

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Tyl

Aplikace Markowitzovy teorie portfolia na kapitálové trhy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2007

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne

Obsah

I. Úvod	5
II Teorie portfolia	6
II.1 Teorie efektivního trhu	6
II.2 Markowitzova teorie portfolia	10
II.3 Cenový model kapitálových aktiv CAPM	17
III Aplikace Markowitzovy teorie portfolia	20
III.1 Předpoklady modelu	20
III.2 Optimalizace	32
III.3 Interpretace výsledků	36
IV Závěr	43
V Literatura	44

Název práce: Aplikace Markowitzovy teorie portfolia na kapitálové trhy

Autor: Tomáš Tyl

Katedra : Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

e-mail vedoucího: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce pojednává o Markowitzově teorii portfolia a jeho aplikaci na reálných historických datech při použití základních tříd aktiv (jednotlivé světové akciové a dluhopisové trhy, hotovost, komodity). Cílem bude porovnat optimální portfolia sestavená ze vstupních údajů v historických obdobích s různými charakteristikami výnosu a rizika. Výsledkem by mělo být potvrzení, nebo vyvrácení hypotézy, že při použití historických dat je Markowitzův model prakticky užitečný pro běžného investora. Práce se zaměří na testování Markowitzova modelu pro tři typy drobných investorů – konzervativního, vyváženého a dynamického. Markowitzova teorie bude testována pro roční a pětileté výnosy.

Klíčová slova: Teorie portfolia, Investování, Skladba portfolia

Title: Applications of the Markowitz portfolio theory to capital markets

Author: Tomáš Tyl

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Supervisor's e-mail address: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstract: This work discusses the Markowitz's stock portfolio theory and its application for historical data of basic asset classes (stocks, bonds, cash and commodities). The goal is to compare optimal portfolios with various return/risk characteristics. The results should lead to acceptance or rejection of hypothesis that common investor can use Markowitz's model with historical data in practice. This work is focused on applying the model to three types of small investors – conservative, balanced and dynamic. The model will be tested on 1 and 5 years periods.

Keywords: Portfolio theory, Investment, Portfolio selection

I. Úvod

Velké množství běžných lidí ve vyspělém světě, a čím dál více i u nás, řeší otázku jakým způsobem zhodnocovat volné peněžní prostředky. Investorům se nabízí celá řada možností jak k investování přistupovat. Od druhé poloviny minulého století se velmi často diskutují moderní teorie portfolia. Dle jejich závěrů je chování trhů spíše náhodné a metody fundamentální nebo technické analýzy nepřinášejí patřičný užitek.

Markowitzova teorie portfolia přináší odpovědi na otázku „Kam investovat?“ při předpokladech moderní teorie portfolia. Cílem této práce je na historických datech otestovat, jestli by použití Markowitzovy teorie portfolia přineslo smysluplné výsledky i běžným lidem, kteří nedisponují takovými prostředky, nebo informacemi jako institucionální investoři a velké korporace.

Teoretická část pojednává o teorii portfolia. První kapitola se zabývá především teorií efektivního trhu, která je důležitým předpokladem pro Markowitzovu teorii portfolia. V kapitole je pojednáno o tom, jaké má efektivní trh vlastnosti, a jaké formy efektivity můžeme pozorovat.

Další kapitola je již věnována přímo Markowitzově teorii portfolia, jejím předpokladům a způsobům využití.

Poslední kapitola teoretické části se ve zjednodušené formě věnuje cenovému modelu kapitálových aktiv (CAPM), který na Markowitzovu teorii portfolia navazuje.

Teoretická část čerpá především z [3] a [6], částečně pak také z [1], [4] a [5]

Praktická část bude zaměřena na testování Markowitzovy teorie portfolia pro drobného investora na reálných datech.

Nejprve bude nutné zjistit, kdo je vlastně drobný investor a jaká omezení se drobného investora týkají. Dalším důležitým prvkem je investorův rizikový profil a výběr aktiv. Na základě těchto charakteristik získáme vstupní data, která budou v modelu použita. V neposlední řadě budou stanovena referenční portfolia, která se budou portfolia na základě Markowitzovy teorie snažit překonat.

Markowitzova teorie portfolia v podstatě spočívá ve hledání optimální strategie. Důležitým krokem při jejím testování je optimalizace, kterou bude z důvodů velkého objemu dat provádět naprogramovaný software.

Na základě výsledků optimalizačních procesů dojde ke srovnání, jehož cílem je ukázat, zda má pro drobného investora Markowitzova teorie portfolia smysl.

II Teorie portfolia

II.1 Teorie efektivního trhu

Základním předpokladem teorie efektivního trhu je, že kursy cenných papírů jsou ovlivňovány vesměs známými faktory. Těmito faktory jsou například očekávané zisky a dividendy společností, úrokové sazby, rizika atd. Míra efektivnosti trhu záleží na rychlosti s jakou jsou tyto faktory do ceny promítnuty. Pokud jsou tyto faktory do ceny zahrnuty téměř okamžitě, pak tržní hodnota cenného papíru odráží jeho vnitřní hodnotu. Nelze tedy na trhu nalézat podhodnocené nebo nadhodnocené cenné papíry. Míra efektivnosti tedy znamená efektivitu zpracování kursotvorných informací účastníky trhu.

Na vyspělém trhu působí celá řada racionálních investorů. Ti neustále analyzují jednotlivá aktiva a snaží se dosáhnout nadprůměrného zisku. Za předpokladu, že mají všichni podobné schopnosti trh analyzovat a všichni mají stejný přístup k informacím, se jejich možnosti porazit ostatní snižují. Pokud jsou schopnosti vyrovnané, pak o tom, kdo trh dokáže překonat, rozhoduje spíše náhoda. Dlouhodobě by taková snaha měla mít podobné účinky jako strategie „kup a drž“.

Efektivitu především akciových trhů zkoumala celá řada ekonomů. První základy této teorie položil Louis Bachelier (1900) [7] v práci, která byla zaměřena především na chování komodit. Ve své době však nebyla tato teorie dostatečně doceněna a k její „rehabilitaci“ došlo až mnohem později.

Systematicky se teorií efektivního trhu začali odborníci zabývat až v polovině minulého století. V roce 1953 M. G. Kendall prezentoval svojí práci „The Analysis of Economic Time Series“ [13] zaměřenou na zkoumání krátkodobých změn akciových kursů na londýnské burze a cen komodit na trzích v Americe. Kendall předpokládal, že objeví pravidelné cyklické chování v cenách komodit a akcií. Na základě své studie však dospěl k názoru, že žádné cykly pozorovat nelze, naopak chování cenných papírů bylo značně chaotické a zdánlivě podléhající naprosté náhodě.

F. Osborne (1959) [14] přirovnával vývoj cen akciových kurzů k Brownovu pohybu. Osborne dokázal, že zvraty v cenách akcií nastávají mnohem častěji, než pokračování trendů.

Vznik teorie efektivního trhu je nejčastěji spojována s prací E. Fama (1965) [8], ve které také dospěl k názoru, že pohyby na akciovém trhu jsou náhodné.

Teorie efektivního trhu stojí především na následujících předpokladech:

- Účastníci trhu se rozhodují racionálně. Tito účastníci neustále trh analyzují a na základě toho obchodují
- Investoři mají k dispozici veškeré důležité informace. Tyto informace jsou snadno dostupné, levné, aktuální a pravdivé
- Účastníci reagují na nové informace rychle a přesně

- Neexistují žádná omezení, která by účastníkům neumožňovala obchodovat. Transakční náklady jsou relativně velmi nízké

Podle „Moderní investiční teorie“ R. Haugena [9] jsou základní definiční charakteristiky efektivního trhu následující:

a) Akciové kursy velmi rychle a přesně absorbují nové kursotvorné informace

Zpoždění v reakci na nové informace musí být na efektivním trhu minimální. Některé studie ukazují, že při investici nad 100 000 USD je možné realizovat zisk z nové informace pouze do 30 sekund od jejího uveřejnění.

b) Změny tržních cen jsou náhodné

Vzhledem k předpokladu, že všechny známé informace jsou velmi rychle zahrnuty do tržních cen, jsou jakékoliv pohyby náhodné. Důvodem je náhodný výskyt neočekávaných informací, které na kursy působí.

c) Na efektivních trzích selhávají jednotlivé obchodní strategie

Pokud kurs obsahuje již všechny informace, nelze na trhu najít podhodnocené či nadhodnocené tituly. Jakákoliv strategie snažící se předpokládat neočekávané informace musí nutně mít stejnou hodnotu jako výběr na základě náhody. Výsledky jednotlivých investorů by z dlouhodobého hlediska měly být přibližně stejné. Nadprůměrné zisky lze dosáhnout jedine použitím neveřejných informací, nebo pomocí štěstí.

Tržní efektivita může být různá. Rozlišovat můžeme slabou, středněsilnou a silnou formu efektivnosti.

Slabá forma efektivnosti

Aktuální kurs obsahuje veškeré informace, které lze získat ze souboru historických dat. Na základě technické analýzy nelze tedy k predikci akciových kursů použít.

Slabá forma efektivnosti trhů lze testovat pomocí dvou metod:

- metoda kursově nezávislosti
- metoda zkoumání úspěšnosti používání technických indikátorů

Kursovou nezávislost je možné testovat pomocí korelační závislosti kursů v čase tedy pomocí autokorelace. Touto metodou testování slabé efektivnosti trhů se zbýval E. Fama (ten testoval denní výnosy akcií obsažených v indexu DOW Jones Industrial Average v letech 1957 až 1962. Pro každou společnost byly vypočteny autokorelační koeficienty. Fama provedl výpočty pro krátká i delší období. Autokorelace v testovaných případech byla vesměs nulová. Podobné skutečnosti ukazovaly i další provedené testy.

Druhou metodou je testování technické analýzy. Testovány byly zejména filtrovací technika, klouzavé průměry a relativní síla. Ani jedna z metod však nepřinášela dostatečný nadvynos oproti prosté strategii „kup a drž“.

Pro slabou formu efektivnosti hovoří i rady spekulantů, obchodujících komoditní deriváty. Jejich strategie nestojí na výběru „správné“ metody technické analýzy, ale na „money managementu“ – řízení ztrát a výnosů z jednotlivých obchodů.

Na základě těchto testů lze konstatovat, že vyspělé trhy USA a Evropy (akciové i komoditní) jsou přinejmenším slabě efektivní. Samotné uplatňování technické analýzy by mělo vést dokonce k zaostávání za strategií „kup a drž“ díky poplatkům za obchodování a dalším transakčním nákladům.

Středněsilná forma efektivnosti

Aktuální kurs obsahuje nejen údaje získané z historických dat, ale i všechny aktuální veřejně dostupné informace. Na středněsilně efektivním trhu nelze uplatnit fundamentální analýzu a určit nadhodnocené, nebo podhodnocené informace.

Testy středněsilné efektivnosti akciových trhů sledují rychlost a míru, s jakou akcie reagují na jednotlivé finanční události jako například štěpení akcií, zisk, účetní změny, změny dividend, změny peněžní nabídky.

Při zkoumání reakcí na štěpení firem se ukázalo, že kursy akcií dramaticky rostly před veřejným ohlášením těchto skutečností. Po vyhlášení se však kursy již nijak dramaticky nepohybovaly. Tento jev na jednu stranu potvrzuje středněsilnou formu efektivnosti, na druhou stranu vyvrací silnou formu.

U zisku a dividend výsledek záleží na tom, jestli jsou očekávané, nebo neočekávané. Očekávaný zisk a očekávané dividendy jsou již zahrnuty v ceně akcií. Díky tomu nejsou provázeny žádnými dodatečnými reakcemi. Reakce na neočekávaný zisk překvapivě vykazuje poměrně dlouhé časové zpoždění. Tento fakt by hovořil proti středněsilné efektivnosti trhů. Testy reakcí na neočekávané dividendy dopadly smíšeně. Podle některých testů akcie reagovaly ještě před uveřejněním výše dividend, podle jiných měly změny kursů dlouhé zpoždění jako u neočekávaného zisku. Toto chování nepotvrzuje středněsilnou efektivitu trhu, ale vyvrací silnou efektivitu.

Reakce kursů na změnu peněžní nabídky jsou takřka okamžité a podporují středněsilnou formu efektivnosti.

Na trzích se pravidelně objevují některé anomálie (efekt nízkého P/E, lednový efekt, akviziční efekt), které hovoří spíše proti středněsilné formě efektivnosti.

Z testů středněsilné efektivnosti je možné odvodit, že nové informace jsou vstřebány jen s malým zpožděním. Kursy na nové informace často reagují ještě před jejich uveřejněním. V některých případech kursy reagují pomaleji i po veřejném oznámení a za předpokladu nízkých transakčních nákladů je možné s těmito informacemi dosáhnout vyššího zisku. V této

souvislosti se hovoří o tzv. ekonomické efektivitě trhů. V takovém prostředí reagují na některé informace kursy se zpožděním, ale díky transakčním nákladům a daním je dlouhodobý zisk podobný jako při použití metodě „kup a drž“.

