Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dalibor Slovák

Wienerův proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jakub Staněk
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

2007

Děkuji své rodině a přátelům za podporu ve studiu. Děkuji Tereze Baumové za půjčení počítače, Tomáši Kohanovi, Janu Bártkovi a Lucii Kračmerové za poskytnuté rady a svému vedoucímu Jakubu Staňkovi za odborný dohled.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Dalibor Slovák

Obsah

1 Úvod **5**

2 Důležité věty **6**

2.1 Definice a pomocná tvrzení 6

2.2 Transformace Wienerova procesu 9

2.3 O existenci Wienerova procesu 11

2.4 O neexistenci derivace 12

3 Simulace Wienerova procesu **15**

4 Závěr **17**

Literatura **18**

Název práce: Wienerův proces
Autor: Dalibor Slovák
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jakub Staněk
e-mail vedoucího: kubiks@post.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme významný proces z teorie stochastických procesů. Po úvodní definici zformulujeme několik vět z teorie pravděpodobnosti, které budeme později využívat. Dokážeme, že Wienerův proces je stabilní vůči široké třídě transformací, zformulujeme a dokážeme větu o existenci Wienerova procesu a nakonec ukážeme, že trajektorie Wienerova procesu nemá konečnou derivaci v žádném bodě $(0, \infty)$ skoro jistě. V další části uvedeme bez důkazu Donského princip invariance a na jeho základě nasimulujeme ukázku trajektorie Wienerova procesu.

Klíčová slova: Norbert Wiener, Wienerův proces, trajektorie

Title: Wiener process
Author: Dalibor Slovák
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jakub Staněk
Supervisor's e-mail address: kubiks@post.cz

Abstract: In the present work we study an important part of the theory of stochastic processes. After the initial definition we state several theorems of the theory of probability, which we use afterwards. We demonstrate stability of Wiener process toward the wide group of transformations, we present and prove theorem about the existence of Wiener process and finally we demonstrate that trajectory of Wiener process is finitely diferentiable at no point of $(0, \infty)$ almost surely. In the next part we state Donsker invariance principle without proof and on its basis we simulate trajectory of Wiener process.

Keywords: Norbert Wiener, Wiener process, trajektory

Kapitola 1

Úvod

Wienerův proces (někdy též nazýván Brownův pohyb) je stochastický proces se spojitým časem, pojmenovaný na počest Norberta Wienera. Je to jeden z nejdůležitějších příkladů Lévyho procesů, tj. procesů s přírůstky nezávislými na poloze.

Brownův pohyb popsal roku 1827 skotský botanik Robert Brown jako náhodný pohyb mikroskopických částeček v kapalném nebo plynném prostředí. Tento jev několik desetiletí znepokojoval fyziky; s jeho vysvětlením přišel až Albert Einstein ve svém prvním článku ze slavného roku 1905 "O pohybu - potřebném pro molekulární kinetickou teorii tepla - malých částic umístěných v klidné kapalině".

Matematické pozadí tomuto jevu dodal Norbert Wiener, ale přesná matematická teorie mohla být budována až poté, co Andrej Nikolajevič Kolmogorov ve 30. letech definoval pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. V dnešním pojetí je Brownův pohyb jen jednou z aplikací Wienerova procesu. Na základě výsledků Paula Erdőse a Marka Kace ukázal Monroe D.Donsker, že Wienerův proces je limitní množinou trajektorií náhodné procházky, tak jako jsme toho využili v kapitole 3.

Wienerův proces se využívá v mnoha oblastech matematiky, fyziky a ekonomie, např. při řešení stochastických diferenciálních rovnic nebo pro filtraci šumu při přenosu signálu. O tom, že toto téma ani zdaleka není vyčerpané, svědčí Nobelova cena za ekonomii udělená v roce 1997 Robertu C. Mertonovi a Myronu Scholesovi, kteří při určování hodnot finančních derivátů využívali bohaté teorie Wienerova procesu.

Cílem naší práce je ukázat některé důležité vlastnosti, kterými se Wienerův proces vyznačuje. Jedná se zejména o Větu o existenci Wienerova procesu a Větu o neexistenci derivace, které jsou dokázány ve druhé kapitole. Třetí kapitola nám potom ukazuje, jak mohou vypadat trajektorie Wienerova procesu.

