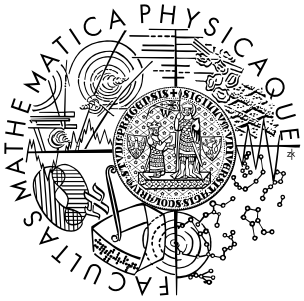
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martina Ullrichová

Interpolace a zhlazování pomocí splinů

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce : Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Ráda bych na tomto místě poděkovala panu docentu Najzarovi za přínosné konzultace a poskytnutou literaturu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 20.6.2007 Martina Ullrichová

Obsah

1 Abstraktní interpolační spliny **5**
1.1 Interpolační úloha 5
1.2 Podmínky existence a jednoznačnosti 5
1.3 Konstrukce 8
1.4 Algoritmus konstrukce 9
1.5 Příklady 11

2 Abstraktní zhlazující spliny **19**
2.1 Zhlazující úloha 19
2.2 Podmínky existence a jednoznačnosti 20
2.3 Vztahy mezi interpolačními a zhlazujícími spliny 22
2.4 Konstrukce zhlazujících splinů 28
2.5 Algoritmus konstrukce zhlazujících splinů 31
2.6 Výběr parametru zhlazování 32
2.7 Algoritmus konstrukce zhlazujícího parametru 41
2.8 Příklady 42

Literatura **52**

Název práce: Interpolace a zhlazování pomocí splinů
Autor: Martina Ullrichová
Katedra (ústav): Katedry numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedoucího: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci jsou definovány obecně abstraktní spliny na Hilbertových prostorech. Nejprve jsou definovány spliny interpolační. Dále jsou odvozeny podmínky jejich existence a jednoznačnosti, je popsána jejich konstrukce a sestaven algoritmus pro jejich nalezení. Poté jsou zavedeny spliny zhlazující. Opět jsou určeny podmínky jejich existence a jednoznačnosti, provede se srovnání interpolačních a zhlazujících splinů s ohledem na zhlazující parametr. Je ukázán algoritmus konstrukce zhlazujících splinů pro daný zhlazující parametr, ale také algoritmus pro nalezení vhodného zhlazujícího parametru. Nakonec se na ukázkovém příkladě dané typy splinů zkonstruují a porovnají.

Klíčová slova: interpolace, zhlazování, spline

Title: Spline inerpolation and smoothing.
Author: Martina Ullrichová
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the submitted work there are defined generally abstract splines on a Hilbert space. At first there are defined the interpolation splines. There are derived the conditions of their existence and unicity, described their construction and made the algorithm to find them. Then there are defined the smoothing splines and again derived the conditions of their existence and unicity. Then there are compared the interpolation and smoothing splines considering the smoothing parameter. There are present the algorithm of contruction of smoothing splines for a given smoothing parameter and also the algorithm to find a suitable smoothing parameter. At last there are constructed and compared given types of splines on sample example.

Keywords: inerpolation, smoothing, spline

Kapitola 1

Abstraktní interpolační spliny

1.1 Interpolační úloha

Mějme Hilbertovy prostory X, Y, Z a spojité lineární operátory $A : X \longrightarrow Z$ a $T : X \longrightarrow Y$. Operátor T se nazývá energetický a operátor A interpolační. Prostor Z je obvykle konečně rozměrný Euklidův prostor.

Nechť $z \in Z$ je zadaný vektor dat. Našim úkolem je nalézt $y \in X$ tak, aby platilo :

$$\|Ty\|_Y^2 = \min_{x \in A^{-1}z} \{\|Tx\|_Y^2\}.$$

Pokud takové y existuje, nazývá se abstraktní **interpolační spline**.

1.2 Podmínky existence a jednoznačnosti

Nechť $z \in Z$ je zadaný vektor dat. Nechť existuje prvek $x_0 \in X$, pro který platí $Ax_0 = z$. Buď $N(A)$ jádro operátoru A, pak $x \in A^{-1}z$ právě tehdy, když existuje takové $u \in N(A)$, že lze psát $x = x_0 + u$, to znamená :

$$x \in A^{-1}z \Longleftrightarrow x = x_0 + u, \quad u \in N(A).$$

A tedy $\|Tx\|_Y = \|T(x_0 + u)\|_Y = \|Tx_0 + Tu\|_Y$ pro $x \in A^{-1}z$.

Nechť ρ je metrika generovaná skalárním součinem Hilbertova prostoru Y. Pak

$$\|Tx\|_Y = \|Tx_0 + Tu\|_Y = \|Tx_0 - T(-u)\|_Y \geq$$
$$\geq \min_{v \in N(A)} \{\|Tx_0 - Tv\|_Y\} = \rho(Tx_0, T(N(A))).$$

Interpolační úlohu můžeme tedy formulovat takto :

Najít prvek $y \in X$, aby platilo :

$$\|Ty\|_Y = \rho(Tx_0, T(N(A))),$$

neboli určit ortogonální projekci prvku Tx_0 na prostor $T(N(A))$.

Z teorie ortogonálních projekcí na Hilbertových prostorech víme, že pro existenci takového prvku nám postačí uzavřenost prostoru $T(N(A))$. Naopak jednoznačnost získáme z předpokladu, že $N(A)$ a $N(T)$ mají společný pouze nulový prvke 0_X prostoru X.

Věta 1.1 *Nechť $T(N(A))$ je uzavřená množina v Y a platí $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$. Pak pro každé $z \in R(A)$ existuje jediný abstraktní interpolační spline $y \in X$, který interpoluje vektor z, neboli platí:*

$$Ay = z$$

$$\|Ty\|_Y = \min_{x \in A^{-1}z} \{\|Tx\|_Y\}$$

Pro každé $x \in A^{-1}z$ je splněna identita

$$\|Ty - Tx\|_Y^2 + \|Ty\|_Y^2 = \|Tx\|_Y^2$$

(tzv. zobecněná Pythagorova věta pro abstraktní interpolační spline.)

Důkaz :

Nejprve dokážeme existenci : Sestrojíme ortogonální projekci

$$P : Y \to T(N(A)).$$

Protože $z \in R(A)$, existuje $x_0 \in X$, že $Ax_0 = z$ a zároveň $x_0 \notin N(A)$. Nyní si označíme $Tu = PTx_0$ (projekce prvku Tx_0 na $T(N(A))$) a $Ty = Tx_0 - Tu$. Pak $\rho(Tx_0, T(N(A))) = \|Tx_0 - PTx_0\|_Y = \|Ty\|_Y$. A tím prvek $y = x_0 - u$ je námi hledaný interpolační spline.

Nyní dokážeme jednoznačnost : Z předchozího máme

$$Tu = PTx_0 \in T(N(A))$$

a tedy $u \in N(A)$. Předpokládejme, že existuje jiný prvek $v \in N(A)$ splňující $PTx_0 = Tv$. Potom $Tu = Tv$ a tím $T(u - v) = 0_Y$. Z toho plyne, že $(u - v) \in N(A) \cap N(T)$. Z předpokladu věty je $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$, a proto $u = v$.

Zobecněná Pythagorova věta : Zvolíme libovolně $x \in A^{-1}z$. Ortogonální projekci prvku Tx na $T(N(A))$ označíme $Tu = PTx$. Pak $Ty = Tx - PTx = = Tx - Tu$ a prvky Ty a $Tu = Tx - Ty$ jsou ortogonální a platí rovnost $(Ty, Tx - Ty)_Y = 0$.

K oběma stranám této rovnosti přičteme $-(Tx, Tx - Ty)$ a dostaneme

$$(Ty - Tx, Tx - Ty)_Y = -(Tx, Tx - Ty)_Y.$$

Odtud

$$\|Ty - Tx\|_Y^2 = \|Tx\|_Y^2 - (Tx, Ty)_Y = \|Tx\|_Y^2 - (Ty - Tu, Ty)_Y = \\ = \|Tx\|_Y^2 - \|Ty\|_Y^2 - (Tu, Ty)_Y \ .$$

Ale prvky Tu a Ty jsou na sebe ortogonální :

$$\|Ty - Tx\|_Y^2 + \|Ty\|_Y^2 = \|Tx\|_Y^2.$$

$\diamond$

Lemma 1.2 *Předpokládejme, že $R(T)$ je uzavřená v Y a $\dim N(T) < \infty$. Pak množina $T(N(A))$ je uzavřená v Y.*

Díky tomuto lemmatu jsme získali postačující podmínky pro uzavřenost $T(N(A))$ a tím i existenci abstraktního interpolačního splinu.

1.3 Konstrukce

Pro zjednodušení předpokládejme, že prostory X, Y, Z a operátory A, T splňují následující :

- $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$
- $Z = E_n$ (Euklidův prostor)
- $\dim N(T) = q < \infty$
- $R(T) = Y$ (množina $T(N(A))$ je uzavřená v Y , viz Lemma 1.2)

Potom operátor $A : X \to Z$ lze reprezentovat pomocí spojitých funkcionálů $x_i^* \in X^*$, $i = 1, .., n$. Platí $Ax = \{x_i^*(x)\}_{i=1}^n$ pro $x \in X$.

Podle Rieszovy věty o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu existuje ke každému $x_i^* \in X^*$, $i = 1, .., n$ jediný prvek $k_i \in X$, $i = 1, .., n$ takový, že $x_i^*(x) = (x, k_i)_X$ pro každe $x \in X$ a $\|x_i^*\|_{X^*} = \|k_i\|_X$.

Nechť $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in Z$ je zadaný vektor dat. Definujeme množinu :

$$M = \{x \in X : (x, k_i)_X = z_i, i = 1, .., n\} = \{x \in X : Ax = z\}.$$

Interpolační úlohu lze přeformulovat následujícím způsobem :
Nalezněte $y \in M$, aby platilo

$$\|Ty\|_Y^2 = \min_{x \in M} \{\|Tx\|_Y^2\}.$$

Označíme si $K = \mathtt{Span}\{k_i, i = 1, .., n\}$. Z věty 1.1 víme, že $Ty = Tx_0 - PTx_0$, kde P je ortogonální projekce na $T(N(A))$ a proto $Ty \in (T(N(A)))^\perp$.

Nyní ukážeme, že $K^\perp = N(A)$:
$a \in K^\perp \Leftrightarrow (a, k_i)_X = 0, \forall i = 1, .., n \Leftrightarrow Aa = 0 \Leftrightarrow a \in N(A)$.

Tím $Ty \in (T(N(A)))^\perp = (TK^\perp)^\perp$.

Definujme množinu $H = K \cap N(T)^\perp$. Z výše uvedených předpokladů je $\dim K = n$, $\dim N(T)^\perp = n - q$ a $K^\perp \cap N(T) = N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$. Odtud plyne $\dim H = n - q$.

Dále definujme adjungovaný operátor $T^* : X \to Y$ k operátoru T vztahem :

$$(Tx, u)_Y = (x, T^*u)_X, \quad x \in X, u \in Y.$$

Protože platí :
$s \in N(T^*) \Leftrightarrow (Tx, s)_Y = (x, T^*s)_X = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow s \in R(T)^\perp$,
dostáváme vztah $N(T^*) = R(T)^\perp = Y^\perp = \{0_Y\}$. Odtud plyne existence inverzního operátoru $(T^*)^{-1}$.

Nyní dokážeme rovnost $T^*(TK^\perp)^\perp = H$:
Zvolme $a \in T^*(TK^\perp)^\perp$. Pak $a \in R(T^*) = N(T)^\perp$.
Navíc existuje $b \in (TK^\perp)^\perp$ tak, že $a = T^*b$.
Pak $b \in (TK^\perp)^\perp \Leftrightarrow (b, v) = 0, \forall v \in TK^\perp \Leftrightarrow (b, Tw) = (T^*b, w) = 0$,
$\forall w \in K^\perp \Leftrightarrow (a, w) = 0, \forall w \in K^\perp \Leftrightarrow a \in K$.
Víme tedy $a \in N(T)^\perp \cap K = H$ pro libovolné $a \in T^*(TK^\perp)^\perp$.
Tím jsme dokázali $T^*(TK^\perp)^\perp = H$, neboli $(TK^\perp)^\perp = (T^*)^{-1}H$.

Z předchozího již víme $Ty \in (TK^\perp)^\perp$, což můžeme nyní ještě přepsat do tvaru

$$Ty \in (T^*)^{-1}(H).$$

Na základě toho lze již zapsat algoritmus konstrukce abstraktního interpolačního splinu.

1.4 Algoritmus konstrukce

Nechť $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in Z$ je zadaný vektor dat.

