



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vojtěch Vočadlo

**Exponenciální rozdělení a jeho
zobecnění**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za vedení mé práce, trpělivost, cenné rady, pevné nervy a za všechny konzultace a připomínky. Dále děkuji své rodině za podporu v průběhu studia.

Název práce: Exponenciální rozdělení a jeho zobecnění

Autor: Vojtěch Vočadlo

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá zkoumáním a porovnáním dvou navržených dvouparametrických zobecnění exponenciálního rozdělení. Studuje základní vlastnosti hustot a uvádí vztahy pro momenty prvních čtyř řádů. Dále jsou odvozeny odhady parametrů pomocí momentové metody a metody maximální věrohodnosti. Posléze je provedena simulační studie, na které lze pozorovat rozdíly mezi použitými metodami. Na závěr práce je představena ukázka aproximace hustot dat z reálných situací pomocí zkoumaných zobecněných exponenciálních rozdělení.

Klíčová slova: odhad momentovou metodou, maximálně věrohodný odhad, Fisherova informační matice, střední čtvercová chyba

Title: Exponential distribution and its generalizations

Author: Vojtěch Vočadlo

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with the research and comparison of two proposed two-parameter generalizations of the exponential distribution. It studies the basic properties of densities and gives relations for moments of the first four orders. Furthermore, parameter estimators are derived using the moment method and the maximum likelihood method. Subsequently, a simulation study is performed, on which differences between the methods used can be observed. At the end of the work, an example of approximation of data densities from real-world situations is presented using generalized exponential distributions under investigation.

Keywords: moment estimation, maximum likelihood estimation, Fisher's information matrix, mean square error

Seznam použitých zkratek

X_1	náhodná veličina s hustotou (1.1)
X_2	náhodná veličina s hustotou (1.2)
f	hustota náhodné veličiny
F	distribuční funkce náhodné veličiny
$E X$	střední hodnota náhodné veličiny X
$\text{var } X$	rozptyl náhodné veličiny X
$\gamma_3(X)$	šikmost náhodné veličiny X
$\gamma_4(X)$	špičatost náhodné veličiny X
ψ	polygama funkce
E_n	exponenciální integrální funkce
Γ	gama funkce, v případě dvou argumentů horní gama funkce
I	indikátorová funkce
\xrightarrow{D}	konvergence v distribuci
N_d	d -rozměrné normální rozdělení
ζ	zeta funkce
H_α	harmonické číslo
γ	Eulerova konstanta

Obsah

Seznam použitých zkratk	1
Úvod	3
1 Zavedení zobecnění a jejich vlastnosti	4
1.1 Chování hustot	5
1.2 Základní charakteristiky	7
2 Odhady parametrů	9
2.1 Úvod k momentové metodě	9
2.2 Odhady momentovou metodou	9
2.3 Odhady metodou maximální věrohodností	12
3 Simulační studie	16
4 Studie na reálných datech	20
4.1 Srážky v Logan International Airport	20
4.2 Čas zbývajícího života pacientů	21
Závěr	22
5 Dodatek	23
5.1 Gama funkce	23
5.2 Horní gama funkce	23
5.3 Digama funkce	23
5.4 Polygama funkce	23
5.5 Harmonické číslo	23
5.6 Exponenciální integrální funkce	24
5.7 Zeta funkce	24
Literatura	25
Seznam obrázků	26
Seznam tabulek	27

Úvod

Exponenciální rozdělení je jedno z nejpoužívanějších spojitých rozdělení a vystupuje jako speciální případ jiných oblíbených rozdělení (gama či Weibullovo). V této práci se zkoumají dvě méně známá zobecnění.

V první kapitole zavedeme zobecnění exponenciálního rozdělení, podíváme se na chování jejich hustot, částečně ho analyticky vyšetříme. Dále se zabýváme základními charakteristikami jako jsou střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost.

V druhé kapitole přejdeme k odhadu parametrů pomocí momentové metody a metody maximální věrohodnosti.

V třetí kapitole podrobíme nalezené odhady simulačním studiím a budeme zkoumat jejich kvalitu.

Ve čtvrté kapitole zkoumáme vhodnost rozdělení pro pozorovaná reálná data.

Pokud byla v práci generována data, tak před spuštěním sady příkazů vztahující se k dané problematice (před začátkem sady experimentů) bylo nastaveno random seed na hodnotu 31415926. K výpočtům pomocí softwaru a simulacím bylo výhradně použito programu Mathematica [3].

1. Zavedení zobecnění a jejich vlastnosti

Před zavedením zobecnění exponenciálního rozdělení připomeňme definici exponenciálního rozdělení.