Silná forma efektivnosti

Ne všichni investoři mají stejný přístup k informacím dostupným na trhu. Někteří účastníci mají přístup i k informacím neveřejným, tedy k informacím, které teprve budou zveřejněny. Na silně efektivním trhu jsou v aktuálním kursu akcií zahrnuty kromě veřejných informací i informace neveřejné.

Testy silné formy efektivnosti jsou založeny na testování zisků investorů s lepším přístupem k informacím než zbytek trhu. Zkoumané skupiny jsou burzovní zprostředkovatelé, analytici a manažeři firem.

Burzovní zprostředkovatelé jsou schopni dosáhnout výrazně nadprůměrného zisku. Mají totiž k dispozici informace o aktuálním stavu a struktuře nákupních a prodejních příkazů. Tento fakt vyvrací existenci silné formy efektivnosti.

Oproti tomu analytici v dlouhodobém horizontu nadprůměrných zisků nedosahují i když mají k dispozici některé neveřejné informace. Veřejně dostupná doporučení analytiků dokonce často vedou k podprůměrným ziskům. To lze přikládat faktu, že motivace analytiků vydávajících doporučení je zvýšit zájem klientů o obchodování z čehož pramení nemístný optimismus.

Manažeři podniků mají o firmách, kde figurují, mnohem lepší informace, než ostatní účastníci trhů. Testy ukázaly, že manažeři podniků dosahují nadprůměrných výnosů. To opět odporuje silné formě efektivnosti.

Silná forma efektivnosti na trzích potvrzena nebyla. Pomocí některých neveřejných informací je totiž možné dosahovat nadprůměrných zisků.

Teorie efektivních trhů má řadu zastánců i odpůrců. Jedním z argumentů odpůrců teorie efektivních trhů je zvýšená volatilita, která by teorii efektivních trhů vyvracela. Zastánci teorie však kontrují s tím, že zvýšená volatilita je způsobena volatilitou požadované výnosové míry. Podle E. Famy [8] se požadovaná výnosová míra pohybuje inverzně k hospodářské situaci. V období recese se zvyšuje a investoři zvyšují prémii za riziko. Naopak v období expanze se premie za riziko snižuje.

Je důležité si uvědomit, že testy efektivnosti akciových trhů probíhaly hlavně na americkém trhu, který je bezesporu nevyspělejší. U velkých amerických společností je možné pozorovat zejména ekonomickou efektivnost. U menších vznikajících trhů rozvíjejících zemí, kde laická veřejnost není navyklá investovat, nelze efektivnost trhů vždy předpokládat.

II.2 Markowitzova teorie portfolia

Teorie portfolia je mikroekonomická disciplína zkoumající vhodnou skladbu portfolia tak, aby portfolio mělo předem požadované vlastnosti

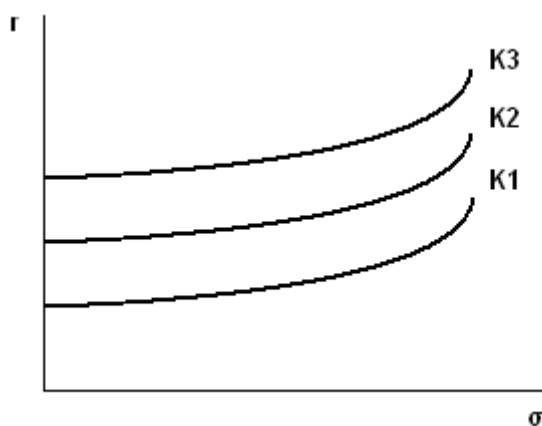
Základy teorie portfolia lze hledat již v článku J. Hickse „Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk“ z roku 1934. Hicks upozorňuje na skutečnost, že investoři se při investičním rozhodování řídí statistickými charakteristikami rozdělení pravděpodobnosti výnosů investic.

Za počátek moderní teorie portfolia je považován článek Henryho Markowitze „Portfolio Selection“ z roku 1952 [10]. Markowitz zde předpokládá, že investor investuje určité množství kapitálu na předem určené časové období. Na jeho konci investor cenné papíry prodá a zisk použije pro vlastní potřebu, nebo k reinvestici. Markowitz upozorňuje, že investoři sledují dva protichůdné cíle. Investor se v první řadě snaží dosáhnout maximální možný výnos. Vzhledem ke kolísání cen aktiv je však výnos předem neznámý. Druhým cílem investora tedy je dosáhnout očekávaného výnosu s co nejvyšším stupněm jistoty. Jinými slovy investor se zároveň snaží minimalizovat riziko.

Myšlenka snížit riziko pomocí investic do většího množství aktiv diverzifikací byla intuitivně využívána již od dob starověku. Markowitz ve své teorii prakticky ukazuje, jak diverzifikace funguje. Výnosy aktiv nejsou perfektně závislé. Díky této skutečnosti má portfolio vytvořené z více aktiv lepší poměr mezi výnosem a rizikem než jednotlivá aktiva samostatně.

Křivky indiference

Investoři se odlišují v tom jaký poměr rizika k výnosu jsou ochotni podstoupit. To jaké mají preference lze vyjádřit pomocí křivek indiference. Křivky indiference lze znázornit v grafu. Horizontální osa vyjadřuje směrodatnou odchylku portfolia značenou symbolem σ , vertikální osa označuje výnosnost. Křivky indiference jsou značeny K_i .

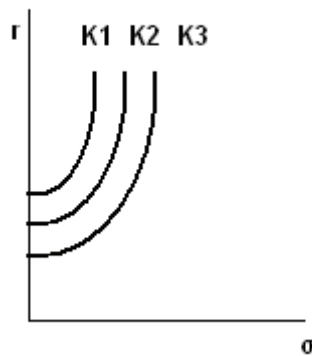


Obrázek č.1.: Křivky indiference

Investor považuje za stejně hodnotná všechna portfolia ležící na stejné křivce indiference. Z toho mimo jiné vyplývá, že křivky indiference jednoho investora se nemohou

navzájem protínat. Vzhledem k preferenci vyššího výnosu před nižším bude pro investora více žádoucí portfolio ležící na křivce indiference položené výše. Každý investor má nekonečně mnoho křivek indiference. Jednotlivé investory od sebe odlišuje tvar indiferentních křivek. Lze předpokládat racionální chování investorů. Investor bude dávat přednost portfolio s vyšším výnosem před portfolio s nižším výnosem, pokud bude riziko obou portfolio stejné. Stejně tak upřednostní investor méně rizikové portfolio před rizikovějším za předpokladu stejné výnosnosti těchto portfolio. Z toho plyne, že křivky indiference racionálního investora budou mít konvexní tvar.

Tolerance k riziku neboli míru rizika, kterou je investor ochoten akceptovat, určuje sklon křivek indiference. Křivky indiference investora s vysokým odporem k riziku budou strmější, než křivky rizikově tolerantního investora. Zatímco Obrázek č.1 ukazoval křivky indiference investora tolerantního k riziku, následující obrázek ilustruje křivky indiference konzervativního investora.



Obrázek č.2: Křivky dynamického investora

Očekávané vlastnosti portfolia

Investor má na začátku možnost investovat do neomezeného množství portfolio skládajících se z uvažovaných aktiv. Vzhledem k uvedeným cílům se investor bude snažit nalézt optimální portfolio, které bude mít očekávané vlastnosti.

Důležitým předpokladem Markowitzovy teorie portfolia je, že na výnosy cenných papírů lze pohlížet jako na náhodné veličiny. Podle teorie efektivních trhů je tento předpoklad vhodný. Pokud by výnosy nebyly z pohledu investora náhodné, bylo by praktičtější využít tržních neefektivit. Výnosnosti mohou být porovnávány a analyzovány na základě momentů. Markowitz ve své teorii používá dva z nich a to střední hodnotu (očekávaná výnosnost) a směrodatnou odchylku (míra rizika). Aby investor mohl vybrat konkrétní portfolio, je potřeba nejprve stanovit očekávané výnosnosti, směrodatné odchylky jednotlivých portfolio a z nich na základě postoje k riziku vybrat to, které je pro investora optimální

a) Očekávaný výnos

Očekávaný výnos portfolia je možné vypočítat jako vážený průměr očekávaných výnosů jednotlivých aktiv v portfoliu. Pro očekávaný výnos z portfolia n aktiv tedy platí následující vzorec:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n X_i \cdot r_i$$

\bar{r}_p - očekávaný výnos portfolia

X_i - váha aktiva i

r_i - očekávaný výnos aktiva i

Z výše uvedeného plyne, že očekávaný výnos portfolia nikdy nemůže být vyšší, než očekávaný výnos aktiva s nejvyšším očekávaným výnosem. Investor, který chce pouze maximalizovat svůj výnos nehlédě na výši rizika, by měl držet pouze nejvýnosnější aktivum (pokud nepředpokládáme možnost vypůjčení kapitálu).

b) Očekávané riziko portfolia

Riziko, jak bylo již výše zmíněno, se pro účely Markowitzovy teorie portfolia měří za pomoci směrodatné odchylky výnosů. Výpočet rizika portfolia není ekvivalentní s výpočtem očekávaného výnosu. Pro výpočet směrodatné odchylky portfolia skládajícího se z n cenných papírů platí následující vzorec:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}}$$

σ_p - očekávaná směrodatná odchylka výnosů portfolia

$X_i X_j$ - váhy aktiva i a j

σ_{ij} - kovariance mezi výnosy aktiv i a j

Závislost směrodatné odchylky celého portfolia na kovarianci jednotlivých složek portfolia dává smysl diverzifikaci, která riziko snižuje. Pokud nejsou uvažované cenné papíry perfektně korelované je možné nalézt portfolio s nižším rizikem, než je riziko „nejbezpečnějšího“ cenného papíru (pokud nepředpokládáme možnost investovat do bezrizikového aktiva).

Efektivní množina

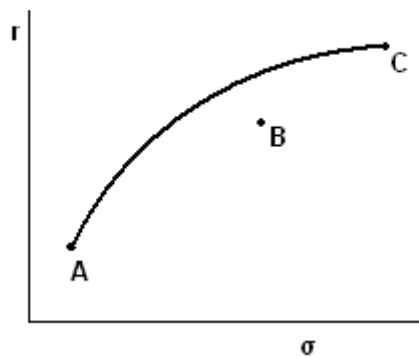
Investor může pomocí cenných papírů vytvořit nekonečné množství portfolií. Předpokládáme-li investorovu racionalitu, bylo by zbytečné kalkulovat s celou množinou možných portfolií. Za předpokladu minimalizace rizika a maximalizace výnosu však můžeme značnou část těchto portfolií vyloučit. Efektivní množinou nebo též efektivní hranicí možných portfolií rozumíme křivku tvořenou možnými kombinacemi aktiv, které:

- 1) nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika

2) nabízejí minimální riziko při různých úrovních očekávaného výnosu

Efektivní množinu získáme tak, že nejprve nalezneme hraniční body, tedy portfolio s maximálním výnosem a portfolio s minimálním rizikem. Efektivní množina spojuje tyto dva hraniční body a prochází portfolii, která jsou v množině možných portfolií umístěna nejvíce vlevo nahoře od ostatních portfolií. Výběr optimálního portfolia se tedy omezí pouze na efektivní hranici, ostatní portfolia investorovy nepřinášejí užitek a proto je není nutné zahrnout do úvahy.

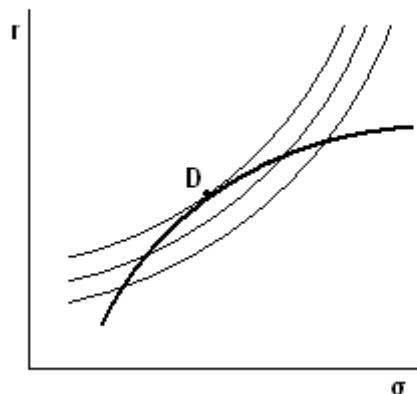
Obecný tvar množiny efektivních portfolií a jejich efektivní množinu zobrazuje následující obrázek:



Obrázek č.:3 Efektivní množina

Křivka **Ef** znázorňuje efektivní množinu. Portfolio **A** je portfolio s nejnižším rizikem. Portfolio **C** je aktivum s nejvyšším výnosem. Portfolio **B** je příklad neefektivního portfolia.

Optimální portfolio nyní získáme zakreslením investorových křivek indiference do grafu. Relevantní je pro nás ta křivka indiference, která má s efektivní množinou právě jeden průnik a zároveň leží nejvíce vlevo nahoře jak to znázorňuje následující obrázek:



Obrázek č.4: Získání optimálního portfolia

Portfolio **D** je pro investora optimální, protože leží na nejvýše položené křivce indiference, která má ještě s portfoliem společný bod.

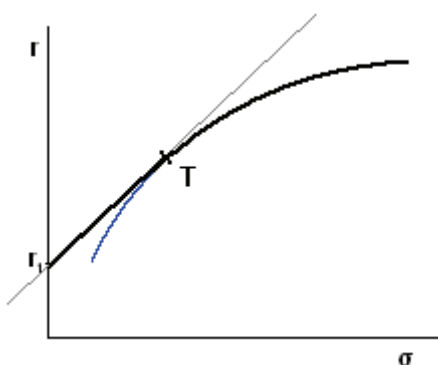
Rozšíření efektivní množiny o bezrizikové aktivum

Bezrizikové aktivum je aktivum, které přináší při stanoveném investičním horizontu jistý výnos r_1 . Jistotu výnosu je možné charakterizovat nulovou směrodatnou odchylkou výnosů bezrizikového aktiva.