1. Sestrojíme $\{h_i\}_{i=1}^{n-q}$ bázi prostoru $H = K \cap N(T)^\perp$:

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} k_j \text{ a to tak, aby } h_i \perp N(T).$$

(Koeficienty $\alpha_{i,j}$ nejsou touto podmínkou určeny jednoznačně.)

2. Sestrojíme $f_i = (T^*)^{-1}(h_i) \in Y$ pro $i = 1, ..n - q$.

3. $Ty \in (T^*)^{-1}(H)$. Hledáme ho ve tvaru

$$Ty = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j f_j,$$

kde konstanty $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-q}$ získáme jako řešení soustavy rovnic

$$\sum_{j=1}^{n-q} (f_i, f_j)_Y \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} z_j, \qquad i = 1, .., n - q.$$

Ukážeme, že tento postup je správný :

Nechť máme $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-q}$, pro které platí $Ty = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j f_j$. Nyní z následujících rovností plyne, že tyto $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-q}$ jsou také řešením daných soustav rovnic:

$$\sum_{j=1}^{n-q} (f_i, f_j)_Y \lambda_j = (Ty, f_i)_Y = (y, T^* f_i)_X = (y, h_i)_X =$$

$$= (y, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} k_j)_X = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} (y, k_j)_X = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} z_j.$$

4. Abstraktní interpolační spline $y \in X$ získáme nyní takto :

$$y = T^{-1} f, \text{ kde } f = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j f_j.$$

Shrnutí :

a) Najdeme $\{h_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} k_j\}_{i=1}^{n-q}$ bázi prostoru$H$ a sestrojíme $\{f_i = (T^*)^{-1}(h_i)\}_{j=1}^{n-q}$.

b) Označíme si $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n-q}$, $A = \{(f_i, f_j)_Y\}_{j=1}^{n-q}$,
$B = \{\alpha_{i,j}, \quad i = 1, .., n - q, \quad j = 1, .., n\}$.

c) $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n-q}$ nalezneme řešením soustavy $A\lambda = Bz$
(v maticovém tvaru).

d) Potom $y = T^{-1}(\sum_{j=1}^{n-q} (\lambda_j f_j))$.

1.5 Příklady

Příklad 1.1 :

Nechť $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ je nerovnoměrné dělení intervalu $I = \langle a, b\rangle$:
$a = x_0 < x_1 < ... < X_{N+1} = b$. Označme $d_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, .., N$.
Zvolme $X = W^{2,2}(I)$ se skalárním součinem

$$(u, v)_X = \int_a^b u''(t)v''(t)dt + \int_a^b u(t)v(t)dt, \qquad u, v \in X$$

a prostory $Y = L^2(I)$, $Z = E_{N+2}$ (Euklidův prostor dimenze $N + 2$).
Operátory $T : X \to Y$ a $A : X \to Z$ definujeme předpisem :
$Tu = u''$, $Au = \{u(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$, pro $u \in X$.
Nalezněte abstraktní interpolační slpine y interpolující data z.

Řešení :

1. Zřejmě jsou splněny předpoklady věty 1.1 a proto pro každou funkci $f \in X$ existuje jediný abstraktní interpolační spline $s \in X$, pro který platí

   $$\|Ts\|_Y^2 = \min_{x \in A^{-1}z} \{\|Tx\|_Y^2\}.$$

   Navíc splňuje :

   - $s \in C^2_{\langle a,b\rangle}$
   - $s(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, .., N + 1$
   - $s''(a) = s''(b) = 0$
   - a na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle, \quad i = 0, .., N$ je funkce s kubický polynom.

   Jde tedy o přirozený kubický spline : $s \in Sp_2(\pi, 1)$.

2. Sestrojme $k_i \in X, \quad i = 1, .., N + 2$ tak, aby pro všechna $u \in X$ platilo $(u, k_i)_X = u(x_{i-1})$. Z teorie Lebesgueova integrálu plyne, že tyto funkce lze sestrojit tak, aby $k_i \in C^2(I)$.

   Pak $K = \mathbf{Span}\{k_i\}_{i=1}^{N+2}, \quad \dim K = N + 2.$

Protože $T : X \to Y$ je definováno jako $Tu = u''$, je zřejmě $N(T) = = \mathbf{Span}\{1, t\}$, a proto $\dim N(T) = q = 2$ a $\dim H = \dim K \cap N(T^\perp) = = (N+2) - q = N$.

Bázi $H = K \cap N(T^\perp)$ hledáme ve tvaru

$$h_i = \sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} k_j$$

pro $i = 1, .., N$ tak, aby $h_i \perp N(T)$. Z konstrukce plyne, že $h_i \in C^2(I)$.

Sestrojíme $f_i \in Y$ jako $f_i = (T^*)^{-1}(h_i)$ pro $i = 1, .., N$. Odtud

$$h_i = T^* f_i.$$

Již víme

$$(h_i, u)_X = (\sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} k_j, u)_X = \sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} (k_j, u)_X = \sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} u(x_{j-1})$$

a zároveň

$$(h_i, u)_X = (T^* f_i, u)_X = (f_i, Tu)_Y = \int_a^b f_i T u.$$

Dostáváme tak rovnost :

$$\sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} u(x_{j-1}) = \int_a^b f_i(t) T u(t) dt.$$

Využijeme toho, že námi hledaný abstraktní interpolační spline je přirozený kubický spline. Proto za funkce $\{f_i\}_{i=1}^N$ můžeme vzít bázové funkce prostoru $Sp_2(\pi, 1)$:

$$f_i = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - t}{d_i}, & t \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \ ; \\ \frac{t - x_{i-1}}{d_{i-1}}, & t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \ ; \\ 0, & \text{jinde} \ . \end{cases}$$

Dosadíme-li do naší rovnosti $\sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} u(x_{j-1}) = \int_a^b f_i(t) T u(t) dt$, získáme:

$$\sum_{j=1}^{N+2} \alpha_{i,j} u(x_{j-1}) = \int_a^b f_i(t) T u(t) dt = \int_a^b f_i(t) u''(t) dt =$$

$$= u(x_{i+1}) \frac{1}{d_i} - u(x_i)(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}}) + u(x_{i-1}) \frac{1}{d_{i-1}}.$$

A odtud obdržíme :

$$\alpha_{i,i} = \tfrac{1}{d_{i-1}},\ \alpha_{i,i+1} = -(\tfrac{1}{d_i} + \tfrac{1}{d_{i-1}}),\ \alpha_{i,i+2} = \tfrac{1}{d_i}$$
$$\text{a } \alpha_{i,j} = 0 \text{ pro } j \neq i,\ j \neq i+1,\ j \neq i+2.$$

3. Nyní už můžeme sestavit soustavu rovnic $A\lambda = Bz$.

   Mějme $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in Z$ zadaný vektor dat.

   Potom pro naše data dostáváme :

   - $A = \{(f_i, f_j)\}_{i,j=1}^N$:

   $$(f_i, f_i)_Y = \tfrac{d_{i-1}+d_i}{3}, \qquad i = 1, .., N$$
   $$(f_i, f_{i+1})_Y = (f_{i+1}, fi)_Y = \tfrac{d_i}{6}, \qquad i = 1, .., N-1$$

   Matice A je ve tvaru :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d_0+d_1}{3} & \frac{d_1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d_1}{6} & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \frac{d_{N-1}}{6} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{d_{N-1}}{6} & \frac{d_{N-1}+d_N}{3} \end{pmatrix}.$$

- $B = \{\alpha_{i,j}, \quad i = 1,..,N, \quad j = 1,..,N+2\}$:

  $\alpha_{i,i} = \frac{1}{d_{i-1}}, \quad \alpha_{i,i+1} = -(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i-1}}), \quad \alpha_{i,i+2} = \frac{1}{d_i} \qquad i = 1,..,N.$

  A matice B je ve tvaru :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1} & & & \vdots \\ \alpha_{3,1} & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \alpha_{N,N} \\ \vdots & & & \alpha_{N+1,N} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N+2,N} \end{pmatrix}.$$

Vyřešením soustavy $A\lambda = Bz$ získáme parametry

$$\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{N}.$$

Pak už můžeme určit abstraktní interpolační spline s jako

$$s = T^{-1}f = T^{-1}(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_f).$$

V našem konkrétním případě, pro $Tu = u''$, bude

$$s(t) = T^{-1}f(t) = \int F(t)dt,$$

kde $F(t) = \int f(t)dt$ je primitivní funkce.
Tedy jeli $f(t) = \frac{t-\xi}{\delta}$, potom

$$\int F(t)dt = \frac{(t-\xi)^3}{6\delta} + ct + e,$$

kde c, e jsou integrační konstanty.

Budeme pracovat postupně na jednotlivých intervalech :

$\langle x_0, x_1\rangle$ **:**

$$s(t) = T^{-1}(\sum \lambda_j f_j) = T^{-1}(\lambda_1 \tfrac{t-x_0}{d_0}) = \lambda_1 \tfrac{(t-x_0)^3}{6d_0} + ct + e,$$
kde $c = \tfrac{z_1-z_0}{d_0} - \lambda_1 \tfrac{d_0}{6}$ a $e = z_0 - cx_0$.

$\langle x_i, x_{i+1}\rangle, \quad i = 1, .., N-1$**:**

$$s(t) = T^{-1}(\lambda_i f_i + \lambda_{i+1} f_{i+1}) = T^{-1}(\lambda_i \tfrac{x_{i+1}-t}{d_i} + \lambda_{i+1} \tfrac{t-x_i}{d_i}) =$$
$$= \lambda_i \tfrac{(x_{i+1}-t)^3}{6d_i} + \lambda_{i+1} \tfrac{(t-x_i)^3}{6d_i} + ct + e,$$
kde $c = \tfrac{z_{i+1}-z_i}{h_i} + \tfrac{h_i(\lambda_i-\lambda_{i+1})}{6}$ a $e = z_i - cx_i - \tfrac{1}{6}\lambda_i h_i^2$.

$\langle x_N, x_{N+1}\rangle$ **:**

$$s(t) = T^{-1}(\lambda_N f_N) = T^{-1}(\lambda_N \tfrac{x_{N+1}-t}{d_N}) = \lambda_N \tfrac{(x_{N+1}-t)^3}{6d_N} + ct + e$$
kde $c = \tfrac{z_{N+1}-z_N}{d_N} - \lambda_N \tfrac{d_N}{6}$ a $e = z_{N+1} - cx_{N+1}$.

Výsledky :

- Budeme aproximovat funkci $f = sin(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 5\rangle$. Uvažujme ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s krokem $d_i = 1$. Dostáváme tak : $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

  Výsledek vidíme na obrázku 1.1.

- Interpolujeme opět funkci $sin(x)$, ale nyní vezměme neekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 7\rangle$ s kroky $d_i = \{1; 1.5; 0.5; 2; 2\}$. Dostáváme tak : $x = \{0; 1; 2.5; 3; 5; 7\}$.

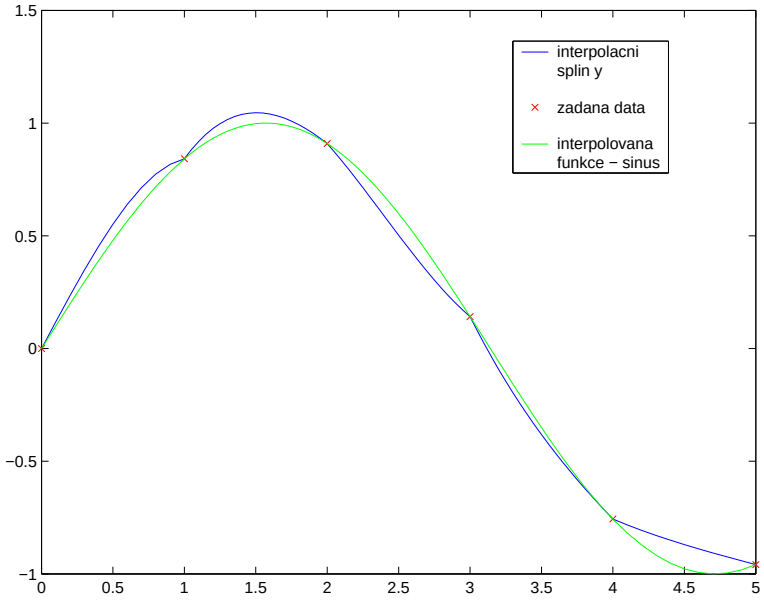
  Výsledek vidíme na obrázku 1.2.