Definice 1. Řekneme, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže má její hustota tvar

$$f(t; \lambda) = \lambda \exp\{-\lambda t\} I_{(0, \infty)}(t).$$

Příslušná distribuční funkce je

$$F(t; \lambda) = (1 - \exp\{-\lambda t\}) I_{(0, \infty)}(t).$$

V této práci se zaměříme na následující zobecnění exponenciálního rozdělení:

Zobecnění I pro parametry $\alpha, \lambda > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) &= \alpha \lambda (1 - \exp\{-\lambda t\})^{\alpha-1} \exp\{-\lambda t\}, & t > 0, \\ F_{X_1}(t; \alpha, \lambda) &= (1 - \exp\{-\lambda t\})^\alpha, & t > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Zobecnění II pro parametry $\alpha, \lambda > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_2}(t; \alpha, \lambda) &= \alpha \lambda (\lambda t + 1)^{\alpha-1} \exp\{1 - (\lambda t + 1)^\alpha\}, & t > 0, \\ F_{X_2}(t; \alpha, \lambda) &= 1 - \exp\{1 - (1 + \lambda t)^\alpha\}, & t > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Zobecnění I pochází z článku [5] od autorů R. D. Gupta a D. Kundu (2007) a zobecnění II z článku [2] od autorů S. Nadarajah a F. Haghghi (2011).

V dalším textu budeme uvažovat náhodnou veličinu X_1 s pravděpodobnostním rozdělením určeným hustotou (1.1) a náhodnou veličinu X_2 s pravděpodobnostním rozdělením určeným hustotou (1.2).

Poznámka. Pro volbu parametru $\alpha = 1$ dostaneme v případech zobecnění I i zobecnění II exponenciální rozdělení s parametrem λ (šikmost 2, špičatost 9). Pověšimně si také, že distribuční funkce náhodné veličiny X_1 odpovídá α -té mocnině distribuční funkce exponenciálního rozdělení s parametrem λ .

Věta 1. Mějme náhodnou veličinu $Y_1 = \lambda X_1$, kde X_1 je náhodná veličina s hustotou (1.1), pak distribuční funkce (ani hustota) náhodné veličiny Y_1 nezávisí na parametru λ .

Důkaz. Jednoduchými úpravami pro $y > 0$ dostaneme

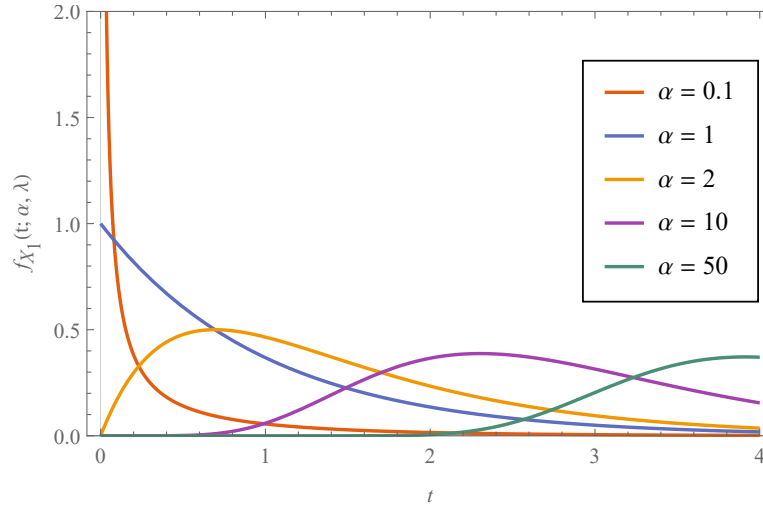
$$\begin{aligned} F_{Y_1}(y) &= P(Y_1 < y) = P(\lambda X_1 < y) = P(X_1 < \frac{y}{\lambda}) = \\ &= F_{X_1}(\frac{y}{\lambda}) = (1 - \exp\{-\lambda \frac{y}{\lambda}\})^\alpha = (1 - \exp\{-y\})^\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

□

Poznámka. Obdobnou větu lze formulovat pro náhodnou veličinu $Y_2 = \lambda X_2$. Důkaz proběhne analogicky.

1.1 Chování hustot

Pozorujme nejprve chování hustoty pro zobecnění I pro měnící se parametr α . Na obrázku 1.1 je znázorněno několik hustot f_{X_1} pro různé volby α a $\lambda = 1$.



Obrázek 1.1: Hustoty zobecnění I pro parametr měřítka $\lambda = 1$ a různé volby parametru α .

