějších vlastností obálek je vyjádřena v následující větě. Z ní se již celkem snadno odvodí Choquetova věta pro metrizovatelné kompakty (s využitím toho, že na těchto kompaktech existuje striktně konvexní funkce).

Věta 3.15. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $x \in K$ a $f \in C(K)$. Pak*

$$[\underline{f}(x), \overline{f}(x)] = \left\{ \int_K f \, \mathrm{d}\mu \, : \, \mu \in M^1(K), \mu \text{ reprezentuje } x \right\}.$$

Dalším užitečným tvrzením je pak tato věta:

Věta 3.16. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak*

$$\mathrm{ext} K = \bigcap_{f \in C(K)} \{x \in K : f(x) = \overline{f}(x)\} = \bigcap_{\substack{f \in C(K) \\ f \text{ konvexní}}} \{x \in K : f(x) = \overline{f}(x)\}.$$

Choquetova věta platí pro metrizovatelné kompakty, pro nemetrizovatelné je situace komplikovanější. Množina $\mathrm{ext}K$ již nemusí být borelovská. Nicméně lze získat poněkud slabší tvrzení. Nejdříve ale definice:

Definice 3.17. Nechť $\mu, \nu \in M^1(K)$. Píšeme $\mu \prec \nu$, pokud $\mu(f) \leq \nu(f)$ pro každou $f \in C(K)$, která je konvexní. Relace $\prec$ se nazývá *Choquetovo uspořádání*.

Choquetovo uspořádání je částečným uspořádáním na množině $M^1(K)$. Navíc platí toto tvrzení:

Věta 3.18. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in M^1(K)$. Pak existuje míra $\lambda \in M^1(K)$ maximální v Choquetově uspořádání, pro kterou $\mu \prec \lambda$.*

Důsledkem předchozí věty je pak tato věta:

Věta 3.19 (Choquet-Bishop-de Leeuw)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak ke každému bodu $x \in K$ existuje míra $\mu \in M^1(K)$ maximální v Choquetově uspořádání a reprezentující bod x.*

Jak jsme již řekli, množina $\mathrm{ext}K$ nemusí být borelovská. Přirozená otázka, zda míry maximální v Choquetově uspořádání jsou alespoň neseny každou borelovskou množinou obsahující extremální body, byla také zodpovězena záporně. Nicméně platí následující věta:

Věta 3.20 (Bishop-de Leeuw). *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in M^1(K)$ maximální v Choquetově uspořádání. Pak $\mu(C) = 0$ pro každou uzavřenou G_δ množinu C disjunktní s množinou* $\mathrm{ext}K$.

Dá se dokázat, že každá míra maximální v Choquetově uspořádání je nesena množinou $\overline{\mathrm{ext}K}$, takže věta 3.19 je zlepšením Krein-Milmanovy věty. K důkazu lze využít následující charakteristiku maximálních měr:

Věta 3.21 (Mokobodzki). *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in M^1(K)$. Pak μ je maximální v Choquetově uspořádání, právě když $\mu(f) = \mu(\overline{f})$ pro každou konvexní $f \in C(K)$, což je také ekvivalentní tomu, že $\mu(f) = \mu(\overline{f})$ pro každou $f \in C(K)$.*

4 Baireovské míry

Jak již bylo řečeno v úvodu, jednou z prvních přirozených otázek při pokusu rozšířit Choquetovu teorii na nekompaktní množiny je otázka, jaké míry vlastně uvažovat. V kompaktní teorii se pracuje s Radonovými měrami, které podle Rieszovy věty odpovídají duálu k prostoru spojitých funkcí na daném kompaktu. V této kapitole shrneme základní poznatky o zobecnění Rieszovy věty pro úplně regulární topologické prostory, nazývané Alexandrovova věta (Věta 4.2). Jelikož podle této věty duál k prostoru spojitých omezených funkcí na daném úplně regulárním prostoru tvoří konečně aditivní míry, navíc na menší algebře množin než na borelovské σ-algebře, které nejsou příliš praktické, uvažují se různé jejich podmnožiny s lepšími vlastnostmi. Zmíníme podstatné vlastnosti některých těchto nejdůležitějších množin měr a zaměříme se také na otázku jejich rozšiřování na borelovskou σ-algebru.

V celé kapitole bude symbol T značit úplně regulární Hausdorffův topologický prostor.

Lineární funkcionály na $\mathcal{C}_b(T)$

Shrňme nejprve základní vlastnosti lineárních funkcionálů na prostoru $\mathcal{C}_b(T)$. Lineární funkcionál Λ na $\mathcal{C}_b(T)$ se nazývá *nezáporný*, je-li $\Lambda(f) \geq 0$, pokud $f \geq 0$. V takovém případě budeme psát $\Lambda \geq 0$. Snadno se nahlédne, že nezáporný lineární funkcionál je již omezený. Značení $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ pro omezené lineární funkcionály Λ_1 a Λ_2 znamená, že $\Lambda_1 - \Lambda_2 \geq 0$.

Každý omezený lineární funkcionál Λ na $\mathcal{C}_b(T)$ lze psát ve tvaru $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$, kde $\Lambda^+, \Lambda^- \geq 0$ a pro každou $f \in \mathcal{C}_b(T), f \geq 0$ platí

$$\Lambda^+(f) = \sup\{\Lambda(h) : h \in \mathcal{C}_b(T), 0 \leq h \leq f\},$$

$$\Lambda^-(f) = -\inf\{\Lambda(h) : h \in \mathcal{C}_b(T), 0 \leq h \leq f\}.$$

Tato reprezentace je minimální v tom smyslu, že je-li $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$, kde $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$, pak $\Lambda_1 \geq \Lambda^+$ a $\Lambda_2 \geq \Lambda^-$. Funkcionály Λ^+ a Λ^- se nazývají *pozitivní* a *negativní variace* funkcionálu Λ. *Totální variace* funkcionálu Λ je definována jako $|\Lambda| := \Lambda^+ + \Lambda^-$. Pro $f \in \mathcal{C}_b(T), f \geq 0$, platí

$$|\Lambda|(f) = \sup\{\Lambda(h) : h \in \mathcal{C}_b(T), |h| \leq f\}$$

a $\|\Lambda\| = |\Lambda|(1) = \Lambda^+(1) + \Lambda^-(1)$.

Základní vlastnosti baireovských měr

Obraťme nyní pozornost k problematice měr na prostoru T (zopakujme, že T značí úplně regulární Hausdorffův topologický prostor). Nejprve označme

$$\mathcal{Z} := \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}_b(T)\} \quad \text{a} \quad \mathcal{U} := \{T \setminus Z : Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Symboly $\mathcal{B}a$ a $\mathcal{B}a^\sigma$ nechť značí po řadě nejmenší algebru a σ-algebru obsahující systém $\mathcal{Z}$. Prvky $\mathcal{B}a^\sigma$ se nazývají *baireovské množiny*.

Snadno se ověří, že $\mathcal{B}a$ ($\mathcal{B}a^\sigma$) tvoří nejmenší (σ-) algebru takovou, že všechny $f \in \mathcal{C}_b(T)$ jsou vzhledem k této (σ-) algebře měřitelné.

Baireovskou mírou budeme rozumět nezápornou, konečnou a konečně aditivní množinovou funkci μ definovanou na $\mathcal{B}a$, která je regulární v tomto smyslu: je-li $A \in \mathcal{B}a$, pak

$$\mu(A) = \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}.$$

Snadno se nahlédne, že pak také pro každou $A \in \mathcal{B}a$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{U}, A \subset U\}.$$

Rozdíl dvou baireovských měr se nazývá *znaménková baireovská míra.* Množinu všech znaménkových baireovských měr na T značíme $\mathcal{M}(T)$, množinu všech baireovských měr (tedy těch nezáporných) pak $\mathcal{M}^+(T)$ (v minulé kapitole jsme značili množinu Radonových měr a znaménkových Radonových měr na kompaktu K symboly $M^+(K)$ a $M(K)$, zatímco baireovské míry značíme pomocí kaligrafického $\mathcal{M}$).

Bude-li z kontextu jasné, že se jedná o baireovskou míru, budeme někdy slovo *baireovská* vynechávat a používat prostě označení *míra.*

Každou znaménkovou baireovskou míru $\mu \in \mathcal{M}(T)$ lze reprezentovat ve tvaru $\mu = \mu^+ - \mu^-$, kde $\mu^+, \mu^- \in \mathcal{M}^+(T)$ a pro každou $A \in \mathcal{B}a$ platí

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}a, B \subset A\},$$

$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}a, B \subset A\}.$$

Tato reprezentace je minimální v tom smyslu, že je-li $\mu = \mu_1 - \mu_2$, kde $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+(T)$, pak $\mu_1 \geq \mu^+$ a $\mu_2 \geq \mu^-$. Míry μ^+ a μ^- se nazývají *pozitivní* a *negativní variace* μ. *Totální variaci* baireovské míry μ definujeme jako $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$; zřejmě $|\mu| \in \mathcal{M}^+(T)$.

Vnější a *vnitřní míru* indukovanou baireovskou mírou $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ definujeme pro každou $A \subset T$ jako

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{U}, A \subset U\},$$

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}.$$

Prostor $\mathcal{M}(T)$ s normou $\|\mu\| := |\mu|(T)$ tvoří Banachův prostor.

Pro $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ a $f \in \mathcal{C}_b(T)$ definujeme

$$\int_T f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_T h \,\mathrm{d}\mu \;:\; h \le f, h \text{ jednoduchá funkce vzhledem k } \mathcal{B}a\right\},$$

kde $\int_T h \,\mathrm{d}\mu$ pro h jednoduchou funkci se definuje zřejmým způsobem (jednoduchou funkcí myslíme lineární kombinaci charakteristických funkcí množin z $\mathcal{B}a$). Pro $\mu \in \mathcal{M}(T)$ a $f \in \mathcal{C}_b(T)$ pak definujeme (oba integrály jsou konečné, rozdíl má tedy smysl):

$$\int_T f \,\mathrm{d}\mu := \int_T f \,\mathrm{d}\mu^+ - \int_T f \,\mathrm{d}\mu^-.$$

Integrace vzhledem ke konečně aditivním měrám je detailně popsána v [4].

Je-li μ množinová funkce na nějaké algebře či σ-algebře podmnožin T, pak pro množinu A z tohoto systému definujeme množinovou funkci μ_A jako $\mu_A(B) := \mu(B \cap A)$ pro všechny B z daného systému množin.

Následující dvě základní věty dávají do souvislosti baireovské míry a funkcionály. Jejich důkazy nebudeme uvádět. Dodejme, že je-li $A \subset T$, pak symbolem χ_A značíme charakteristickou funkci množiny A, tj. $\chi_A = 1$ na A a $\chi_A = 0$ na $T \setminus A$.

Věta 4.1. *Nechť Λ je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_b(T)$. Pak existuje právě jedna baireovská míra $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ taková, že $\Lambda(f) = \int_T f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in \mathcal{C}_b(T)$. Naopak pro každou baireovskou míru $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ je zobrazení $f \mapsto \int_T f \,\mathrm{d}\mu,\; f \in \mathcal{C}_b(T)$ nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_b(T)$. Navíc platí*

$$\mu(Z) = \inf\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_b(T), \chi_Z \le f \le 1\} \quad \textit{pro každou } Z \in \mathcal{Z},$$

$$\mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_b(T), 0 \le f \le \chi_U\} \quad \textit{pro každou } U \in \mathcal{U}.$$

Věta 4.2 (A. D. Alexandrov)**.** *$\mathcal{M}(T)$ je duálem k $\mathcal{C}_b(T)$. Přesněji řečeno, ke každému omezenému lineárnímu funkcionálu Λ na $\mathcal{C}_b(T)$ existuje právě jedna znaménková baireovská míra $\mu \in \mathcal{M}(T)$ taková, že $\Lambda(f) = \int_T f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in \mathcal{C}_b(T)$ a platí $\|\Lambda\| = \|\mu\|$. Obráceně, je-li $\mu \in \mathcal{M}(T)$, pak $f \mapsto \int_T f \,\mathrm{d}\mu,\; f \in \mathcal{C}_b(T)$, je omezený lineární funkcionál na $\mathcal{C}_b(T)$ s normou rovnou $\|\mu\|$. Míry μ^+, μ^- a $|\mu|$ odpovídají po řadě funkcionálům Λ^+, Λ^- a $|\Lambda|$.*

S ohledem na předchozí větu nebudeme v dalším rozlišovat mezi baireovskými měrami a jim odpovídajícími prvky duálu k $\mathcal{C}_b(T)$. Navíc máme díky této větě na prostoru $\mathcal{M}(T)$ zadánu ω^*-topologii. Net $\{\mu_\alpha\}$ měr z $\mathcal{M}(T)$ pak konverguje v ω^*-topologii k míře $\mu \in \mathcal{M}(T)$, právě když $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b(T)$. Pro míry z $\mathcal{M}^+(T)$ se pak tato konvergence dá geometricky charakterizovat takto:

Věta 4.3. *Nechť $\{\mu_\alpha\}$ je net měr z $\mathcal{M}^+(T)$ a nechť $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

i) $\mu_\alpha \xrightarrow{\omega^*} \mu$,

ii) $\mu_\alpha(T) \to \mu(T)$ *a* $\limsup \mu_\alpha(Z) \leq \mu(Z)$ *pro každou* $Z \in \mathcal{Z}$.