- Nyní budeme interpolovat funkci e^x. Uvažujeme nejprve ekvidistantní dělění intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 5\rangle$ s krokem $d_i = 1$.
  Dostáváme : $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

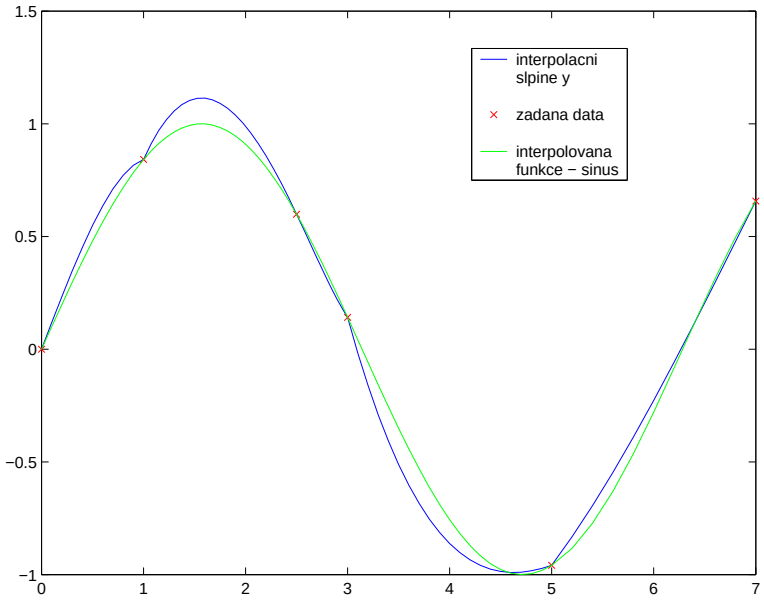
  Výsledek vidíme na obrázku 1.3.

- Interpolujeme znovu funkci e^x , tentokrát na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 7\rangle$ s kroky $d_i = \{1; 1.5; 0.5; 2; 2\}$.

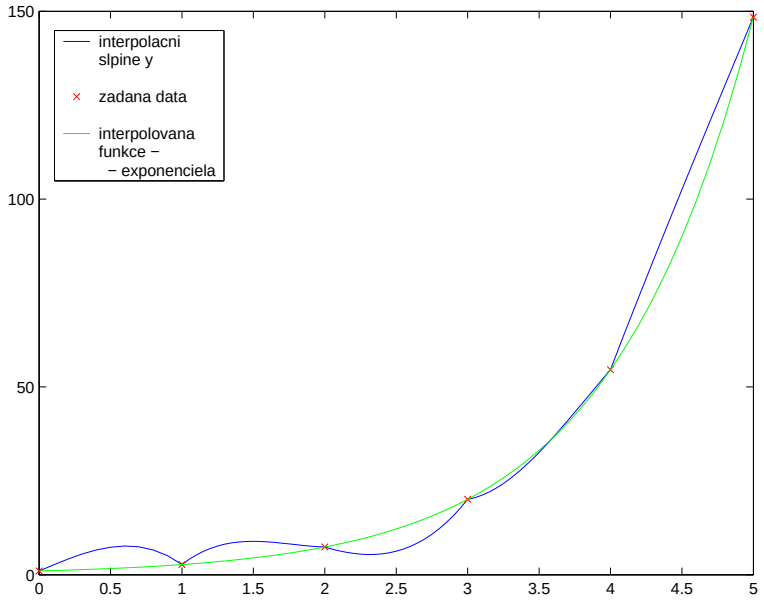
  Výsledek vidíme na obrázku 1.4.



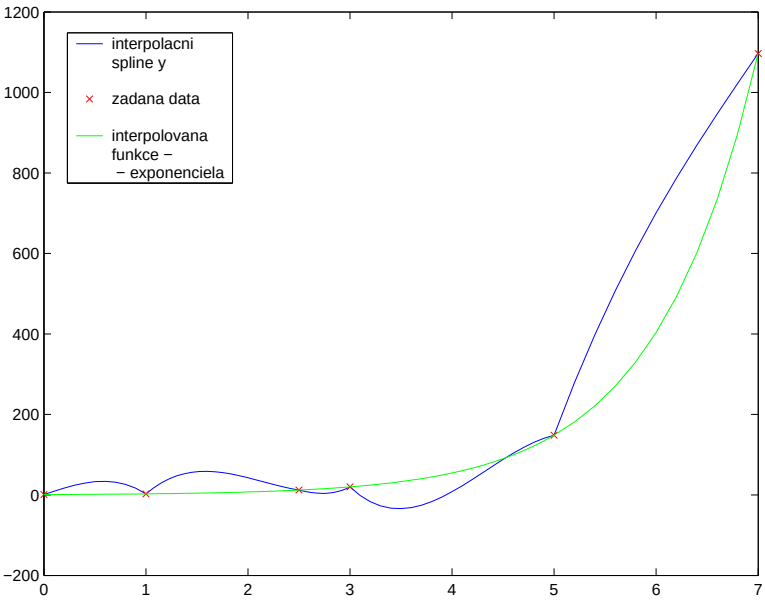
Obrázek 1.1: $f = sin(x)$, ekvidistantní dělení



Obrázek 1.2: $f = sin(x)$, neekvidistantní dělení



Obrázek 1.3: $f = e^x$, ekvidistantní dělení



Obrázek 1.4: $f = e^x$, neekvidistantní dělení

Kapitola 2

Abstraktní zhlazující spliny

2.1 Zhlazující úloha

Mějme Hilbertovy prostory X, Y, Z a spojité lineární operátory $A : X \to Z$ a $T : X \to Y$. Operátor T se nazývá energetický a operátor A interpolační. Prostor Z je obvykle konečně rozměrný Euklidův prostor.

Nechť $z \in Z$ je zadaný vektor dat a α je zvolené kladné číslo. Sestrojme funkcionál

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \|Ax - z\|_Z^2, \quad x \in X.$$

Naším úkolem je nalézt $y_\alpha \in X$ tak, aby platilo :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) = \min_{x \in X}\{\Phi_\alpha(x)\}.$$

Pokud takové y_α existuje, nazývá se abstraktní zhlazující spline a říkáme, že zhlazuje data $z \in Z$ se zhlazujícím faktorem α.

2.2 Podmínky existence a jednoznačnosti

Mějme Hilbertovy prostory X, Y, Z. Definujeme si prostor $F = [Y \times Z]$ jako kartézský součin prostorů Y, Z.
Prvky f prostoru $F = [Y \times Z]$ můžeme reprezentovat jako $f = [y, z]$, kde $y \in Y$ a $z \in Z$.

Na F si definujeme skalární součin :

$$(f_1, f_2)_F = \alpha(y_1, y_2)_Y + (z_1, z_2)_Z,$$

pro prvky $f_1 = [y_1, z_1] \in F$ a $f_2 = [y_2, z_2] \in F$.

Dále si definujeme operátor $L : X \to F$ předpisem :

$$Lx = [Tx, Ax], \quad x \in X.$$

Nechť $z \in Z$ je zadaný vektor dat. Označme si $a = [0_Y, z] \in F$, kde 0_Y je nulový prvek prostoru Y. Potom

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \|Ax - z\|_Z^2 = \alpha(Tx, Tx)_Y + (Ax - z, Ax - z)_Z =$$

$$= ([Tx, Ax - z], [Tx, Ax - z])_F = \|[Tx - 0_Y, Ax - z]\|_F^2 =$$

$$= \|[Tx, Ax] - [0_Y, z]\|_F^2 = \|Lx - a\|_F^2.$$

Zhlazující úlohu pak můžeme přeformulovat takto :
nalezněte $y_\alpha \in X$ tak, aby

$$\|Ly_\alpha - a\|_F = \min_{x \in X}\{\|Lx - a\|\}.$$

Zároveň víme, že $\min_{x \in X}\{\|Lx - a\|_F\} = \min_{x \in X}\{\|a - Lx\|_F\} = \min_{u \in R(L)}\{\|a - u\|_F\} =$
$= \rho_F(a, R(L))$, kde ρ_F je metrika na F indukovaná skalárním součinem $(.,.)_F$.

Hledáme tedy y_α, aby

$$\|Ly_\alpha - a\|_F = \rho_F(a, R(L)),$$

což znamená, že y_α je ortogonální projekcí prvku $a \in F$ na $R(L)$ v prostoru F.

Analogicky jako u abstraktních interpolačních splinů můžeme zformulovat větu o existenci a jednoznačnosti :

Věta 2.1 *: Nechť $R(L)$ je uzavřená množina v prostoru F a platí $N(A) \cap N(T) = \{0_Y\}$. Pak pro každé $z \in Z$ existuje jediný abstraktní zhlazující spline $y_\alpha \in X$, který zhlazuje data $z \in Z$, neboli platí*

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) = \min_{x \in X}\{\Phi_\alpha(x)\},$$

kde

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \|Ax - z\|_Z^2, \quad x \in X.$$

Pro každé $x \in X$ je splněna identita :

$$\alpha(Ty_\alpha, Tx)_Y + (Ay_\alpha - z, Ax - z)_Z = -(Ay_\alpha - z, z)_Z$$

(tzv. podmínka ortogonality pro zhlazující spline).

Důkaz :

Existence : Sestrojíme ortogonální projekci $Q : F \to R(L)$. Označíme si $g = Qa \in R(L)$ ortogonální projekci prvku $a = [0_Y, z] \in F$ na $R(L)$. Protože $R(L)$ je podle předpokladů věty uzavřená v F a projekce $Q : F \to R(L)$ je spojitá, existuje prvek $y_\alpha \in X$, že platí $Ly_\alpha = q$. Pro toto $y_\alpha \in X$ zároveň platí:

$$\|Ly_\alpha - a\|_F = \|g - a\|_F = \|Qa - a\|_F = \rho_F(a, R(L)).$$

$y_\alpha \in X$ je tudíž námi hledaný abstraktní zhlazující spline.

Jednoznačnost : Předpokládejme, že existuje další prvek $w \in X$, pro který platí : $g = Lw = [Tw, Aw]$. Pak $0 = Lw - Ly_\alpha = [Tw - Ty_\alpha, Aw - Ay_\alpha]$, neboli $T(w - y_\alpha) = A(w - y_\alpha) = 0$. Odtud $(w - y_\alpha) \in N(A) \cap N(T) = \{0_Y\}$ a proto $w = y_\alpha$.

Podmínka ortogonality pro zhlazující spline : $g = Qa \in R(L)$ je ortogonální projekce na $R(L)$, a proto $(a - Qa) = (a - g) \in R(L)^{\perp}$. Odtud pro každé $x \in X$ platí :

$$0 = (Qa - a, Lx)_F = (Ly_\alpha - a, Lx)_F =$$

$$= ([Ty_\alpha, Ay_\alpha - z], [Tx, Ax])_F = \alpha(Ty_\alpha, Tx)_Y + (Ay_\alpha - z, Ax)_Z.$$

K oběma stranám rovnosti přičteme $-(Ay_\alpha - z, z)_Z$ a dostaneme :

$$-(Ay_\alpha - z, z)_Z = \alpha(Ty_\alpha, Tx)_Y + (Ay_\alpha - z, Ax)_Z - (Ay_\alpha - z, z)_Z$$

$$= \alpha(Ty_\alpha, Tx)_Y + (Ay_\alpha - z, Ax - z)_Z.$$

$\diamond$

2.3 Vztahy mezi interpolačními a zhlazujícími spliny

Věta 2.2 *: Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.1 a věty 2.1. Pak pro každé $\alpha > 0$ je zhlazující spline $y_\alpha \in X$ (zhalzující data $z \in Z$) zároveň interpolačním splinem pro vstupní data $z_\alpha = Ay_\alpha$.*

Důkaz :

Nechť $z \in Z$ jsou zadaná data. Sestrojíme $y_\alpha \in X$ zhlazující spline pro $z \in Z$, a označíme $z_\alpha = Ay_\alpha \in Z$.
Nyní sestrojíme $y \in X$ interpolační spline pro $z_\alpha = Ay_\alpha \in Z$. Pro ten platí :

$$\|Ty\|_Y^2 = \min_{x \in A^{-1}z_\alpha} \{\|Tx\|_Y^2\}.$$

Protože $y_\alpha \in X$ je zhlazující spline pro $z \in Z$, platí pro něj :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) \leq \Phi_\alpha(y) = \alpha\|Ty\|_Y^2 + \|Ay - z\|_Z^2.$$

Nyní využijeme toho, že $\|Ty\|_Y^2 = \min_{x \in A^{-1}z_\alpha} \{\|Tx\|_Y^2\}$, tudíž $\|Ty\|_Y^2 \leq \|Ty_\alpha\|_Y^2$, a že $Ay = z_\alpha = Ay_\alpha$. Pokračujeme v odhadech :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) \leq \Phi_\alpha(y) = \alpha\|Ty\|_Y^2 + \|Ay - z\|_Z^2 \leq \alpha\|Ty_\alpha\|_Y^2 + \|Ay_\alpha - z\|_Z^2 = \Phi_\alpha(y_\alpha).$$

Dostáváme tak $\Phi_\alpha(y_\alpha) \leq \Phi_\alpha(y) \leq \Phi_\alpha(y_\alpha)$. Odtud $y_\alpha = y$.