Poznámka. Derivací obou stran rovnosti (1.3) získáme:

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{\lambda} f_{X_1}\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Po změně parametru měřítka na dvojnásobek dojde k následující změně, místo λ píšeme ve vyjádření hustoty (1.1) 2λ :

$$f_{X_1}(t; 2\lambda, \alpha) = \alpha 2\lambda (1 - \exp\{-2\lambda t\})^{\alpha-1} \exp\{-2\lambda t\} = 2f_{X_1}(2t; \lambda, \alpha).$$

Tedy hodnota funkce hustoty je po změně parametru λ na 2λ rovna dvojnásobku hodnoty hustoty s původním parametrem λ , avšak v bodě $2t$.

Nyní se zaměříme na analytické vyšetření extrémů hustoty pro zobecnění I. Zkoumejme derivaci f_{X_1} dle t :

$$f'_{X_1}(t) = (\alpha - 1)\alpha\lambda^2 e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-2} - \alpha\lambda^2 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1}.$$

Po zjednodušení:

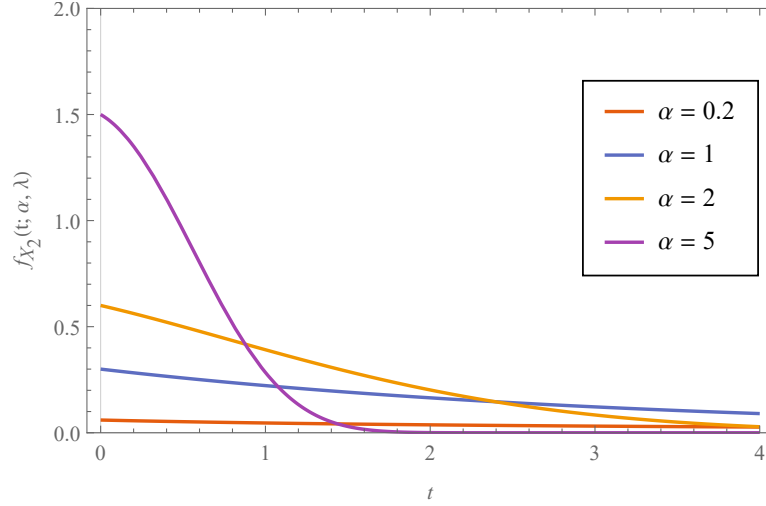
$$f'_{X_1}(t) = -\frac{\alpha\lambda^2 (1 - e^{-\lambda t})^\alpha (e^{\lambda t} - \alpha)}{(e^{\lambda t} - 1)^2}.$$

Znaménko derivace závisí pouze na druhé závorce čitatele, ostatní členy jsou pro $t > 0$ kladné. Pro $\alpha < 1$ je $e^{\lambda t} - \alpha$ vždy kladné, tedy derivace je záporná, a tedy hustota je klesající funkce. Pro $\alpha = 1$ je derivace zprava nulová v krajním bodě $t = 0$, jinak je opět záporná.

Tedy hustota (1.1) je klesající pro $\alpha \leq 1$ (λ libovolné), zjevně v tomto případě nabývá maxima v bodě $t = 0$ (který leží na hranici nosiče X_1).

Pokud $\alpha > 1$, je derivace do určitého t kladná, toto t odpovídá kritickému bodu $t = \frac{\log \alpha}{\lambda}$, dále je záporná. Tedy pro $\alpha > 1$ a λ libovolné je hustota (1.1) unimodální s modusem v bodě $t = \frac{\log \alpha}{\lambda}$.

Nyní pozorujeme chování hustot pro zobecnění II pro měnící se parametr α . Na obrázku 1.2 je znázorněno několik hustot f_{X_2} pro různé volby α a pevné λ .



Obrázek 1.2: Hustoty zobecnění II pro parametr měřítka $\lambda = 0,3$ a různé volby parametru α .

Graf na obrázku 1.2 nasvědčuje, že hustota (1.2) je vždy klesající nezávisle na zvolených parametrech.

Pozorování 2. *Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X_2 je vždy klesající funkcí nezávisle na volbě parametrů $\alpha, \lambda > 0$.*

Důkaz. Ověříme analyticky pomocí derivace hustoty dle t :

$$\begin{aligned} f'_{X_2}(t) &= (\alpha - 1)\alpha\lambda^2 e^{1-(\lambda t+1)^\alpha} (\lambda t + 1)^{\alpha-2} - \alpha^2 \lambda^2 e^{1-(\lambda t+1)^\alpha} (\lambda t + 1)^{2\alpha-2} \\ &= -\alpha\lambda^2 e^{1-(\lambda t+1)^\alpha} (\lambda t + 1)^{\alpha-2} (\alpha((\lambda t + 1)^\alpha - 1) + 1). \end{aligned}$$

Zřejmě

$$-\alpha\lambda^2 < 0, e^{1-(\lambda t+1)^\alpha} > 0.$$

Stačí už jen aby

$$\begin{aligned} \alpha((\lambda t + 1)^\alpha - 1) + 1 &> 0, \\ (\lambda t + 1)^\alpha - 1 &> 0, \\ \lambda t + 1 &> 1. \end{aligned}$$

Což platí, a tedy

$$f'_{X_2}(t; \alpha, \lambda) < 0, \quad \forall \alpha, \lambda, t > 0.$$

Tudíž je hustota (1.2) vždy klesající nezávisle na parametrech α, λ .