Za bezrizikové aktivum je možné považovat například pokladniční poukázky nebo dluhopisy s nulovým kupónem a durací shodnou s investičním horizontem.

Opět můžeme vytvořit nekonečné množství kombinací mezi původně uvažovanými portfolii (bez bezrizikového aktiva) a bezrizikovým aktivem. Kombinace původního portfolia a bezrizikové investice má podobu úsečky, spojující bezrizikové aktivum a původní portfolio. Pokud opět uvažujeme pouze efektivní množinu těchto kombinací zajímá nás pouze kombinace, která je umístěna nejvíce vlevo nahoře. Pokud zkonstruujeme přímku, která je tečnou efektivní množiny a prochází bezrizikovým aktivem získáme tečný bod. Nová efektivní množina je tedy tvořena úsečkou vycházející z bezrizikového aktiva a končící v tečném bodě. Dále efektivní množina pokračuje po efektivní množině až do portfolia skládajícího se z cenného papíru s nejvyšším očekávaným výnosem. Portfolio nacházející se v tečném bodě se nazývá tangenciální portfolio.

Následující obrázek ukazuje, jak vypadá efektivní množina portfolií při předpokladu existence bezrizikového aktiva.



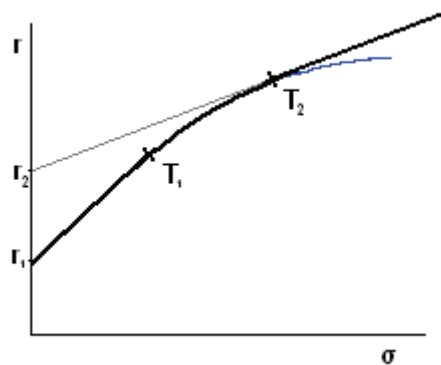
Obrázek č.5: Efektivní množina s bezrizikovým aktivem

T je tangenciální portfolio. Šedivá přímka reprezentuje tečnu procházející bezrizikovým aktivem r_1 . Modrá křivka je část původní efektivní množiny. Portfolia ležící na této části se stala neefektivní.

Vypůjčený kapitál

Dosud bylo uvažováno, že investor používá k investici pouze vlastní prostředky. Dalším možným předpokladem je, že investor si na trhu může vypůjčit prostředky za úrokovou sazbu r_2 . Investor může výrazně zvýšit očekávaný výnos svého portfolia tím, že kromě svého kapitálu investuje i kapitál zapůjčený.

Stejně jako u bezrizikového portfolia i zde můžeme najít tečný bod. Nová efektivní množina bude doplněna o část přímky procházející sazbou, za kterou je možné si vypůjčit peníze a tečným bodem vytvořeným touto přímkou (předpokládáme $r_2 \Rightarrow r_1$, jinak by bylo možné neomezeně profitovat z rozdílu $r_1 - r_2$). Tato část bude ležet za nově získaným tečným bodem jak to ilustruje obrázek č.6:



Obrázek č.6: Efektivní množina s vypůjčením kapitálu

T_1 T_2 jsou tangenciální portfolia pro sazby r_1 (bezriziková sazba) a r_2 (úroková sazba pro zapůjčení). Šedivá přímka je tečnou procházející r_2 . Modrá křivka opět reprezentuje část původní efektivní množiny.

Algoritmus hledání efektivní množiny

Pro nalezení optimálního portfolia je nejprve nutné definovat si účelové funkce, jejíž extrém budeme hledat.

a) Účelové funkce

První možností je snažit se maximalizovat výnos portfolia. Funkce, kterou budeme maximalizovat, je:

$$\bar{r}_p(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot r_i$$

Druhá možnost je minimalizovat riziko změny výnosu. Při tom se snažíme minimalizovat funkci:

$$\sigma_p^2(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

Jedná se o minimalizaci rozptylu výnosů portfolia.

b) Omezující podmínky

Další krok algoritmu je stanovení omezujících podmínek, vyplývajících z požadavků investora (tolerance k riziku, požadovaný výnos apod).

Investor, který se snaží maximalizovat výnos si může stanovit maximální riziko, které je ochoten akceptovat.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \leq s^2$$

Na druhou stranu může investor hledající minimální riziko stanovit minimální očekávaný výnos r .

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot r_i \geq r$$

Obvyklou podmínkou při tvorbě portfolia je omezení, aby váha jednotlivých složek dala dohromady 100%.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

Podmínkami se lze omezit pouze na držení dlouhých pozic. To znamená, že všechny složky uvažovaného portfolia budou ležet na intervalu $[0,1]$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

c) Výpočet

Úloha nalezení optimálního portfolia je v podstatě úlohou nalezení vázaného extrému. Výpočet se provádí pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Důležitou podmínkou pro nalezení extrému je, že matice kovariancí musí být pozitivně semidefinitní.

Konkrétní algoritmus nalezení vah jednotlivých složek lze nalézt například v Čamský (2001) [3].

II.3 Cenový model kapitálových aktiv CAPM

Markowitzova teorie portfolia dává investorům návod jak mají postupovat při výběru cenných papírů. Jedná se tedy o normativní ekonomii. Cenový model kapitálových aktiv se naopak zabývá vysvětlením oceňování aktiv a spadá tedy svým charakterem do pozitivní ekonomie. Model CAPM hledá rovnovážný vztah mezi rizikem a výnosem jednotlivých aktiv.

CAPM (Capital asset pricing model) neboli cenový model kapitálových aktiv (někdy také model oceňování kapitálových aktiv) byl nezávisle vytvořen několika ekonomy v 60 letech 20. století. Ve svých pracích ho zmiňuje například Sharpe (1964) [12].

Předpoklady modelu CAPM jsou totožné s předpoklady Markowitzovy teorie portfolia a navíc jsou rozšířené o několik dalších.

- Investoři mají stejné časové období.
- Investoři používají Markowitzův model k určení složení portfolia. Při tom vybírají portfolia z efektivní množiny na základě svých rizikových preferencí.
- Investoři si mohou vypůjčit, nebo investovat za stejnou bezrizikovou sazbu. Ta je pro všechny investory totožná.
- Neexistují transakční náklady, daně ani inflace.
- Všechna aktiva lze neomezeně rozdělit.
- Investoři mají stejná očekávání ohledně charakteristiky aktiv
- Trh je efektivní

Přímka kapitálového trhu

Za předpokladu, že všichni investoři mají stejné očekávání, bude pro všechny investory stejné i tangenciální portfolio (při daně bezrizikové sazbě) a efektivní množina portfolií. Přímka procházející bezrizikovým aktivem a tangenciálním portfoliem, která bude efektivní množinu reprezentovat se nazývá přímka kapitálového trhu. Tato přímka má následující parametry

Rovnice přímky kap trhu

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p$$

\bar{r}_p - očekávaný výnos portfolia

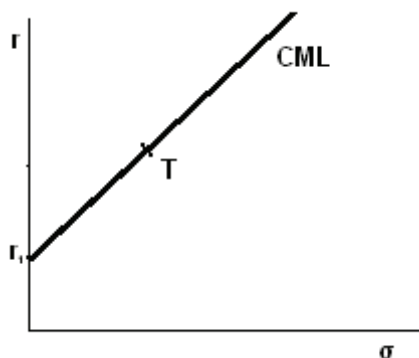
r_f - výnos bezrizikového aktiva

r_m - výnos tangenciálního portfolia

σ_m - směrodatná odchylka výnosů tangenciálního portfolia

σ_p - směrodatná odchylka výnosů portfolia

Křivku kapitálového trhu znázorňuje následující obrázek:



Obrázek č.7: Přímka kapitálového trhu

Riziko v CAPM

CAPM rozděluje celkové riziko na riziko jedinečné a systematické.

a) Jedinečné riziko

Jedinečné riziko vyplývá ze specifické povahy aktiva. U akcií se jedná o riziko vyplývající z podnikatelského záměru sledované společnosti a závisí na jedinečných hrozbách, které se daného odvětví, nebo dané společnosti týkají. Jedinečné riziko je odstranitelné diverzifikací. Nákupem většího množství aktiv nebude portfolio ohroženo jednotlivými jedinečnými riziky v takové míře jako při nákupu jednoho aktiva.

b) Specifické riziko

Specifické riziko je na druhou stranu nediverzifikovatelné. Vyplývá z ekonomické situace a makroekonomických veličin vztahujících se k souboru aktiv ze, kterých vybíráme. Protože toto riziko nelze snížit diverzifikací je právě toto riziko nutné vzít do úvahy.

Vztah mezi výnosovou mírou a specifickým rizikem bývá vyjádřen přímkou trhu cenných papírů (SML – security market line).

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f)$$

\bar{r}_i - očekávaný výnos aktiva **i**

r_f - výnos bezrizikového aktiva

r_m - výnos tangenciálního portfolia

β_i - faktor β aktiva **i**

Faktor β pro aktivum **i** lze vyjádřit následujícím způsobem.

$$\beta_i = \frac{\text{COV}_{im}}{\sigma_m^2}$$

cov_{im} - kovariance mezi aktivem **i** a tangenciálním portfoliem

σ_m^2 - rozptyl výnosů tangenciálního portfolia

Tento faktor vyjadřuje citlivost aktiva na změnu výnosové míry tržního portfolia.

Aktivum má

$\beta < 0$ pokud aktivum reaguje na změnu výnosové míry tržního portfolia opačně. To znamená, že na růst výnosové míry reaguje poklesem výnosu a naopak.

$0 < \beta < 1$ nastane v případě, kdy aktivum reaguje na změnu stejným směrem, ale ne tak silně jako trh.

$\beta = 1$ ukazuje na situaci kdy je změna výnosu aktiva stejná, jako změna výnosové míry tržního portfolia.

$\beta > 1$ u citlivějších aktiv. V takovém případě se změna výnosové míry u aktiva projeví více než u trhu.

Rovnováha v CAPM

Na efektivním trhu by každá akcie měla ležet na přímce trhu cenných papírů. V případě, že cenný papír leží nad SML znamená to, že akcie nabízí vyšší výnos, než jaký odpovídá jejímu systematickému riziku. Taková akcie je podhodnocená. Naopak nadhodnocená akcie leží pod touto přímkou – nabízí totiž nižší výnos. Rozdíl mezi očekávaným výnosem a výnosem daným SML se nazývá Alfa. Záporná alfa indikuje nadhodnocené a kladná podhodnocené cenné papíry. Model CAPM předpokládá, že trh je efektivní a velmi rychle dojde k narovnání stavu.

III Aplikace Markowitzovy teorie portfolia

III.1 Předpoklady modelu

Hledisko drobného investora

Drobným investorem budeme chápat nejčastěji fyzickou osobu, která se rozhodne investovat volné peněžní prostředky. Pro vymezení pojmu drobný investor stanovíme následující podmínky:

a) Nízké příjmy

Příjmy z investování nejsou nejdůležitějším příjmem investora. Drobný investor zpravidla investuje prostředky, které získal pomocí jiného příjmu (zaměstnání, podnikání apod.). Tím pádem nemusí investované prostředky generovat příjem, který by pokryl životní náklady investora. Pro drobného investora je důležitější relativně stabilní nárůst investovaného kapitálu, který hodlá použít v budoucnosti (koupě nemovitosti, důchod, děti apod.). Z toho důvodu se investor vyhne vysoce rizikovému použití kapitálu, které navíc vyžaduje aktivní správu.

b) Nízký vstupní kapitál

Drobný investor disponuje relativně (ve srovnání s institucionálními investory) nízkým kapitálem, který může investovat.

c) Pouze veřejné informace

Fyzické osoby, které nejsou zaměstnány v klíčových pozicích finančních firem, nebo nejsou manažery veřejně obchodovaných firem zpravidla nemají přístup k neveřejným informacím. Drobný investor má přístup pouze k veřejným informacím.

d) Omezený čas

Fyzické osoby, které generují svůj příjem ze zaměstnání, nebo z drobného podnikání mají jen omezené množství času pro analyzování trhu. Drobný investor využívá spíše dlouhodobých trendů na trhu, než z krátkodobých spekulací.

e) Omezené ztráty

Drobný investor plánuje svůj kapitál v budoucnu využít investované prostředky tvoří významnou část jeho jmění. Není proto přípustné, aby drobný investor ztratil celý kapitál nebo jeho podstatnou část.

f) Orientace na reálné výnosy

Na konci investičního období bude drobný investor nashromážděný kapitál spotřebovávat. Vzhledem k předpokládané změně cen je pro drobného investora důležitý relativní výnos (očistěný o inflaci) namísto nominálního výnosu.

Charakteristika drobného investora sebou přináší množství omezení a předpokladů, jaké prostředky mohou být pro investici využity.