Z jednoznačnosti interpolačního splinu plyne, že y_α je abstraktní interpolační spline pro $z_\alpha = Ay_\alpha$.

$\diamond$

Věta 2.3 *: Předpokládejme, že obor hodnot $R(T) = Y$, $\dim N(T) = q < \infty$, obor hodnot $R(A) = Z$, $\dim Z = n$ a $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$. Zvolme $z \in Z$. Předpokládejme, že existuje konečně rozměrný podprostor X_0 v prostoru X tak, že pro každé $\alpha > 0$ je $y_\alpha \in X_0$ a $y \in X_0$, kde y je abstraktní interpolační spline a y_α je abstraktní zhlazující spline. Pak $y_\alpha \to y$ silně pro $\alpha \to 0_+$ a $\|Ay_\alpha - z\|_Z^2 = O(\alpha)$.*

Důkaz :

Jsou splněny předpoklady věty 1.1 a věty 2.1, a proto bude existovat právě jeden interpolační spline y a právě jeden zhlazující spline y_α pro každé $\alpha > 0$.

Sestrojíme posloupnost $\{\alpha_n\}_{n\in Z}$, $\alpha_n > 0$ tak, aby $\alpha_n \to 0$. Označme si $y_n = y_{\alpha_n}$ příslušné zhlazující spliny.
Využijeme-li vlastností interpolačních a zhlazujících splinů, dostaneme :

$$\Phi_\alpha(y_n) = \alpha_n \|Ty_n\|_Y^2 + \|Ay_n - z\|_Z^2 \leq$$

$$\leq \Phi_\alpha(y) = \alpha_n \|Ty\|_Y^2 + \|Ay - z\|_Z^2 = \alpha_n \|Ty\|_Y^2.$$

Odtud získáme dvě důležité nerovnosti :

$$(*) \qquad \|Ty_n\|_Y^2 \leq \|Ty\|_y^2$$

$$(**) \qquad \|Ay_n - z\|_Z^2 \leq \alpha_n \|Ty\|_y^2$$

Z druhé nerovnosti obdržíme

$$\|Ay_n - z\|_Z^2 = O(\alpha_n),$$

což jsme chtěli dokázat (poslední část věty).

Nyní zbývá dokázat silnou konvergenci zhlazujících splinů y_n k interpolačnímu splinu y pro $n \to \infty$, neboli $\alpha_n \to 0$.

Budeme chtít ukázat ohraničenost množiny $\{y_n\} \subset X$.
Nechť $y_n^{(1)}$ je ortogonální projekce prvku y_n na podprostor $N(T)$ a $y_n^{(2)}$ projekce na $N(T)^\perp$. Pak $y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$.

Zbytek důkazu si rozdělíme do 3 kroků :

1. Nejprve si ukážeme ohraničenost množiny

$$\{y_n^{(2)}\}_{n\in N} \subset X :$$

Označíme $T_2 : N(T)^\perp \to Y$ zúžení operátoru T na úplný podprostor $N(T)^\perp \subset X$.
Potom $R(T_2) = Y$ a $N(T_2) = \{0_X\}$. Operátor T_2 je tedy prostý a na a existuje inverzní operátor T_2^{-1}, který je spojitý a lineární. T_2 je izomorfismus, a proto existuje konstanta $c > 0$ tak, že :

$$\|T_2 u\|_Y \geq c\|u\|_X,\ u \in X.$$

Odtud pro $y_n^{(2)} \in X$:

$$c\|y_n^{(2)}\|_X \leq \|T_2 y_n^{(2)}\|_Y.$$

Z vlastností T_2 a rozkladu $y = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$ máme $\|T_2 y_n^{(2)}\|_Y = \|Ty_n\|_Y$ a zároveň platí $(*) \quad \|Ty_n\|_Y \leq \|Ty\|_Y$. Proto platí :

$$c\|y_n^{(2)}\|_X \leq \|T_2 y_n^{(2)}\|_Y = \|Ty_n\|_Y \leq \|Ty\|.$$

Označíme-li $C = \frac{\|Ty\|_Y}{c}$, pak

$$\|y_n^{(2)}\|_X \leq C, \quad \forall n \in N.$$

Tím jsme získali ohraničenost množiny $\{y_n^{(2)}\}_{n\in N}$.

2. Nyní se podíváme na množinu

$$\{y_n^{(1)}\}_{n\in N} \subset X :$$

Použijeme opět nerovnost $(**)$ $\|Ay_n - z\|_Z^2 \leq \alpha_n \|Ty\|_Y^2$, kterou ještě upravíme (využijeme přitom nerovnosti $|a+b|_Z \geq ||a|_Z - |b|_Z|$, $a, b \in Z = E_n$) :

$$\alpha_n \|Ty\|_Y^2 \geq$$

$$\geq \|Ay_n - z\|_Z^2 = \|A(y_n^{(2)} + y_n^{(1)}) - z\|_Z^2 = \|Ay_n^{(1)} + (Ay_n^{(2)} - z)\|_Z^2 \geq$$

$$\geq |\|Ay_n^{(1)}\|_Z - \|Ay_n^{(2)} - z\|_Z|^2.$$

Po odmocnění tak získáme :

$$| \quad \|Ay_n^{(1)}\|_Z - \|Ay_n^{(2)} - z\|_Z| \leq \|Ty\|_Y \sqrt{\alpha_n},$$

a odtud pak :

$$\|Ay_n^{(1)}\|_Z \leq \|Ay_n^{(2)} - z\|_Z + \|Ty\|_Y \sqrt{\alpha_N} \leq$$

$$\leq \|z\|_Z + \|A\| \cdot \|y_n^{(2)}\| + \|Ty\|_Y \sqrt{\alpha_N}.$$

Označíme-li $C_1 = \|z\|_Z + C\|A\| + \sqrt{\alpha_N}\|Ty\|_Y$, potom :

$$\|Ay_n^{(1)}\|_X \leq C_1, \quad \forall n \in N$$

Protože $N(T)$ je konečně dimenzionální, můžeme sestrojit jeho ortonormální bázi $\{v_i\}_{i=1}^q$. Pak $y_n^{(1)} \in N(T)$ lze vyjádřit jako

$$y_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{q} \beta_i v_i$$

a zároveň $\|y_n^{(1)}\|_X^2 = \sum\limits_{i=1}^{q} |\beta_i|^2$.

Nyní využijeme předpokladu $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$. Díky němu ukážeme, že množina $\{Av_i\}_{i=1}^q \subset Z$ je lineárně nezávislá:

Důkaz provedeme sporem:

Předpokládejme, že existuje posloupnost čísel $\{s_i\}_{i=1}^q$,

kde $\sum_{i=1}^{q} s_i \neq 0$ a zároveň $\sum_{i=1}^{q} s_i A v_i = 0_Z$

(neboli $\{Av_i\}_{i=1}^q$ je lineárně závislá).

Potom z předchozího platí :

$$\sum_{i=1}^{q} s_i A v_i = A(\sum_{i=1}^{q} s_i v_i),$$

kde $\{v_i\}_{i=1}^q$ je báze $N(T)$, takže $(\sum_{i=1}^{q} s_i v_i) \in N(T)$

a $(\sum_{i=1}^{q} s_i v_i) \neq 0_X$.

Odtud a s využitím předpokladu $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$ je

$$\sum_{i=1}^{q} s_i v_i \notin N(A),$$

a tudíž $A(\sum_{i=1}^{q} s_i v_i) = \sum_{i=1}^{q} s_i A v_i \neq 0_Z$, což je spor s předpokladem lineární závislosti $\{Av_i\}_{i=1}^q$.

Nyní využijeme právě dokázané lineární nezávislosti $\{Av_i\}_{i=1}^q \subset Z$ a spojitosti operátoru $A : X \to Z$. Odtud plyne existence konstant $c_1, c_2 > 0$, pro které platí:

$$c_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{q} |\beta_i|^2} \leq \|A y_n^{(1)}\|_Z \leq c_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{q} |\beta_i|^2}$$

Z výše dokázaných vlastností $\|y_n^{(1)}\|_X^2 = \sum_{i=1}^{q} |\beta_i|^2$ a $\|Ay_n^{(1)}\|_X \leq C_1$ dostáváme :

$$\|y_n^{(1)}\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} |\beta_i|^2} \leq \frac{\|Ay_n^{(1)}\|_X}{c_1} \leq \frac{C_1}{c_1}.$$

Tím jsme dokázali ohraničenost $\{y_n^{(1)}\}_{n \in N}$.

3. V předchozích dvou krocích jsme ukázali ohraničenost $\{y_n^{(1)}\}_{n\in N}$ a $\{y_n^{(2)}\}_{n\in N}$. Jelikož $y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$, je i množina $\{y_n\}_{n\in N}$ ohraničená v X.

   Z předpokladů víme, že $y_n \in X_0$, kde X_0 je konečně dimenzionální podprostor X.

   Z ohraničenosti $\{y_n\}_{n\in N}$ a konečné dimenze X_0 plyne existence vybrané konvergentní podposloupnosti $\{y_{n_1}\}$. Její limitu si označíme y^*.

   Již víme, že $\|Ay_n - z\|_Z^2 = O(\alpha_n) \to 0$. Odtud

   $$Ay^* = z.$$

   Využijeme opět nerovnost $(*)$ $\quad \|Ty_n\|_Y^2 \le \|Ty\|_Y^2$. Limitním přechodem obdržíme :

   $$\|Ty^*\|_Y^2 \le \|Ty\|_Y^2.$$

   Ale y je abstraktní interpolační spline, neboli

   $$\|Ty\|_Y^2 = \min_{x\in A^{-1}z}\{\|Tx\|_Y^2\} = \|Ty^*\|_Y^2.$$

   Odtud y^* je abstraktní interpolační spline, a z jednoznačnosti $y = y^*$.

   Toto platí pro libovolnou konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{y_n\}$ a tudíž i pro všechny její hromadné body.

Tím jsme dokázali, že $y_\alpha \to y$ silně pro $\alpha \to 0_+$.

$\diamond$

Bez důkazu uvedeme ještě jednu větu o konvergenci zhlazujících splinů k interpolačnímu splinu pro $\alpha \to 0$, tentokrát se slabšími předpoklady.

V případě interpolačních a zhlazujících polynomiálních splinů jsou však splněny silnější předpoklady právě dokázané věty 2.3.

Věta 2.4 *: Předpokládejme, že obor hodnot $R(T)$ je uzavřený v prostoru Y, $\dim N(T) < \infty$, obor hodnot $R(A)$ je uzavřený v prostoru Z a $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$. Zvolme $z \in R(A)$ a sestrojme interpolační spline $y \in X$ a zhlazující spline $y_\alpha \in X$ pro $\alpha > 0$.*
Pak $y_\alpha \to y$ slabě pro $\alpha \to 0_+$ a $\|Ay_\alpha - z\|_Z^2 = O(\alpha)$.

2.4 Konstrukce zhlazujících splinů

Nechť je zadán vektor $z \in Z$ a zhlazující parametr $\alpha > 0$.
Pro zjednodušení budeme opět předpokládat (analogicky jako u interpolačních splinů, kapitola 1.3) :

- $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$
- $Z = E_n$ (Euklidův prostor)
- $\dim N(T) = q < \infty$
- $R(T) = Y$ (množina $T(N(A))$ je uzavřená v Y, viz Lemma 1.2)

Potom operátor $A : X \to Z$ lze reprezentovat pomocí spojitých funkcionálů $x_i^* \in X^*$, $i = 1, .., n$. Platí $Ax = \{x_i^*(x)\}_{i=1}^n$ pro $x \in X$.