□

Poznámka. Při změně parametru λ dochází ke škálování i v případě zobecnění II.

1.2 Základní charakteristiky

V této části využijeme značení z úvodu kapitoly.

Poznámka. Platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_1^k &= \mathbb{E} \left(\frac{Y_1}{\lambda} \right)^k = \frac{\mathbb{E} Y_1^k}{\lambda^k}, \\ \mathbb{E} (X_1 - \mathbb{E} X_1)^k &= \mathbb{E} \left(\frac{Y_1}{\lambda} - \mathbb{E} \frac{Y_1}{\lambda} \right)^k = \frac{1}{\lambda^k} \mathbb{E} (Y_1 - \mathbb{E} Y_1)^k. \end{aligned}$$

Pro jednoduchost uvedme níže pouze momenty náhodných veličin Y_1 a Y_2 . K výsledkům uvedeným níže jsme dospěli pomocí softwaru Mathematica.

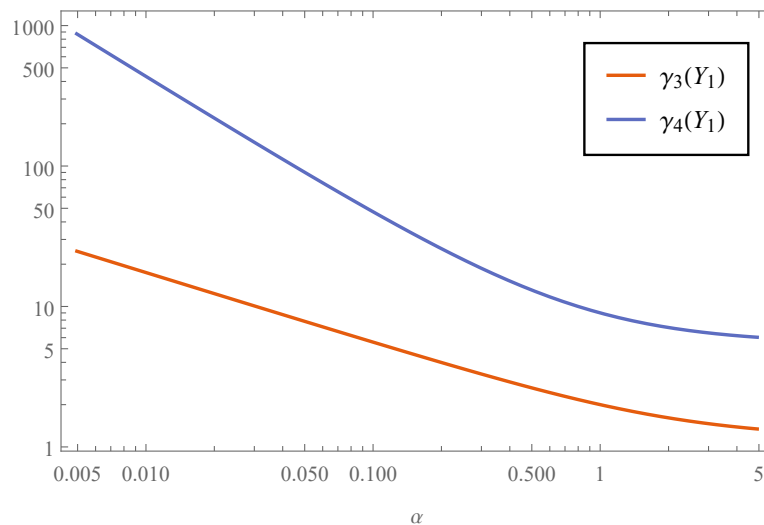
Obecné momenty pro zobecnění I mají tvar:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y_1 &= H_\alpha, \\ \mathbb{E} Y_1^2 &= \frac{\pi^2}{6} - \psi^{(1)}(\alpha + 1) + (H_\alpha)^2, \\ \mathbb{E} Y_1^3 &= \frac{1}{2} \left(2\psi^{(2)}(\alpha + 1) + 2(H_\alpha)^3 + \pi^2 H_\alpha - 6\psi^{(1)}(\alpha + 1)H_\alpha + 4\zeta(3) \right). \end{aligned}$$

Výraz pro $\mathbb{E} Y_1^4$ je již příliš komplikovaný, chová se však přibližně jako lineární funkce α (pro $\alpha \in (0, 5)$). První a druhý moment je graficky znázorněn v kapitole 2. Uvedme vzorce pro rozptyl a šikmost náhodné veličiny Y_1 :

$$\begin{aligned} \text{var } Y_1 &= \frac{1}{6} \left(\pi^2 - 6\psi^{(1)}(\alpha + 1) \right), \\ \gamma_3(Y_1) &= \frac{6\sqrt{6}(\psi^{(2)}(\alpha + 1) + 2\zeta(3))}{(\pi^2 - 6\psi^{(1)}(\alpha + 1))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Výraz pro $\gamma_4(Y_1)$ je příliš komplikovaný, na obrázku 1.3 je uvedeno grafické znázornění.



Obrázek 1.3: Chování šikmosti a špičatosti Y_1 v závislosti na parametru α , logaritmická škála na obou osách.