Vzhledem k nízkému objemu prostředků a požadavku na nízkou časovou náročnost je pro drobného investora vhodné orientovat se na finanční trhy. Investice do alternativních aktiv jako jsou nemovitosti, starožitnosti, rizikový kapitál apod. by pro takového investora nebyly příliš vhodné.

Drobný investor může čerpat pouze z veřejných informací. Při předpokladu středněsilné efektivnosti trhů se drobnému investorovi bude trh jevit efektivním.

Transakční náklady mohou značně ovlivnit požadovaný výnos. Drobný investor se bude orientovat na aktiva, která mají i při malém kapitálu nízké transakční náklady. Pro účely modelu však budou veškeré transakční náklady a daně zanedbány.

Investor, který může věnovat analyzování finančních trhů jen omezený čas nebude vyhledávat spekulativní zisky a nebude aktivně časovat trh. Vhodnou se proto bude jevit strategie „kup a drž“ na předem známé investiční období. Této strategii také vyhovuje požadavek na nízké transakční náklady.

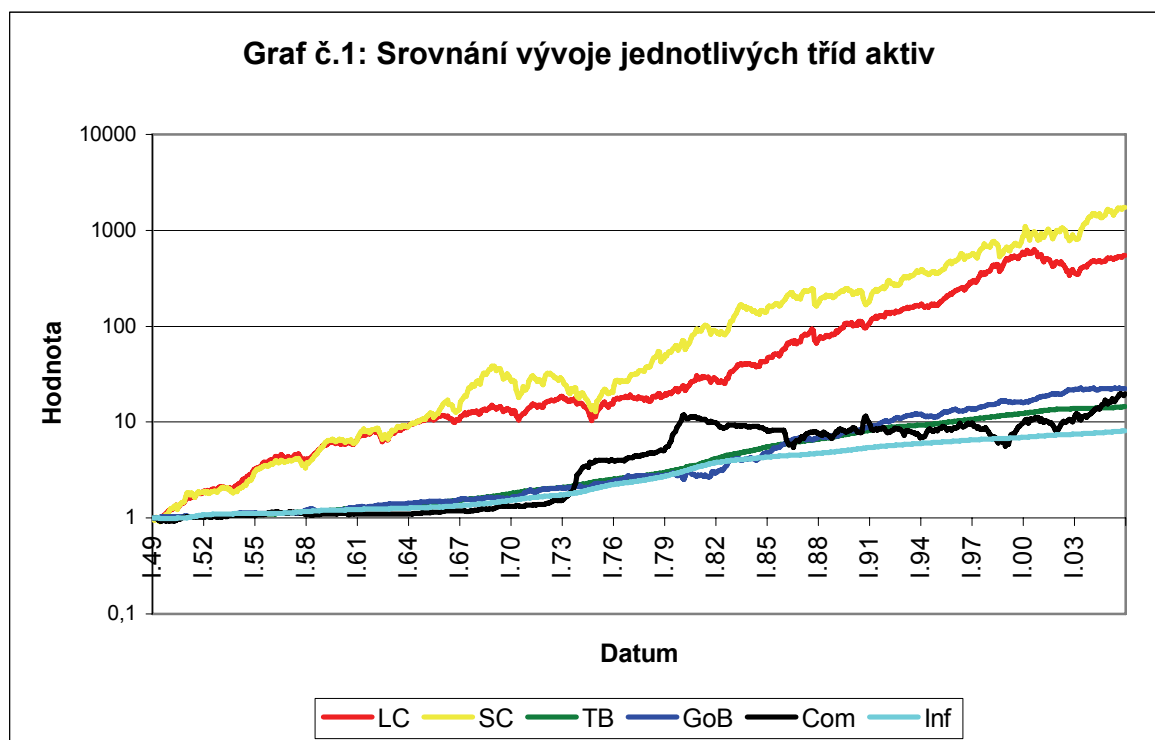
Požadavek na stabilitu výnosů a ochranu před výraznými ztrátami lze naplnit širokou diverzifikací. Aby mohl drobný investor účinně diverzifikovat své portfolio na finančních trzích i s malým množstvím financí bude vyhledávat především nástroje kolektivního investování, které mu umožní vstup na celé trhy. Pomocí těchto nástrojů může drobný investor nakupovat široce diverzifikovaná portfolia reprezentující jednotlivé třídy aktiv.

Vzhledem k nedostatku kapitálu nemůže drobný investor využívat nástrojů peněžního trhu, nebo sám poskytovat půjčky. Díky kolísající inflaci nemůže drobný investor orientující se na reálné výnosy využít bezrizikového aktiva. Transakční náklady a vysoký úrok, za který by si mohl drobný investor půjčit, implikuje omezení pouze na vlastní kapitál.

Třídy aktiv

Drobný investor má řadu omezení ohledně možného výběru investic. Vzhledem k těmto předpokladům se i výběr aktiv, do kterých drobný investor může investovat, značně zúží. Jak z těchto předpokladů vyplývá, drobný investor by se měl zaměřit na nástroje kolektivního investování a na investiční nástroje, které umožňují širokou diverzifikaci. V současné době by nejvhodnějšími nástroji pro drobného investora byly otevřené podílové fondy, ETF a investiční certifikáty. Všechny tyto investiční nástroje pokrývají nepřeberné množství různých trhů a strategií. Pro výběr investora proto není důležité rozlišovat konkrétní instrumenty, jaké budou použity k nákupu, ale pouze třídy aktiv, do kterých tyto instrumenty investují, nebo které kopírují. Použité třídy aktiv jsou akcie velkých firem, akcie malých firem, státní dluhopisy, nástroje peněžního trhu a komodity. Vzhledem k obtížné dostupnosti dat a k vyspělosti trhů byl analyzován trh USA. Pro tento trh jsou data nejlépe dostupná i desítky let do historie. Navíc americké trhy lze považovat za nejvyspělejší a tím pádem i nejvíce efektivní.

Graf č.1 ukazuje srovnání vývoje jednotlivých tříd aktiv a inflace na pozorovaném období od roku 1949 do roku 2005.



LC – Akcie velkých společností (Large Caps)

SC – Akcie malých společností (Small Caps)

TB – Nástroje peněžního trhu (Treasury Bills)

GoB – Státní dluhopisy (Government Bonds)

Com – Komodity (Commodities)

Inf – Inlace (Inflation)

Pokud v dalším textu nebude uvedeno jinak za výnosy budou vždy považovány výnosy reálné, tedy zakládající se na výnosech očištěných o inflaci.

Průměrné roční výnosy, dolní a horní kvartily a mediány výnosů a volatilita (výběrová směrodatná odchylka) těchto výnosů jednotlivých tříd aktiv na sledovaném období znázorňuje následující tabulka:

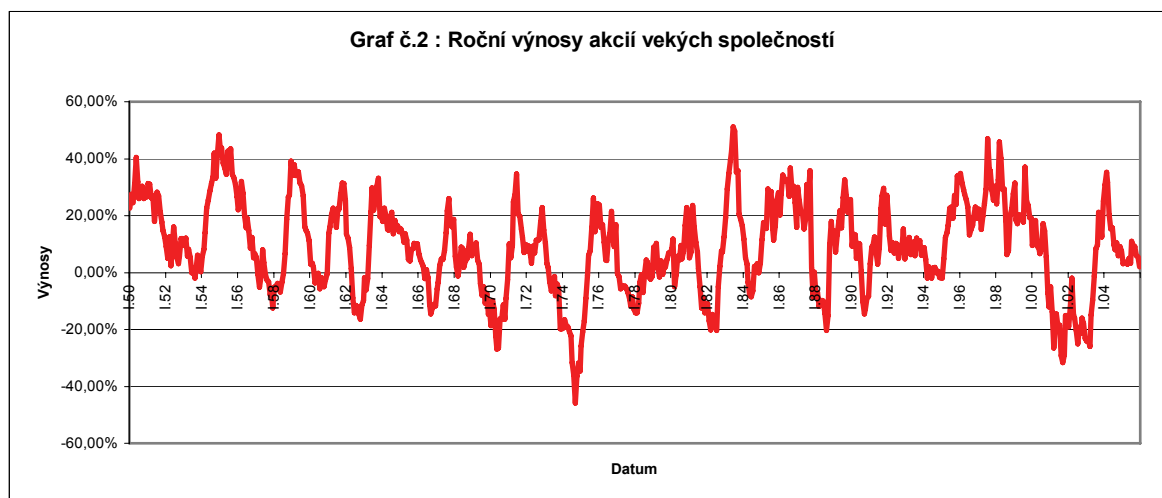
Tabulka č.1: Srovnání reálných výnosů a volatility tříd aktiv					
	LC	SC	GoB	TB	Com
Min	-45,96%	-46,06%	-20,94%	-2,77%	-35,13%
Dolní kvartál	-2,04%	-4,17%	-2,56%	-0,73%	-8,83%
Průměr	7,65%	10,25%	3,06%	1,21%	5,09%
Medián	8,64%	10,66%	2,20%	1,39%	1,11%
Horní kvartál	19,26%	22,62%	8,07%	2,68%	13,01%
Max	51,17%	93,26%	29,94%	6,03%	97,58%
Volatilita	16,64%	22,72%	8,49%	2,20%	23,52%

a) Akcie velkých společností

Hovoříme-li o velikosti akciových společností, máme tím na mysli tržní kapitalizaci. Akcie firem s velkou tržní kapitalizací jsou vhodnou jádrovou pozicí každého dynamického portfolia a i v portfoliu konzervativních investorů by měly mít své místo. Pokud bude drobný investor hledat pomoc u soudného finančního nebo investičního poradce akcie velkých firem se jistě stanou součástí jeho portfolia. Akcie velkých firem mají na trhu již vybudovanou pozici a jejich vývoj proto není tak dynamický jako u malých a středních společností. Lze proto od nich očekávat relativně zajímavý růst s přiměřeným rizikem. Pro dolarového investora, kterého budeme ve výpočtech uvažovat je pochopitelně nejjednodušší orientovat se na Americký trh. Investor nebude podstupovat měnové riziko a přesto mu trh poskytne dostatečnou diverzifikaci. Zároveň nebude optimální sledovat pouze několik obřích společností (jaké například sleduje index DJ Industrial Average). Zcela ideálním se jeví index S&P 500, který je pravděpodobně nejvyužívanějším indexem vůbec.

Pro konkrétní výpočty byly však nakonec využity data z databáze amerických profesorů K. R. Frenche a jeho kolegy E. F. Famy [15]. Důvodem je dostupnost dat za delší historické období, které jejich databáze nabízí.

Následující graf znázorňuje vývoj reálných ročních výnosů akcií velkých společností od roku 1950 do roku 2005 vždy k datu ukončení investice.



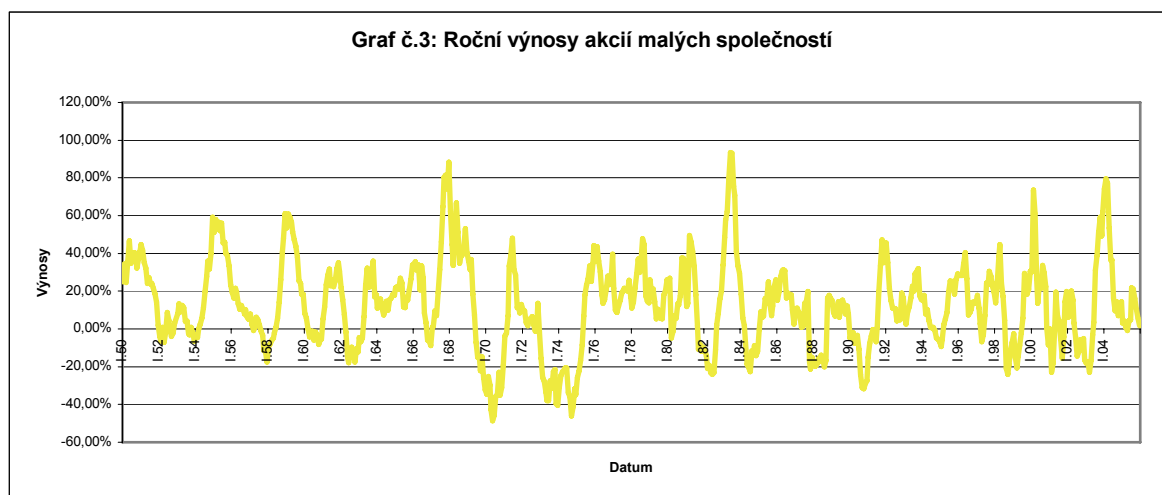
b) Akcie malých společností

Zatímco akcie velkých firem jsou základním kamenem, akcie malých firem jsou kořením, které portfoliu dodává větší dynamiku. Společnosti s malou tržní kapitalizací mohou snadno zaniknout, protože na trhu nemají dostatečnou pozici. Na druhou stranu v sobě nesou potenciál, který již velké společnosti nemají. Malé společnosti mohou růst tempem stovek procent, ale mohou též beznadějně z trhu zmizet. Jestli je společnost malá, nebo velká je samozřejmě relativní a je to dáno situací na konkrétním trhu. Společnosti obchodované na Pražské burze jako například ČEZ nebo Komerční banka jsou na této burze obry, ale ve světovém srovnání by se zařadily právě do segmentu Small Caps.