Podle Rieszovy věty o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu existuje ke každému $x_i^* \in X^*$, $i = 1, .., n$ jediný prvek $k_i \in X$, $i = 1, .., n$ takový, že $x_i^*(x) = (x, k_i)_X$ pro každe $x \in X$ a $\|x_i^*\|_{X^*} = \|k_i\|_X$. Odtud :

$$Ax = \{(x, k_i)_X\}_{i=1}^n, \quad k_i \in X, \quad x \in X.$$

Zhlazující úlohu formulujeme takto :
nalezněte $y_\alpha \in X$ tak, aby $\Phi_\alpha(y_\alpha) = \min\{\Phi_\alpha(x); \quad x \in X\}$,
kde $\Phi_\alpha(x) = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \sum_{i=1}^{n}((x, k_i) - z_i)^2, \quad x \in X.$

Využijeme větu 2.2, podle které je zhlazující spline y_α interpolačním splinem pro vstupní data $z_\alpha = Ay_\alpha$, neboli :

$$\|Ty_\alpha\|_Y^2 = \min\{\|Tx\|_Y^2; \quad x \in M\},$$

kde $M = \{x \in X : \{(x, k_i)_X\}_{i=1}^n = z_\alpha\} = \{x \in X : Ax = z_\alpha\}$.

Použijeme algoritmus konstrukce abstraktního interpolačního splinu popsaný v kapitole 1.4 :

$$y_\alpha = T^{-1}(\sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^\alpha f_j).$$

Koeficienty $\lambda^\alpha = \{\lambda_i^\alpha\}_{i=1}^{n-q}$ jsou řešením soustavy rovnic $A\lambda^\alpha = Bz_\alpha$.

Hodnoty $z_\alpha \in Z$ neznáme, ale nalezneme je pomocí vlastnosti, že $\Phi_\alpha(x)$ nabývá svého minima v bodě y_α :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) = \alpha\|Ty_\alpha\|_Y^2 + \|Ay_\alpha - z\|_{E_n}^2.$$

Výraz $\|Ty_\alpha\|_Y^2$ rozepíšeme, a obdržíme :

$$\|Ty_\alpha\|_Y^2 = (Ty_\alpha, Ty_\alpha)_Y = (\sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i^\alpha f_i, \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^\alpha f_j)_Y = \sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i^\alpha \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^\alpha (f_i, f_j)_Y.$$

Protože $A = \{(f_i, f_j)_Y\}_{i,j=1}^{n-q}$, můžeme psát $\|Ty_\alpha\|_Y^2 = (A\lambda^\alpha, \lambda^\alpha)_{E_{n-q}}$.

Dosadíme opět do $\Phi_\alpha(x)$ v bodě y_α :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) = \alpha\|Ty_\alpha\|_Y^2 + \|Ay_\alpha - z\|_{E_n}^2 = \alpha(A\lambda^\alpha, \lambda^\alpha)_{E_{n-q}} + \|z_\alpha - z\|_{E_n}^2.$$

S využitím vztahu $A\lambda^\alpha = Bz_\alpha$ upravíme skalární součin $(A\lambda^\alpha, \lambda^\alpha)_{E_{n-q}}$:

$$(A\lambda^\alpha, \lambda^\alpha)_{E_{n-q}} = (Bz_\alpha, A^{-1}Bz_\alpha)_{E_{n-q}} = (z_\alpha, B^*A^{-1}Bz_\alpha)_{E_{n-q}},$$

kde $B^* : E_n \to E_{n-q}$ je adjungovaný operátor k operátoru $B : E_{n-q} \to E_n$, neboli transponovaná matice k matici B.

Označíme-li $C = B^*A^{-1}Bz_\alpha$, pak z předchozího platí :

$$\Phi_\alpha(y_\alpha) = \alpha(Cz_\alpha, z_\alpha)_{E_n} + \|z_\alpha - z\|_{E_n}^2.$$

Navíc C je symetrická pozitivně definitní matice řádu $n \times n$.

Definujeme

$$\Psi(z_\alpha) = \alpha(Cz_\alpha, z_\alpha)_{E_n} + \|z_\alpha - z\|_{E_n}^2 \quad (= \Phi_\alpha(y_\alpha)),$$

kvadratický funkcionál na E_n.

Má-li mít Φ_α minimum v y_α, pak musí Ψ mít své minimum v z_α.

Ale protože Ψ je kladný a symetrický, platí :
Ψ nabývá svého minima v z_α právě tehdy, když

$$(\Psi'(z_\alpha))(w) = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(z_\alpha + tw) - \Psi(z_\alpha)}{t} = 0, \quad \forall w \in E_n.$$

Budeme tento vztah dále upravovat:

$$(\Psi'(z_\alpha))(w) = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(z_\alpha + tw) - \Psi(z_\alpha)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\alpha(C(z_\alpha+tw), z_\alpha+tw)_{E_n} + \|(z_\alpha+tw)-z\|^2_{E_n} - \alpha(Cz_\alpha, z_\alpha)_{E_n} - \|z_\alpha - z\|^2_{E_n}] =$$

$$= \lim_{t\to 0}[\alpha(Cz_\alpha, w)_{E_n} + \alpha(Cw, z_\alpha)_{E_n} + 2(z_\alpha - z, w)_{E_n} + t((Cw, w)_{E_n} + \|w\|^2_{E_n})] =$$

$$= 2\alpha(Cz_\alpha, w)_{E_n} + 2(z_\alpha - z, w)_{E_n} = 2(w, \alpha Cz_\alpha + z_\alpha - z)_{E_n}.$$

Chceme , aby $(\Psi'(z_\alpha))(w) = 0$ pro $\forall w \in E_n$, což znamená, že platí

$$(w, \alpha Cz_\alpha + z_\alpha - z)_{E_n} = 0,$$

pro $\forall w \in E_n$. Tato identita platí právě tehdy, když $\alpha Cz_\alpha + z_\alpha - z = 0_{E_n}$.
Neboli :

$$z_\alpha = z - \alpha Cz_\alpha.$$

Upravujeme-li dál, obdržíme :

$$z_\alpha = z - \alpha Cz_\alpha = z - \alpha(B^*A^{-1}B)z_\alpha = z - \alpha B^*A^{-1}(bz_\alpha) = z - \alpha B^*A^{-1}(A\lambda^\alpha)$$

$$z_\alpha = z - \alpha B^*\lambda^\alpha$$

Dosadíme do $A\lambda^\alpha = Bz_\alpha$ a upravujeme :

$$A\lambda^\alpha = Bz_\alpha = Bz - \alpha BB^*\lambda^\alpha$$

$$\lambda^\alpha(A - \alpha BB^*) = Bz$$

2.5 Algoritmus konstrukce zhlazujících splinů

Nechť $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in Z$ je zadaný vektor dat, $\alpha > 0$ zvolený parametr.

1. Sestrojíme $\{h_i\}$, $i = 1, .., n-q$ bázi prostoru $H = K \cap N(T)^\perp$:

   $$h_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} k_j \text{ a to tak, aby } h_i \perp N(T).$$

   (Koeficienty $\alpha_{i,j}$ nejsou touto podmínkou určeny jednoznačně.)

2. Sestrojíme $f_i = (T^*)^{-1}(h_i) \in Y$ pro $i = 1, .., n-q$.

3. $Ty \in (T^*)^{-1}(H)$. Hledáme ho tedy ve tvaru

   $$Ty_\alpha = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^\alpha f_j,$$

   kde konstanty $\{\lambda_j^\alpha\}_{j=1}^{n-q}$ získáme jako řešení soustavy rovnic

   $$(A + \alpha BB^*)\lambda^\alpha = Bz,$$

   kde $A = \{(f_i, f_j)_Y\}_{i,j=1}^{n-q}$, $B = \{\alpha_{i,j}; i = 1, .., n-q, j = 1, .., n\}$.

4. Abstraktní zhlazující spline $y_\alpha \in X$ získáme nyní takto :

   $$y_\alpha = T^{-1} f \text{ , kde } f = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^\alpha f_j \text{ .}$$

2.6 Výběr parametru zhlazování

Mějme vektor $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in Z$. Předpokládejme, že operátory A, T a prostory X, Y, Z splňují předpoklady věty 2.1 . Platí tedy :

- $N(A) \cap N(T) = \{0_X\}$
- $Z = E_n$ (Euklidův prostor)
- $\dim N(T) = q < \infty$
- $R(T) = Y$

Operátor $A : X \to Z$ lze opět reprezentovat pomocí spojitých funkcionálů, a ty pak podle Riszovy věty pomocí prvků $x_i^* \in X^*$, $i = 1, .., n$ takových, že $x_i^*(x) = (x, k_i)_X$ a $\|x_i^*\|_{X^*} = \|k_i\|_X$. Odtud :

$$Ax = \{(x, k_i)_X\}_{i=1}^n, \quad k_i \in X, \quad x \in X.$$

Pro zhlazování je důležitý výběr zhlazujícího parametru $\alpha > 0$. Nejběžnějším kritériem výběru tohoto parametru je , aby funkce

$$\varphi(\alpha) = (\sum_{i=1}^{n} [(y_\alpha, k_i)_X - z_i]^2)^{1/2} = \|Ay_\alpha - z\|_Z = \|z_\alpha - z\|_Z,$$

reprezentující odchylku zadaných dat z od abstraktních interpolačních hodnot Ay_α zhlazujícího splinu y_α v normě prostoru Z, nabývala předem dané hodnoty ε.

Nejprve stanovíme interval $\langle 0, \varepsilon_0 \rangle$, aby pro každé $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ existovalo právě jedno řešení α splňující $\varphi(\alpha) = \varepsilon$:

Najdeme analytický tvar tvar funkce φ. Z předchozího víme $z_\alpha = z - \alpha B^* \lambda^\alpha$, odtud pak $z_\alpha - z = -\alpha B^* \lambda^\alpha$ a proto :

$$\varphi(\alpha) = \|z_\alpha - z\|_Z = \alpha \|B^* \lambda^\alpha\|_Z.$$

Navíc z konstrukce koeficienů λ^α máme :

$$(A + \alpha BB^*)\lambda^\alpha = Bz$$

$$\lambda^\alpha = (A + \alpha BB^*)^{-1}Bz$$

Dosadíme-li zpět do tvaru funkce φ, dostaneme :

$$\varphi(\alpha) = \alpha\|B^*\lambda^\alpha\|_Z = \alpha\|B^*(A + \alpha BB^*)^{-1}Bz\|_Z.$$

Uvažujme zobecněný problém vlastních čísel :

Hledáme vektory $v_i \in E_{n-q}$, aby pro ně existovala příslušná vlastní čísla λ_i, splňující :

$$BB^*v_i = \lambda_i Av_i.$$

Protože matice BB^* a A jsou pozitivně definitní a symetrické matice řádu $n - q$, existuje $n - q$ vlastních čísel λ_i.
Navíc příslušné vlastní vektory $v_i \in E_{n-q}$ jsou ortogonální vzhledem k energetickému skalárnímu součinu, to znamená :

$$[v_i, v_j]_A = (Av_i, v_j)_{E_{n-q}} = \delta_{i,j}.$$

Nyní můžeme sestrojit rozvoj Bz vzhledem k vektorům Av_i :

$$Bz = \sum_{i=1}^{n-q} b_i Av_i.$$

Navíc víme : $(Bz, v_i)_{E_{n-q}} = (\sum_{j=1}^{n-q} b_j Av_j, v_i)_{E_{n-q}} = \sum_{j=1}^{n-q} b_j (Av_j, v_i)_{E_{n-q}} = b_i.$
Odtud získáme vyjádření koeficientů b_i :

$$b_i = (Bz, v_i)_{E_{n-q}}.$$

Nyní se opět vrátíme k řešením našeho problému zobecněných vlastních čísel, pro něž platí :

$$BB^*v_i = \lambda_i Av_i, \text{ kde } i = 1, .., n - q.$$

Budeme-li tuto rovnost upravovat, dostaneme postupně :

$$BB^*v_i = \lambda_i A v_i$$
$$A^{-1}BB^*v_i = A^{-1}\lambda_i A v_i$$
$$\alpha A^{-1}BB^*v_i = \alpha\lambda_i v_i$$
$$v_i + \alpha A^{-1}BB^*v_i = v_i + \alpha\lambda_i v_i$$
$$(I + \alpha A^{-1}BB^*)v_i = (1 + \alpha\lambda_i)v_i$$
$$(I + \alpha A^{-1}BB^*)^{-1}v_i = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_i}v_i$$

Získali jsem tedy dvě důležité rovnosti :

$$Bz = \sum_{i=1}^{n-q} b_i A v_i, \text{ kde } b_i = (Bz, v_i)_{E_{n-q}}$$

$$\text{a } (I + \alpha A^{-1}BB^*)^{-1}v_i = \tfrac{1}{1+\alpha\lambda_i}v_i.$$

Ty nyní dosadíme do tvaru funkce φ :

$$\varphi(\alpha) = \alpha\|B^*(A+\alpha BB^*)^{-1}Bz\|_Z = \alpha\|B^*(I+\alpha A^{-1}BB^*)^{-1}A^{-1}\sum_{i=1}^{n-q} b_i A v_i\|_Z =$$

$$= \alpha\|B^*\sum_{i=1}^{n-q} b_i(I + \alpha A^{-1}BB^*)^{-1}v_i\|_Z = \alpha\|B^*\sum_{i=1}^{n-q}\frac{b_i v_i}{1 + \alpha\lambda_i}\|_Z$$