Důležité podmnožiny baireovských měr

Definujme nyní několik důležitých podmnožin prostoru $\mathcal{M}(T)$. Značení $f_\alpha \downarrow 0$ pro net funkcí f_α znamená, že $f_\alpha \to 0$ a $f_\alpha \geq f_\beta$ pro $\alpha \prec \beta$.

Definice 4.4. i) Funkcionál $\Lambda \in \mathcal{M}(T)$ se nazývá σ-*aditivní*, pokud pro každou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}_b(T)$, $f_n \downarrow 0$, platí $\Lambda(f_n) \to 0$.

ii) Funkcionál $\Lambda \in \mathcal{M}(T)$ se nazývá τ-*aditivní*, pokud pro každý net $\{f_\alpha\}$ v $\mathcal{C}_b(T)$, $f_\alpha \downarrow 0$, platí $\Lambda(f_\alpha) \to 0$.

iii) Funkcionál $\Lambda \in \mathcal{M}(T)$ se nazývá *tight*, pokud pro každý net $\{f_\alpha\}$ v $\mathcal{C}_b(T)$, pro který $\|f_\alpha\| \leq 1$ pro každé α a $f_\alpha \to 0$ stejnoměrně na kompaktech, platí $\Lambda(f_\alpha) \to 0$.

Množinu všech σ-aditivních, τ-aditivních a tight funkcionálů označme po řadě $\mathcal{M}_\sigma(T)$, $\mathcal{M}_\tau(T)$ a $\mathcal{M}_t(T)$. Množinu všech takových nezáporných funkcionálů pak označme po řadě $\mathcal{M}_\sigma^+(T)$, $\mathcal{M}_\tau^+(T)$ a $\mathcal{M}_t^+(T)$.

Věta 4.5. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

i) $\Lambda \in \mathcal{M}_\sigma(T)$,

ii) $\Lambda^+ \in \mathcal{M}_\sigma^+(T)$ *a* $\Lambda^- \in \mathcal{M}_\sigma^+(T)$,

iii) $|\Lambda| \in \mathcal{M}_\sigma^+(T)$.

Totéž platí pro prvky $\mathcal{M}_\tau(T)$ *a* $\mathcal{M}_t(T)$.

Poznámka 4.6. Platí:

$$\mathcal{M}_t(T) \subset \mathcal{M}_\tau(T) \subset \mathcal{M}_\sigma(T) \subset \mathcal{M}(T).$$

Druhá a třetí inkluze jsou zřejmé, první plyne z Diniho věty, podle které nerostoucí net $\{f_\alpha\}$ funkcí z $\mathcal{C}_b(T)$ (tj. $f_\alpha \geq f_\beta$ pro $\alpha \prec \beta$) konverguje k nule stejnoměrně, právě když konverguje k nule stejnoměrně na kompaktech. Volíme-li pak $\Lambda \in \mathcal{M}_t(T)$ a net $\{f_\alpha\}$, $f_\alpha \downarrow 0$, chceme ukázat, že $\Lambda(f_\alpha) \to 0$. S přihlédnutím k Větě 4.5 můžeme předpokládat, že Λ je nezáporný. Pak $\Lambda(f_\alpha)$ je nerostoucí net v $\mathbb{R}$ omezený zdola nulou, je tedy konvergentní. Je-li I indexová množina $\{f_\alpha\}$ a $\alpha_0 \in I$ libovolný, označíme

$$\bar{I} := \{\beta \in I : \beta \succ \alpha_0\}.$$

Net $\{f_\beta\}_{\beta \in \bar{I}}$ je pak podnet $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, je tedy $f_\beta \downarrow 0$ a z Diniho věty $f_\beta \to 0$ stejnoměrně na kompaktech. Navíc $\|f_\beta\| \leq \|f_{\alpha_0}\|$ pro každé $\beta \in \bar{I}$ a z definice tight funkcionálu plyne $\Lambda(f_\beta) \to 0$. Je tedy $\Lambda(f_\alpha) \to 0$ a $\Lambda \in \mathcal{M}_\tau(T)$.

Jelikož ztotožňujeme baireovské míry a příslušné funkcionály, dává nám předchozí definice i definici pro míry. Míra z $\mathcal{M}(T)$ je σ-aditivní, τ-aditivní resp. tight, pokud příslušný funkcionál je σ-aditivní, τ-aditivní či tight. Následující věta udává geometrickou charakterizaci těchto vlastností měr. Značení $Z_\alpha \downarrow 0$ pro net množin $\{Z_\alpha\}$ znamená, že $Z_\alpha \supset Z_\beta$ pro $\alpha \prec \beta$ a $\bigcap Z_\alpha = \emptyset$.

Věta 4.7. *Nechť $\mu \in \mathcal{M}(T)$. Pak platí:*

i) $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(T)$, právě když pro libovolnou posloupnost $\{Z_n\}$ množin ze $\mathcal{Z}$ takovou, že $Z_n \downarrow 0$, platí $\mu(Z_n) \to 0$,

ii) $\mu \in \mathcal{M}_\tau(T)$, právě když pro libovolný net $\{Z_\alpha\}$ množin ze $\mathcal{Z}$ takový, že $Z_\alpha \downarrow 0$, je $\mu(Z_\alpha) \to 0$,

iii) $\mu \in \mathcal{M}_t(T)$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní podmnožina K prostoru T tak, že $|\mu|_*(T \setminus K) < \varepsilon$.

Poznámka 4.8. Podmínka v *i)* je ekvivalentní tomu, že $\mu(A_n) \to 0$ pro libovolnou posloupnost $\{A_n\}$ množin z $\mathcal{B}a$, $A_n \downarrow 0$. To je ekvivalentní tomu, že míra μ je spočetně aditivní, tj. že přiřazuje sjednocení spočetně mnoha disjunktních množin z $\mathcal{B}a$ (leží-li toto sjednocení v $\mathcal{B}a$) součet hodnot na těchto množinách. Prvky $\mathcal{M}_\sigma(T)$ jsou tedy právě ty prvky $\mathcal{M}(T)$, které jsou spočetně aditivní.

Nakonec ještě zaveďme pravděpodobnostní míry:

Definice 4.9. Definujme následující množiny měr:

$$\mathcal{M}^1(T) := \{\mu \in \mathcal{M}^+(T) : \|\mu\| = 1\},$$
$$\mathcal{M}^1_\sigma(T) := \mathcal{M}^1(T) \cap \mathcal{M}_\sigma(T),$$
$$\mathcal{M}^1_\tau(T) := \mathcal{M}^1(T) \cap \mathcal{M}_\tau(T),$$
$$\mathcal{M}^1_t(T) := \mathcal{M}^1(T) \cap \mathcal{M}_t(T).$$

Poznámka 4.10. Snadno si rozmyslíme, že množina $\mathcal{M}^1(T)$ je ω^*-uzavřená podmnožina uzavřené jednotkové koule v prostoru $\mathcal{M}(T)$, která je podle Alaogluovy věty 2.1 ω^*-kompaktní. Takže i množina $\mathcal{M}^1(T)$ je ω^*-kompaktní.

Borelovské míry

Zmiňme se nyní o borelovských měrách na prostoru T. Jak uvidíme v následující sekci, některé baireovské míry je možné rozšířit na míry borelovské.

Symboly $\mathcal{B}o$ a $\mathcal{B}o^\sigma$ nechť značí po řadě nejmenší algebru a σ-algebru obsahující systém všech otevřených podmnožin T. Prvkům $\mathcal{B}o^\sigma$ se říká *borelovské množiny.*

Je-li prostor T metrizovatelný, pak systém množin $\mathcal{Z}$ (připomeňme, že $\mathcal{Z} := \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}_b(T)\}$) splývá se systémem uzavřených množin a platí tedy $\mathcal{B}a = \mathcal{B}o$ a $\mathcal{B}a^\sigma = \mathcal{B}o^\sigma$.

Uzavřeně regulární borelovskou mírou rozumíme takovou nezápornou, konečnou a spočetně aditivní (tj. sjednocení spočetně mnoha disjunktních množin přiřadí součet hodnot na těchto množinách) množinovou funkci μ na $\mathcal{B}o^\sigma$, která pro každou $A \in \mathcal{B}o^\sigma$ splňuje

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ uzavřená}, F \subset A\}.$$

Rozdíl dvou takových měr je pak *znaménková uzavřeně regulární borelovská míra.*

Kompaktně regulární borelovskou mírou (Radonovou mírou) (budeme-ji, stejně jako v kompaktním případě, nazývat Radonovou mírou; věříme, že nedojde k nedorozumění) rozumíme nezápornou, konečnou a spočetně aditivní množinovou funkci μ na $\mathcal{B}o^\sigma$ takovou, že pro každou $A \in \mathcal{B}o^\sigma$ je

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompaktní}, K \subset A\}.$$

Rozdíl dvou Radonových měr je pak *znaménková Radonova míra.*

Rozšiřování měr

Některé baireovské míry lze rozšířit na větší σ-algebry, přičemž tato rozšíření mají pak lepší vlastnosti než původní míry. Shrňme některé důležité výsledky o rozšiřování měr.

- Libovolnou míru z $\mathcal{M}_\sigma(T)$ je možné jednoznačně rozšířit na spočetně aditivní množinovou funkci na $\mathcal{B}a^\sigma$. Každá spočetně aditivní funkce na $\mathcal{B}a^\sigma$ je již nutně regulární ve smyslu vnitřních aproximací množinami ze $\mathcal{Z}$, její restrikce na $\mathcal{B}a$ je tedy prvkem $\mathcal{M}_\sigma(T)$.

- Je-li $\mu \in \mathcal{M}_\tau^+(T)$, pak lze μ jednoznačně rozšířit na uzavřeně regulární borelovskou míru na T. Každou $\mu \in \mathcal{M}_\tau(T)$ lze pak jednoznačně rozšířit na znaménkovou uzavřeně regulární borelovskou míru na T.

- Je-li $\mu \in \mathcal{M}_t^+(T)$, pak rozšíření z předchozího bodu splňuje pro každou $A \in \mathcal{B}o^\sigma$ rovnost

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompaktní}, K \subset A\}$$

  a μ tedy lze jednoznačně rozšířit na Radonovu míru na T. Každou $\mu \in \mathcal{M}_t(T)$ pak lze jednoznačně rozšířit na znaménkovou Radonovu míru.

- Je-li $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(T)$ a $\bar{\mu}$ jeho rozšíření na $\mathcal{B}a^\sigma$, pak $\int_T f \, \mathrm{d}\mu = \int_T f \, \mathrm{d}\bar{\mu}$ pro každé $f \in \mathcal{C}_b(T)$. Je-li dále $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(T)$ baireovská míra na $\mathcal{B}a$ a existuje-li její rozšíření na spočetně aditivní borelovskou míru $\bar{\mu}$ na $\mathcal{B}o^\sigma$, pak také $\int_T f \, \mathrm{d}\mu = \int_T f \, \mathrm{d}\bar{\mu}$ pro každé $f \in \mathcal{C}_b(T)$.

Tato rozšíření budeme pro jednoduchost zápisu vždy značit stejným symbolem jako původní míru.