Diverzifikované portfolio malých společností do portfolio přinese vyšší potenciál. Akcie velkých a malých firem však nejsou dokonale korelované a i z hlediska diverzifikace mohou mít v portfoliu své místo.

Pro sestavení indexu bylo opět využito databáze profesorů Frenche a Famy [15] pro malé společnosti obchodované na amerických trzích.

Následující graf znázorňuje vývoj reálných ročních výnosů akcií malých společností od roku 1950 do roku 2005 vždy k datu ukončení investice.

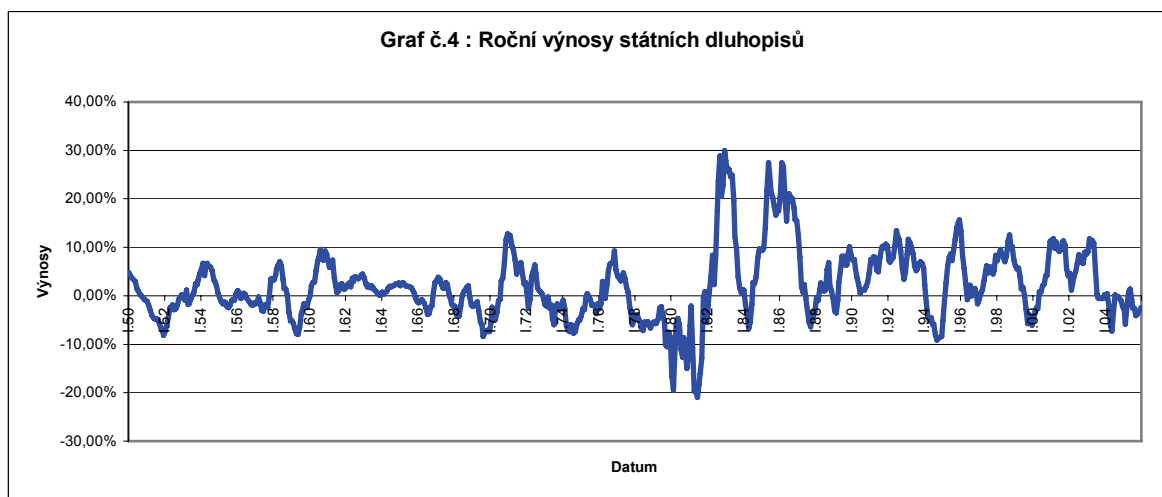


c) Státní dluhopisy

Zatímco akcie přinášejí portfoliu zajímavé výnosy, jistotu přinášejí dluhové cenné papíry. Pro amerického investora nejnižší kreditní riziko mají právě dluhopisy státní. Dluhopisy v referenční měně investora jsou vedle akcií velkých společností dalším nejvyužívanějším nástrojem. V zemích, kde je zkušenost s investováním malá (jako například v ČR) jsou dluhopisové podílové fondy pro investory jedním z prvních setkání s investováním vůbec.

Státní ani jiné dluhopisy nejsou tak atraktivním tématem jako akcie. Z tohoto důvodu není snadné nalézt žádný index (bezplatně přístupný), který by bylo možné použít. Zdrojová data v tomto případě byla vypočtena pomocí výnosů do splatnosti ze stránek Economagic [16]. Pomocí aplikace Excel byl pomocí durace (5 let) dotvořen odpovídající vývoj cen. Výsledný index je tak spíše teoretickým konstruktem, než indexem odrážejícím reálná data. Ve srovnání s indexy s kratší historií a s informacemi o historických datech týkajících se státních dluhopisů USA se však ukazuje, že jeho vypovídací schopnost je dostatečná a vývoj dluhopisů je simulován poměrně věrně.

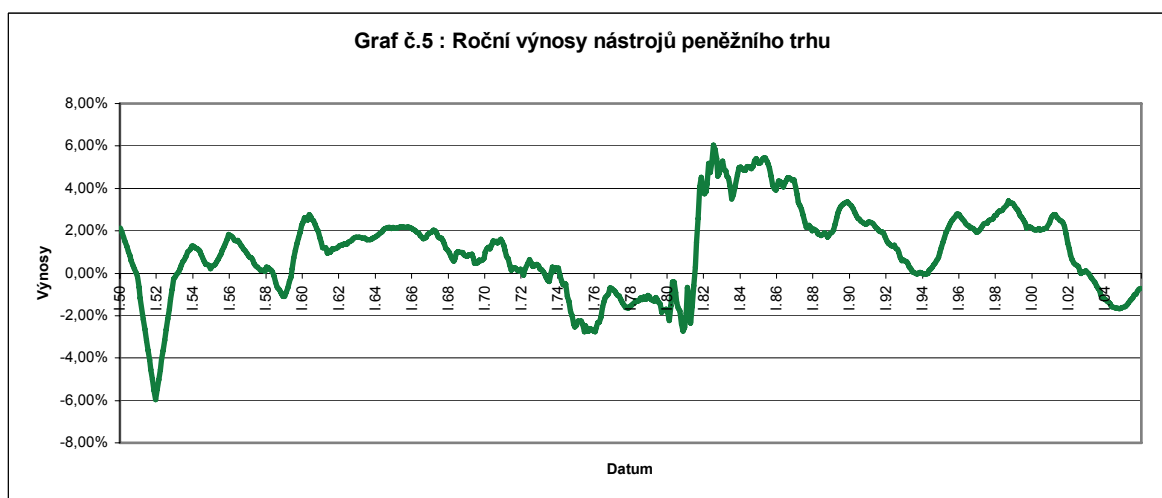
Následující graf znázorňuje vývoj reálných ročních výnosů státních dluhopisů od roku 1950 do roku 2005 vždy k datu ukončení investice.



d) Nástroje peněžního trhu

Pro nejkonzervativnější investory jsou základní složkou jejich portfolia právě nástroje peněžního trhu. Obvykle je možné setkat se i s označením hotovost případně likvidita. Nejznámějším zástupcem tohoto tržního segmentu jsou bezesporu pokladniční poukázky v USA známé jako Treasury Bills. Díky velmi krátké době splatnosti prakticky neexistuje riziko jejich nesplacení. Na druhou stranu tomu odpovídá i velmi nízký výnos. Hlavním cílem hotovosti v portfoliu je tedy výrazně snižovat riziko. Pro institucionálního investora mohou pokladniční poukázky sloužit jako bezrizikové aktivum. Drobný investor však nemá šanci sám pokladniční poukázky nakupovat a může tak činit pouze prostřednictvím nástrojů kolektivního investování. Kromě toho bude drobného investora zajímat reálný výnos. Vzhledem k tomu, že inflace má nenulovou volatilitu, ani reálný výnos z peněžního trhu nebude bezrizikový. Pro účely této práce byly použity Treasury Bills s 3 měsíční dobou do splatnosti. Referenční index byl vypočten obdobnou metodou jako státní dluhopisy. Zdroj výnosů do splatnosti pokladničních poukázek byly opět stránky Economagic [16].

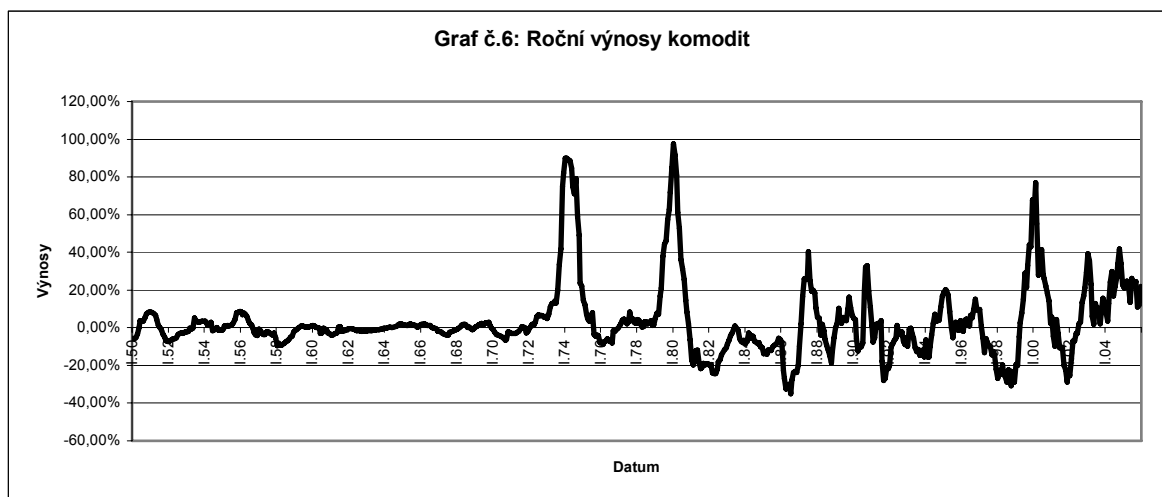
Následující graf znázorňuje vývoj reálných ročních výnosů pokladničních poukázek od roku 1950 do roku 2005 vždy k datu ukončení investice.



e) Komodity

Zajímavou alternativou k dluhovým a majetkovým cenným papírům jsou komodity. Po boomu na komoditních trzích se tyto dostávají stále více i do podvědomí drobných investorů. Přestože nástroje, kterými je možné nakupovat přímo komodity jsou spíše moderní novinkou, byly komodity do výběru aktiv zařazeny. Komodity mohou být reprezentovány buď akciemi společností, jejichž podnikání je s komoditami spojené (těžbařské a zpracovatelské společnosti) nebo přímo samotnými komoditami. Vývoj komoditních akciových společností je však více korelován s velkými společnostmi a proto byl zahrnut vývoj samotných komodit. Reprezentativní index byl složen z vývoje ceny zlata, ropy a neželezných kovů. Zlato zaujímá v indexu 20% podíl, ropa 50% a neželezné kovy 30%, což přibližně odpovídá složení v komerčních komoditních indexech. Ostatní komodity nebyly brány v úvahu. Ceny ropy pochází ze [19] cena zlata [20] a neželezné kovy [17]

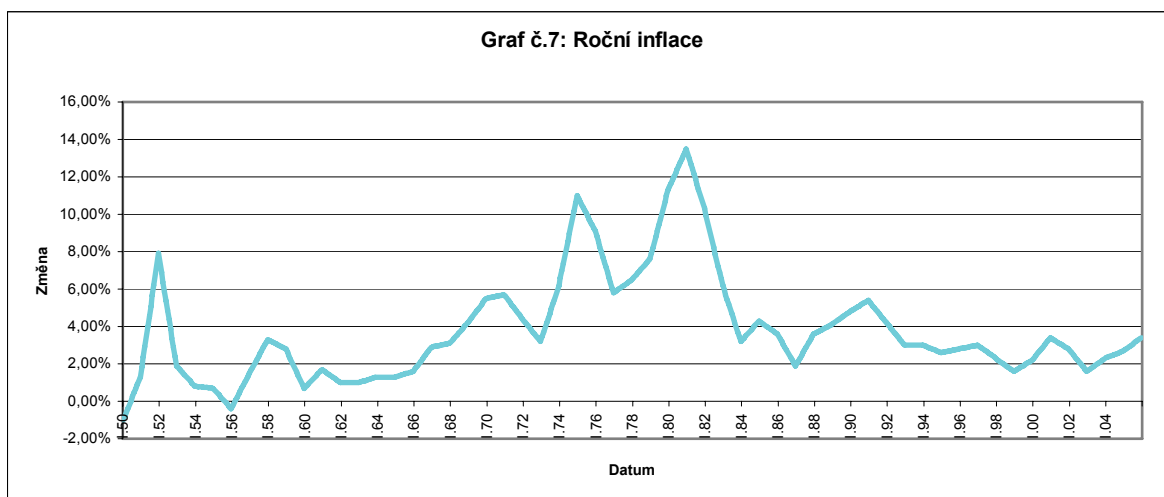
Následující graf znázorňuje vývoj reálných ročních výnosů složeného indexu komodit od roku 1950 do roku 2005 vždy k datu ukončení investice.



f) Inflace

Nejedná se o třídu aktiv a její uvedení má spíše ilustrační charakter. Inflace se odvíjí od zvedání cen. Protože se ceny zvedají inflace snižuje výnos investora. Podkladem pro inflaci se stal index CPI ze stránek Economagic [18]. Všechny výnosy výše uvedených aktiv byly o inflaci znehodnoceny.

Následující graf znázorňuje roční inflaci od roku 1950 do roku 2005.



Investiční horizont

Důležitým předpokladem Markowitzovy teorie portfolia je předem známý investiční horizont. Tím rozumíme čas, po který bude drobný investor zhodnocovat své prostředky. S rostoucím časem se podstatně snižují rizika plynoucí z investice. Na trzích se v delších horizontech projevují dlouhodobé růstové trendy a výnosy přepočtené na roční bázi kolísají relativně méně. Pokud přepočítáme výnos za celé období na výnosy p.a. volatilita takových výnosů se bude s prodlužujícím obdobím snižovat. Testovat Markowitzovu teorii bude nejzajímavější na obdobích, kde riziko jednotlivých aktiv je ještě relativně vysoké. Drobní investoři mají mnohdy investiční horizont v rozmezí 1-5 let. Méně než jeden rok je příliš krátká doba na investování. Na druhou stranu do budoucnosti vzdálenější než 5 let již mnohdy nedohlédnou. Toto rozmezí odpovídá i našemu požadavku relativně vyššího rizika. Z tohoto důvodu byly testy prováděny s ročním a pětiletým investičním horizontem.