Pro druhou mocninu funkce φ pak platí :

$$\varphi^2(\alpha) = \alpha^2\|B^*\sum_{i=1}^{n-q}\frac{b_i v_i}{1 + \alpha\lambda_i}\|_Z^2 = \alpha^2\|\sum_{i=1}^{n-q}\frac{b_i}{1 + \alpha\lambda_i}B^*v_i\|_Z^2 =$$

$$= \alpha^2(\sum_{j=1}^{n-q}\frac{b_j}{1 + \alpha\lambda_j}B^*v_j, \sum_{i=1}^{n-q}\frac{b_i}{1 + \alpha\lambda_i}B^*v_i)_Z =$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-q} \sum_{j=1}^{n-q} \frac{b_i}{1+\alpha\lambda_i} \cdot \frac{b_j}{1+\alpha\lambda_j} (B^* v_j, B^* v_i)_Z =$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-q} \sum_{j=1}^{n-q} \frac{b_i}{1+\alpha\lambda_i} \cdot \frac{b_j}{1+\alpha\lambda_j} (BB^* v_j, v_i)_Z =$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-q} \sum_{j=1}^{n-q} \frac{b_i}{1+\alpha\lambda_i} \cdot \frac{b_j}{1+\alpha\lambda_j} \lambda_i (Av_j, v_i)_Z =$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-q} \frac{\lambda_i b_i^2}{(1+\alpha\lambda_i)^2}.$$

Položíme-li $p = \frac{1}{\alpha}$ a $\Psi(p) = \varphi(\frac{1}{p}) = \varphi(\alpha)$, dostaneme :

$$\Psi^2(p) = \varphi^2(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n-q} \frac{\lambda_i b_i^2}{(1+\frac{1}{p}\lambda_i)^2} = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{\lambda_i b_i^2}{(p+\lambda_i)^2}.$$

Odtud je vidět, že funkce $\frac{1}{\Psi(p)}$ je pro $p \in \langle 0, +\infty \rangle$ ostře rostoucí a nabývá hodnot $\langle \frac{1}{\Psi(0)}, +\infty)$ a navíc

$$\varphi(\alpha) = \varepsilon \Leftrightarrow \Psi(p) = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\Psi(p)} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Řešení je jednoznačné pokud $\frac{1}{\varepsilon} \in \langle \frac{1}{\Psi(0)}, +\infty)$, což znamená :

$$\varepsilon \in \langle 0, \Psi(0) \rangle, \text{ neboli } \varepsilon_0 = \Psi(0) = \lim_{p \to 0} \Psi(p).$$

Po dosazení dostaneme :

$$\Psi^2(0) = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{\lambda_i b_i^2}{\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{b_i^2}{\lambda_i}.$$

Využijeme toho, že $b_i = (Bz, v_i)_{E_{n-q}}$ a $\lambda_i = \|B^* v_i\|_Z^2$:

$$\Psi^2(0) = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{b_i^2}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{(Bz, v_i)_Z^2}{\|B^* v_i\|_Z^2} = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{(z, B^* v_i)_Z^2}{\|B^* v_i\|_Z^2} = \sum_{i=1}^{n-q} (z, \frac{B^* v_i}{\|B^* v_i\|_Z})_Z^2.$$

Označíme si $e_i = \frac{B^* v_i}{\|B^* v_i\|_Z}$, pak

$$\Psi^2(0) = \sum_{i=1}^{n-q} (z, e_i)_Z.$$

Navíc pro $\{e_i\}_{i=1}^{n-q}$ platí :

$$\|e_i\| = 1$$
$$(e_i, e_j) = (\tfrac{B^* v_i}{\|B^* v_i\|_Z}, \tfrac{B^* v_j}{\|B^* v_j\|_Z}) = \tfrac{(BB^* v_i, v_j)}{\|B^* v_i\|_Z \|B^* v_j\|_Z} = \tfrac{\lambda_i (A v_i, v_j)}{\|B^* v_i\|_Z \|B^* v_j\|_Z} = 0$$

A proto $\{e_i\}_{i=1}^{n-q}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $R(B^*)$.

Ukážeme, že $R(B^*) = N(B)^\perp$:

Buď $a \in R(B^*)$, potom existuje $s \neq 0$, že $B^* s = a$.

Pro každé $t \in N(B)$ platí : $(a, t) = (B^* s, t) = (s, Bt) = (s, 0) = 0$, což je ekvivalentní s podmínkou, že $a \in N(B)^\perp$.

Odtud $\{e_i\}_{i=1}^{n-q}$ tvoří bázi $R(B^*) = N(B)^\perp$.

Již víme $\Psi^2(0) = \sum\limits_{i=1}^{n-q} (z, e_i)_Z$. Označíme-li P ortogonální projekci

$$P : Z \to R(B^*),$$

kde $\dim R(B^*) = n - q$, pak

$$\Psi^2(0) = \sum_{i=1}^{n-q} (z, e_i)_Z = \|Pz\|^2_{E_{n-q}},$$

neboli

$$\Psi(0) = \|Pz\|_{E_{n-q}} = \rho(z, R(B^*)^\perp) = \rho(z, N(B)).$$

Nechť $\{u_i\}_{i=1}^{n-q}$ tvoří bázi $N(T)$. Označme $f^{(i)} = Au_i = \{(u_i, k_j)_X\}_{j=1}^{n}$. Nyní platí :

$$Bf^{(i)} = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(u_i, k_j)_X\}_{i=1}^{n-q} = \{(u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} k_j)_X\}_{i=1}^{n-q} = \{(u_i, h_i)_X\}_{i=1}^{n-q},$$

kde $h_i \in H = K \cap N(T)^{\perp}$ (využijeme konstrukci abstraktního interpolačního splinu z první kapitoly), a proto $h_i \perp u_i$ a

$$Bf^{(i)} = \{0_{E_{n-q}}\}.$$

Odtud dostáváme, že $F = \{f^{(i)}\}_{i=1}^{q}$ tvoří bázi $N(B)$, a proto libovolný prvek $s \in N(B)$ lze vyjádřit jako :

$$s = \sum_{i=1}^{q} a_i f^{(i)} = \sum_{i=1}^{q} a_i \{(u_i, k_j)_X\}_{j=1}^{n},$$

kde $\{u_i\}_{i=1}^{q}$ tvoří bázi $N(T)$, a proto

$$s = \sum_{i=1}^{q} a_i \{(u_i, k_j)_X\}_{j=1}^{n} = \{(\sum_{i=1}^{q} a_i u_i, k_j)\}_{j=1}^{n} = \{(v, k_j)\}_{i=1}^{n},$$

kde $v \in N(T)$.

Využíjeme-li tvaru operátoru $Ax = \{(x, k_i)_X\}_{i=1}^{n}$, dostaneme tak :

$$s = \{(v, k_j)_X\}_{j=1}^{n} = Av.$$

Vrátíme se zpět k funkci Ψ:

$$\Psi(0) = \rho(z, N(B)) = \min_{s \in N(B)} \|z - s\|_Z =$$

$$= \min_{s \in N(B)} (\sum_{j=1}^{n} |z_j - s_j|^2)^{1/2} = \min_{v \in N(T)} (\sum_{j=1}^{n} |z_j - (v, k_j)_X|^2)^{1/2}.$$

Hledáme tedy $u \in N(T)$, které tento vztah minimalizuje. Vyjádříme si ho ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_i.$$

A odtud již

$$\Psi(0) = \min_{s \in N(B)} \|z - s\| = \min_{v \in N(T)} \|z - Av\| = \min_{\beta} \|z - A \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_i\| =$$

$$= \min_{\beta} \|z - \sum_{i=1}^{q} \beta_i A u_i\| = \min_{\beta} \|z - \sum_{i=1}^{q} \beta_i f^{(i)}\| = \min_{\beta} \|z - F\beta\|.$$

Hledáme tedy vektor $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^{q}$, který tento vztah minimalizuje. Označme si

$$\xi(\beta) = \Psi^2(0) = \|z - F\beta\|_Z^2,$$

kladný, symetrický, kvadratický funkcionál definovaný na E_q.

Potom ξ má v bodě β své minimum právě tehdy, když je derivace ξ v tomto bodě nulová, tj. :

$$\xi'(\beta)w = \lim_{t \to 0} \frac{\xi(\beta + tw) - \xi(\beta)}{t} = 0, \qquad \forall w \in E_q.$$

Neboli musí platit :

$$\xi'(\beta)w = \lim_{t \to 0} \frac{\xi(\beta + tw) - \xi(\beta)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\|z - F(\beta + tw)\|_Z^2 - \|z - F\beta\|_Z^2) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(z - F\beta, z - F\beta) - (Ftw, z - F\beta) - (z - F\beta, Ftw) +$$

$$+ (Ftw, Ftw) - (z - F\beta, z - F\beta)] =$$

$$= \lim_{t \to 0}[-(Fw, z - F\beta) - (z - F\beta, Fw) + t\|Fw\|] =$$

$$= -2(Fw, z - F\beta) = 0,$$

čili požadujeme

$$(Fw, z - F\beta) = (w, F^*(z - F\beta)) = 0$$

pro $\forall w \in E_q$, což znamená:

$$F^*(z - F\beta) = 0.$$

Koeficienty $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^q$ tedy získáme jako řešení soustavy rovnic :

$$F^*F\beta = F^*z.$$

Dosadíme postupně zpátky : $u = \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_i$

$$\varepsilon_0 = \|Au - z\|_Z.$$

Mohou nastat tři případy :

1. Jestliže $\varepsilon_0 = 0$, pak $Au = z$ a současně $u \in N(T)$. Proto $y_\alpha = y$ pro každé $\alpha > 0$, kde y je abstraktní interpolační spline.

2. Pokud je $\varepsilon > \varepsilon_0 \neq 0$, pak neexistuje parametr $\alpha > 0$, aby $\varphi(\alpha) = \varepsilon$.

3. Pro libovolné $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0\rangle$, kde $\varepsilon \neq 0$, existuje právě jedno $\alpha > 0$ takové, že $\|Ay_\alpha - z\|_Z = \varepsilon$, kde y_α je abstraktní zhlazující spline.

   Toto $\alpha > 0$ určíme pomocí Newtonovy metody řešením rovnice

   $$\tfrac{1}{\Psi(p)} = \tfrac{1}{\varepsilon}, \quad p = \tfrac{1}{\alpha}$$

   Zvolíme libovolně počáteční aproximaci $p_0 > 0$ a sestrojíme posloupnost Newtonových iterací $\{p_k\}$:

   $$p_{k+1} = p_k - \frac{\Psi^{-1}(p_k) - \varepsilon^{-1}}{[\Psi^{-1}(p)]'(p_k)}.$$

Dosadíme-li :

$$p = \frac{1}{\alpha}$$
$$\Psi(p) = \varphi(\alpha)$$
$$\Psi'(p) = \varphi'(\alpha)(-\alpha^2)$$
$$\Psi^{-1}(p) = \varphi^{-1}(\alpha)$$
$$[\Psi^{-1}(p)]'(p_k) = -\Psi'(p_k)\Psi^{-2}(p_k) = -\varphi^{-2}(\alpha_k)\varphi'(\alpha_k)(-\alpha_k^2)$$

obdržíme tak :

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_k} - \frac{\varphi^{-1}(\alpha_k) - \varepsilon^{-1}}{\varphi^{-2}(\alpha_k)\varphi'(\alpha_k)\alpha_k^2}$$
$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k^2\varphi'(\alpha_k)}{\alpha_k\varphi'(\alpha_k) - \varphi(\alpha_k) + \varphi^2(\alpha_k)\varepsilon^{-1}}.$$

Chybí nám už tedy jen vyjádření $\varphi'(\alpha)$. Připomeneme si, že :

$\varphi(\alpha) = \alpha\|B^*\lambda^\alpha\|$, kde λ^α je řešením rovnice $(A + \alpha BB^*)\lambda^\alpha = Bz$.