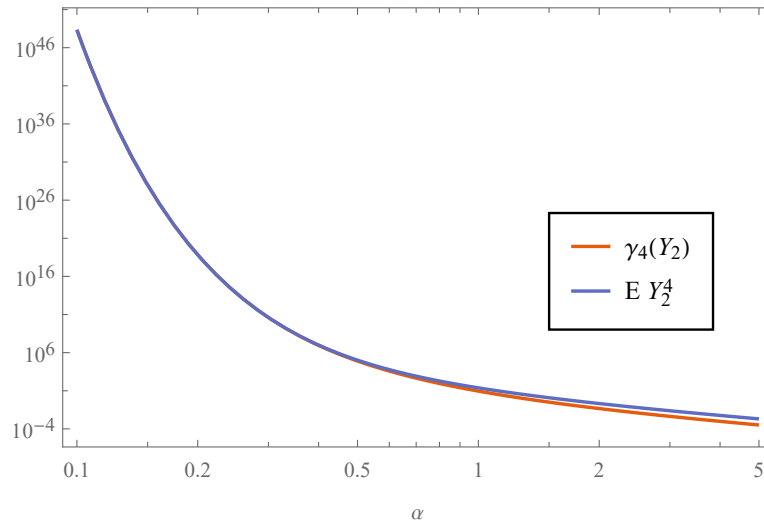
Obecné momenty pro zobecnění II mají tvar:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y_2 &= e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 1, \\ \mathbb{E} Y_2^2 &= -2e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) + eE_{-\frac{2}{\alpha}}(1) + 1, \\ \mathbb{E} Y_2^3 &= e\left(3\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 3E_{-\frac{2}{\alpha}}(1) + E_{-\frac{3}{\alpha}}(1)\right) - 1, \\ \mathbb{E} Y_2^4 &= e\left(-4\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) + 6E_{-\frac{2}{\alpha}}(1) - 4E_{-\frac{3}{\alpha}}(1) + E_{-\frac{4}{\alpha}}(1)\right) + 1. \end{aligned}$$

Pokud příslušné momenty $\mathbb{E} Y_2^i$ vydělíme λ^i , obdržíme výsledky shodné s [2]. Uvedme vzorce pro rozptyl a šikmost náhodné veličiny Y_2 :

$$\begin{aligned} \text{var } Y_2 &= e\left(E_{-\frac{2}{\alpha}}(1) - e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right)^2\right), \\ \gamma_3(Y_2) &= \frac{E_{-\frac{3}{\alpha}}(1) + e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right)\left(2e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right)^2 - 3E_{-\frac{2}{\alpha}}(1)\right)}{\sqrt{e}\left(E_{-\frac{2}{\alpha}}(1) - e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right)^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.4 je uvedeno grafické znázornění $\gamma_4(Y_2)$. Obrázek také obsahuje znázornění chování $\mathbb{E} Y_2^4$.



Obrázek 1.4: Chování čtvrtého obecného momentu Y_2 a špičatosti Y_2 v závislosti na parametru α . Je použita logaritmická škála na obou osách

2. Odhady parametrů

Teorie k odhadům parametrů je převzata z přehledového větníku [4].

2.1 Úvod k momentové metodě

Pro neznámý vektor parametrů $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ a náhodou veličinu X s hustotou $f(x; \boldsymbol{\theta})$ máme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X &= h_1(\boldsymbol{\theta}), \\ \mathbb{E} X^2 &= h_2(\boldsymbol{\theta}), \\ \mathbb{E} X^3 &= h_3(\boldsymbol{\theta}), \\ &\vdots \\ \mathbb{E} X^k &= h_k(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Nyní mějme T_1, \dots, T_n náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x; \boldsymbol{\theta})$. Odhad momentovou metodou je definován jako řešení soustavy:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= h_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ \hat{\mu}_2 &= h_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ \hat{\mu}_3 &= h_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ &\vdots \\ \hat{\mu}_k &= h_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned}$$

kde $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j^i$. Níže budeme průměr dat náhodného výběru T_1, \dots, T_n značit $\overline{T_n}$.

Pokud existuje $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ řešení výše uvedené soustavy, nazveme ho odhad momentovou metodou, v některých případech je třeba použít rovnice s momenty vyšších řádů.

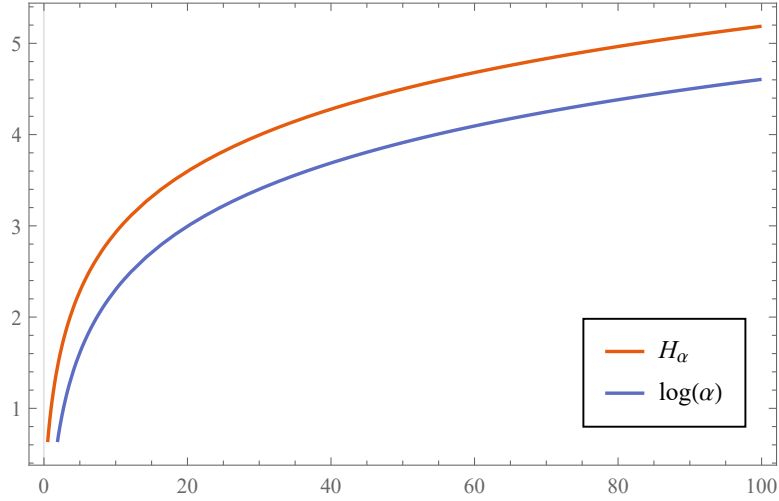
Díky větě o spojitě transformaci tvrzení B.9 (z dodatku) v [1] dostaneme vyřešením výše uvedené soustavy za předpokladu spojitosti h_i pro $i = 1, \dots, k$ konzistentní odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$.