Ačkoli jsou zde užívané pojmy vesměs definovány, u čtenáře se předpokládají základní znalosti teorie pravděpodobnosti.

Kapitola 2

Důležité věty

2.1 Definice a pomocná tvrzení

Přikročme nejprve k vlastní definici:
Definice:
Stochastický proces $\{W(t), t \geq 0\}$ se nazývá *Wienerův proces*, jestliže platí:

1. $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathsf{N}(0, |t-s|), \quad s,\ t \geq 0$
2. $W(t_1),\ W(t_2) - W(t_1), \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n < \infty$
3. $\{W(t), t \geq 0\}$ má všechny trajektorie spojité a $W(0) = 0$.

V následující části si zformulujeme tvrzení a věty, jichž budeme později využívat. Jejich důkaz vyžaduje vybudování neelementární teorie, a proto až na větu 2.4 je na důkazy pouze odkazováno.

Definice
Buď $T \subset \mathbb{R}$ indexová množina, $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Systém distribučních funkcí $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$ se nazývá *konzistentní*, jestliže má následující vlastnosti:

(1) Pro libovolnou permutaci $i_1, \ldots, i_n$ čísel $1, \ldots, n$ platí

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

(2)

$$\lim_{x_n \to \infty} F_{t_1,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = F_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Definice
Buď $T \subset \mathbb{R}$ indexová množina, $X = \{X(t), t \in T\}$ a $Y = \{Y(t), t \in T\}$ náhodné procesy definované na stejném pravděpodobnostním prostoru. Řekneme, že proces Y je *modifikace* procesu X, jestliže

$$\mathsf{P}[X(t) = Y(t)] = 1 \text{ pro každé } t \in T.$$

Věta 2.1 (Daniell-Kolmogorov)**.** *Nechť $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces $\{X(t), t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1, \dots, t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1, \dots, x_n$ platí*

$$\mathsf{P}(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Důkaz: Štěpán (1987), věta I.10.3

Věta 2.2 (O spojité modifikaci)**.** *Nechť $\{X(t), t \in T\}$ je stochastický proces a existují kladné konstanty K, α, δ takové, že*

$$\mathsf{E}\,|X(s) - X(t)|^{\alpha} \leq K\,|s - t|^{1+\delta}$$

pro všechna $s, t \in T$.
Pak existuje spojitá modifikace procesu $\{X(t), t \in T\}$.

Důkaz: Štěpán (1987), věta III.5.8

Věta 2.3. *Buďte $Y_1, \dots, Y_n$ náhodné veličiny takové, že náhodný vektor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ má normální rozdělení. Pak $Y_1, \dots, Y_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny.*

Důkaz: Štěpán (1987), věta II.7.28

Věta 2.4. *Stochastický proces $\{W(t), t \geq 0\}$ vyhovuje podmínkám 1., 2. z definice právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

(i) $\mathcal{L}(W(t_1), \dots, W(t_n))$ *je n-rozměrné normální rozdělení s nulovým vektorem středních hodnot pro $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$ konečné, $n \in \mathbb{N}$*

(ii) $cov(W(t), W(s)) = \min\,(s, t), \quad s,\ t \geq 0.$

Důkaz: Mějme $t_1, \ldots, t_n$ konečná nezáporná reálná čísla a $0 \leq s_1 < \ldots < s_n$ nechť je jejich uspořádání podle velikosti. Má-li vektor Y n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a varianční maticí V a $X = YA_{n\times n}$, kde $A_{n\times n}$ je matice typu $n \times n$, pak vektor X má n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a varianční maticí A^TVA. Položíme-li $Y = (W(s_1), W(s_2), \ldots, W(s_n))$ a $X = (W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \ldots, W(s_n) - W(s_{n-1}))$, pak matice lineárních zobrazení A, převádějící X na Y, a matice B, převádějící Y na X, vypadají následovně:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho plyne, že $\mathcal{L}(W(s_1), W(s_2), \ldots, W(s_n))$ má n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou právě tehdy, když $\mathcal{L}(W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \ldots, W(s_n) - W(s_{n-1}))$ má n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou. Nyní přistupme k samotnému důkazu.