Odtud

$$\varphi'(\alpha) = \|B^*\lambda^\alpha\|_Z + \alpha(\|B^*\lambda^\alpha\|_Z)'.$$

Hledáme tedy derivaci normy vektoru $B^*\lambda^\alpha$.
Obecně pro $x \in Z = E_n$ platí $(\|x\|)' = \frac{(x,x')}{\|x\|}$, konkrétně :

$$(\|B^*\lambda^\alpha\|_Z)' = \frac{(B^*\lambda^\alpha, (B^*\lambda^\alpha)')_Z}{\|B^*\lambda^\alpha\|_Z},$$

$$(B^*\lambda^\alpha)' = (B^*(A+\alpha BB^*)^{-1}Bz)' = -B^*(A+\alpha BB^*)^{-2}BzBB^* = B^*\lambda_1^\alpha,$$

kde $\lambda_1^\alpha = -(A + \alpha BB^*)^{-2}BzBB^* = -(A + \alpha BB^*)^{-1}\lambda^\alpha BB^*$, neboli řeší soustavu :

$$(A + \alpha BB^*)\lambda_1^\alpha = -\lambda^\alpha BB^*.$$

Nyní již můžeme zapsat algoritmus konstrukce abstraktního zhlazujícího splinu :

2.7 Algoritmus konstrukce zhlazujícího parametru

1. Zvolíme bázi $\{u_i\}_{i=1}^q$ prostoru $N(T)$ a sestrojíme

$$f^{(i)} = Au_i = \{(u_i, k_j)_X\}_{j=1}^n \text{ pro } i = 1, .., q.$$

2. Sestrojíme matici

$$F = \{f^{(1)}, f^{(2)}, .., f^{(q)}\}.$$

Pak F je řádu $n \times q$ a její sloupce tvoří vektory $f^{(i)}$.

3. Sestrojíme prvek

$$u = \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_i,$$

kde $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^q$ je řešením rovnice

$$F^* F\beta = F^* z.$$

4. Spočteme hodnotu

$$\varepsilon_0 = \|Au - z\|_Z = (\sum_{i=1}^{n} [(u, k_i)_X - z_i]^2)^{1/2}.$$

Pokud $\varepsilon_0 = 0$, pak $y_\alpha = y$ pro každé $\alpha > 0$, kde y je abstraktní interpolační spline.

Je-li $\varepsilon_0 \neq 0$, pak zvolíme $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ a pokračujeme v řešení rovnice

$$\varphi(\alpha) = \varepsilon$$

pomocí Newtonovy metody.

5. Zvolíme $\alpha_0 > 0$, $k_0 \in N$. Postupně počítáme jednotlivé iterace α_k pro $k = 1, .., k_0$ podle předpisu :

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k^2 \varphi'(\alpha_k)}{\alpha_k \varphi'(\alpha_k) - \varphi(\alpha_k) + \varphi^2(\alpha_k)\varepsilon^{-1}}$$

kde

$$\varphi(\alpha) = \alpha \|B^* \lambda^\alpha\|_Z$$

$$\varphi'(\alpha) = \|B^* \lambda^\alpha\|_Z + \frac{\alpha (B^* \lambda_1^\alpha, B^* \lambda^\alpha)_Z}{\|B^* \lambda^\alpha\|_Z}$$

přičemž λ^α a λ_1^α jsou řešením rovnic

$$(A + \alpha BB^*)\lambda^\alpha = Bz$$

$$(A + \alpha BB^*)\lambda_1^\alpha = -\lambda_1^\alpha BB^*$$

Hledaný parametr α aproximujeme hodnotou α_{k_0}.

2.8 Příklady

Příklad 2.1 :

Nechť $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ je nerovnoměrné dělení intervalu $I = \langle a, b \rangle$:
$a = x_0 < x_1 < ... < X_{N+1} = b$. Označme $d_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, .., N$.

Zvolme $X = W^{2,2}(I)$ se skalárním součinem

$$(u, v)_X = \int_a^b u''(t)v''(t)dt + \int_a^b u(t)v(t)dt, \qquad u, v \in X$$

a prostory $Y = L^2(I)$, $Z = E_{N+2}$ (Euklidův prostor dimenze $N + 2$).

Operátory $T : X \to Y$ a $A : X \to Z$ definujeme předpisem :
$Tu = u''$, $Au = \{u(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$, pro $u \in X$.

a) Nalezněte abstraktní zhlazující slpine zhlazující data z s parametrem α.

b) Stanovte interval $\langle 0, \varepsilon_0 \rangle$, aby pro každé $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ existovalo právě jedno řešení α splňující $\varphi(\alpha) = \|Ay_\alpha - z\|_Z = \varepsilon$. Určete hodnotu ε_0.

Řešení :

a) Jsou splněny předpoklady věty 2.1:
Hledaný zhlazující spline $s \in Y$ bude přirozený kubický spline :

$$s \in Sp_2(\pi, 1)$$

Matice A a B sestavíme obdobně jako v příkladě 1.1 :

- $A = \{(f_i, f_j)\}_{i,j=1}^N$:

$$(f_i, f_i)_Y = \frac{d_{i-1} + d_i}{3}, \qquad i = 1, .., N$$

$$(f_i, f_{i+1})_Y = (f_{i+1}, fi)_Y = \frac{d_i}{6}, \qquad i = 1, .., N-1$$

kde funkce $\{f_i\}_{i=1}^N$ jsou bázové funkce prostoru $Sp_2(\pi, 1)$:

$$f_i = \begin{cases} \frac{x_{i+1}-t}{d_i}, & t \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \ ; \\ \frac{t-x_{i-1}}{d_{i-1}}, & t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \ ; \\ 0, & \text{jinde .} \end{cases}$$

Matice A je tedy ve tvaru :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d_0+d_1}{3} & \frac{d_1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d_1}{6} & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \frac{d_{N-1}}{6} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{d_{N-1}}{6} & \frac{d_{N-1}+d_N}{3} \end{pmatrix}.$$

- $B = \{\alpha_{i,j}, \quad i = 1, .., N, \quad j = 1, .., N+2\}$:

  $$\alpha_{i,i} = \frac{1}{d_{i-1}}, \quad \alpha_{i,i+1} = -(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i-1}}), \quad \alpha_{i,i+2} = \frac{1}{d_i} \qquad i = 1, .., N.$$

  Matice B je tedy tvaru :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1} & & & \vdots \\ \alpha_{3,1} & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \alpha_{N,N} \\ \vdots & & & \alpha_{N+1,N} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N+2,N} \end{pmatrix}.$$

Vyřešením soustavy

$$(A + \alpha BB^*)\lambda^\alpha = Bz$$

získáme parametry $\lambda^\alpha = \{\lambda_j^\alpha\}_{j=1}^N$.
Potom abstraktní zhalzující spline najdeme jako

$$s = T^{-1}f = T^{-1}(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^\alpha f_j).$$

V našem konkrétním případě, pro $Tu = u''$, bude

$$s(t) = T^{-1}f(t) = \int F(t)dt,$$

kde $F(t) = \int f(t)dt$ je primitivní funkce.
Tedy jeli $f(t) = \frac{t-\xi}{\delta}$, potom

$$\int F(t)dt = \frac{(t-\xi)^3}{6\delta} + ct + e,$$

kde c, e jsou integrační konstanty.

K určení $s(t)$ budeme potřebovat také vektor $z_\alpha \in Z$:

$$z_\alpha = z - \alpha B^* \lambda^\alpha.$$

Výsledná funkce $s(t)$ (námi hledaný zhlazující spline) bude vypadat takto :

$\langle x_0, x_1\rangle$ **:**

$$s(t) = T^{-1}(\sum \lambda_j^\alpha f_j) = T^{-1}(\lambda_1^\alpha \frac{t-x_0}{d_0})dtdt = \lambda_1^\alpha \frac{(t-x_0)^3}{6d_0} + ct + e,$$

kde :

$$c = \frac{(z_\alpha)_1 - (z_\alpha)_0}{d_0} - \lambda_1^\alpha \frac{d_0}{6}$$
$$e = (z_\alpha)_0 - cx_0.$$

$\langle x_i, x_{i+1}\rangle, \quad i = 1, .., N-1$**:**

$$s(t) = T^{-1}(\lambda_i^\alpha f_i + \lambda_{i+1}^\alpha f_{i+1}) = T^{-1}(\lambda_i^\alpha \frac{x_{i+1}-t}{d_i} + \lambda_{i+1}^\alpha \frac{t-x_i}{d_i}) =$$

$$= \lambda_i^\alpha \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6d_i} + \lambda_{i+1}^\alpha \frac{(t-x_i)^3}{6d_i} + ct + e,$$

kde :

$$c = \frac{(z_\alpha)_{i+1} - (z_\alpha)_i}{h_i} + \frac{h_i(\lambda_i^\alpha - \lambda_{i+1}^\alpha)}{6}$$
$$e = (z_\alpha)_i - cx_i - \frac{1}{6}\lambda_i^\alpha h_i^2.$$

$\langle x_N, x_{N+1}\rangle$ **:**

$$s(t) = T^{-1}(\lambda_N^\alpha f_N) = T^{-1}(\lambda_N^\alpha \frac{x_{N+1}-t}{d_N}) =$$

$$= \lambda_N^\alpha \frac{(x_{N+1}-t)^3}{6d_N} + ct + e$$

kde :

$$c = \frac{(z_\alpha)_{N+1} - (z_\alpha)_N}{d_N} - \lambda_N^\alpha \frac{d_N}{6}$$
$$e = (z_\alpha)_{N+1} - cx_{N+1}.$$

b) Nejprve určíme bázi prostoru $N(T)$. Víme, že $Tu = u''$ a $\dim N(T) = 2$. Neboli :

$$\{u_i\}_{i=1}^{2} = \{u_1, u_2\} = \{1, t\}$$

Nyní můžeme sestavit vektory $f^{(i)}$ takto :

$$\{f^{(i)}\}_{i=1}^{2} = \{Au_1, Au_2\} = \{\{1\}_{i=0}^{N+1}, \{x_i\}_{i=0}^{N+1}\}$$

Matice F tedy vypadá takto :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N+1} \end{pmatrix}$$

Parametr $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ je řešením soustavy rovnic

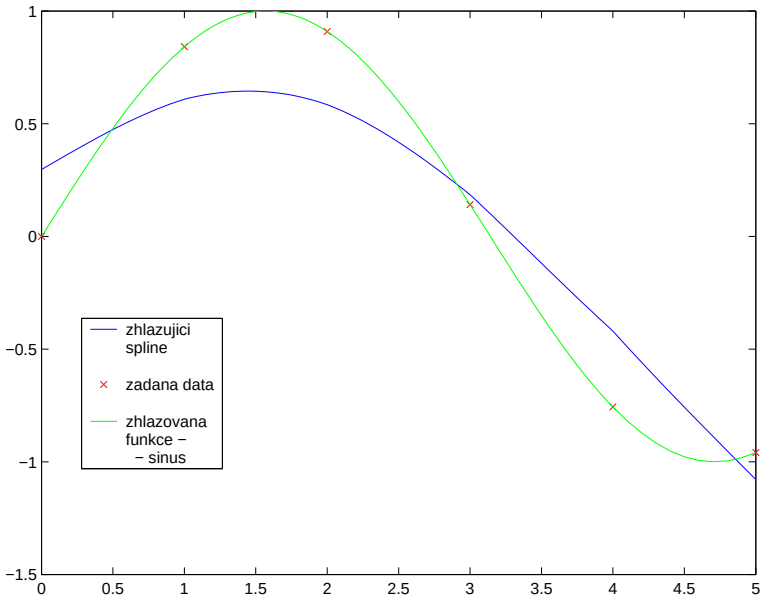
$$F^* F\beta = F^* z.$$

Odtud

$$u = \sum_{i=1}^{2} \beta_i u_i = \beta_1 + t\beta_2.$$

Hledané ε_0 najdeme nyní takto :

$$\varepsilon_0 = \|Au - z\|_Z = (\sum_{i=0}^{N+1} |\beta_1 + x_i\beta_2 - z_i|^2)^{1/2}.$$



Obrázek 2.1: $f = sin(x)$, ekvidistantní dělení; $\alpha = 0.8612$

Výsledky :

- Budeme aproximovat funkci $f = sin(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 5\rangle$. Uvažujme ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s krokem $d_i = 1$. Dostáváme $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ a vyjde nám $\varepsilon_0 = 1.2286$.