2.2 Odhady momentovou metodou

K nalezení odhadů momentovou metodou byl použit software Mathematica [3]. Nebylo možné nalézt přesné řešení analyticky, můžeme dojít alespoň k tvarům uvedeným níže.

Pro rozdělení s hustotou (1.1) máme:

$$\mathbb{E} X_1 = \frac{H_\alpha}{\lambda}. \quad (2.1)$$



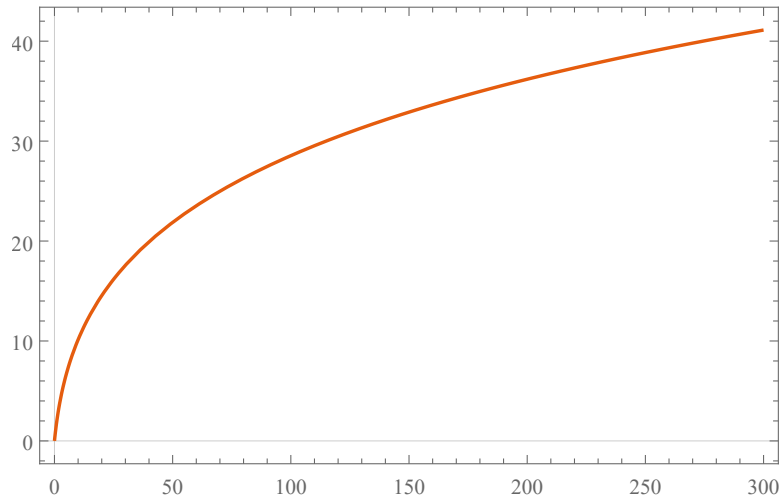
Obrázek 2.1: Srovnání harmonického čísla (chování prvního obecného momentu X_1 pro fixní parametr $\lambda = 1$) a přirozeného logaritmu.

Všimněme si, že pro fixní α se střední hodnota chová jako funkce $\frac{1}{x}$, naopak pro fixní λ se střední hodnota chová jako harmonické číslo v bodě α . Obrázek 2.1 znázorňuje chování pro fixní $\lambda = 1$ graficky.

Pro druhý moment máme vztah

$$\mathbb{E} X_1^2 = \frac{-6\psi^{(1)}(\alpha + 1) + 6(H_\alpha)^2 + \pi^2}{6\lambda^2}. \quad (2.2)$$

Jeho chování pro $\lambda = 1$ je znázorněno na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Chování druhého obecného momentu X_1 pro fixní parametr $\lambda = 1$.

Rovnosti (2.1), (2.2) dávají soustavu, ze které dostáváme

$$\hat{\lambda} = \frac{H_{\hat{\alpha}}}{\bar{T}_n}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 = \frac{(\bar{T}_n)^2 \left(-6\psi^{(1)}(\hat{\alpha} + 1) + 6(H_{\hat{\alpha}})^2 + \pi^2 \right)}{6(H_{\hat{\alpha}})^2}. \quad (2.4)$$

Z poslední rovnice lze pro konkrétní data numericky vyčíslit $\hat{\alpha}$, pak zpětnou substitucí dopočteme $\hat{\lambda}$ (viz numerická ilustrace v kapitole 3). Označme

$$h_{X_1}(\hat{\alpha}) := \frac{-6\psi^{(1)}(\hat{\alpha} + 1) + 6(H_{\hat{\alpha}})^2 + \pi^2}{6(H_{\hat{\alpha}})^2}.$$

Po vydělení rovnosti (2.4) výrazem $(\overline{T_n})^2$ dostáváme:

$$\frac{1}{n(\overline{T_n})^2} \sum_{i=1}^n T_i^2 = h_{X_1}(\hat{\alpha}).$$

V části pro zobecnění II je na obrázku 2.3 vykreslena inverzní funkce k h_{X_1} společně s inverzní funkcí k h_{X_2} .