Do optimalizačních rovnic vstupují očekávané výnosy a očekávaná kovarianční matice. Vzhledem k teorii efektivních trhů nelze předpokládat, že by investor mohl svoje očekávání postavit na prognóze budoucnosti (potom by bylo výhodnější investovat čistě podle prognózy). Jako očekávaná data bude pro drobného investora užitečné použít data získaná na základě historického chování aktiv. S tím vyvstává otázka jak dlouhý historický horizont použít pro stanovení očekávaných výnosů. Očekávané výnosy a kovarianční matice byly stanoveny vždy za 20leté historické období předcházející investici. Sledované období v délce 20 let by mělo dokázat odchytil dlouhodobé spolehlivější trendy a naopak ignorovat krátkodobé fluktuace.

Rizikový profil

Rizikový profil, nebo také tolerance k riziku určuje jaký je vztah investora k nejistotě. Vztah je možné vyjádřit pomocí křivek indiference. Předpokládá se, že investor vždy preferuje vyšší výnos při stejném riziku a nižší riziko při stejném výnosu. Tato charakteristika ovšem nevyovídá jak se investor zachová, pokud je mu nabídnut vyšší výnos za vyšší riziko. Na sklonu křivek indiference investora záleží o kolik musí být vyšší zisk, aby investoval do rizikovějšího portfolia, případně o kolik maximálně může být vyšší riziko, aby investoval do portfolia s vyšším ziskem.

Pro účely tohoto testu byly definovány tři kategorie investorů.

a) Konzervativní investor

Konzervativní investor je silně aversní vůči riziku. Pro konzervativního investora je nejdůležitější, aby investice kolísala v co nejmenší míře. Primárním cílem konzervativního investora bude minimalizovat směrodatnou odchylku portfolia. Investorovi stačí pokrýt inflaci, ale jakékoliv ztráty jsou nepřijatelné. V zemích, kde se investování teprve rozvíjí (např. v ČR), je takových investorů celá řada.

b) Vyvážený investor

Vyvážený investor se již zajímá o výnos, stále je však pro něj důležité dosahovat ho při relativně nižším riziku. Vyvážený investor očekává reálné zhodnocení svých prostředků a je připraven na kolísání hodnoty svých aktiv. Výraznějším propadům by se však rád vyvážený investor vyhnul. Vyvážený investor se bude snažit minimalizovat riziko při předpokládaném výnosu.

c) Dynamický investor

Dynamický investor sleduje především výnosy. Riziko pro něj představuje předem stanovenou hranici na jejímž okraji se bude pohybovat, aby dosáhl maximálního zisku. Případné propady jsou akceptovatelné, ale pravděpodobnost musí pochopitelně být na straně investora. Cílem dynamického investora bude maximalizovat výnos za předem stanovené směrodatné odchylky.

Kovariance

Pro optimalizaci podle Markowitzovy teorie portfolia je důležité stanovit kovarianční matici. Problém je, že kovariance není příliš robustní statistická veličina a její i drobné změny mohou výrazně ovlivnit složení portfolia. Preventivní obrana proti tomuto problému je předpokládat, že kovariance mezi jednotlivými aktivy je nulová. Podobnou myšlenku ve svých knihách propaguje například Kohout [4] a [5] Aby bylo možné testovat, jestli je předpoklad nezávislosti výnosů jednotlivých výnosů přínosem pro portfolia, byly všechny varianty spočítány jednak pro kovarianci vycházející z historických dat a jednak při očekávané nezávislosti.

Omezující podmínky

Vzhledem k omezením plynoucím z pozice drobného investora je nutné definovat několik omezujících podmínek.

Cílem optimalizace je zjistit procentní váhy jednotlivých aktiv v portfoliu. Zároveň chce investor zainvestovat všechny prostředky, protože lze předpokládat, že investice do hotovosti je vždy výhodnější než prostředky neinvestovat vůbec (zejména díky inflaci). Proto musí být součet jednotlivých vah roven právě 1.

Drobný investor má možnost vstupovat pouze do dlouhých pozic. Krátké pozice jsou proto zapovězeny a všechny váhy v portfoliu musí být větší nebo rovny 0.

Referenční portfolia

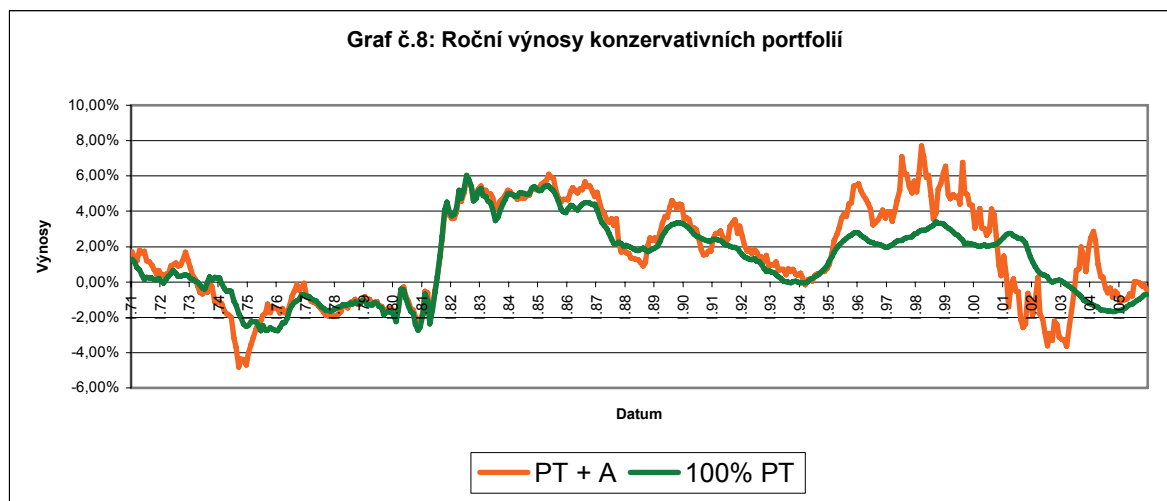
Aby bylo možné výsledky dosažené na základě Markowitzovy teorie portfolia hodnotit je nutné je porovnat s alternativní investicí. Pokud má Markowitzova teorie přinášet investorovi užitek musí přinášet lepší výsledky než intuitivní primitivní strategie.

a) Referenční portfolio pro konzervativního investora

Cílem konzervativní strategie je minimalizace rizika. Nejjednodušší konzervativní strategie je investice do aktiva s nejnižší volatilitou. Z nabízených aktiv vykazují nejnižší kolísavost nástroje peněžního trhu a to u ročních i pětiletých výnosů. První referenční portfolio pro konzervativního investora se tedy bude skládat ze 100% investice do hotovosti

Filosofie druhého referenčního portfolia předpokládá, že vhodná kombinace nástrojů peněžního trhu s akciemi může přinést dodatečné výhody při stále velmi nízkém riziku. Z historických dat byl zjištěn průměrný výnos nástrojů peněžního trhu a očekávané maximální ztráty z akcií. Jako očekávaná ztráta akcií byl použit 5. percentil z výnosů akcií, nebo -15% u ročních (respektive -5% u pětiletých) výnosů, podle toho, která hodnota byla nižší. Váhy obou tříd aktiv byly následně namíchány tak, aby očekávané výnosy z hotovosti pokryly očekávané ztráty z akcií.

Reálné roční výnosy z referenčních portfolií v letech 1971 – 2005 k datu ukončení investice zachycuje následující graf.



b) Referenční portfolio pro vyváženého a konzervativního investora

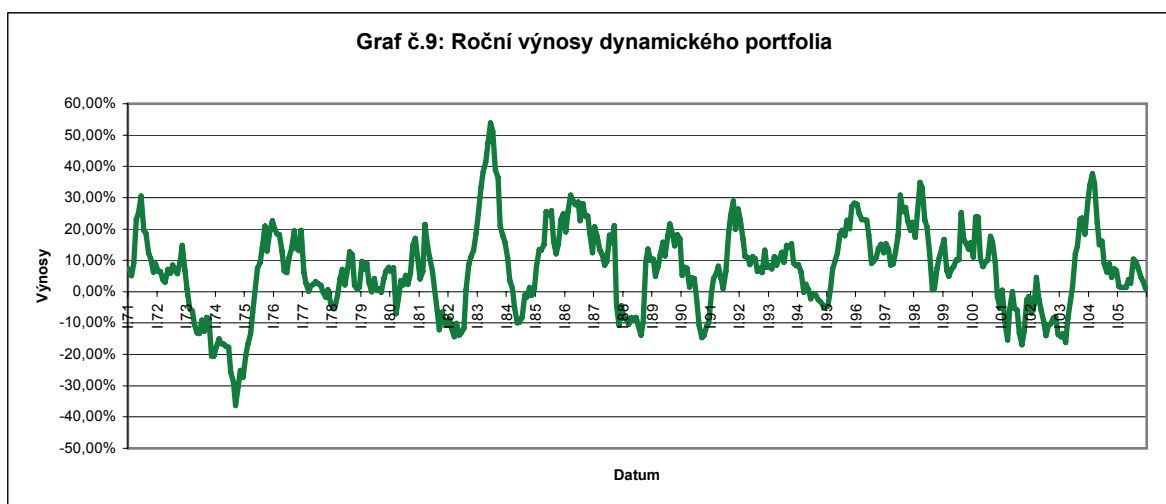
Pro dynamickou a vyváženou strategii bylo zvoleno jedno referenční portfolio. Referenční strategie pro dynamického a vyváženého investora by měla být relativně jednoduchá a neměla by být v rozporu se strategiemi, které by byly obecně doporučeny.

V dynamickém portfoliu podle investičních profesionálů bude kladen důraz na převahu akcií, proto byl zvolen poměr 75% akcií proti 25% dluhopisů. Dalším důležitým doporučeným prvkem je diverzifikace. Vyšší diverzifikace referenčního portfolia bude dosaženo rozdělením akciového podílu v poměru 2:1 na akcie malých a velkých firem. Kvůli zjednodušení nebude referenční portfolio obsahovat ani hotovost ani komodity. Výsledný mix tedy obsahuje 50% akcií velkých společností, 25% akcií malých společností a 25% dluhopisů.

Vyvážený investor se bude pokoušet pomocí Markowitzovy teorie portfolia minimalizovat směrodatnou odchylku při stejném výnosu, jako jsou výnosy referenčního portfolia. Požadovaný výnos bude určen stejným způsobem jako očekávané výnosy jednotlivých tříd aktiv z 20letého historického období.

Oproti investorovi s vyváženým rizikovým profilem bude cílem investora dynamického maximalizovat výnos při dosažení stejné směrodatné odchylky, jaká se očekává u referenčního portfolia.

Reálné roční výnosy z referenčních portfolií v letech 1971 – 2005 k datu ukončení investice zachycuje následující graf.

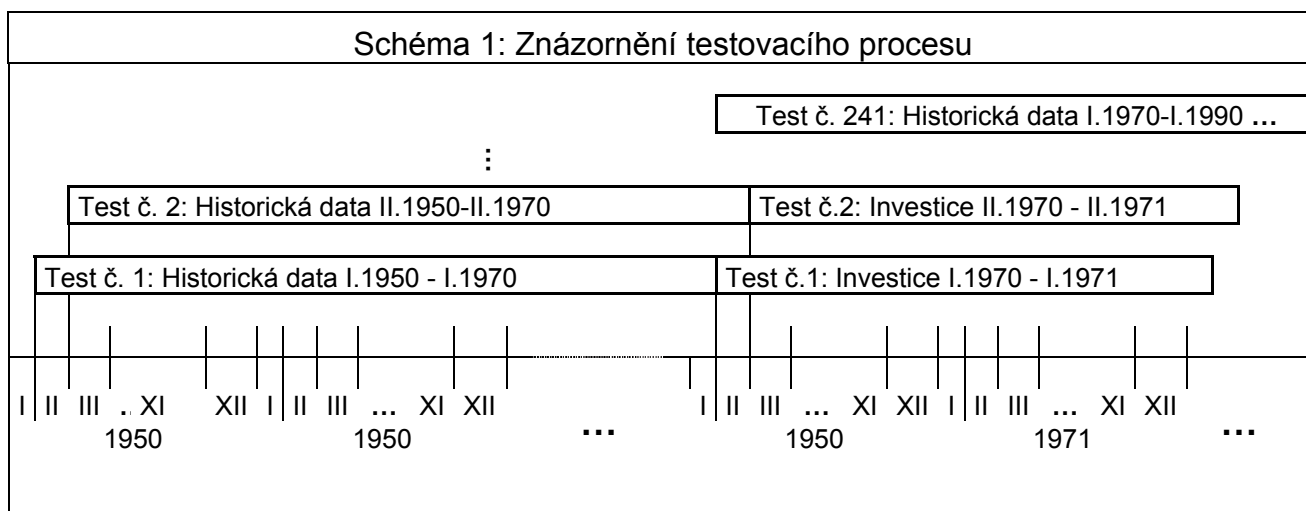


Normální rozdělení

V modelu se zjednodušeně předpokládá, že výnosy jednotlivých tříd aktiv jsou náhodné veličiny s normálním rozdělením. Střední hodnota je odhadnuta jako průměr výnosů a ve výpočtech figuruje výběrový rozptyl. Ve finanční teorii je sice snaha nalézat rozdělení, která by výnosy popisovala lépe (a reflektovala tak například výskyt tlustých konců apod.), ale přesto je předpoklad normálního rozdělení stále velmi častý. Z tohoto důvodu je normální rozdělení výnosů předpokládáno i v této práci.