Poznámka 4.11. Speciálním případem Věty 4.2 je známá Rieszova věta o reprezentaci, podle které duál k $C(K)$, kde K je kompaktní Hausdorffův prostor, je množina všech znaménkových Radonových měr na K; rovnost těchto prostorů je samozřejmě brána ve smyslu Věty 4.2. Předně každý kompaktní Hausdorffův prostor je již úplně regulární. Ke každému $\Lambda \in C(K)^*$ (samozřejmě $C(K) = \mathcal{C}_b(K)$) pak existuje podle Věty 4.2 baireovská míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ tak, že $\Lambda(g) = \int_K g \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $g \in \mathcal{C}(K)$. Jelikož K je kompaktní, je každá baireovská míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ také prvkem $\mathcal{M}_t(K)$. A k $\mu \in \mathcal{M}_t(K)$ existuje rozšíření $\bar{\mu}$ na znaménkovou Radonovu míru (na borelovské σ-algebře). Přitom platí $\int_K g \, \mathrm{d}\mu = \int_K g \, \mathrm{d}\bar{\mu}$ pro každé $g \in \mathcal{C}(K)$. Jednoznačnost a zachování normy jsou již snadné. Naopak samozřejmě pro každou Radonovu míru μ na K je zobrazení $\int_K g \, \mathrm{d}\mu$, $g \in \mathcal{C}(K)$, prvkem $C(K)^*$.

Uvažujeme-li tight míry již rozšířené na borelovské množiny, můžeme, stejně jako pro Radonovy míry na kompaktu, definovat nosič míry. Platí totiž následující tvrzení:

Věta 4.12. *Nechť T je úplně regulární topologický prostor a $\mu \in \mathcal{M}_t^+(T)$ (rozšířená na $\mathcal{B}o^\sigma$). Označme*

$$G := \bigcup \{H : H \subset T, H \text{ otevřená}, \mu(H) = 0\}$$

(G je samozřejmě otevřená množina). Pak $\mu(G) = 0$.

Důkaz. Vzhledem k regularitě μ stačí pouze dokázat, že $\mu(K) = 0$ pro každou $K \subset G$ kompaktní. Nechť tedy $K \subset G$ je kompaktní. Pak z kompaktnosti K plyne, že existují otevřené množiny $H_1, \dots, H_n \subset T$ takové, že

$$\mu(H_1) = \ldots = \mu(H_n) = 0 \quad \text{a} \quad \bigcup_{i=1}^{n} H_i \supset K.$$

Ihned tedy dostáváme, že $\mu(K) = 0$. □

Definice 4.13. Nechť T je úplně regulární topologický prostor a $\mu \in \mathcal{M}_t^+(T)$ (již rozšířená na $\mathcal{B}o^\sigma$). Označme

$$\operatorname{supt} \mu := \bigcap \{F : F \subset T, F \text{ uzavřená}, \mu(F) = \mu(T)\}.$$

Množina $\operatorname{supt} \mu$ se nazývá *nosičem* tight míry μ. Z předchozí věty víme, že $\mu(\operatorname{supt} \mu) = \mu(T)$ a samozřejmě $\operatorname{supt} \mu$ je uzavřená množina, je to tedy nejmenší uzavřená množina, které míra μ přiřazuje hodnotu $\mu(T)$.

Detaily o baireovských mírách a dalších souvislostech je možné nalézt v [1], [19] nebo [20].

5 Těžiště měr

Těžiště míry je základním pojmem Choquetovy teorie. Jak je známo z kompaktní teorie, Radonovy míry na kompaktních konvexních množinách mají vždy těžiště. Opustíme-li kontext kompaktních množin, situace se poněkud zkomplikuje. V této kapitole se budeme zabývat jednak existencí těžiště, jednak spojitostí barycentrického zobrazení.

Základní vlastnosti barycenter

Definice 5.1 (Těžiště míry)**.** Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Bod $x \in X$ se nazývá *těžištěm (barycentrem) míry* μ, jestliže platí

$$\varphi(x) = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každé } \varphi \in E^*. \tag{2}$$

Někdy se také říká, že míra μ *reprezentuje* bod x.

Poznámka 5.2. Shrňme několik jednoduchých pozorování týkajících se předchozí definice.

- Každé $\varphi \in E^*$ je spojité, je tedy baireovsky (a tedy i borelovsky) měřitelné. Každé $\varphi \in E^*$ navíc zobrazuje omezené množiny na omezené, takže $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$ je definován a je konečný pro každé $\varphi \in E^*$.
- Jestliže pro bod $x \in E$ platí (2), pak ze separační verze Hahn-Banachovy věty pro lokálně konvexní prostory plyne, že $x \in X$. Takový bod je tedy již těžištěm míry μ.
- Jelikož prvky E^* oddělují body prostoru E, je ihned vidět, že každá míra má nejvýše jedno těžiště.

Barycentrickou formuli (2) lze, stejně jako v kompaktním případě, rozšířit na afinní funkce z $\mathcal{C}_b(X)$ (pro definici afinních spojitých funkcí viz Definici 2.3), jak uvidíme ve Větě 5.4, která byla dokázána S. S. Khuranou (viz [11]). Upozorněme, že ani v kompaktním případě není každá afinní funkce z $\mathcal{C}_b(X)$ tvaru $\varphi + a$, kde $\varphi \in E^*$ a a je konstantní, takže má smysl se takovým problémem zabývat; viz odstavec před Větou 3.7. Symbolem $E^* + \mathbb{R}$ značíme prostor $\{\varphi + r : \varphi \in E^*, r \text{ konstantní funkce s hodnotou } r\}$ a $(E^* + \mathbb{R})|_X$ jsou pak restrikce prvků $E^* + \mathbb{R}$ na množinu X.

Lemma 5.3. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $h \in A(X)$. Pak*

$$h = \inf\{g : g \in (E^* + \mathbb{R})|_X, g \geq h\}.$$

Důkaz. Nechť tedy $h \in A(X)$. Dokažme, že pro každé $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ existuje $g \in E^* + \mathbb{R}$ tak, že $g \geq h$ na X a $g(x) < h(x) + \varepsilon$. Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou pevné. Zřejmě $E \times \mathbb{R}$ je lokálně konvexní prostor. Označme

$$M := \{(y,t) \in E \times \mathbb{R} : y \in X, t \leq h(y)\}.$$

M je uzavřená konvexní podmnožina $E \times \mathbb{R}$. Bod $(x, h(x)+\varepsilon) \in E \times \mathbb{R}$ neleží v M, podle separační verze Hahn-Banachovy věty tedy existuje $L \in (E \times \mathbb{R})^*$ a $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$L((x, h(x)+\varepsilon)) > a > \sup\{L(z) : z \in M\}.$$

Můžeme psát $L((y,t)) = L((y,0)) + tL((0,1)) = f(y) + tL((0,1))$, kde jsme označili $f(y) := L((y,0))$. Snadno se nahlédne, že $f \in E^*$. Platí

$$L((x, h(x)+\varepsilon)) > L((x, h(x))),$$

tedy

$$f(x) + (h(x)+\varepsilon)L((0,1)) > f(x) + h(x)L((0,1)),$$

odkud $L((0,1)) > 0$.

Nechť $g(y) := \frac{a - f(y)}{L((0,1))}$ pro $y \in E$. Platí

$$L((x, h(x)+\varepsilon)) > a,$$

neboli

$$f(x) + (h(x)+\varepsilon)L((0,1)) > a,$$

a tedy

$$h(x) + \varepsilon > \frac{a - f(x)}{L((0,1))} = g(x).$$

Dále pro každé $y \in X$ platí

$$a > L((y, h(y))),$$

$$a > f(y) + h(y)L((0,1)),$$

a tudíž

$$g(y) = \frac{a - f(y)}{L((0,1))} > h(y) \quad \text{pro každé } y \in X.$$

Dostáváme tedy $g \in E^* + \mathbb{R}$ takové, že $g \geq h$ na X a $g(x) < h(x) + \varepsilon$. □

Věta 5.4. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ s těžištěm $x \in X$. Pak pro každou $h \in A(X)$ platí $h(x) = \int_X h \, \mathrm{d}\mu$.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že tvrzení platí pro všechna $g \in E^* + \mathbb{R}$. Je-li totiž $g = \varphi + r$, kde $\varphi \in E^*$ a r je konstantní (s hodnotou r), pak

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi + r) \,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu + \int_X r \,\mathrm{d}\mu = \varphi(x) + r = g(x).$$

Nechť nyní $h \in A(X)$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak podle Lemmatu 5.3 existuje $g \in E^* + \mathbb{R}$ taková, že $g \geq h$ na X a $g(x) < h(x) + \varepsilon$. Pak platí

$$\int_X h \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu = g(x) < h(x) + \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolné, platí $\int_X h \,\mathrm{d}\mu \leq h(x)$. Jelikož je také $-h \in A(X)$, platí $\int_X -h \,\mathrm{d}\mu \leq -h(x)$, a tedy $\int_X h \,\mathrm{d}\mu = h(x)$. □

Příklad míry bez těžiště

Jak jsme již zmínili, problematika existence těžiště je v nekompaktním případě poněkud komplikovanější. Ne každá baireovská míra musí mít těžiště, jak ukazuje Příklad 5.6. Než k němu přistoupíme, zopakujme v následujícím lemmatu, které uvedeme bez důkazu, pojem Banachovy limity (pro detaily viz [7, str. 39] nebo [15, str. 208]). Banachova limita v jistém smyslu zobecňuje pojem limity posloupnosti.

Lemma 5.5. *Existuje spojitý lineární funkcionál L na prostoru l^∞ mající následující vlastnosti:*

i) $\|L\| = 1$,

ii) pokud $x = \{x_n\} \in l^\infty$ *je konvergentní, pak* $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$,

iii) pokud $x = \{x_n\} \in l^\infty$ *a* $x_n \geq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *pak* $L(x) \geq 0$,

iv) pokud $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ *a* $\bar{x} := (x_2, x_3, \ldots)$, *pak* $L(x) = L(\bar{x})$.

Funkcionál L se nazývá Banachova limita.

Příklad 5.6. Nechť $E = c_0$ (se sup-normou) a $X = B_{c_0}$ je uzavřená jednotková koule v c_0. X je samozřejmě uzavřená, omezená a konvexní podmnožina E. Nechť $p_i := (\overbrace{1, \ldots, 1}^{\text{i-krát}}, 0, 0, \ldots) \in X$ a L nechť je Banachova limita z předchozího lemmatu. Definujme funkcionál μ na $\mathcal{C}_b(X)$ takto:

$$\mu(f) = L(\{f(p_i)\}_{i\in\mathbb{N}}), \quad f \in \mathcal{C}_b(X).$$

Jelikož f je omezená, leží posloupnost $\{f(p_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ v prostoru l^∞, takže funkcionál L je definován. Snadno se z předchozího lemmatu nahlédne, že μ je omezený lineární funkcionál, který je navíc nezáporný a $\|\mu\| = 1$. Je tedy $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

Nyní ukážeme, že μ nemá těžiště. Nechť pro spor $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ je těžištěm μ. Jelikož $x \in c_0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|x_n| < \frac{1}{2}$ pro $n \geq n_0$. Volme $\varphi = (0,\ldots,0,1,\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{k^2},\ldots) \in l^1 = (c_0)^*$, kde první nenulová složka φ je na n_0-té pozici. Pak platí

$$|\varphi(x)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x_{n_0+n-1}\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x_{n_0+n-1}| < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

ale

$$\mu(\varphi) = L(\{\varphi(p_i)\}_{i\in\mathbb{N}}) = L\bigg(\bigg\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\bigg\}_{n\in\mathbb{N}}\bigg) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

(druhá rovnost v poslední rovnici plyne z vlastnosti *iv*) z Lemmatu 5.5, třetí rovnost pak z vlastnosti *ii*)) takže $\varphi(x) \neq \mu(\varphi)$, což je spor.

Existence těžiště pro tight míry

Příklad 5.6 tedy ukazuje, že v plné obecnosti ($\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, X uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E) nelze existenci těžiště zaručit (prostor E v Příkladu 5.6 byl dokonce separabilní Banachův prostor). Následující věta ukazuje, že zesílí-li se dostatečně podmínka na μ a na X, možné už to je. Tato věta byla dokázána S. S. Khuranou v práci [10], náš důkaz je jiný než původní Khuranův.