Nechť platí 1., 2.:

Jelikož $\mathcal{L}(W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \ldots, W(s_n) - W(s_{n-1}))$ má n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou, plyne vlastnost (i) z předchozí poznámky.

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(W(t), W(s)) &= \mathsf{E}\, W(t)W(s) - \underbrace{\mathsf{E}\, W(t)\mathsf{E}\, W(s)}_{=0} = \\ &= \mathsf{E}\, W(t)[W(s) - W(t) + W(t)] = \\ &= \underbrace{\mathsf{E}\, W(t)[W(s) - W(t)]}_{=0} + \mathsf{E}\, [W(t)]^2 = \\ &= \operatorname{var} W(t) = t, \quad s \geq t \end{aligned}$$

a obdobně $\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = s$ pro $s \leq t$, takže platí i vlastnost (ii).

Nechť platí (i), (ii):

Podle poznámky ze začátku důkazu je $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathsf{N}(0, \sigma^2)$, kde podle (ii)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathsf{E}\,[W(t) - W(s)]^2 = \mathsf{E}[(W(t))^2 - 2W(t)W(s) + (W(s))^2] = \\ &= t - 2\min(t,s) + s = |t - s|\,, \quad t,\ s \geq 0. \end{aligned}$$

Podle (ii) rovněž platí
$0 \leq t < s < u \quad \Rightarrow\ \mathsf{E}\,(W(u) - W(s))(W(s) - W(t)) =$
$= \mathsf{E}\,[W(u)W(s) - (W(s))^2 - W(u)W(t) + W(s)W(t)] = s - s - t + t = 0,$
čímž jsme dokázali nekorelovanost veličin $W(u) - W(s), W(s) - W(t)$. Tvrzení plyne z věty 2.3.

$\square$

2.2 Transformace Wienerova procesu

Jak nám ukazuje následující věta, Wienerův proces je stabilní k široké třídě transformací:

Věta 2.5 (Transformace Wienerova procesu)**.**

(i) $\{-W(t), t \geq 0\}$, $\{\sigma^{-1}W(\sigma^2 t), t \geq 0\}$, $\sigma^2 > 0$ *jsou Wienerovy procesy.*

(ii) $\{W(t + t_0) - W(t_0), t \geq 0\}$ *je pro* $t_0 \geq 0$ *Wienerův proces nezávislý na* σ*-algebře* $\sigma(W(t), t \leq t_0)$*.*

(iii) Označíme-li $\bar{W}(t) = t \cdot W(t^{-1})$, $t > 0$, *a* $\bar{W}(0) = 0$, *pak existuje Wienerův proces* $\{W^*(t), t \geq 0\}$ *takový, že* $\bar{W}(t) = W^*(t)$ *pro* $t \geq 0$ *skoro jistě.*

Důkaz:

(i) Označme $W_1(t) := -W(t)$ a $W_2(t) := \sigma^{-1}W(\sigma^2 t)$. Ukážeme, že jsou to Wienerovy procesy, tedy že vyhovují definici:
1. $\mathcal{L}(W_1(t) - W_1(s)) = \mathcal{L}(-W(t) + W(s)) = \mathcal{L}(W(s) - W(t)) =$

$$= \mathsf{N}(0, |s - t|), \quad s,\ t \geq 0$$

2. $-W(t_1),\ -(W(t_2) - W(t_1)), \ldots,\ -(W(t_n) - W(t_{n-1}))$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n < \infty$
3. Spojitost trajektorií W_1 plyne ze spojitosti trajektorií a $W_1(0) = -W(0) = 0$.

Obdobně pro W_2:
1. Jelikož $W(t)-W(s)$ má normální rozdělení, pak i $\sigma^{-1}(W(\sigma^2 t)-W(\sigma^2 s))$ má normální rozdělení a dále
$\mathsf{E}\ (W_2(t)-W_2(s)) = \sigma^{-1}\mathsf{E}(W(\sigma^2 t)-W(\sigma^2 s)) = 0$
var $(W_2(t)-W_2(s)) = \mathsf{E}(W_2(t)-W_2(s))^2 =$

$$= \mathsf{E}[\sigma^{-1}(W(\sigma^2 t)-W(\sigma^2 s))]^2 = \sigma^{-2}\mathsf{E}[W(\sigma^2 t)-W(\sigma^2 s)]^2 =$$

$$= \sigma^{-2}\mathrm{var}\ (W(\sigma^2 t)-W(\sigma^2 s)) = \sigma^{-2}\left|\sigma^2(t-s)\right| = |t-s|$$