Pro rozdělení s hustotou (1.2) máme:

$$\mathbb{E} X_2 = \frac{e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 1}{\lambda}, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E} X_2^2 = \frac{-2e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) + eE_{-\frac{2}{\alpha}}(1) + 1}{\lambda^2}. \quad (2.6)$$

Všimněme si, že pro fixní parametr α se střední hodnota X_2 chová jako funkce $\frac{c_1}{\lambda}$, kde c_1 je vhodná konstanta závisující na pevně zvoleném α . Podobně druhý obecný moment náhodné veličiny X_2 se chová jako $\frac{c_2}{\lambda^2}$, pro vhodnou konstantu c_2 . Z (2.5) můžeme opět snadno vyjádřit parametr λ a tak dostat jeho odhad

$$\hat{\lambda} = \frac{e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 1}{\overline{T_n}}. \quad (2.7)$$

Pak z (2.6) obdržíme:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 = \frac{(\overline{T_n})^2 \left(-2e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) + eE_{-\frac{2}{\alpha}}(1) + 1\right)}{\left(e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 1\right)^2}. \quad (2.8)$$

Tuto rovnici opět nelze vyřešit analyticky pro neznámé parametry, v kapitole 3 ji vyřešíme numericky pro konkrétní nasimulovaná data. Označme

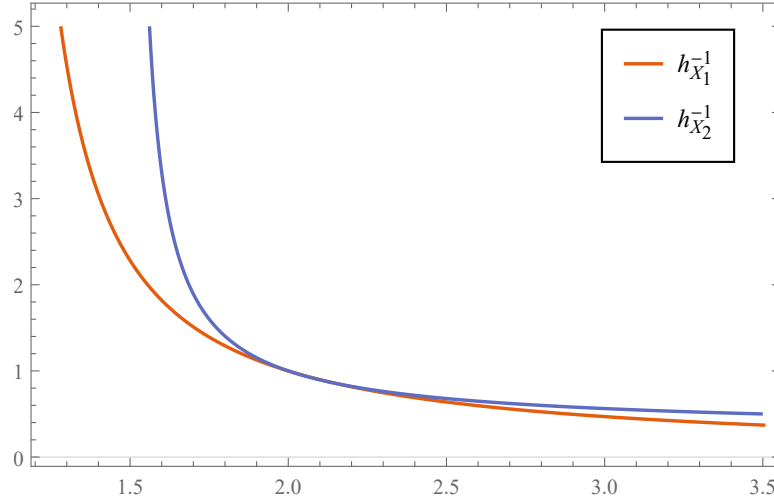
$$h_{X_2}(\hat{\alpha}) := \frac{-2e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) + eE_{-\frac{2}{\alpha}}(1) + 1}{\left(e\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 1\right) - 1\right)^2}.$$

Vydělením rovnosti (2.8) výrazem $(\overline{T_n})^2$ dostáváme:

$$\frac{1}{n(\overline{T_n})^2} \sum_{i=1}^n T_i^2 = h_{X_2}(\hat{\alpha}). \quad (2.9)$$

Pokud máme data (náhodný výběr T_1, \dots, T_n), dostaneme odhad $\hat{\alpha}$ z hodnoty inverzní funkce pro příslušné zobecnění, obě inverzní funkce jsou vykresleny na obrázku 2.3.

Pozorování 3. Z obrázku 2.3 je patrné, že při malé změně pozorovaných dat dojde k velké změně odhadu parametru α , pokud se transformovaná pozorovaná data (levá strana rovnice (2.9)) pohybují kolem hodnoty 1,6 pro odhad parametru α zobecnění II.



Obrázek 2.3: Inverzní funkce k funkcím $h_{X_1}(\alpha)$ a $h_{X_2}(\alpha)$.

2.3 Odhady metodou maximální věrohodnosti

Definice 2. (Fisherova informační matice) Pro náhodou veličinu X s hustotou $f(x; \theta)$ definujeme matici

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta) \right)^{\otimes 2} \middle| \theta \right] = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right)^{\otimes 2} f(x; \theta) dx.$$

Podmínky regularity pro maximálně věrohodné odhady:

- R1.** Počet parametrů d v modelu $\{f(x; \theta), \theta \in \Theta\}$ je konstantní.
- R2.** Nosič rozdělení $S_\theta = \{x \in \mathbb{R} : f(x; \theta) > 0\}$ nezávisí na parametru θ ; všechna rozdělení mají stejný nosič.
- R3.** Parametrický prostor Θ je otevřená množina.
- R4.** Informační matice je konečná pozitivně definitní v okolí θ_X (skutečné hodnoty parametru θ).
- R5.** Hustota $f(x; \theta)$ je dostatečně hladká funkce θ (aspoň dvakrát spojitě diferencovatelná).
- R6.** Lze prohodit pořadí derivace a integrálu ve výrazech:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int h(x, \theta) dx = \int \frac{\partial}{\partial \theta} h(x, \theta) dx,$$

kde $h(x, \theta)$ je buď $f(x; \theta)$ nebo $\partial f(x; \theta) / \partial \theta$.