Věta 5.7. *Nechť X je úplná, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in \mathcal{M}^1_t(X)$ má těžiště.*

Důkaz. Míra μ je tight, lze ji tedy rozšířit na Radonovu míru na $\mathcal{B}o^\sigma$ (viz Sekci Rozšiřování měr v Kapitole 4); nechť μ je dále toto rozšíření. Stačí ukázat, že pro toto rozšíření existuje $x \in X$ tak, že platí

$$\varphi(x) = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každé } \varphi \in E^*,$$

a jelikož původní baireovská míra dává pro všechna $f \in \mathcal{C}_b(X)$ stejný integrál jako rozšířená (viz opět Sekci Rozšiřování měr v Kapitole 4), je bod x jejím těžištěm.

Jelikož je míra μ Radonova, existuje neklesající posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních podmnožin X tak, že $\mu(K_n) > \mu(X) - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Jelikož X je konvexní a úplná, je $M_n := \overline{\operatorname{conv}}(K_n), n \in \mathbb{N}$, kompaktní konvexní podmnožina X a $\{M_n\}$ je také neklesající posloupnost. Samozřejmě $\mu(M_n) \geq \mu(K_n)$. Můžeme předpokládat, že $\{\mu(M_n)\}$ je rostoucí posloupnost a že $\mu(M_1) > 0$. Nechť $\mu_n := \frac{\mu_{M_n}}{\mu(M_n)}$. Míra μ_n je pravděpodobností Radonova míra na X, která je však nesena konvexním kompaktem M_n, existuje tedy těžiště μ_n, označme ho x_n. Je $x_n \in M_n \subset X$.

Nejprve ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Nechť $m > n$ a nechť p je libovolná pseudonorma z kolekce pseudonorem generujících topologii E. Pak platí

$$
\begin{aligned}
&p(x_m - x_n) = \\
&\quad = p\left(x_m - \mu(M_m)x_m + \mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n + \mu(M_n)x_n - x_n\right) \\
&\quad = p\left((1-\mu(M_m))x_m + \mu(M_m \setminus M_n)\tfrac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)} + (\mu(M_n)-1)x_n\right) \\
&\quad \leq (1-\mu(M_m))p(x_m) + \mu(M_m \setminus M_n)p\left(\tfrac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)}\right) + \\
&\qquad + (1-\mu(M_n))p(x_n).
\end{aligned}
$$

Nyní bychom potřebovali shora odhadnout výraz $p\left(\frac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)}\right)$. Kdyby bylo $\frac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)} \in X$, mohli bychom tento výraz odhadnout shora výrazem $\sup_{x \in X} p(x)$. Uvažujme pravděpodobnostní Radonovu míru $\frac{\mu_{(M_m \setminus M_n)}}{\mu(M_m \setminus M_n)}$ (nedělíme nulou, jelikož $\{\mu(M_n)\}$ je rostoucí). Platí

$$
\frac{\mu_{(M_m \setminus M_n)}}{\mu(M_m \setminus M_n)} = \frac{\mu_{M_m} - \mu_{M_n}}{\mu(M_m \setminus M_n)} = \frac{\mu(M_m)\mu_m - \mu(M_n)\mu_n}{\mu(M_m \setminus M_n)},
$$

ihned je tedy vidět, že bod $\frac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)}$ je těžištěm míry $\frac{\mu_{(M_m \setminus M_n)}}{\mu(M_m \setminus M_n)}$ (viz poznámku za Definicí 5.1), speciálně je $\frac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)} \in M_m \subset X$ (jelikož $\frac{\mu_{(M_m \setminus M_n)}}{\mu(M_m \setminus M_n)}$ je nesena M_m). Můžeme tedy pokračovat

$$
\begin{aligned}
&(1-\mu(M_m))p(x_m) + \mu(M_m \setminus M_n)p\left(\tfrac{\mu(M_m)x_m - \mu(M_n)x_n}{\mu(M_m \setminus M_n)}\right) + \\
&\quad + (1-\mu(M_n))p(x_n) \\
&\leq (1-\mu(M_m))\sup_{x \in X} p(x) + \mu(M_m \setminus M_n)\sup_{x \in X} p(x) + (1-\mu(M_n))\sup_{x \in X} p(x) \\
&\leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)\sup_{x \in X} p(x) = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)\sup_{x \in X} p(x).
\end{aligned}
$$

Množina X je omezená, je tedy $\sup_{x\in X} p(x) < \infty$. Odtud je již vidět, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Jelikož X je úplná, existuje limita $\{x_n\}$ ležící v X, označíme ji x.

Nyní dokážeme, že x je těžištěm μ. Nechť $f \in E^*$. Pak platí

$$\mu_n(f) = f(x_n).$$

Jelikož $x_n \to x$, je $f(x_n) \to f(x)$. Zároveň platí $\mu_n(f) \to \mu(f)$, jelikož

$$\mu_n(f) = \frac{\mu_{M_n}(f)}{\mu(M_n)} = \frac{\mu(f) - \mu_{(X\setminus M_n)}(f)}{\mu(M_n)},$$

přičemž

$$|\mu_{(X\setminus M_n)}(f)| \leq \mu(X \setminus M_n) \sup_{x\in X} |f(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{x\in X} |f(x)| \to 0$$

a $\mu(M_n) \to 1$.

Je tedy $\mu(f) = f(x)$ pro každé $f \in E^*$ a důkaz je hotov. □

Množina X v Příkladu 5.6 byla úplná, tvrzení tedy neplatí pro všechny míry z $\mathcal{M}^1(X)$ (charakteristika těch množin X, pro které všechny míry z $\mathcal{M}^1(X)$ mají těžiště, je uvedena v 5.17). Podmínku úplnosti nelze ve Větě 5.7 vynechat (tzn. nahradit ji pouze podmínkou uzavřenosti X), jak ukazuje následující příklad převzatý z práce [10], kde se ale pouze tvrdí, že sestrojená míra je z $\mathcal{M}^1_\sigma(X)$. Jak uvidíme, není těžké ukázat, že ve skutečnosti je tato míra tight.

Příklad 5.8. Nechť $E = c_{00}$ s l^1-normou a nechť $X = B_{c_{00}}$. Zřejmě X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina E. Nechť

$$e_i := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in X,$$

kde hodnota 1 je na i-té pozici. Funkcionál μ na $\mathcal{C}_b(X)$ definujeme takto:

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(e_i), \quad f \in \mathcal{C}_b(X).$$

Nejprve ukážeme, že $\mu \in \mathcal{M}^1_t(X)$. To, že μ je nezáporný a lineární, je zřejmé, a to, že $\|\mu\| = 1$, plyne z toho, že $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Nechť $\{f_\alpha\}$ je libovolný net v $\mathcal{C}_b(X)$ takový, že $\|f_\alpha\| \leq 1$ pro každé α a $f_\alpha \to 0$ stejnoměrně na kompaktech a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Řada $\sum \frac{1}{2^n}$ je konvergentní, existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$. Množina $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_0}\}$ je kompaktní, existuje tedy α_0 (z indexové množiny $\{f_\alpha\}$) tak, že pro každé $\alpha \succ \alpha_0$ platí

$$\max\{|f_\alpha(e_i)| : i = 1, \dots, n_0\} \leq \varepsilon.$$

Pak pro $\alpha \succ \alpha_0$ platí

$$\begin{aligned} |\mu(f_\alpha)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |f_\alpha(e_i)| = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} |f_\alpha(e_i)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |f_\alpha(e_i)| \leq \\ &\leq \max\{|f_\alpha(e_i)| : i = 1, \dots, n_0\} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} + \varepsilon = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} + 1 \right) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Je tedy $\mu(f_\alpha) \to 0$, takže $\mu \in \mathcal{M}_t^1(X)$.

Nyní ukážeme, že μ nemá těžiště. Nechť tedy pro spor

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in X$$

je těžištěm μ. Volme

$$\varphi = (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots) \in l^\infty = E^*$$

s první nenulovou složkou na $(n+1)$-ní pozici. Pak $\varphi(x) = 0$, ale

$$\mu(\varphi) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \neq 0,$$

takže $\varphi(x) \neq \mu(\varphi)$, což je spor.

Existence těžiště pro další třídy měr

V této sekci krátce shrneme výsledky o existenci barycenter pro τ-aditivní a σ-aditivní míry. Jelikož se tyto třídy měr v nekompaktní Choquetově teorii příliš nepoužívají (většinou se pracuje s tight mírami), uvedeme tyto výsledky jen stručně. Důkaz následujícího tvrzení lze nalézt v [14].

Věta 5.9. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina úplného lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in \mathcal{M}_\tau^1(X)$ má těžiště.*

Důsledek 5.10. *Nechť X je úplná, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in \mathcal{M}_\tau^1(X)$ má těžiště.*

Před důkazem tohoto důsledku zmiňme bez důkazu jedno pomocné tvrzení.

Lemma 5.11. *Nechť V je topologický vektorový prostor a W jeho hustý podprostor. Nechť dále $\varphi \in W^*$. Pak existuje $\psi \in V^*$ tak, že $\psi|_W = \varphi$.*

Důkaz Důsledku 5.10. Nechť $\tilde{E}$ je zúplnění prostoru E (viz Věta 2.10). Jelikož X je úplná v E, je uzavřená v $\tilde{E}$. Podle Věty 5.9 víme, že existuje těžiště μ v X jakožto podmnožině $\tilde{E}$, tj. existuje $x \in X$ tak, že platí

$$\varphi(x) = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každé } \varphi \in \tilde{E}^*.$$

Protože podle Lemmatu 5.11 platí $E^* = \tilde{E}^*|_E$ (symbolem $\tilde{E}^*|_E$ rozumíme množinu všech prvků $\tilde{E}^*$ restringovaných na prostor E), je bod x těžištěm míry μ v množině X i jakožto podmnožině prostoru E. □

Poznámka 5.12. Věta 5.7 je tedy důsledkem Věty 5.9, protože každá tight míra je τ-aditivní. Důkaz Věty 5.9 ale vyžaduje další prostředky, navíc v této obecnosti toto tvrzení většinou není potřeba, takže jsme v této práci zvolili dokázat slabší tvrzení, u kterého si ale vystačíme s mnohem jednodušším důkazem.

Jelikož tight míry jsou τ-aditivní, ukazuje Příklad 5.8, že ani v Důsledku 5.10 nelze předpoklad úplnosti nahradit pouze uzavřeností.

Pro σ-aditivní míry lze existenci těžiště zaručit za silnějšího předpokladu na množinu X. Důkaz tohoto tvrzení je možné najít v článku [10].

Věta 5.13. *Nechť X je úplná, omezená, konvexní a separabilní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in \mathcal{M}^1_\sigma(X)$ má těžiště.*

Protože množina X v Příkladu 5.8 byla separabilní a každá tight míra je σ-aditivní, nelze ani v předchozí větě nahradit předpoklad úplnosti uzavřeností. Otázka, zda lze z předpokladů této věty vynechat separabilitu, je již obtížnější. Jak bylo ukázáno v článku [17], σ-aditivní míry na metrických prostorech, u kterých mohutnost báze otevřených množin je měřitelný kardinál, jsou neseny separabilní množinou. Je-li tedy X úplná, omezená, konvexní a metrizovatelná podmnožina lokálně konvexního prostoru E taková, že její báze otevřených množin je měřitelný kardinál, a $\mu \in \mathcal{M}^1_\sigma(X)$, pak je míra μ nesena separabilní množinou. Uzavřený konvexní obal separabilní množiny je opět separabilní, lze tedy použít Větu 5.13, a tedy existuje těžiště míry μ. Hledání σ-aditivní míry bez těžiště je tudíž třeba omezit na nemetrizovatelné množiny nebo na metrizovatelné množiny, u kterých mohutnost báze otevřených množin není měřitelný kardinál. Najít takovou míru se ale v této práci nepodařilo.

Vlastnosti barycentrického zobrazení

Obraťme nyní pozornost k otázce spojitosti barycentrického zobrazení. K tomu účelu označme $\mathcal{M}_b^1(X)$ množinu všech měr z $\mathcal{M}^1(X)$, které mají těžiště. Tvrzení z této sekce (kromě Věty 5.16) lze také najít v článku [11].