2. Máme-li $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n < \infty$, pak

$$\frac{1}{\sigma}W(\sigma^2 t_1),\ \frac{1}{\sigma}(W(\sigma^2 t_2)-W(\sigma^2 t_1)), \ldots,\ \frac{1}{\sigma}(W(\sigma^2 t_n)-W(\sigma^2 t_{n-1}))$$

jsou nezávislé náhodné veličiny, neboť označíme-li

$$s_i := \sigma^2 t_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pak

$$W(s_1),\ W(s_2)-W(s_1), \ldots,\ W(s_n)-W(s_{n-1})$$

jsou nezávislé náhodné veličiny z předpokladu.
3. Spojitost trajektorií W_2 opět plyne ze spojitosti trajektorií W a $W_2(0) = \sigma^{-1}W(\sigma^2 \cdot 0) = \sigma^{-1}\cdot 0 = 0$,
takže i W_2 je Wienerovým procesem.

(ii) $W(t+t_0)-W(t_0)$ je jistě Wienerův proces a z 2. vlastnosti z definice Wienerova procesu jsou

$$W(t+t_0)-W(t_0), W(s)-W(0)$$

nezávislé náhodné veličiny pro $\forall s \le t_0$, z čehož plyne tvrzení.

(iii) Proces $\bar{W}(t)$ splňuje podmínky 1., 2. z definice podle věty 2.4, protože vektory $\left(\bar{W}(t_1), \ldots, \bar{W}(t_n)\right)$ vznikají lineární transformací vektoru $\left(W(t_1^{-1}), \ldots, W(t_n^{-1})\right)$ a protože

$$\mathsf{E}\left(\bar{W}(s)\bar{W}(t)\right) = st \cdot \min(s^{-1}, t^{-1}) = \min(s,t) \quad \text{ pro } s,t > 0.$$

Podle věty 2.2 má tento proces spojitou modifikaci W^*, jež je Wienerovým procesem. Pak

$$\mathsf{P}\left[\bar{W}(t) = W^*(t), t \ge 0\right] = \mathsf{P}\left[\bar{W}(t) = W^*(t), t \in \mathbb{Q}\cap[0,\infty)\right] = 1,$$

neboť procesy $\bar{W}$ a W^* mají všechny své trajektorie spojité na intervalu $(0,\infty)$.

$\square$

2.3 O existenci Wienerova procesu

Mohlo by nás napadnout, zda vůbec existuje proces, který by měl vlastnosti, které požadujeme. Odpovědí je následující věta:

Věta 2.6 (O existenci Wienerova procesu)**.**

a) Existuje stochastický proces $X(t)$ s vlastnostmi 1., 2. z definice.

b) Každý proces $X(t)$, který má vlastnosti 1., 2. z definice a pro nějž platí $X(0) = 0$, má modifikaci, která je Wienerovým procesem.

Důkaz:

a) Pro každou posloupnost $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ buď

$$F_{t_1,\ldots,t_n} = \mathsf{N}_\mathsf{n}(0, K),$$

kde $K_{ij} = \min(t_i, t_j), \quad 1 \leq\ i,\ j\ \leq n.$
Potom systém $\{F_{t_1,\ldots,t_n}\}$ splňuje požadavky Daniellovy-Kolmogorovovy věty 2.1 a existuje tudíž proces $X = \{X(t), t \geq 0\}$ s konečněrozměrnými rozděleními $\{F_{t_1,\ldots,t_n}\}$. Podle věty 2.4 má pak proces X vlastnosti 1., 2.

b) Mějme nejprve náhodnou veličinu Z, $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Pak z vlastnosti normovaného normálního rozdělení a derivováním per partes získáváme

$$\begin{aligned}
1 &= \operatorname{var} Z = \mathsf{E}Z^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{z^3}{3} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4}{3} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}z \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4}{3} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\mathsf{E}Z^4,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že $\mathsf{E}Z^4 = 3$.