III.2 Optimalizace

Testy Markowitzovy teorie portfolia proběhnou na datech z let 1950 – 2005. Pomocí optimalizační procedury budou na základě historických dat navrhuta doporučená složení portfolií. Tato portfolia budou otestována na ročním respektive pětiletém horizontu následujícím po období, ze kterého byly čerpány historické výnosy. Testy budou probíhat po měsících. První investice na základě optimalizace proběhne od ledna roku 1970 do ledna roku 1971 pro roční horizont a do ledna roku 1975 pro pětiletý horizont. Při tom budou použita data od ledna 1950 do ledna 1970. Další investice proběhne od února 1970 do února 1971 (resp. 1975) s využitím dat z období únor 1950 až únor 1970 atd. Blíže je posouvání po měsících znázorněno v následujícím schématu:



Historická data reprezentují období, na základě kterého byly stanoveny očekávané výnosy a očekávaná matice kovariancí. Investice reprezentuje fázi zainvestování podle výsledků optimalizačního procesu.

Při investování prostředků bylo předpokládáno, že všechna aktiva lze nekonečně dělit.

Celkem bude provedeno 12 typů optimalizací:

a) Konzervativní strategie

- Minimalizace směrodatné odchylky pro jednoletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Minimalizace směrodatné odchylky pro jednoletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.
- Minimalizace směrodatné odchylky pro pětiletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Minimalizace směrodatné odchylky pro pětiletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.

b) Vyvážená strategie

- Minimalizace směrodatné odchylky při stanovených výnosech (vycházející z referenční strategie) pro jednoletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Minimalizace směrodatné odchylky při stanovených výnosech (vycházející z referenční strategie) pro jednoletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.
- Minimalizace směrodatné při stanovených výnosech (vycházející z referenční strategie) odchylky pro pětiletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Minimalizace směrodatné při stanovených výnosech (vycházející z referenční strategie) odchylky pro pětiletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.

c) Dynamická strategie

- Maximalizace výnosů při stanovené směrodatné odchylce (vycházející z referenční strategie) pro jednoletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Maximalizace výnosů při stanovené směrodatné odchylce (vycházející z referenční strategie) pro jednoletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.
- Maximalizace výnosů při stanovené směrodatné odchylce (vycházející z referenční strategie) pro pětiletý horizont s využitím historických kovariancí.
- Maximalizace výnosů při stanovené směrodatné odchylce (vycházející z referenční strategie) pro pětiletý horizont za předpokladu nezávislosti aktiv.

Pro nalezení optimálních portfolií byl využit software Mathematica v. 5.2.

Vstupní data

Pocet definuje počet aktiv.

V - reprezentuje trojrozměrné pole kovariančních matic o rozsahu 5x5x432.

Ret - reprezentuje dvourozměrné pole očekávaných výnosů jednotlivých aktiv v rozsahu 5x432.

Poz - reprezentuje seznam požadovaných výnosů.

Vol – reprezentuje seznam požadovaných směrodatných odchylek.

Kovarianční matice a očekávané výnosy byly spočteny z výnosů jednotlivých aktiv. Požadované výnosy jsou průměrné výnosy referenčního portfolia (50% akcie velkých společností, 25% akcie malých společností a 25% dluhopisů). K výpočtům byla použita aplikace Excel a poté byla data naformátována pro potřeby programu Mathematica zvlášť pro roční a pro pětileté výnosy.

a) Konzervativní portfolia:

Pocet=5;

V={ . . . };

Vstupní data.

X=Table[X_i, i, Pocet];

```
cons=Apply [And, Thread[X ≥ 0]] &&Total[X]==1;
```

Definování proměnné X , která má rozměr v závislosti na počtu aktiv. Zároveň jsou definovány podmínky pro optimalizaci (omezení na dlouhé pozice a na součet jednotlivých složek roven 1).

```
konzervative[N_] := Minimize[{Sqrt[X.N.X], cons}, X]
```

Funkce minimalizující směrodatnou odchylku při daných podmínkách.

```
kon=Table[konzervative[V[[i]]], {i, 432}]
```

List obsahující výsledky minimalizace (jako vstup je použito pole kovariančních matic) to jest směrodatnou odchylku nalezeného portfolia a váhy jednotlivých aktiv. Celkem se provede 432 optimalizací pro daná historická období.

b) Vyvážená portfolia

```
Pocet=5;
```

```
Ret={...};
```

```
Poz={...};
```

```
V={...};
```

Vstupní data.

```
X=Table[Xi, i, Počet];
```

```
cons=Apply [And, Thread[X ≥ 0]] &&Total[X]==1;
```

Definování proměnné X , která má rozměr v závislosti na počtu aktiv. Zároveň jsou definovány podmínky pro optimalizaci (omezení na dlouhé pozice a na součet jednotlivých složek roven 1).

```
balanced[r_, N_, O_] := Minimize[{Sqrt[X.N.X], cons && X.O==r}, X]
```

Funkce minimalizující směrodatnou odchylku při daných podmínkách. Podmínky jsou rozšířeny o podmínku, že výnosy portfolia musí být rovny výnosům referenčního portfolia.

```
bal=Table[balanced[Poz[[i]], V[[i]], Ret[[i]]], {i, 432}]
```

List obsahující výsledky optimalizace (jako vstup je použito pole kovariančních matic, očekávaných a požadovaných výnosů) to jest směrodatnou odchylku nalezeného portfolia a váhy jednotlivých aktiv. Celkem se provede 432 optimalizací pro daná historická období.

c) Dynamická portfolia

```
Pocet=5;
```

```
Ret={...};
```

```
Vol={...};
```

```
V={...};
```

Vstupní data.

```
X=Table[Xi, i, Počet];
```

```
cons=Apply [And, Thread[X ≥ 0]] &&Total[X]==1;
```

Definování proměnné X , která má rozměr v závislosti na počtu aktiv. Zároveň jsou definovány podmínky pro optimalizaci (omezení na dlouhé pozice a na součet jednotlivých složek roven 1).

```
dynamic[s_,N_,O_] := Maximize[{X.O, cons && Sqrt[X.N.X] == s}, X]
```

Funkce maximalizující výnosy při daných podmínkách. Podmínky jsou rozšířeny o podmínku, že směrodatná odchylka portfolia musí být rovna očekávané volatilitě referenčního portfolia.

```
dyn=Table[dynamic[Vol[[i]],V[[i]],Ret[[i]]],{i,432}]
```

List obsahující výsledky optimalizace (jako vstup je použito pole kovariančních matic, očekávaných výnosů a požadovaných směrodatných odchylek) to jest výnosy nalezeného portfolia a váhy jednotlivých aktiv. Celkem se provede 432 optimalizací pro daná historická období.

III.3 Interpretace výsledků

Výsledky všech dvanácti optimalizačních procesů byly naformátovány a převedeny do aplikace Excel. Váhy jednotlivých složek, které vyšly v extrémních řádech ($< -10^5$) byly nahrazeny nulou. Následně byly vypočteny výnosy jednotlivých portfolií podle výše uvedeného klíče. Výsledky byly porovnány s referenčními portfolií. Při tom byla analyzována výnosnost portfolií, volatilita výnosů a Sharpe ratio.

U výnosnosti byl sledován průměrný výnos. Za dříve zmíněného předpokladu, že výnosy aktiv jsou náhodné veličiny s normálním rozdělením byla testována nulová hypotéza, že rozdíl středních hodnot optimalizovaných a referenčních portfolií je roven nule oproti alternativní hypotéze, že se liší. K tomu byl použit párový t-test. Testy byly prováděny na 5% hladině významnosti. Testovány byly pouze některé dvojice, u kterých testování mohlo přinést zajímavé výsledky.

$$H_0 : \Delta\mu = 0, H_1 : \Delta\mu \neq 0$$

$$X \in W \Leftrightarrow \left| \bar{X}_n \right| \frac{\sqrt{n}}{S_n} \geq t_{97,5/n-1}$$

$\Delta\mu$ - rozdíl středních hodnot portfolií

n - počet pozorování 420 u ročních výnosů respektive 372 u pětiletých

\bar{X}_n - rozdíl průměrných výnosů testovaných portfolií

S_n - směrodatná odchylka rozdílů výnosů testovaných rozdělení

$t_{97,5/n-1}$ - vzhledem k počtu pozorování byla kritická hodnota studentova rozdělení určena přibližně na 1,97

Volatilita portfolií byla odhadnuta aplikací Excel jako výběrová směrodatná odchylka.

Sharpe ratio bylo spočteno jako podíl průměrného výnosu a směrodatné odchylky. Reprezentuje vztah mezi výnosy a kolísavostí aktiva. Ukazatel Sharpe ratio by mělo u srovnatelných portfolií ukazovat, kde je tento vztah nejpříznivější.

Konzervativní portfolia pro roční výnosy

Tabulka č.2: Srovnání ročních výnosů konzervativních portfolií				
	Kon	Kon_Nez	100%PT	PT + A
Min	-2,83%	-3,55%	-4,81%	-2,77%
Dolní kvartál	-0,24%	-0,40%	-0,81%	-0,73%
Průměr	1,38%	1,65%	1,58%	1,21%
Medián	1,24%	1,90%	1,33%	1,39%
Horní kvartál	3,06%	3,33%	4,17%	2,68%
Max	7,12%	7,20%	7,71%	6,03%
Volatilita	2,08%	2,49%	2,75%	2,20%
Sharpe Ratio	66,28%	66,17%	57,23%	54,79%

Kon – Konzervativní portfolio založené na Markowitzově teorii portfolia

Kon_Nez – Konzervativní portfolio založené na Markowitzově teorii portfolia při předpokladu nezávislosti tříd aktiv.

100% PT – Referenční portfolio zainvestované do hotovosti

PT + A – Referenční portfolio skládající se z hotovosti a akcií

a) Srovnání výnosů

Z tabulky je patrné, že největší průměrné historické výnosy dosahovala portfolia sestavená pomocí Markowitzovy teorie portfolia při předpokladu nezávislosti aktiv. Další v pořadí je referenční portfolia založené na mixu hotovosti a akcií. Portfolia sestavená pomocí optimalizace založené na reálných kovariancích jsou na třetím místě a čistá hotovost přinesla průměrné výnosy nejnižší. Rozdíly mezi průměrnými výnosy se nominálně pohybují v rozmezí do 0,45%. Relativní rozdíl se pohybuje do 36%.

Výsledky testů hypotéz ukazuje následující tabulka.

Tabulka č.3: Testy hypotézy o stejném průměru ročních výnosů konzervativních portfolií		
Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Kon_Nez – Kon	4,48	Zamítáme H_0
Kon_Nez - 100%PT	9,89	Zamítáme H_0
Kon_Nez - (PT + A)	1,04	Nezamítáme H_0
Kon - 100%PT	3,72	Zamítáme H_0
(PT + A) – Kon	2,68	Zamítáme H_0

b) Srovnání volatility

Nejnižší volatilitu vykazují portfolia založená na reálných kovariancích. Druhé v pořadí jsou referenční portfolia hotovosti následované portfolií optimalizovanými za předpokladu nezávislosti. Mix akcií a hotovosti má volatilitu nejvyšší. Nominální rozdíly ve volatilitě jsou do 0,6% a relativní rozdíl je do 35%.

c) Srovnání Sharpe ratia

Sharpe ratio u obou strategií založených na Markowitzově teorii jsou podobná. Referenční portfolia dosahují Sharpe ratia nižšího o 15% respektive 20%.

Konzervativní portfolio pro pětileté výnosy

	Kon	Kon_Nez	100%PT	PT + A
Min	-1,14%	-2,47%	-2,60%	-1,74%
Dolní kvartál	1,17%	1,61%	-0,36%	-0,10%
Průměr	2,30%	2,84%	2,36%	1,41%
Medián	1,86%	2,91%	2,77%	1,64%
Horní kvartál	2,60%	4,45%	4,53%	2,53%
Max	10,38%	7,90%	8,80%	4,84%
Volatilita	2,21%	2,40%	2,82%	1,80%
Sharpe Ratio	103,89%	118,46%	83,89%	78,29%

a) Srovnání výnosů

Portfolia s nezávislými aktivy dosahují opět prvenství. Druhá jsou v tomto případě referenční portfolia s příměsí akcií. Optimalizace při reálných kovariancích je na třetím místě. Nominální rozdíly se pohybují do 1,4% přičemž nejvýnosnější portfolia dosáhla dvojnásobného výnosu než referenční portfolia hotovosti.