Věta 5.14. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak zobrazení $r : \mathcal{M}_b^1(X) \longrightarrow X$, přiřazující každé míře $\mu \in \mathcal{M}_b^1(X)$ její těžiště $r(\mu)$, je afinní a $\omega^* - \omega$ spojité.*

Důkaz. To, že je r afinní, je zřejmé. Nechť $\{\mu_\alpha\}$ je net v $\mathcal{M}_b^1(X)$ a $\mu \in \mathcal{M}_b^1(X)$ tak, že $\mu_\alpha \xrightarrow{\omega^*} \mu$, tj. $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ pro každé $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Pak pro každé $\varphi \in E^*$ je

$$\varphi(r(\mu_\alpha)) = \mu_\alpha(\varphi|_X) \to \mu(\varphi|_X) = \varphi(r(\mu)),$$

takže $r(\mu_\alpha) \xrightarrow{\omega} r(\mu)$, a tedy r je $\omega^* - \omega$ spojité. □

Je-li X kompaktní, pak slabá a silná (tj. původní) topologie prostoru E na X splývají a zobrazení r je tedy ω^*- silně spojité. Pokud je X pouze uzavřená a omezená, pak to tak již být nemusí. Platí dokonce víc, jak ukazuje následující věta:

Věta 5.15. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Označme τ původní topologii na X a nechť r je zobrazení přiřazující každé $\mu \in \mathcal{M}_b^1(X)$ její těžiště. Pak r je $\omega^* - \tau$ spojité, právě když topologie τ a ω-topologie na X splývají.*

Důkaz. Jestliže τ a ω topologie na X splývají, pak zobrazení r, které je $\omega^* - \omega$ spojité podle Věty 5.14, je i $\omega^* - \tau$ spojité. Nechť τ a ω topologie na X nesplývají, tj. existuje net $\{x_\alpha\}$ v X, $x \in X$ a okolí U bodu x tak, že $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$ a $x_\alpha \notin U$ pro každé α. Z ω^*-kompaktnosti množiny $\mathcal{M}^1(X)$ můžeme předpokládat, že $\varepsilon_{x_\alpha} \xrightarrow{\omega^*} \mu$, kde $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Jelikož pro každé $\varphi \in E^*$ je

$$\mu(\varphi) = \lim \varepsilon_{x_\alpha}(\varphi) = \lim \varphi(x_\alpha) = \varphi(x),$$

platí $\mu \in \mathcal{M}_b^1(X)$ a bod x je těžištěm μ. Přitom ale neplatí $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, takže r není $\omega^* - \tau$ spojité. □

Pokud se omezíme pouze na tight míry, lze získat silnější tvrzení. Jeho důkaz nebudeme uvádět, jelikož by vyžadoval další prostředky, lze ho však najít v [21, str. 16].

Věta 5.16. *Nechť X je úplná, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť τ je původní topologie na E. Nechť dále $r : \mathcal{M}_t^1(X) \longrightarrow X$ je zobrazení přiřazující každé pravděpodobnostní tight míře její těžiště (které existuje podle Věty 5.7). Pak r je afinní a $\omega^* - \tau$ spojité.*

Na závěr této kapitoly uveďme ještě jednu zajímavou větu charakterizující ty množiny X, pro které všechny prvky $\mathcal{M}^1(X)$ mají těžiště:

Věta 5.17. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak každá $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ má těžiště, právě když X je slabě kompaktní.*

Důkaz. Nechť každá $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ má těžiště. Pak je tedy $\mathcal{M}_b^1(X) = \mathcal{M}^1(X)$ a podle Věty 5.14 je zobrazení

$$r : (\mathcal{M}^1(X), \omega^*) \longrightarrow (X, \omega),$$

přiřazující každé míře její těžiště, spojité. Jelikož množina $\mathcal{M}^1(X)$ je ω^*-kompaktní, je její spojitý obraz $r(\mathcal{M}^1(X))$ také kompakt. Protože ale pro každé $x \in X$ je $r(\varepsilon_x) = x$, je $r(\mathcal{M}^1(X)) = X$, a tedy X je slabě kompaktní.

Nechť množina X je slabě kompaktní a $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Definujme míru $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^1((X, \omega))$ předpisem $\overline{\mu}(f) := \mu(f)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b((X, \omega))$. Jelikož (X, ω) je kompaktní, má $\overline{\mu}$ těžiště $x \in X$, tj. $\varphi(x) = \int_X \varphi \, d\mu$ pro každé $\varphi \in (E, \omega)^*$. Jelikož ale $(E, \omega)^* = E^*$, je x i těžištěm míry μ. □

6 Bauerova charakteristika extremálních bodů

V této kapitole se budeme věnovat zobecnění Věty 3.8 z kompaktní teorie, známé Bauerovy charakteristiky extremálních bodů, na nekompaktní množiny. Připomeňme, že je-li T úplně regulární topologický prostor, pak symbol ε_x značí Diracovu míru v bodě $x \in T$, tj. $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b(T)$. Zopakujme znění Bauerovy věty pro kompaktní množiny:

Věta 6.1 (Bauer)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $x \in K$. Pak $x \in \operatorname{ext} K$, právě když ε_x je jediná pravděpodobnostní Radonova míra na K reprezentující bod x.*

Opět se ukazuje, že v nekompaktním případě je situace mnohem složitější než v případě kompaktním.

Příklad na neplatnost Bauerovy charakteristiky

Jaká je tedy situace, uvažujeme-li v Bauerově větě uzavřenou (případně úplnou), omezenou a konvexní podmnožinu X lokálně konvexního prostoru E a míry z $\mathcal{M}^1(X)$? V následujícím příkladu je sestrojena uzavřená, omezená a konvexní podmnožina X lokálně konvexního prostoru (dokonce separabilního Banachova, X je tedy i úplná), v níž existuje extremální bod reprezentovaný i jinou mírou z $\mathcal{M}^1(X)$ než mírou Diracovou. Bauerova charakteristika tedy v tomto kontextu neplatí.

Příklad 6.2. Nechť $E = c_0$, $X = \overline{\operatorname{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\})$, kde

$$e_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in E$$

s hodnotou 1 na i-té pozici. X je zřejmě uzavřená, omezená a konvexní podmnožina E.

Snadno se nahlédne, že $0 \in \operatorname{ext} X$. Ihned je vidět, že $0 \in X$, jelikož označíme-li $y_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e_i$, je $y_n \in \operatorname{conv}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\})$ a $\|y_n\| = \frac{1}{n}$ a tedy $y_n \to 0$ (nebo se dá využít toho, že $e_i \xrightarrow{\omega} 0$, a podle známé věty existují konvexní kombinace $\{e_i\}$ konvergující k nule). Dále

$$\begin{aligned}\operatorname{conv}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) &= \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \,:\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, I \subset \mathbb{N} \text{ konečná} \right\} \\ &\subset \{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 : x_i \geq 0 \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

kde poslední množina je uzavřená a tedy

$$X \subset \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in c_0 : x_i \geq 0 \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}\}.$$

Kdyby ale 0 nebyla extremálním bodem X, byla by středem nějaké netriviální úsečky ležící v X, jejíž alespoň jeden krajní bod by musel mít alespoň jednu souřadnici zápornou. To ale není možné.

Nechť L je Banachova limita z Lemmatu 5.5. Funkcionál μ definujeme takto:

$$\mu(f) = L(\{f(e_i)\}_{i\in\mathbb{N}}), \quad f \in \mathcal{C}_b(X).$$

Z vlastností Banachovy limity plyne, že $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

Bod 0 je těžiště μ: Nechť $\varphi \in E^* = l^1$, $\varphi = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$. Samozřejmě $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = 0$. Platí

$$\mu(\varphi) = L(\{\varphi(e_i)\}_{i\in\mathbb{N}}) = L(\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0 = \varphi(0)$$

(třetí rovnost plyne z vlastnosti ii) z Lemmatu 5.5), takže 0 je těžištěm μ.

$\mu \neq \varepsilon_0$: K tomu je třeba najít $f \in \mathcal{C}_b(X)$ tak, že $\mu(f) \neq \varepsilon_0(f)$. Zvolíme-li $f := \|.\|$ (sup-norma na c_0), je f samozřejmě spojitá a omezená na X. Pak

$$\mu(f) = \mu(\|.\|) = L(\{\|e_i\|\}_{i\in\mathbb{N}}) = L((1, 1, 1, \ldots)) = 1,$$

ale

$$\varepsilon_0(f) = \varepsilon_0(\|.\|) = \|0\| = 0,$$

takže $\mu \neq \varepsilon_0$.

Bauerova charakteristika pro $\mathcal{M}_t^1(X)$

Omezíme-li se pouze na tight míry na úplné množině, Bauerova charakteristika již platí. Toto tvrzení pochází od S. S. Khurany (viz [10]). Základní ingrediencí důkazu je existence těžiště pro každou tight míru zaručená Větou 5.7. Připomeňme, že pro tight míry (samozřejmě rozšířené na borelovské množiny) vždy existuje nosič, viz Definici 4.13.

Věta 6.3. *Nechť X je úplná, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $x \in X$. Pak $x \in \mathrm{ext}X$, právě když ε_x je jediný prvek $\mathcal{M}_t^1(X)$ reprezentující bod x.*

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{ext}X$ a nechť $\mu \in \mathcal{M}_t^1(X)$ reprezentuje bod x (míru μ uvažujeme již rozšířenu na $\mathcal{B}o^\sigma$). Dokážeme, že $\operatorname{supt}\mu = \{x\}$, odkud je již vidět, že $\mu = \varepsilon_x$. Nechť tedy pro spor existuje $y \in \operatorname{supt}\mu$, $y \neq x$. Pak existuje

$\varphi \in E^*$ a $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\varphi(x) < a < \varphi(y)$. Označme $A := \overline{\{z \in X : \varphi(z) \leq a\}}$. Pak $\mu(A) > 0$, protože kdyby to tak nebylo, muselo by být $x \in \overline{X \setminus A}$, tedy $\varphi(x) \geq a$, což by byl spor. Také platí $\mu(A) < 1$, jelikož v případě, že by $\mu(A) = 1$, byl by $\operatorname{supt} \mu \subset A$ (A je uzavřená) a tedy $y \in A$ — spor. Definujme míry

$$\mu_1 := \frac{\mu_A}{\mu(A)} \quad \text{a} \quad \mu_2 := \frac{\mu_{X\setminus A}}{\mu(X \setminus A)}.$$

Ihned je vidět, že $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_t^1(X)$, takže obě tyto míry mají podle Věty 5.7 těžiště, označme je po řadě x_1, x_2. Platí $x_2 \in \overline{X \setminus A}$, takže $x_2 \neq x$. Dále je

$$\mu = \mu(A)\mu_1 + \mu(X \setminus A)\mu_2 = \mu(A)\mu_1 + (1 - \mu(A))\mu_2,$$

odkud plyne $x = \mu(A)x_1 + (1 - \mu(A))x_2$. Kdyby bylo $x_1 = x_2$, pak by platilo $x = x_2$, což by byl spor. Je tedy $x_1 \neq x_2$, což je ale spor s tím, že x je extremální. Takže $\operatorname{supt} \mu = \{x\}$. Opačná implikace je triviální. $\square$

Poznámka 6.4. Snadno si rozmyslíme, že stejný důkaz projde díky Důsledku 5.10 také pro míry z $\mathcal{M}_\tau^1(X)$. Předchozí věta tedy platí i pro tyto míry.

V předcházejícím tvrzení je úplnost opět podstatná, jak je vidět z následujícího příkladu:

Příklad 6.5. Označme $x := (\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \dots, \frac{1}{2^k}, \dots) \in l^1$. Nechť $E = \operatorname{lin}(c_{00} \cup \{x\})$ (lineární obal v prostoru l^1) s l^1-normou a nechť $X = \overline{\operatorname{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\})$ (uzavřený konvexní obal v prostoru E), kde $e_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in E$ s hodnotou 1 na i-té pozici. Množina X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina E. Není těžké si rozmyslet, že

$$X = \operatorname{conv}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}).$$

Definujme jako v Příkladu 5.8 funkcionál μ na $\mathcal{C}_b(X)$ takto:

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(e_i), \quad f \in \mathcal{C}_b(X).$$

Stejně jako v Příkladu 5.8 je $\mu \in \mathcal{M}_t^1(X)$.

