

Posudek oponenta na bakalářskou práci

Autorka: Helena Krejčí

Název práce: *Cesty ve čtvercových sítích a související úlohy*

Bakalářská práce studentky Heleny Krejčí se zabývá kombinatorickými úlohami, mezi nimiž hlavní roli hrají úlohy na určení počtu cest z bodu A do bodu B ve čtvercové síti, a to za dodržení různých pravidel (vznikají tak různé varianty s různými řešeními i aplikacemi). Práce postupně probírá pět základních typů cest a pro každý z těchto typů uvádí řešení (obvykle s důkazy převzatými z odborného tisku) a další kombinatorické úlohy, které se na cesty ve čtvercové síti dají převést, ačkoliv na první pohled není vidět žádná souvislost.

Přestože je práce formálně psána na KDM, jde o práci svým charakterem odbornou, a to v oblasti kombinatoriky. Nebyl učiněn pokus o tvorbu didaktického textu a není uvedeno, pro jaký typ čtenáře je práce určena; až z textu samotného je patrné, že se předpokládají znalosti na vyšší než středoškolské úrovni. Podle mého názoru lze absenci definovaného určení považovat za nedostatek této práce: není jasné, proč vlastně vznikla, ani co je potřeba znát k jejímu pochopení. Až po konzultaci s vedoucím práce jsem se například dozvěděl, že výsledky uvedené v práci, ač spolu logicky souvisí a patří k sobě, nejsou patrně uvedeny v žádné jednotné monografii. Jejich přehledné shrnutí je tedy nepochybným – ovšem nepřiznaným – přínosem této práce.

Práce obsahuje netriviální matematiku, kterou se daří podat vcelku srozumitelně; na bakalářskou práci je také velmi rozsáhlá, její rozsah je až dvojnásobný oproti běžně doporučené délce. Přesto jsem v práci našel jen minimum chyb: je psána dobrou češtinou, srozumitelně a bez gramatických chyb (ba i bez obvyklých nešvarů do češtiny nezadržitelně pronikajících). Po stránce formální tedy práci nemám co vytknout, je logicky strukturována, i štábní kultura a sazba jsou na dobré úrovni. Je navíc opatřena velkým množstvím hezkých, (částečně) ručně kreslených obrázků, které vhodně osvětlují příslušné myšlenky a zároveň svým stylem práci dodávají nádech originality. Práce neobsahuje (až na zanedbatelné drobnosti) ani chyby matematické, v této rovině však mnoho dodávám níže.

Přes výše uvedenou chválu mám důležité připomínky, které následují v dalších odstavcích a v seznamu níže.

Tato bakalářská práce je výjimečná v mnoha ohledech, z nichž ne všechny vnímám jako pozitivní; nyní chci zmínit jeden z nich, který je nicméně subjektivní. Přestože je totiž téma práce zajímavé, po jisté době se mi práce špatně četla, doslova mě přestala bavit, ačkoliv na začátku jsem byl nadšen. Po úvaze mám dojem, že text působí spíše jako referenční příručka než jako ucelený příběh. Kapitoly jsou si navzájem podobné, při četbě třetí, či čtvrté kapitoly jsem měl dojem, že je to pořád to samé kolem dokola, aniž by přitom bylo jasné, směřujeme-li k nějakému velkému finále, či zda bude seznam výsledků prostě v jistém bodě ukončen (bohužel nastala druhá možnost). Nevím, co bych autorce doporučil, aby text oživila, jisté ale je, že v aktuální podobě to pro mě nebylo čtivé až do konce. Možná to chtělo více se zaměřit na některou související věc a vybudovanou teorii na ni aplikovat.

V obecné rovině chci dále poznamenat, že některá vyjádření (například už v první definici práce a dále s rostoucí frekvencí i v důkazech) jsou dosti neformální. Stylově je tedy práce –

patrně pro lepší čtivost – jakousi kombinací formálního a neformálního vyjadřování, což ne vždy působí příjemně. V zásadě lze říci, že úroveň formálnosti je většinou nastavena rozumně (přestože v průběhu práce klesá a důkazy jsou vysvětlovány s klesající pečlivostí), jsou zde však důležité výjimky, které rozebírám dále.