Výsledky testů hypotéz jsou v tabulce

Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Kon_Nez – Kon	5,71	Zamítáme H_0
Kon_Nez - 100%PT	12,75	Zamítáme H_0
Kon_Nez - (PT + A)	2,80	Zamítáme H_0
Kon - 100%PT	4,98	Zamítáme H_0
(PT + A) -Kon	0,30	Nezamítáme H_0

b) Srovnání volatility

Nejnižší i nejvyšší volatility dosáhla referenční portfolia. Nominálně se volatilita srovnávaných strategií lišila do 1%, relativně to znamená přibližně 50%.

c) Srovnání Sharpe ratia

Podobně jako u ročních výnosů i u pětiletých je Sharpe ratio portfolií založených na optimalizaci vyšší než Sharpe ratio referenčních portfolií. Relativní rozdíl je v tomto případě až 50%.

Z výše uvedených srovnání se strategie využití Markowitzovy teorie portfolia u konzervativního investora jeví jako přínosná. Testy ve většině případů zamítly hypotézu, že by se výnosy nelišily. Navíc Sharpe ratio těchto portfolií bylo výrazně vyšší než u portfolií

referenčních. V tomto případě lze tedy hledání optimálního portfolia doporučit. Podle výsledků se zdá, že při předpokladu nezávislosti lze dosáhnout potenciálně vyššího výnosu, než při zahrnutí historických kovariancí. Na druhou stranu je i riziko takového portfolia vyšší.

Vyvážené portfolio pro roční výnosy

Tabulka č.6: Srovnání ročních výnosů vyvážených portfolií			
	Bal	Bal_Nez	(50-25)A-25 D
Min	-37,26%	-34,60%	-36,36%
Dolní kvartál	-1,20%	-0,85%	-0,93%
Průměr	4,44%	5,53%	7,15%
Medián	4,89%	6,43%	7,60%
Horní kvartál	10,00%	11,74%	15,72%
Max	37,83%	38,51%	53,82%
Volatilita	10,98%	11,09%	13,54%
Sharpe Ratio	40,41%	49,86%	52,82%

Bal – Vyvážené portfolio založené na Markowitzově teorii portfolia

Bal_Nez – Vyvážené portfolio založené na Markowitzově teorii portfolia při předpokladu nezávislosti tříd aktiv.

(50-25)A-25D – Referenční portfolio zainvestované 50% do akcií velkých společností, 25% do akcií malých společností a 25% do státních dluhopisů

a) Srovnání výnosů

Portfolia založená na předpokladu nezávislosti aktiv dosahují lepších výsledků, než portfolia založená na historické kovarianci. Největšího výnosového potenciálu však dosahuje portfolio referenční. Nominální rozdíly mezi průměrnými výnosy se pohybuje do 2,7%. Relativně je největší rozdíl kolem 60%.

V následující tabulce jsou uvedeny testy hypotéz:

Tabulka č.7: Testy hypotézy o stejném průměru ročních výnosů vyvážených portfolií		
Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Bal_Nez - Bal	5,71	Zamítáme H_0
[(50-25)A-25D] - Bal_Nez	12,75	Zamítáme H_0

b) Srovnání volatilit

Nejnižší směrodatnou odchylku lze pozorovat u portfolií s využitím historických kovariancí. Nejvyšší je u referenčního portfolia. Nominálně je rozdíl do 2,6% což relativně znamená přibližně 20%.

c) Srovnání Sharpe ratia

Sharpe ratio portfolií s historickými kovariancemi je zdaleka nejnižší. Portfolia s využitím předpokladu nezávislosti mají Sharpe ratio jen o něco nižší než portfolio referenční.

Vyvážené portfolio pro pětileté výnosy

	Bal	Bal_Nez	(50-25)A-25 D
Min	-4,75%	-5,26%	-5,87%
Dolní kvartál	1,10%	2,05%	2,07%
Průměr	4,13%	4,25%	6,30%
Medián	2,81%	3,41%	6,76%
Horní kvartál	7,26%	7,22%	10,05%
Max	17,44%	16,86%	19,79%
Volatilita	4,60%	4,37%	5,73%
Sharpe Ratio	89,79%	97,15%	109,94%

a) Srovnání výnosů

V případě pětiletých výnosů zaostávají portfolia založená na Markowitzově teorii o něco méně, než u výnosů ročních. Největších nominálních rozdíl je 2,17%. Tomu odpovídá relativní rozdíl 50%.

Testy hypotéz shrnuje následující tabulka:

Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Bal_Nez – Bal	1,11	Nezamítáme H_0
[(50-25)A-25D] - Bal_Nez	11,41	Zamítáme H_0

b) Srovnání volatility

U pětiletých výnosů dosahuje nižší volatilita portfolio založené na předpokladu nezávislosti. Referenční portfolio má opět volatilitu nejnižší. Rozdíly jsou nominálně do 1,4%, což znamená přibližně 30% relativní rozdíl.

c) Srovnání Sharpe ratia

Referenční portfolio dosáhlo relativně přibližně o 25% vyššího Sharpe ratia než portfolia s historickými kovariancemi a o 13% vyššího než portfolia založená na nezávislosti.

Cílem vyvážených portfolií bylo dosáhnout podobného výnosu jako portfolio referenční, ale při nižším riziku. Z uvedených statistik je vidět, že sice bylo dosaženo nižší kolísavosti, ale za cenu mnohem nižších výnosů, což potvrdily i testy hypotéz. Srovnání Sharpe Ratia ukazuje, že ve většině případů je cena v podobě nižších výnosů příliš vysoká. Na milost lze vzít pouze portfolio založené na předpokladu nezávislosti u ročních výnosů, které dokázalo s referenčním portfoliem držet dech. Zdá se, že malá robustnost kovariancí se plně projevila na neúspěchu portfolií založených na jejich historických výsledcích.

Dynamické portfolio pro roční výnosy

	Dyn	Dyn_Nez	(50-25)A-25 D
Min	-37,86%	-45,26%	-36,36%
Dolní kvartál	-3,66%	-3,47%	-0,93%
Průměr	5,60%	6,84%	7,15%
Medián	6,64%	8,39%	7,60%
Horní kvartál	14,93%	16,85%	15,72%
Max	56,92%	49,68%	53,82%
Volatilita	14,30%	16,25%	13,54%
Sharpe Ratio	39,16%	42,08%	52,82%

a) Srovnání výnosů

Nejvyššího průměrného výnosu dosáhlo referenční portfolio. Nejslabší byla portfolia založená na historických kovariancích. Nominální rozdíl mezi strategiemi je do 1,6% čemuž odpovídá relativní rozdíl do 26%.

V následující tabulce je možné najít testy hypotéz:

Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Dyn_Nez – Dyn	5,04	Zamítáme H_0
[(50-25)A-25D] - Dyn_Nez	0,85	Nezamítáme H_0
[(50-25)A-25D] - Dyn	3,13	Zamítáme H_0

b) Srovnání volatility

Nejvyšší riziko sebou nesla portfolia s předpokladem nezávislosti. Druhé bylo portfolio referenční. Rozdíl mezi směrodatnými odchylkami se pohybuje do 2% nominálně a do 15% relativně.

c) Srovnání Sharpe ratia

Obě strategie založené na optimalizaci dosáhly výrazně nižšího Sharpe ratia, než portfolio referenční. Relativní rozdíly činí 35% respektive 25%.

Dynamické portfolio pro pětileté výnosy

	Dyn	Dyn_Nez	(50-25)A-25 D
Min	-5,47%	-7,99%	-5,87%
Dolní kvartál	0,36%	0,85%	2,07%
Průměr	4,74%	4,98%	6,30%
Medián	3,26%	3,69%	6,76%
Horní kvartál	9,72%	9,65%	10,05%
Max	20,36%	21,98%	19,79%
Volatilita	5,77%	6,25%	5,73%
Sharpe Ratio	82,10%	79,64%	109,94%

a) Srovnání výnosů

V tomto případě portfolia založená na Markowitzově teorii jednoznačně zaostaly za referenčním portfoliem. Nominální rozdíl činil až 1,6% což odpovídá relativnímu rozdílu více než 35%.

Následující tabulka shrnuje testy hypotéz:

Rozdíl	Hodnota	Výsledek
Dyn_Nez – Dyn	5,35	Zamítáme H_0
[(50-25)A-25D] - Dyn_Nez	3,28	Zamítáme H_0

b) Srovnání volatility

V případě pětiletých výnosů nejnížší riziko představovala investice do referenčního portfolia. Nominálně činil rozdíl proti nejrizikovějším portfoliím činil přibližně 0,5%. Relativně byl tento rozdíl kolem 10%.

c) Srovnání Sharpe ratia

Není překvapením, že obě strategie založené na Markowitzově teorii portfolia mají výrazně nižší Sharpe ratio než portfolio referenční. Relativně jsou rozdíly přibližně 40% respektive 35%.

Cílem dynamického investora je vysoký zisk. V tomto směru portfolia založená na Markowitzově teorii portfolia totálně selhala. U pětiletých výnosů měla portfolia vycházející z optimalizace dokonce nižší výnosy při vyšším riziku, což je zcela proti cílům racionálního investora. Na základě dostupných dat a analýz by rozhodně dynamickému investorovi nešlo investování pomocí Markowitzovy teorie portfolia doporučit.

IV Závěr

Cílem práce bylo nalézt alespoň částečnou odpověď na otázku, jestli by Markowitzova teorie portfolia byla užitečná pro drobného investora. Na základě výsledků interpretovaných v poslední kapitole praktické části můžeme však učinit pouze určité poznatky.

Užitečnost zmíněného modelu se ukázala především u konzervativních portfolií. Pokud je cílem drobného investora pouze minimalizovat riziko, lze na základě uvedených výsledků doporučit použití Markowitzovi teorie portfolia a to jak na krátkodobém (ročním), tak na střednědobém (pětiletém) horizontu. V obou případech optimalizovaná portfolia dosáhla lepších výsledků než portfolia referenční. Rozhodnutí mezi využitím historických kovariancí, nebo předpokladu nezávislosti závisí spíše na investorovi. Předpokládat nezávislost je při tom jednoznačně jednodušší z hlediska početního.

U vyváženého investora se úspěšnost optimalizovaných portfolií zdá více než sporná. Portfolia sice dosahují nižší kolísavosti, ale za cenu výrazně nižších výnosů. Především na střednědobém horizontu se výsledky ukázaly jako velmi slabé.

Jednoznačně špatných výsledků dosáhla portfolia v případě dynamického investora. Optimalizovaná portfolia nedokázala dosáhnout vyššího výnosu, než portfolia referenční a to při vyšší směrodatné odchylce.

Portfolia založená na předpokladu nezávislosti dosahovala vyšších výnosů při vyšším riziku a vyššího nebo stejného Sharpe ratia ve srovnání s portfolií založenými na historických kovariancích. S výjimkou konzervativních portfolií se výsledky zdají lepší pro roční horizont (ve srovnání s referenčními portfolií).

Na závěr je nutné říci, že výsledky jsou determinovány mnoha faktory jakými jsou například vybrané třídy aktiv, délka historického období apod. Pokud bychom tyto faktory změnily, výsledky by mohly být jiné. Nelze tedy Markowitzovu teorii portfolia pro vyvážené a dynamické investory zatratit úplně, aniž bychom zkusily tyto faktory změnit.

V Literatura

Použitá literatura

- [1] Cipra, T.: Matematika Cenných Papírů. HZ Praha, Praha 2005
- [2] Cipra, T.: Praktický Průvodce Finanční A Pojistnou Matematikou. Ekopress, Praha 2005
- [3] Čámský, F.: Teorie Portfolia. Brno, CZ : Masarykova Universita, Ekonomicko-Správní Fakulta, 2001
- [4] Kohout, P., Hlušek, M.: Peníze Výnosy A Rizika, Ekopress, Praha 2002
- [5] Kohout, P.: Investiční Strategie Pro Třetí Tisíciletí, Grada Publishing, 2005
- [6] Musílek, P. Trhy Cenných Papírů . Ekopress, Praha 2002

Další prameny

- [7] Bachelier, L.: Theorie De La Speculation 1900 In [6]
- [8] Fama, E.F.: Random Walks In Stock Prices. 1965 In [6]
- [9] Haugen, H.: Modern Investment Theory 1990 In [6]
- [10] Markowitz, H.: Portfolio Selection. Journal Of Finance, 1952 In [6]
- [11] Markowitz, H.: Portfolio Selection: Diversification Of Investment, 1959 In [6]
- [12] Sharpe W.F.: Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk. 1964 In [6]
- [13] Kendall, M.: The Analysis Of Economic Times Series 1953 In [6]
- [14] Osborne, F.: Brownian Motions In Stock Market 1959 In [6]

Internet

- [15] http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html
- [16] <http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/fedbog/>
- [17] <http://www.economagic.com/blsppi.htm>
- [18] <http://www.economagic.com/blscu.htm>
- [19] http://www.ioga.com/Special/crudeoil_Hist.htm
- [20] <http://goldprice.org/gold-price-data.html>