Nejprve ukažme, že bod x je extremálním bodem množiny X. Nechť pro spor $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, kde $y, z \in X, y \neq z$. Odtud je ihned vidět, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x, \ \text{ kde } \ x_i \in c_{00}, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \ \text{ a } \ \lambda_{n+1} < 1.$$

Je tedy $(1 - \lambda_{n+1})x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, ale jelikož bod x neleží v c_{00}, musí být levá strana rovna 0, tedy $\lambda_{n+1} = 1$ a tedy spor.

Ukažme dále, že tento bod je těžištěm míry μ. Je $E^* = (l^1)^* = l^\infty$, protože E je hustý v l^1. Nechť $\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in E^*$. Pak

$$\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \alpha_i = \varphi(x),$$

takže bod x je skutečně těžištěm μ.

A nakonec platí $\mu \neq \varepsilon_x$, protože pro $f(y) := \|y - x\|$ (l^1-norma na E) je

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|e_i - x\| > 0,$$

jelikož $\|e_i - x\| > 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, zatímco

$$\varepsilon_x(f) = f(x) = \|x - x\| = 0.$$

Bauerova charakteristika pro $\mathcal{M}^1(X)$

Nabízí se otázka, jak (geometricky) charakterizovat množinu všech $x \in X$ (kde X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru) takových, že ε_x je jediný prvek $\mathcal{M}^1(X)$ reprezentující x. Věta 6.12, dokázaná S. S. Khuranou v práci [12], dává odpověď. Před ní je ale třeba definice a několik lemmat.

Definice 6.6. Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Bod $x \in X$ se nazývá *silně extremální bod* množiny X, pokud pro každé okolí U bodu x platí $x \notin \overline{\text{conv}}(X \setminus U)$. Množina všech silně extremálních bodů množiny X se značí str ext$X$.

Poznámka 6.7. Shrňme několik vlastností silně extremálních bodů.

- Platí str ext$X \subset$ ext$X$.
- Známé tvrzení z kompaktní teorie tvrdí, že pro kompaktní konvexní množinu X je str ext$X =$ ext$X$, viz například [8, str. 107].
- Definujeme-li *plátky* množiny X jako průniky množiny X s uzavřenými poloprostory (přičemž uzavřeným poloprostorem rozumíme množinu $\{x \in X : \varphi(x) \geq \alpha\}$, kde $\varphi \in E^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$), pak se silně extremální body dají ekvivalentně definovat jako body množiny X, které mají bázi okolí (v relativní topologii na X) tvořenou plátky. Důkaz je snadný, jde jen o separační verzi Hahn-Banachovy věty.

Lemma 6.8. *Nechť T je úplně regulární Hausdorffův topologický prostor, $S \subset T$ a $x \in S$. Nechť $\mu \in \mathcal{M}^1(S)$ taková, že $\mu(f|_S) = f(x)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b(T)$. Pak $\mu = \varepsilon_x$, tj. $\mu(g) = g(x)$ pro každou $g \in \mathcal{C}_b(S)$.*

Důkaz. Nechť nejdříve $g \in \mathcal{C}_b(S)$ taková, že $0 \leq g \leq 1$ a $g(x) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $U := \{y \in S : g(y) < \varepsilon\}$. Pak U je otevřená v S, existuje tedy V otevřená množina v T tak, že $V \cap S = U$. Jelikož T je úplně regulární, existuje $f \in \mathcal{C}_b(T)$ tak, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na $T \setminus V$. Platí $g \leq f + \varepsilon$ na S, a tedy

$$\mu(g) \leq \mu((f + \varepsilon)|_S) = \mu(f|_S) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon = \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolné, je $\mu(g) = 0 = g(x)$.

Odtud plyne, že $\mu(g) = g(x)$ pro každou $g \in \mathcal{C}_b(S)$ takovou, že $g(x) = 0$ a buď $g \geq 0$ nebo $g \leq 0$. Pro každou $g \in \mathcal{C}_b(S)$ takovou, že $g(x) = 0$, dostaneme tvrzení rozkladem na kladnou a zápornou část a pro libovolnou $g \in \mathcal{C}_b(S)$ odečtením funkční hodnoty v bodě x. $\square$

Lemma 6.9. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť L je nezáporný lineární funkcionál na prostoru $A(X)$. Pak L lze rozšířit na nezáporný lineární funkcionál $\tilde{L}$ na celém prostoru $\mathcal{C}_b(X)$. Toto rozšíření je dáno jednoznačně, právě když pro každé $f \in \mathcal{C}_b(X)$ platí*

$$\sup\{L(h) : h \in A(X), h \leq f\} = \inf\{L(h) : h \in A(X), h \geq f\}.$$

Důkaz. Pro $f \in \mathcal{C}_b(X)$ definujme

$$p(f) := \sup\{L(h) : h \in A(X),\ h \leq f\}.$$

Ihned je vidět, že pro $\lambda \geq 0$ a $f, g \in \mathcal{C}_b(X)$ je

$$p(\lambda f) = \lambda p(f) \quad \text{a} \quad p(f + g) \geq p(f) + p(g),$$

tj. že $-p$ je sublineární. Přitom $-L = -p$ na $A(X)$. Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty existuje $\tilde{L}$ rozšíření L na $\mathcal{C}_b(X)$ takové, že $-\tilde{L} \leq -p$, tj. $\tilde{L} \geq p$ na $\mathcal{C}_b(X)$. Je-li $f \geq 0$, pak $p(f) \geq 0$ a tedy $\tilde{L} \geq p \geq 0$, takže $\tilde{L}$ je nezáporný.

Pokud jde o jednoznačnost, pak z nezápornosti plyne, že je-li

$$\sup\{L(h) : h \in A(X), h \leq f\} = \inf\{L(h) : h \in A(X), h \geq f\}$$

pro každé $f \in \mathcal{C}_b(X)$, je $\tilde{L}(f)$ jednoznačně určeno pro každé $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Nechť tedy naopak pro nějakou $f \in \mathcal{C}_b(X)$ platí $\alpha < \beta$, kde $\alpha := p(f)$ a

$$\beta := \inf\{L(h) : h \in A(X), h \geq f\}$$

a nechť $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ je libovolné. Označme H podprostor $\mathcal{C}_b(X)$ generovaný $A(X)$ a funkcí f. Na H definujme lineární funkcionál L' předpisem $L'(g) := L(h) + \lambda\gamma$ pro $g = h + \lambda f$. L' je dobře definován, jelikož $f \notin A(X)$ a tedy vyjádření $g = h + \lambda f$ je jednoznačné. Nechť $g = h + \lambda f$. Pro $\lambda \geq 0$ platí

$$L'(g) = L(h) + \lambda\gamma \geq L(h) + \lambda\alpha = p(h) + \lambda p(f) \geq p(h + \lambda f) = p(g)$$

a pro $\lambda < 0$ je (s využitím toho, že $\beta = -p(-f)$)

$$L'(g) = L(h) + \lambda\gamma \geq L(h) + \lambda\beta = p(h) + (-\lambda)p(-f) = p(h) + p(\lambda f) \geq p(g).$$

Je tedy $L' \geq p$ na H a stejně jako v důkazu existence existuje rozšíření $\tilde{L}$ na celé $\mathcal{C}_b(X)$, pro které platí $\tilde{L} \geq p$ na $\mathcal{C}_b(X)$. $\tilde{L}$ je tedy opět nezáporný a navíc $\tilde{L}(f) = \gamma$. Číslo γ ale bylo voleno libovolně mezi α a β, takže rozšíření není jednoznačné. □

Poznámka 6.10. Předchozí lemma je v mnohem obecnější verzi uvedeno v [8, str. 269].

Lemma 6.11. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $M \subset X$. Nechť $h \in A(X)$ taková, že $h \geq a$ na M, kde $a \in \mathbb{R}$. Pak $h \geq a$ na $\overline{\text{conv}}(M)$.*

Důkaz. Nechť $x \in \overline{\text{conv}}(M)$. Pak existuje net $\{x_\alpha\}$ prvků z $\text{conv}(M)$ takový, že $x_\alpha \to x$. Je tedy $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha y_i^\alpha$, kde $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $\lambda_i^\alpha \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1$, $y_i^\alpha \in M$. Platí

$$h(x_\alpha) = h\Big(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha y_i^\alpha\Big) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha h(y_i^\alpha) \geq \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha a = a$$

a jelikož $x_\alpha \to x$ a h je spojitá, je $h(x) \geq a$. □

Věta 6.12. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak $x \in$ str ext$X$, právě když ε_x je jediný prvek $\mathcal{M}^1(X)$ reprezentující x.*

Důkaz. Symboly X a E budou v celém důkazu značit množinu X a prostor E s původní topologií, zatímco symboly (X, ω) a (E, ω) budou značit tyto množiny opatřené slabou topologií prostoru E.

Nechť $x \in$ str ext$X$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ nechť reprezentuje x. Symbol $\tilde{E}$ nechť značí zúplnění prostoru (E, ω) (viz Větu 2.10) a $\tilde{X}$ nechť značí uzávěr (X, ω) v $\tilde{E}$. Jelikož X je omezená podmnožina prostoru E, je podle Věty 2.11 množina $\tilde{X}$ kompaktní podmnožina $\tilde{E}$.

Nejprve ukážeme, že $x \in \mathrm{ext}\tilde{X}$. Nechť tomu tak pro spor není. Pak existují $y, z \in \tilde{X},\ y \neq z$ tak, že $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Nechť U je uzavřené okolí bodu x v $\tilde{X}$ takové, že $y, z \notin U$. Z hustoty (X, ω) v $\tilde{X}$ plyne, že existují nety $\{y_\alpha\}$ a $\{z_\beta\}$ prvků z $X \setminus U$ takové, že $y_\alpha \to y$ a $z_\beta \to z$. Pak $x \in \overline{\mathrm{conv}}^{\tilde{X}}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\})$. Kdyby to totiž tak nebylo, existovalo by $\varphi \in (\tilde{E})^*$ a $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\varphi(x) < a < \inf \varphi(\overline{\mathrm{conv}}^{\tilde{X}}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\}).$$

Pak by bylo $\varphi(y) < a$ nebo $\varphi(z) < a$, což by byl spor s tím, že $y_\alpha \to y$ a $z_\beta \to z$. Takže skutečně $x \in \overline{\mathrm{conv}}^{\tilde{X}}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\})$.

Odtud

$$x \in \overline{\mathrm{conv}}^{(X,\omega)}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\}) = \overline{\mathrm{conv}}^{X}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\}),$$

což je spor, jelikož $x \in \mathrm{str\ ext}X$ a tedy $x \notin \overline{\mathrm{conv}}^{X}(X \setminus U)$, odkud plyne $x \notin \overline{\mathrm{conv}}^{X}(\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\})$, protože $\{y_\alpha\} \cup \{z_\beta\} \subset X \setminus U$. Je tedy $x \in \mathrm{ext}\tilde{X}$.

Definujme nyní funkcionál ν na prostoru $\mathcal{C}_b(\tilde{X})$ předpisem $\nu(f) := \mu(f|_X)$. Pak ν je Radonova míra na kompaktu $\tilde{X}$. Její těžiště je bod x. Je-li totiž $\varphi \in (\tilde{E})^*$, pak $\varphi|_X \in E^*$ a tedy $\nu(\varphi) = \mu(\varphi|_X) = \varphi(x)$. Jelikož $x \in \mathrm{ext}\tilde{X}$, je podle Věty 6.1 $\nu(f) = f(x)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b(\tilde{X})$. Podle Lemmatu 6.8 je $\mu(f) = f(x)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b((X, \omega))$, tj. pro každou slabě spojitou omezenou funkci na X. Zbývá už jen ukázat, že $\mu(g) = g(x)$ pro každou $g \in \mathcal{C}_b(X)$. Stejně jako v důkazu Lemmatu 6.8 se stačí omezit na takové $g \in \mathcal{C}_b(X)$, že $0 \leq g \leq 1$ a $g(x) = 0$. Nechť tedy g je taková funkce a nechť $\varepsilon > 0$. Označme $U := \{x \in X : g(x) < \varepsilon\}$. U je okolí bodu x a jelikož x je silně extremální, je U i slabým okolím x (existuje totiž báze okolí x tvořená plátky). (X, ω) je úplně regulární, mohu tedy zvolit $f \in \mathcal{C}_b((X, \omega))$ tak, že $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ a $f = 1$ na $X \setminus U$. Pak $g \leq f + \varepsilon$, odkud

$$\mu(g) \leq \mu(f + \varepsilon) = \mu(f) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Takže $\mu(g) = 0 = g(x)$.