Další věc je, že nikde nejsou uvedena základní fakta, o něž se další text opírá. Bylo podle mě vhodné ve stručném úvodním oddílu zmínit alespoň některé základní informace s příslušnými odkazy na literaturu.

Seznam konkrétních připomínek: Autorka by se při obhajobě měla vyjádřit k připomínkám označeným ■.

- Klíčová slova v českém abstraktu se neshodují s klíčovými slovy z abstraktu anglického.
- Definice 1.7 striktně vzato nedává smysl, neboť nebyl definován „krok“. V definici 1.1 se o „kroku“ hovoří pouze neformálně (viz výška výše) jako o „posunu o jistý vektor“. Co by mělo znamenat, že krok leží nad diagonálou, si čtenář sice patrně domyslí, většina matematiků se však nejspíš shodne na tom, že odkazovat čtenáře na jeho intuici už v definicích je poněkud brzo.

Poznamenávám, že i pozdější užití pojmu kroku do věci mnoho světla nevnáší. Třeba v důkazu T.1.8 se píše, že v jisté cestě existuje krok V a jiný krok H . Patrně je to míněno tak, že cesta obsahuje typicky více kroků V a více kroků H , z nichž některé nad diagonálou leží a jiné ne; zjevně tedy více „různým“ krokům přísluší tentýž symbol. Jde pochopitelně pouze o formální nedostatek, v komplikovanějších situacích však takové nedostatky mohou způsobit nedorozumění.

- Důkaz Tvrzení 1.8: „... cestu s $k - 1$ překročeními.“ Zde by mělo hned být uvedeno, jakou cestu algoritmus najde, tj. co od ní chceme.
- V tomtéž důkazu se dále bez zdůvodnění píše, že cesta \tilde{c} bude mít určitý počet překročení. Mělo být uvedeno, že zde se používá volba „kroku“ (ať už to znamená cokoliv) X .

■ Poznámka pod Definicí 1.9 je podle mého soudu sporná. Posloupnosti jistě můžeme přiřadit formální mocninnou řadu; pokud ale dále pracujeme s jejím součtem (generující funkcí) měli bychom asi vědět, že tato funkce vůbec dává smysl (respektive, že řada jí skutečně někde odpovídá). Přejmenším se to zdá být potřeba v případě, kdy generující funkci rozvineme v mocninnou řadu a chceme tvrdit, že její koeficienty jsou členy studované posloupnosti. Pokud se mýlím a toto (obor konvergence apod.) opravdu v nějakém smyslu vědět nepotřebujeme, mělo to být v práci podrobně vysvětleno.

■ S předchozí poznámkou souvisí i tato: v důkazu T.1.10 používáme Cauchyho součin; konkrétně tvrdíme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Pokud tuto rovnost budeme chápat v rovině formálních mocninných řad, těžko ji budeme nějak zdůvodňovat, neboť symbol na pravé straně (tj. součin dvou formálních mocninných řad) nebyl nijak definován. Lze namítnout, že takový součin můžeme definovat právě touto rovností; pak ale a priori není zřejmé, proč by zrovna takováto definice měla dát korektní postup při hledání generující funkce.

V důkazu uvedený náznak důkazu této rovnosti dává smysl pouze v případě, že se nebudeme zabývat pouze o *formálních* mocninných řadách (které nedělají nic jiného, než že zastupují posloupnosti svých koeficientů), nýbrž o běžných řadách, resp. o jejich součtech, které jsou limitami příslušných částečných součtů. Přítomnost tohoto zdůvodnění je tedy v rozporu s poznámkou pod Definicí 1.9.

- V rozporu se zmiňovanou poznámkou je ostatně i samotná formulace Tvzení 1.10. Ta náhle formální mocninné řadě dává skrze dokazovanou rovnost obsah velmi konkrétní, a to jistou funkci: přece když se dva objekty navzájem rovnají, musí být téhož typu. Náhle tedy nevím, jak jinak interpretovat symbol $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ než jako součet běžné mocninné řady na oboru konvergence. Poznámka pod Definicí 1.9 tedy silně působí jako alibistický (a nekorektní) způsob, jak se zbavit povinnosti ověřovat některé potřebné předpoklady a kroky důkazů.