Uvažujme nyní proces $X = \{X(t), t \geq 0\}$ s vlastnostmi 1., 2, pro nějž $X(0) = 0$. Pak

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|X(s) - X(t)\right|^4 &= |s-t|^2 \cdot \mathsf{E}\left[\frac{X(s) - X(t)}{\sqrt{|s-t|}}\right]^4 = \\
&= 3\left|s-t\right|^2,
\end{aligned}$$

protože $(X(s) - X(t))\,/\sqrt{|s-t|}$ má pro $s \neq t$ rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Proces X splňuje předpoklad věty 2.2 o spojité modifikaci, a tedy existuje spojitá modifikace procesu X, kterou označíme $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$. Protože $\tilde{X}(0) = 0$ skoro jistě, je $W = \{W(t), t \geq 0\}$ Wienerův proces, položíme-li

$$\begin{aligned} W_\omega &= \tilde{X}_\omega, && \text{pokud } \tilde{X}_\omega(0) = 0 \\ &= 0, && \text{pokud } \tilde{X}_\omega(0) \neq 0. \end{aligned}$$

□

2.4 O neexistenci derivace

Trajektorie Wienerova procesu mají díky nezávislosti přírůstků některé patologické vlastnosti:

Věta 2.7 (O neexistenci derivace)**.** *Trajektorie Wienerova procesu nemá konečnou derivaci v žádném bodě intervalu* $(0, \infty)$ *skoro jistě, tj. existuje množina* $D \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(D) = 1$ *taková, že pro* $\omega \in D$ *funkce* $t \mapsto W_\omega(t)$ *nemá derivaci v žádném bodě intervalu* $(0, \infty)$ *.*

Důkaz: Stačí ověřit, že trajektorie Wienerova procesu nemají derivaci v žádném bodě intervalu $(0, 1)$ skoro jistě.
Položme
$L = \{\omega : W_\omega$ má konečnou derivaci alespoň v jednom bodě intervalu $(0, 1)\}$.
To znamená, že ke každému $\omega \in L$ existuje alespoň jeden bod t_0 takový, že $\lim_{t \to t_0} \left| \frac{W_\omega(t) - W_\omega(t_0)}{t - t_0} \right|$ je konečná, tedy
$\forall\, \omega \in L \quad \exists\, r \in \mathbb{N} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \exists\, t_0 \in (0, 1):$

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{W_\omega(t) - W_\omega(t_0)}{t - t_0} \right| < r.$$

Pro pevné $\delta > 0$ a $t_0 \in (0, 1)$ můžeme najít nejmenší $m = m(\delta) \in \mathbb{N}$ takové, že ke každému $n \geq m$ existuje $1 \leq i \leq n - 2$, že $\frac{i-1}{n} < t_0 \leq \frac{i}{n}$ a body $\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}$ leží v otevřeném δ-okolí bodu t_0. Potom pro každé $\omega \in L$ a $j = i, i + 1, i + 2$ platí

$$\left| W_\omega\left(\frac{j}{n}\right) - W_\omega\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \left| W_\omega\left(\frac{j}{n}\right) - W_\omega(t_0) \right| +$$

$$+ \left| W_\omega\left(\frac{j-1}{n}\right) - W_\omega(t_0) \right| \leq r \left| t_0 - \frac{j}{n} \right| + r \left| t_0 - \frac{j-1}{n} \right| \leq \frac{6r}{n},$$

neboť absolutní hodnoty $\left| t_0 - \frac{j}{n} \right|$ a $\left| t_0 - \frac{j-1}{n} \right|$ jsou největší pro $t_0 = i - 1$ a $j = i + 2$.

Z toho plyne $L \subset A$, kde

$$A = \left\{\omega \in \Omega : \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcap_{j=i}^{i+2} \left[\left| W_\omega \left(\frac{j}{n}\right) - W_\omega \left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \frac{6r}{n} \right] \right\} =$$

$$= \left\{\omega \in \Omega : \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{r,m} \right\} \in \mathcal{A}$$

Nyní nám stačí dokázat, že $\mathsf{P}(A_{r,m}) = 0$, neboť pak je také $\mathsf{P}(L) = 0$ a Wienerův proces nemá konečnou derivaci v žádném bodě intervalu $(0,1)$ skoro jistě. Vezměme tedy pevné $r, m \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{P}(A_{r,m}) = \inf_{n \geq m} \mathsf{P} \left(\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcap_{j=i}^{i+2} \left[\left| W_\omega \left(\frac{j}{n}\right) - W_\omega \left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \frac{6r}{n} \right] \right)$$