Jestliže $x \notin \mathrm{str\ ext}X$, existuje U okolí bodu x takové, že $x \in \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$. X je úplně regulární, existuje tedy $f \in \mathcal{C}_b(X)$ tak, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na $X \setminus U$. Je-li $h \geq f$, $h \in A(X)$, pak $h \geq 1$ na $X \setminus U$. Podle Lemmatu 6.11 je $h \geq 1$ na $\overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$ a jelikož $x \in \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$, je $h(x) \geq 1$. Definujme nezáporný lineární funkcionál L na $A(X)$ předpisem $L(h) := h(x)$ pro $h \in A(X)$. Z předchozího plyne, že

$$\inf\{L(h) : h \in A(X), h \geq f\} = \inf\{h(x) : h \in A(X), h \geq f\} \geq 1,$$

zatímco

$$\sup\{L(h) : h \in A(X), h \leq f\} = \sup\{h(x) : h \in A(X), h \leq f\} \leq f(x) = 0.$$

Podle Lemmatu 6.9 lze L rozšířit více způsoby na nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_b(X)$. Jelikož $L(1) = 1$, je každé toto rozšíření prvkem $\mathcal{M}^1(X)$. $\square$

7 Dodatky

V této kapitole shrneme výsledky týkající se zobecnění několika dalších tvrzení z kompaktní teorie.

Krein-Milmanova věta

Základním výsledkem v kompaktní teorii je Krein-Milmanova věta (viz Větu 3.1), podle které každá kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru je uzavřeným konvexním obalem svých extremálních bodů. Standardní příklad uzavřené jednotkové koule v c_0, která nemá žádný extremální bod, ukazuje, že toto tvrzení nelze přenést na uzavřené, omezené a konvexní množiny. Jak jsme viděli ve Větě 3.10, Krein-Milmanova věta lze ekvivalentně vyslovit v tomto tvaru: každý bod konvexního kompaktu je těžištěm Radonovy míry nesené uzávěrem extremálních bodů. Jistou analogii této ekvivalence přináší následující věta, která byla v trochu jiné verzi dokázána v [10]. Připomeňme ještě, že pro úplně regulární prostor T značíme

$$\mathcal{Z} := \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}_b(T)\}.$$

Věta 7.1. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $M \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

i) $X = \overline{\text{conv}}(M)$,

ii) ke každému $x \in X$ existuje míra $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ reprezentující bod x nesená každou množinou $Z \in \mathcal{Z}$ takovou, že $Z \supset M$.

Důkaz. i) $\Rightarrow$ ii): Nechť $x \in X$. Pak existuje net $\{x_\alpha\}$ prvků množiny $\text{conv}(M)$ tak, že $x_\alpha \to x$. Nechť

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha y_i^\alpha, \quad \text{kde } n_\alpha \in \mathbb{N},\ \lambda_i^\alpha \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1,\ y_i^\alpha \in M.$$

Množina $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ je podle Poznámky 4.10 ω^*-kompaktní a jelikož $\{\mu_\alpha\}$, kde $\mu_\alpha := \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \varepsilon_{y_i^\alpha}$, je net v $\mathcal{M}^1(X)$, existuje podnet $\{\mu_\beta\}$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ tak, že $\mu_\beta \overset{\omega^*}{\to} \mu$.

Nechť $\varphi \in E^*$. Pak

$$\mu(\varphi) = \lim \mu_\beta(\varphi) = \lim \sum_{i=1}^{n_\beta} \lambda_i^\beta \varepsilon_{y_i^\beta}(\varphi) = \lim \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n_\beta} \lambda_i^\beta y_i^\beta\Big) = \lim \varphi(x_\beta) = \varphi(x),$$

takže μ reprezentuje x.

Nechť $Z \in \mathcal{Z},\ Z \supset M$. Pak z toho, že $\mu_\beta \xrightarrow{\omega^*} \mu$, plyne

$$\mu(Z) \geq \limsup \mu_\beta(Z) = 1$$

(nerovnost plyne z Věty 4.3, rovnost pak z toho, že μ_β jsou neseny množinou Z). Takže μ je nesena množinou Z.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: Nechť pro spor $x \in X \setminus \overline{\text{conv}}(M)$. Podle předpokladu existuje míra $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ reprezentující x nesená každou množinou $Z \in \mathcal{Z}$ takovou, že $Z \supset M$. Podle separační verze Hahn-Banachovy věty pak existují $\varphi \in E^*$ a $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\sup \varphi(\overline{\text{conv}}(M)) < a < \varphi(x).$$

Jelikož množina $Z_0 := \{x \in X : \varphi(x) \leq a\}$ je prvkem systému $\mathcal{Z}$ a zřejmě $Z_0 \supset M$, je míra μ nesená množinou Z_0. Platí tedy

$$\mu(\varphi) = \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_{Z_0} \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq a < \varphi(x),$$

což je spor s tím, že μ reprezentuje x. $\square$

Milmanova věta

Užitečným tvrzením z kompaktní teorie je i Milmanova věta 3.9. Zopakujme ji na tomto místě:

Věta 7.2 (Milman)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $M \subset K$ taková, že $K = \overline{\text{conv}}(M)$. Pak $\text{ext}K \subset \overline{M}$.*

Platí tato věta pro uzavřenou, omezenou a konvexní množinu namísto kompaktní a konvexní? Odpověď je záporná. Stačí se podívat na Příklad 6.2. V tomto příkladu je ukázáno, že bod 0 je extremálním bodem množiny $X = \overline{\text{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\})$, kde $e_i := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ s hodnotou 1 na i-té pozici. Množina $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ je uzavřená (vzdálenost každých dvou prvků je rovna 2), takže neplatí $\text{ext}X \subset \overline{\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$, přestože $X = \overline{\text{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\})$. Přitom množina X není příliš patologická, je například slabě kompaktní. To plyne z toho, že

$$X = \overline{\text{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) = \overline{\text{conv}}^{\omega}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) = \overline{\text{conv}}^{\omega}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}),$$

a jelikož $e_i \xrightarrow{\omega} 0$, je množina $\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ slabě kompaktní a uzavřené (slabě uzavřené — to je ale to samé) konvexní obaly slabě kompaktních podmnožin Banachových prostorů jsou opět slabě kompaktní. Je tedy i uzavřeným konvexním obalem svých extremálních bodů. Nicméně analogie Milmanovy věty platí pro silně extremální body (zavedené v Definici 6.6) místo extremálních:

Věta 7.3. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a $M \subset X$ tak, že $X = \overline{\mathrm{conv}}(M)$. Pak* str ext$X \subset \overline{M}$.

Důkaz. Nechť $x \in$ str ext$X$ a U libovolné otevřené okolí x. Chceme ukázat, že $U \cap M \neq \emptyset$. Nechť pro spor $U \cap M = \emptyset$. Pak $X \setminus U \supset M$ a tedy $\overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U) \supset \overline{\mathrm{conv}}(M)$. Jelikož $x \notin \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$ z definice silně extremálního bodu, je pak i $x \notin \overline{\mathrm{conv}}(M)$, což je spor s tím, že $X = \overline{\mathrm{conv}}(M)$. □

Poznámka 7.4. Vzhledem k předchozí větě nemůže být bod 0 v Příkladu 6.2 silně extremální. To plyne také třeba z Věty 6.12, jelikož k tomuto bodu existuje i jiná reprezentující míra než ε_0, nebo se to dá nahlédnout i přímo z definice. Vezmeme-li totiž okolí 0 definované jako $U := \{x \in X : \|x\| < \frac{1}{2}\}$ (sup-norma), je $U \cap \{e_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ a tedy $\overline{\mathrm{conv}}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) = \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$, z čehož plyne $0 \in \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$.

Problém: Platí $\overline{\text{str ext}X} = \bigcap\{M : M \subset X, M \text{ uzavřená}, X = \overline{\mathrm{conv}}(M)\}$, tj. je množina $\overline{\text{str ext}X}$ maximální množina splňující závěr Věty 7.3?

Obálky funkcí

Podívejme se nyní na důležitý nástroj používaný v kompaktní teorii, obálky funkcí, v kontextu nekompaktních množin.

Definice 7.5. Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Pak definujeme

$$\overline{f}(x) := \inf\{g(x) : g \geq f, g \in A(X)\}.$$

Analogicky se definuje $\underline{f}$.

Základní vlastnosti obálek uvedené v následujícím lemmatu jsou stejné jako v kompaktní teorii a ani důkaz se nijak neliší, proto ho neuvádíme.

Lemma 7.6. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Nechť $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Pak $\overline{f}$ je omezená, konkávní a shora polospojitá funkce na X. Dále zobrazení $f \mapsto \overline{f}$ je sublineární na $\mathcal{C}_b(X)$, tj. pro každé $\lambda \geq 0$ a pro každé $f, g \in \mathcal{C}_b(X)$ platí $\overline{\lambda f} = \lambda \overline{f}$ a $\overline{f + g} \leq \overline{f} + \overline{g}$.*

Následující věta ani její důkaz se od kompaktní verze také neliší, jen je třeba uvažovat konečně aditivní míry místo Radonových, takže důkaz opět vynecháme. Důkaz kompaktní verze této věty lze nalézt v [15, str. 278], kde je tato věta uvedena v obecnější verzi pro funkční prostory.

Věta 7.7. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $x \in X$ a $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Pak*

$$[\underline{f}(x), \overline{f}(x)] = \left\{ \int_X f \, \mathrm{d}\mu \, : \, \mu \in \mathcal{M}^1(X), \mu \text{ reprezentuje } x \right\}.$$

Důležitou vlastností obálek funkcí, využívanou v kompaktní teorii, je rovnost

$$\mathrm{ext} K = \bigcap_{f \in C(K)} \{x \in K : f(x) = \overline{f}(x)\} = \bigcap_{\substack{f \in C(K) \\ f \text{ konvexní}}} \{x \in K : f(x) = \overline{f}(x)\},$$

kde K je konvexní kompakt (viz Větu 3.16). Jak ukazuje následující věta, toto tvrzení obecně pro nekompakty neplatí. Připomeňme, že množina str ext$X$ byla zavedena v Definici 6.6. První rovnost v této větě pochází od S. S. Khurany, viz. [13].