Pokud se v tomto mýlím, očekávám při obhajobě podrobné vysvětlení, které ovšem mělo být přítomno už v práci. (Obdobné poznámky platí i pro další práci s generujícími funkcemi; nebudu je už opakovat.)

- Závěrečný krok důkazu Důsledku 1.12: bez dalšího vysvětlení ani tento závěr nepůjde vyslovit pouze na základě *formálního* argumentu. Není a priori jasné, proč by tentýž součet nemohly mít dvě mocninné řady s různými koeficienty. (A vzhledem k tomu, že se zde ve skutečnosti bavíme o součtech těch řad, formální argument se zde podle mě nehodí.)
- Pod Obrázkem 1.10: „Nalezneme bijekci...“ Není jasné, proč bychom to měli dělat, když už víme, že $C_n = T_n$. Tato část měla minimálně začínat novým odstavcem a ideálně měla být stručně uvedena vysvětlením, kam míříme a proč.
- Úloha 1.17: Asi mělo být uvedeno, že vrcholy považujeme za rozlišitelné.
- Poznámka nad Definicí 2.4: Zdá se, že vhodnější terminologie byla „opačná“, tj. *Schröderovy cesty* a před nimi *malé Schröderovy cesty*. Ve stávající terminologii totiž velká Schröderova cesta není Schröderova cesta, což je poněkud divné.
- Poslední rovnost důkazu 2.6: má být s_{n+1} místo S_{n+1} .
- V Definicí 2.14 je konvence o vynechávání závorek vyjádřena dosti matoucím způsobem (nedošlo k záměně A a B ?).

- Tvrzení 3.6: Není jasné, k čemu nám toto tvrzení je. V předchozích případech jsme generující funkce vždy využili k odvození explicitních vzorců, což je zajímavé. Zde to však působí samoučelně.
- Před T.4.6: „Ještě předtím si však uvedeme explicitní vzorec...“ Opět: tak proč tu generující funkci posléze vůbec hledáme? Zajímavost takového výsledku není a priori jasná. V práci to buďto mělo být vysvětleno (aby čtenář prozřel a poznal, že to zajímavé je i samo o sobě), nebo (a tomu bych dal přednost) vynecháno.

Podobná otázka se vztahuje i na Tvrzení 5.6.

- Str. 36: „Zobrazení, které jsme popsali, je prosté. Zároveň ho můžeme invertovat. Získali jsme tedy bijekci...“ Tyto formulace jsou poněkud zvláštní. Prosté zobrazení se každopádně dá invertovat, nemusí k tomu být na. Pokud se inverzí myslí inverze definovaná na všech N . cestách, šlo najít i lepší vyjádření. Například rovnou napsat, že i ke každé cestě snadno najdeme příslušný strom, a zobrazení je tedy bijektivní.
- Str. 44 poslední odstavec: má být $A = a_1 a_2 \cdots a_n$ a $B = b_1 b_2 \cdots b_m$. Dále bych asi páru obsahujícím jeden prvek neříkal prázdný (má jeden prvek), preferoval bych třeba „falešný“.

Závěr: Podle mého názoru by bakalářská práce měla prokázat skutečně hluboké porozumění dané problematice, nemůže si tedy dovolit být psána stejným stylem jako odborná, vysoce specializovaná literatura, která je psána profesionály a pro profesionály v daném oboru. Text je psán stylem nevhodným pro bakalářskou práci.

Z mého pohledu byl kladen větší důraz na kvantitu než na kvalitu. Nikoliv ovšem v povrchním smyslu: na první pohled práce působí bezvadně, velmi učesaně a dokončeně. Bližší ohledání obsahu však odhalí nedostatky, které bych označil jako systémové: nevhodnou koncepci a styl podání.

Práce je v jistém smyslu výjimečná, z výše uvedených důvodů však nemohu s čistým svědomím navrhnout nejlepší známku. Jsem nucen doporučit hodnocení *velmi dobře*.

Martin Rmoutil