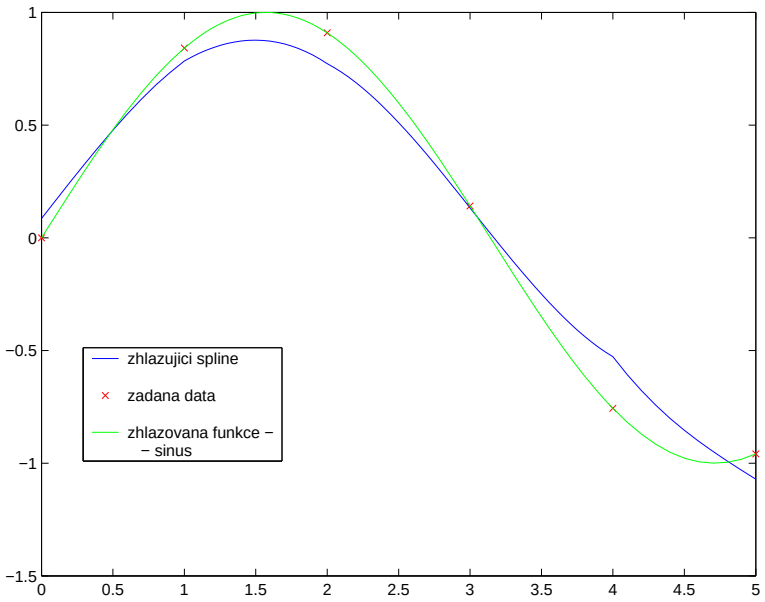
  Nyní budeme postupně volit různá $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0\rangle$. Určíme pro ně α a pro tato α pak zhlazující spliny.

  a) $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Dostáváme pak $\alpha = 0.8612$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.1.

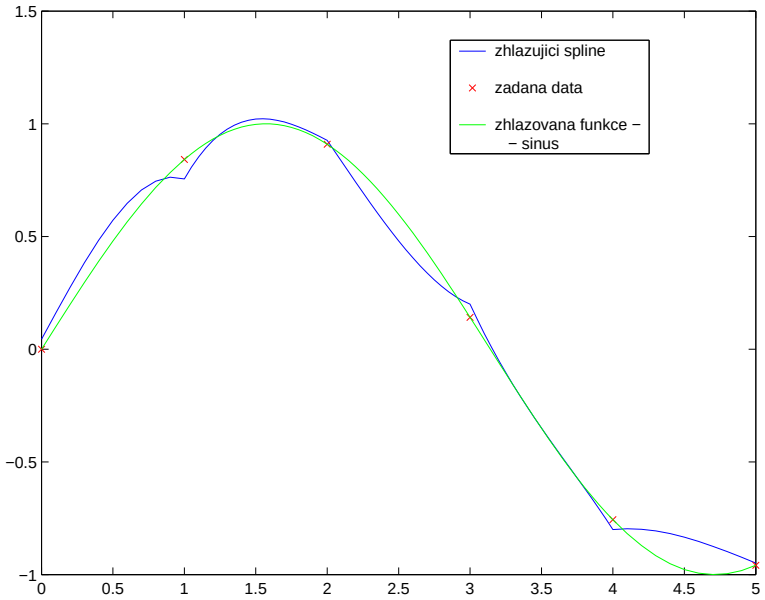
  b) $\varepsilon = \varepsilon_0/4$. Dostáváme pak $\alpha = 0.127$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.2.

  c) $\varepsilon = \varepsilon_0/10$. Dostáváme pak $\alpha = 0.016$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.3.

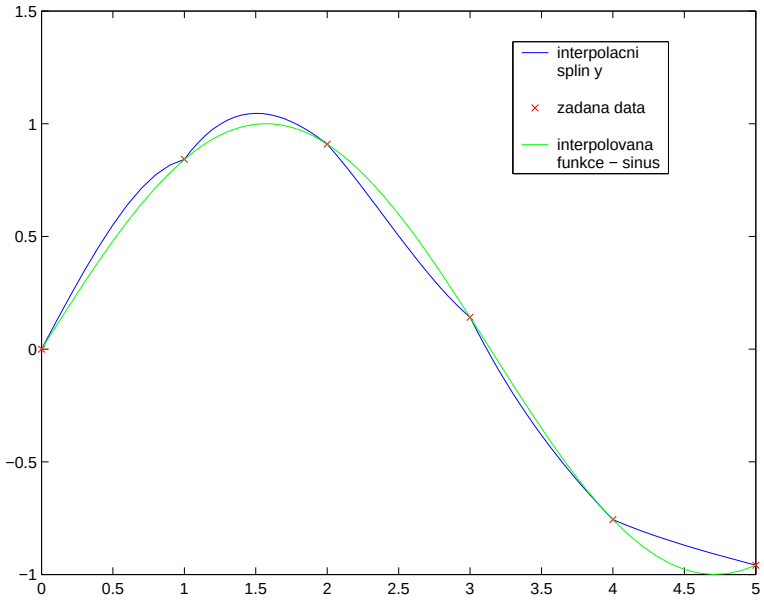
  d) Pro srovnání na obrázku 2.4 je interpolační spline pro stejná data (neboli zhlazující spline pro $\alpha = 0$).



Obrázek 2.2: $f = sin(x)$, ekvidistantní dělení; $\alpha = 0.127$



Obrázek 2.3: $f = sin(x)$, ekvidistantní dělení; $\alpha = 0.016$



Obrázek 2.4: $f = sin(x)$, ekvidistantní dělení; $\alpha = 0$

- Nyní se pro změnu podíváme na neekvidistantní dělelní intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 8\rangle$ s kroky $d = \{2; 1; 0.5; 3.5; 1\}$. Dostáváme $x = \{0; 2; 3; 3.5; 7; 8\}$ a vyjde nám $\varepsilon_0 = 1.0273$.

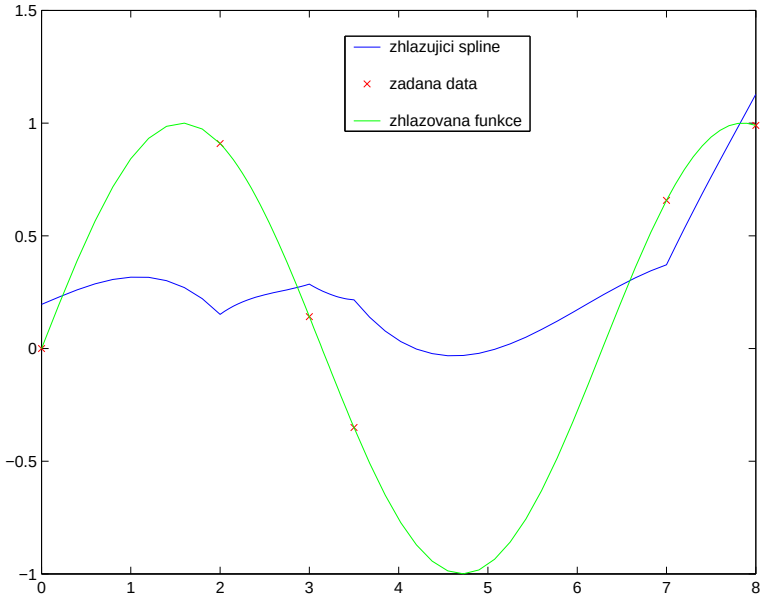
  Nyní budeme opět postupně volit různá $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0\rangle$

  a) $\varepsilon = \varepsilon_0$. Dostáváme pak $\alpha = 0.6823$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.5.

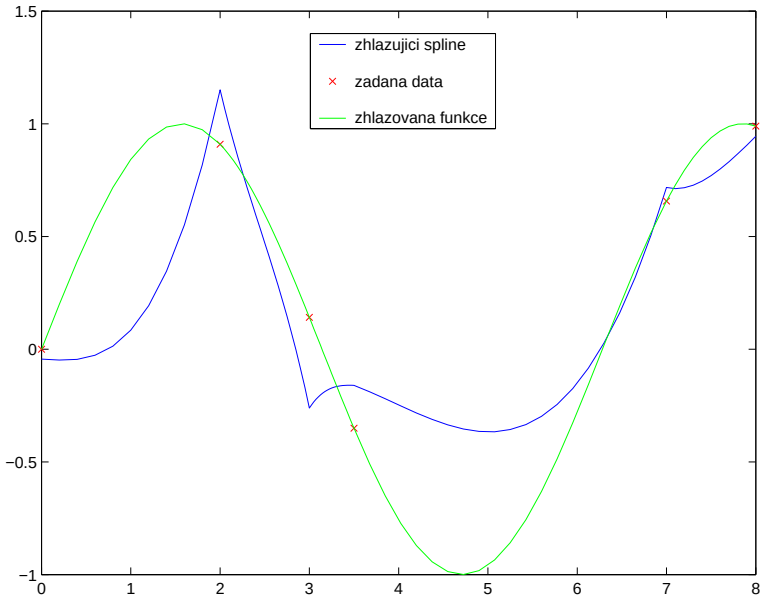
  b) $\varepsilon = \varepsilon_0/1.1$. Dostáváme pak $\alpha = 1.4341$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.6.

  c) $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Dostáváme pak $\alpha = 0.0470$. Výsledný zhlazujícíc spline je na obrázku 2.7.

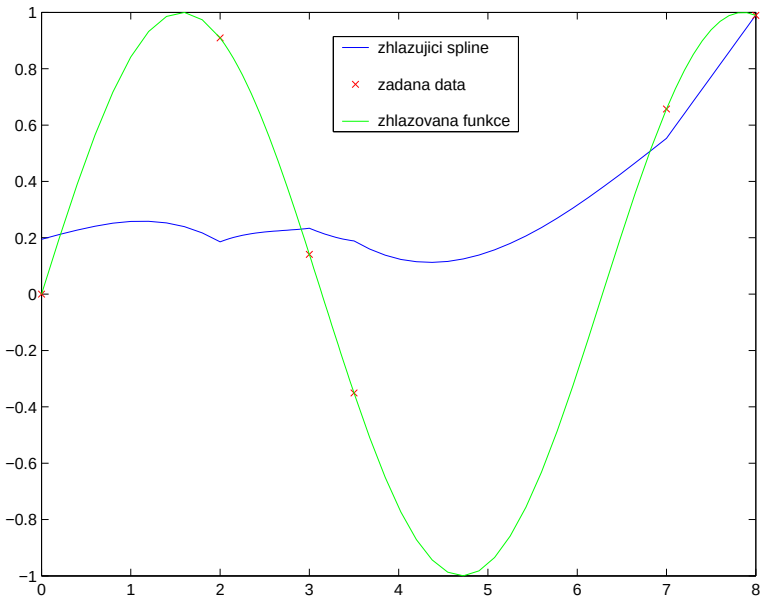
  d) Pro srovnání na obrázku 2.8 je interpolační spline pro stejná data (neboli zhlazující spline pro $\alpha = 0$).



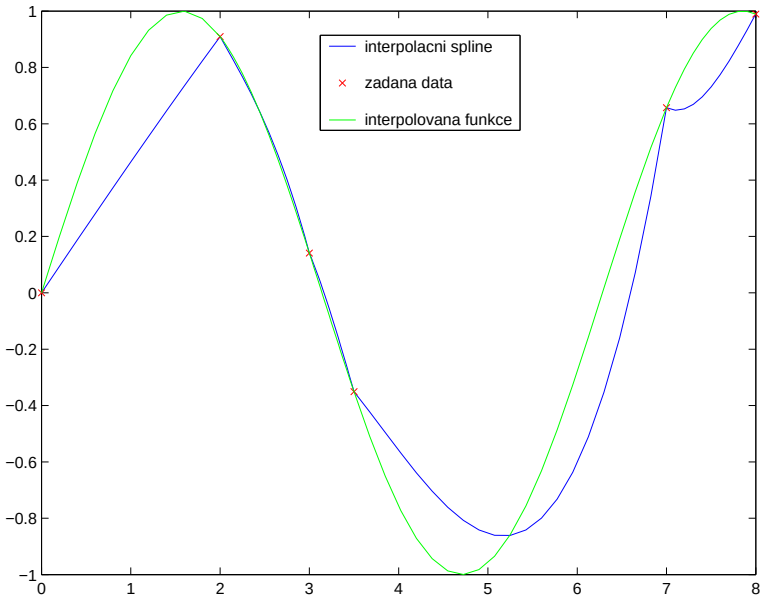
Obrázek 2.5: $f = sin(x)$, neekvidistantní dělení; $\alpha = 0.6823$



Obrázek 2.6: $f = sin(x)$, neekvidistantní dělení; $\alpha = 0.0470$



Obrázek 2.7: $f = sin(x)$, neekvidistantní dělení; $\alpha = 1.4341$



Obrázek 2.8: $f = sin(x)$, neekvidistantní dělení; $\alpha = 0$

Literatura

[1] K. Najzar: *Základy teorie splinů*, Nakladatelství Karolinum 2006.

[2] J. Kobza: *Splajny* , Olomouc 1993.

[3] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy* , Nakladatelství Karolinum 2003.

[4] M. Feistauer : *Základy numerické matematiky* , elektron. zápis přednášek.