Vzhledem ke stacionaritě přírůstků Wienerova procesu (z první vlastnosti z definice) je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \right) &= \mathcal{L}\left(\left| W\left(\frac{1}{n}\right) - W(0) \right| \right) = \\ &= \mathcal{L}\left(\left| W\left(\frac{1}{n}\right) \right| \right) \end{aligned}$$

a platí

$$\mathsf{P}(A_{r,m}) = \inf_{n \geq m} \mathsf{P} \left(\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcap_{j=i}^{i+2} \left[\left| W_\omega \left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{6r}{n} \right] \right).$$

Dále

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-2} X \right) \leq \sum_{i-1}^{n-2} \mathsf{P}(X) \leq n\, \mathsf{P}(X)$$

a rovněž

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=i}^{i+2} X \right) = \mathsf{P}(X \cap X \cap X) = [\mathsf{P}(X)]^3,$$

z čehož plyne

$$\mathsf{P}(A_{r,m}) \leq \inf_{n \geq m} n \left(\mathsf{P}\left[\omega \in \Omega : \left| W_\omega \left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{6r}{n} \right] \right)^3.$$

Z vlastností normálního rozdělení a Wienerova procesu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W(1)) &= \mathsf{N}(0,1) = \mathcal{L}\left(\frac{W\left(\frac{1}{n}\right) - W(0)}{\sqrt{\frac{1}{n} - 0}} \right) = \mathcal{L}\left(\frac{W\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \right) = \\ &= \mathcal{L}\left(W\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt{n} \right) \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left[\omega \in \Omega : \left| W_\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{6r}{n}\right] &= \mathsf{P}\left[\omega \in \Omega : \left| W_\omega\left(1\right)\right| \leq \frac{6r}{\sqrt{n}}\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6rn^{-1/2}}^{6rn^{-1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_{r,m}) &\leq \inf_{n \geq m} n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6rn^{-1/2}}^{6rn^{-1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \mathrm{d}x\right)^3 \leq \\
&\leq \inf_{n \geq m} n \left(\frac{12r}{\sqrt{2\pi n}}\right)^3 = \left(\frac{12r}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \inf_{n \geq m} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,
\end{aligned}$$

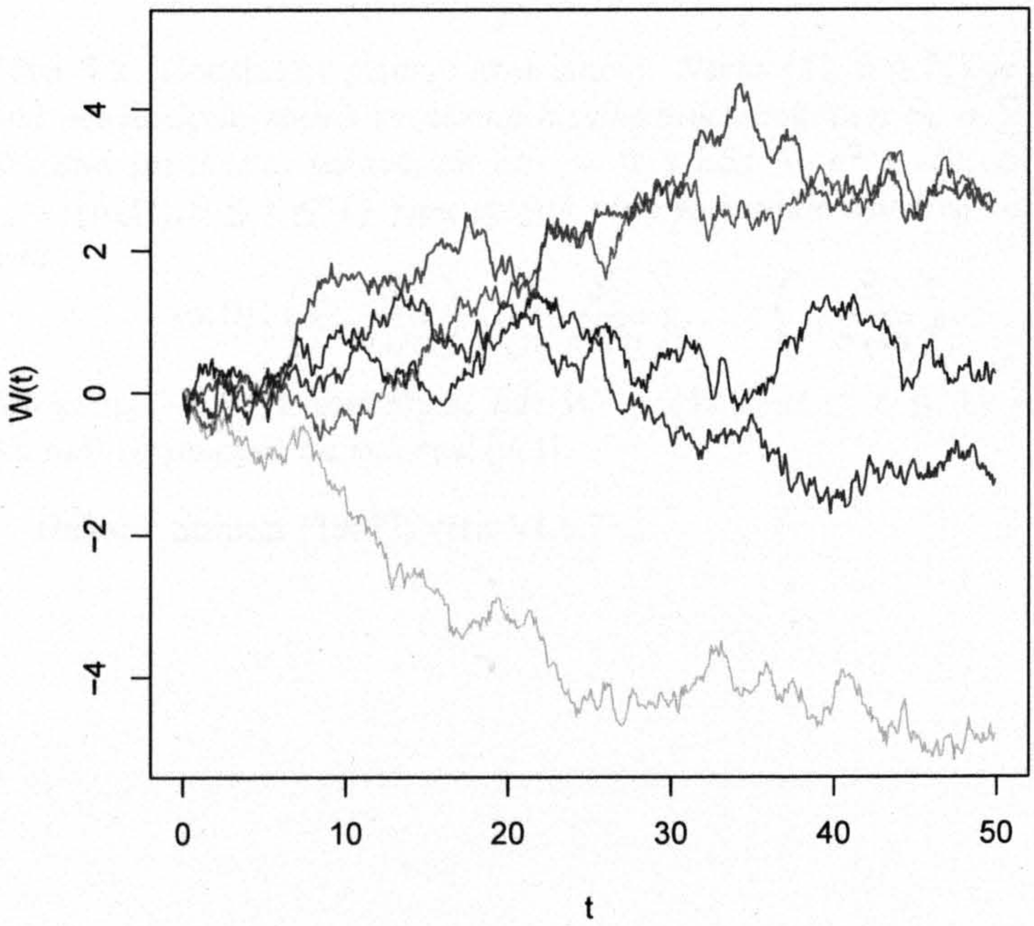
neboť $\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \leq 1$.