Věta 7.8. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak*

$$\mathrm{str\ ext} X = \bigcap_{f \in \mathcal{C}_b(X)} \{x \in X : f(x) = \overline{f}(x)\} = \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{C}_b(X) \\ f \text{ konvexní}}} \{x \in X : f(x) = \overline{f}(x)\}.$$

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{str\ ext} X$. Pak podle Věty 6.12 je ε_x jediný prvek $\mathcal{M}^1(X)$ reprezentující x a podle Věty 7.7 pro každou $f \in \mathcal{C}_b(X)$ platí $f(x) = \overline{f}(x)$. Máme tedy (druhá inkluze je zřejmá)

$$\mathrm{str\ ext} X \subset \bigcap_{f \in \mathcal{C}_b(X)} \{x \in X : f(x) = \overline{f}(x)\} \subset \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{C}_b(X) \\ f \text{ konvexní}}} \{x \in X : f(x) = \overline{f}(x)\}.$$

K dokončení důkazu stačí pro $x \notin \mathrm{str\ ext} X$ najít $f \in \mathcal{C}_b(X)$ konvexní takovou, že $f(x) \neq \overline{f}(x)$. Nechť tedy $x \notin \mathrm{str\ ext} X$, pak existuje U okolí bodu x takové, že $x \in \overline{\mathrm{conv}}(X \setminus U)$. Dále existují pseudonormy $p_1, \dots, p_n$ tak, že

$$\{y \in X : \max\{p_1(y-x), \dots, p_n(y-x)\} < 1\} \subset U.$$

Funkce

$$f(y) := \max\{p_1(y-x), \dots, p_n(y-x)\}$$

je konvexní (jelikož každá pseudonorma je konvexní a maximum konvexních funkcí je opět konvexní), leží v $\mathcal{C}_b(X)$ (je maximem spojitých funkcí) a platí $f(x) = 0$ a $f \geq 1$ na $X \setminus U$. Je-li $h \geq f$, $h \in A(X)$, pak $h \geq 1$ na

$X \setminus U$. Podle Lemmatu 6.11 je $h \geq 1$ na $\overline{\text{conv}}(X \setminus U)$, takže $h(x) \geq 1$. Tedy $\overline{f}(x) \geq 1 > 0 = f(x)$ a tudíž

$$x \notin \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{C}_b(X) \\ f \text{ konvexní}}} \{x \in X : f(x) = \overline{f}(x)\}.$$

□

Měřitelnost množiny str ext$X$

Jak jsme viděli, některé vlastnosti extremálních bodů kompaktních množin přebírají pro nekompaktní množiny silně extremální body. To samozřejmě není ve sporu s kompaktní teorií, jelikož pro kompaktní konvexní množinu X je str ext$X$ = ext$X$ (viz Poznámku 6.7). Nepřekvapí tedy, že tvrzení, podle kterého v metrizovatelném kompaktu je množina extremálních bodů typu G_δ, lze pro metrizovatelné nekompaktní množiny dokázat pro silně extremální body. Přitom pro extremální body takové tvrzení již neplatí, množina extremálních bodů nemusí být ani borelovská. Příklad takové množiny (dokonce slabě kompaktní podmnožiny Banachova prostoru) je uveden v [2, str. 214].

Věta 7.9. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E, která je navíc metrizovatelná. Pak* str ext$X$ *je množina typu G_δ.*

Důkaz. Nechť ρ je metrika na X generující topologii na X. Označme dále $U(x, r) := \{y \in X : \rho(y, x) < r\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$F_{n,x} := \overline{\text{conv}}(X \setminus U(x, \tfrac{1}{n})) \quad \text{a} \quad F_n := \textstyle\bigcap_{x \in X} F_{n,x}.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je F_n průnikem uzavřených množin, je to tedy uzavřená množina. Ukážeme-li, že str ext$X = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, bude ihned vidět, že množina str ext$X$ je typu G_δ.

Nechť $x \in$ str ext$X$. Pak z definice silně extremálního bodu plyne , že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x \notin \overline{\text{conv}}(X \setminus U(x, \frac{1}{n}))$ a tedy $x \notin F_n$. Pak ale $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Nechť $x \notin$ str ext$X$. Pak existuje okolí U bodu x tak, že $x \in \overline{\text{conv}}(X \setminus U)$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in \overline{\text{conv}}(X \setminus U(x, \frac{1}{n_0}))$. Pak platí $x \in F_{2n_0}$. Je-li totiž $y \in X$ takové, že $x \in U(y, \frac{1}{2n_0})$, pak z trojúhelníkové nerovnosti $U(y, \frac{1}{2n_0}) \subset U(x, \frac{1}{n_0})$ a tedy $x \in \overline{\text{conv}}(X \setminus U(y, \frac{1}{2n_0}))$. Je-li $y \in X$ takové, že $x \notin U(y, \frac{1}{2n_0})$, pak samozřejmě $x \in \overline{\text{conv}}(X \setminus U(y, \frac{1}{2n_0}))$. Je tedy $x \in F_{2n_0,y}$ pro každé $y \in X$ a tedy $x \in \bigcap_{y \in X} F_{2n_0,y} = F_{2n_0}$. Takže $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. □

Choquetovo uspořádání

Zmiňme se nakonec krátce o Choquetově uspořádání v nekompaktním kontextu. Stejně jako v kompaktní teorii, i v nekompaktní hraje důležitou roli, viz. například knihy [2] či [21]. Choquetovo uspořádání se, podobně jako u Choquet-Bishop-de Leeuwovy věty z kompaktní teorie, využívá k hledání měr, které leží v jistém smyslu na extremálních bodech dané množiny. Jelikož uzavřené, omezené a konvexní množiny nemusejí mít žádné extremální body, uvažují se užší třídy množin s tak zvanou Radon-Nikodýmovou vlastností (viz. opět knihu [2]), které jich již mají dostatek. Tato problematika již ale přesahuje rámec této práce.

Definice 7.10. Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu, \nu \in \mathcal{M}_t^1(X)$. Pak píšeme $\mu \prec \nu$, platí-li $\mu(f) \leq \nu(f)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_b(X)$, která je konvexní. Relace $\prec$ se nazývá *Choquetovo uspořádání.*

Následující větu uvedeme bez důkazu, lze jej najít v [21, str. 30].

Věta 7.11. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Pak relace $\prec$ je částečné uspořádání na množině $\mathcal{M}_t^1(X)$.*

Následující věta vyjadřuje intuitivně jasnou skutečnost, že míry větší v Choquetově uspořádání jsou "vyhnány více do stran". Ve Winklerově knize [21, str. 57] je pro úplné lokálně konvexní prostory uvedeno mnohem obecnější tvrzení, které ale vyžaduje poněkud komplikovaný důkaz. Winkler dokazuje, že pokud μ, ν jsou pravděpodobnostní tight míry na úplném lokálně konvexním prostoru splňující $\mu \prec \nu$, a je-li M tzv. *measure convex* množina taková, že ν je nesena množinou M (v tom smyslu, že $\nu_*(M) = 1$), pak je jí nesena i míra μ. Přitom *measure convex* množiny jsou takové množiny, že každá tight míra na nich definovaná má v této množině těžiště. Speciálně takové množiny jsou vždy konvexní. Omezíme-li se pouze na inkluzi uzavřených konvexních obalů nosičů těchto měr, nepotřebujeme jednak podmínku úplnosti a navíc si vystačíme s důkazem o poznání jednodušším. Nosič tight míry byl definován v Definici 4.13.

Věta 7.12. *Nechť X je uzavřená, omezená a konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E a nechť $\mu, \nu \in \mathcal{M}_t^1(X)$ a $\mu \prec \nu$. Pak*

$$\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \mu) \subset \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \nu).$$

Důkaz. Nechť pro spor neplatí $\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \mu) \subset \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \nu)$, tedy nechť existuje bod $x \in \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \mu)$ tak, že $x \notin \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt} \nu)$. Podle separační verze

Hahn-Banachovy věty pak existuje $\varphi \in E^*$ a $a \in \mathbb{R}$ takové, že $\varphi(x) > a$ a $\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt}\nu) \subset \{\varphi \leq a\}$. Definujme $f := \max\{\varphi - a, 0\}$. Pak $f \in \mathcal{C}_b(X)$ a f je konvexní funkce. Jelikož $f = 0$ na množině $\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt}\nu)$, je $\nu(f) = 0$. Protože $\mu \prec \nu$, dostáváme přímo z definice Choquetova uspořádání, že $\mu(f) \leq \nu(f) = 0$ a jelikož $f \geq 0$, je $\mu(f) \geq 0$, takže $\mu(f) = 0$. Odtud dostáváme, že $\operatorname{supt}\mu \subset \{f = 0\}$ a jelikož množina $\{f = 0\}$ je uzavřená a konvexní, je také $\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supt}\mu) \subset \{f = 0\}$. To je ale spor s volbou bodu x. $\square$

Přehled nejpoužívanějších symbolů

$\mathbb{N}$ . . . . množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$ . . . . množina reálných čísel
$f|_Y$ . . . . restrikce funkce f na množinu Y
$\mathcal{C}(T)$ . . . . prostor spojitých funkcí na T
$\mathcal{C}_b(T)$ . . . . Banachův prostor spojitých omezených funkcí na T
$A(M)$ . . . . afinní funkce na M
χ_A . . . . charakteristická funkce množiny A
$\operatorname{conv}(M)$ . . . . konvexní obal množiny M
$\overline{\operatorname{conv}}(M)$ . . . . uzavřený konvexní obal množiny M
B_X . . . . uzavřená jednotková koule v prostoru X
E^* . . . . topologický duál prostoru E
ω . . . . slabá topologie
$x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$ . . . . konvergence ve slabé topologii
ω^* . . . . slabá* topologie
$\varphi_\alpha \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ . . . . konvergence ve slabé* topologii
c_0 . . . . posloupnosti reálných čísel konvergujících k nule
c_{00} . . . . posloupnosti reálných čísel s konečným počtem nenulových členů
l^1 . . . . absolutně sčítatelné posloupnosti reálných čísel
l^∞ . . . . omezené posloupnosti reálných čísel
$M(K)$ . . . . znaménkové Radonovy míry na kompaktu K
$M^+(K)$ . . . . (nezáporné) Radonovy míry na kompaktu K
$M^1(K)$ . . . . pravděpodobnostní Radonovy míry na kompaktu K
$\mathcal{M}(T)$ . . . . znaménkové baireovské míry na T
$\mathcal{M}^+(T)$ . . . . (nezáporné) baireovské míry na T
$\mathcal{M}_\sigma(T)$ . . . . σ-aditivní míry na T
$\mathcal{M}_\tau(T)$ . . . . τ-aditivní míry na T
$\mathcal{M}_t(T)$ . . . . tight míry na T
$\mathcal{M}^1(T)$ . . . . pravděpodobnostní baireovské míry na T
$\mathcal{M}^1_\sigma(T)$ . . . . pravděpodobnostní σ-aditivní míry na T
$\mathcal{M}^1_\tau(T)$ . . . . pravděpodobnostní τ-aditivní míry na T
$\mathcal{M}^1_t(T)$ . . . . pravděpodobnostní tight míry na T
$\|\mu\|$ . . . . norma míry μ
ε_x . . . . Diracova míra v bodě x
$\operatorname{ext} X$ . . . . extremální body množiny X
$\operatorname{str\,ext} X$ . . . . silně extremální body množiny X

Reference

[1] A. D. Alexandrov, *Additive set-functions in abstract spaces*, a) Mat. Sb. **8** (50) (1940), 307–348. b) Mat. Sb. **9** (51) (1941), 563–628. c) Mat. Sb. **13** (55) (1943), 169–238.

[2] R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým property*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 993, 1983.

[3] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, *Noncompact Simplexes in Banach spaces with the Radon-Nikodým Property*, J. Funct. Anal. **23** (1976), 162–176.

[4] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1958.

[5] G. A. Edgar, *A Noncompact Choquet Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 354–358.

[6] G. A. Edgar, *Extremal Integral Representations*, J. Funct. Anal. **23** (1976), 145–161.

[7] P. Habala, P. Hájek, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces I*, Matfyzpress, Praha, 1996.

[8] G. Choquet, *Lectures on Analysis II*, W. A. Benjamin, Inc., (1969).

[9] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, (1955).

[10] S. S. Khurana, *Measures and barycenters of measures on convex sets in locally convex spaces, I*, J. Math. Anal. Appl., **27** (1969), 103–115.

[11] S. S. Khurana, *Measures and barycenters of measures on convex sets in locally convex spaces, II*, J. Math. Anal. Appl., **28** (1969), 222–229.

[12] S. S. Khurana, *Barycenters, Extreme Points, and Strongly Extreme Points*, Math. Ann. **198** (1972), 81–84.

[13] S. S. Khurana, *Barycenters, Pinnacle Points, and Denting Points*, Trans. Amer. Math. Soc., **180** (1973), 497–503.

[14] S. S. Khurana, *Characterization of Extreme Points*, J. London Math. Soc. (2), **5** (1972), 102–104.

[15] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Univerzita Karlova, Praha, 2003.

[16] P. Mankiewicz, *A remark on Edgar's extremal integral representation theorem*, Studia Math. (3) **63** (1978), 259–265.

[17] E. Marczewski, R. Sikorski, *Measures in non-separable metric spaces*, Colloq. Math. **I-2** (1948), 133–139.

[18] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem, 2. ed.*, Springer-Verlag, 2001.

[19] V. S. Varadarajan, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **48** (1965), 161–220.

[20] R. F. Wheeler, *A survey of Baire measures and strict topologies*, Expo. Math. **2** (1983), 97–190.

[21] G. Winkler, *Choquet Order and Simplices*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 1145, 1985.