$\square$

Kapitola 3

Simulace Wienerova procesu

Wienerův proces má dnes bohaté aplikace v ekonomii, fyzice či biologii. Často potřebujeme vědět, jak vypadají jeho trajektorie. Představu o tom si můžeme utvořit z následujícího obrázku vytvořeného v programu R:



Obrázek 3.1: Trajektorie Wienerova procesu

Každou z trajektorií jsem nasimuloval v programu R následujícím způsobem. V bodě 0 jsem definoval hodnotu 0. Poté jsem si nechal vygenerovat číslo z $\mathsf{N}(0,\ 0,1)$, které jsem přičetl k y-ové souřadnici, a k x-ové souřadnici jsem přičetl hodnotu $0,1$. Takto jsem na intervalu $[0,50]$ vytvořil 500 bodů, které jsem lineárně spojil. Tento postup jsem pětkrát opakoval. V následující části ukážeme, že tímto způsobem skutečně lze postupovat:

Definice
Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Pak *náhodnou procházkou* nazveme posloupnost částečných součtů

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice
Mějme náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ s rozděleními $\mu_1, \mu_2, \ldots$ a náhodnou veličinu X s rozdělením μ. Řekneme, že posloupnost X_n *konverguje v distribuci* k X, jestliže $\mu_n \longrightarrow \mu$ slabě pro $n \longrightarrow \infty$, tj. jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každou } f \text{ spojitou omezenou.}$$

Věta 3.1 (Donskerův princip invariance). *Nechť $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin a $S_k = \sum_{l=1}^{k} Y_l$ je náhodná procházka taková, že $\mathsf{E}S_1 = 0$ a $\mathsf{E}S_1^2 = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Nechť $\mu_n = \{\mu_n(t), 0 \le t \le 1\}$ jsou spojité procesy vzniklé lineární interpolací bodů*

$$(0,0), \left(\frac{1}{n}, \frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}}\right), \left(\frac{2}{n}, \frac{S_2}{\sigma\sqrt{n}}\right), \ldots, \left(1, \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Potom $\mu_n \longrightarrow W$ v distribuci, kde $W = \{W(t), 0 \le t \le 1\}$ je zúžení Wienerova procesu na interval $[0,1]$.

Důkaz: Štěpán (1987), věta VI.5.7

Kapitola 4

Závěr

Wienerův proces je důležitým a často používaným procesem. Hlavní část této práce tvoří Věta o existenci Wienerova procesu a Věta o neexistenci derivace a jejich důkazy. Kvůli nim jsme zformulovali několik vět a tvrzení, vesměs bez důkazu. Dále jsme s využitím Donskerova principu invariance nasimulovali ukázku pěti trajektorií Wienerova procesu. Teorie Wienerova procesu má dnes bohaté uplatnění v přírodních vědách, a tak je zde velký prostor pro další práci.

Literatura

[1] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987

[2] Wiener N.: *Můj život*, Mladá fronta, Praha, 1970

[3] www.wikipedia.org