Poznámka. (Diskuze splnění podmínek regularity.) Počet parametrů je konstantní (máme dva parametry α, λ). Nosič rozdělení je $(0, \infty)$, tedy nezávisí na odhadovaných parametrech. Parametrický prostor je otevřená množina ($\alpha, \lambda > 0$). Hustota $f(x; \theta)$ je dostatečně hladká funkce, jelikož (1.1) i (1.2) lze derivovat podle α i λ .

Poznámka. (Splnění podmínky R6 a R4.) Pro ověření podmínek regularity budeme potřebovat

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) &= \lambda(1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1} e^{-\lambda t} [1 + \alpha \log(1 - e^{-\lambda t})], \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) &= \lambda(1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1} e^{-\lambda t} [2 + \alpha \log(1 - e^{-\lambda t})] \log(1 - e^{-\lambda t}).\end{aligned}$$

Pak se můžeme přesvědčit, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \int f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) dt &= \frac{\partial}{\partial \alpha} F_{X_1}(t; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda t}), \\ \int \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) dt &= (1 - e^{-\lambda t})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda t})\end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) dt &= (1 - e^{-\lambda t})^\alpha \log^2(1 - e^{-\lambda t}), \\ \int \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f_{X_1}(t; \alpha, \lambda) dt &= (1 - e^{-\lambda t})^\alpha \log^2(1 - e^{-\lambda t}).\end{aligned}$$

Podobně i u derivací obsahujících λ se ověří prohození pořadí derivace a integrálu. Pak můžeme členy Fisherovy informační matice spočítat díky větě 7.27 z [1] následovně:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}} \right].$$

Označíme Fisherovu informační matici pro odhad parametru $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)$ hustoty $f_{X_1}(x; \boldsymbol{\theta})$ jako

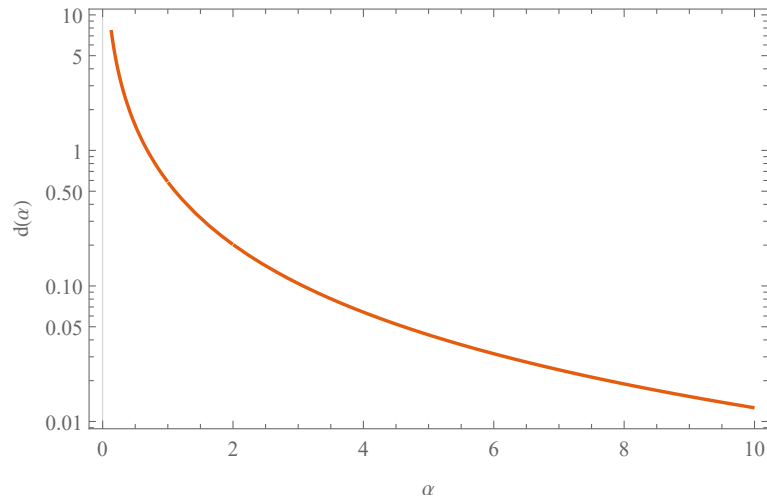
$$I_{X_1}(\alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

kde

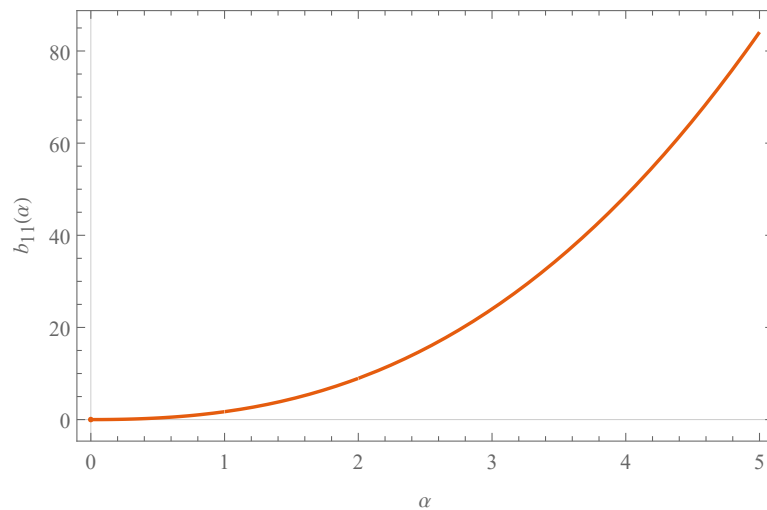
$$\begin{aligned}a_{11} &= -\mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log f(X_1; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\alpha^2}, \\ a_{12} &= -\mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \log f(X_1; \alpha, \lambda) = -\mathbf{E} X_1 \frac{e^{-\lambda X_1}}{1 - e^{-\lambda X_1}} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{E} Y_1 \frac{e^{-Y_1}}{1 - e^{-Y_1}} \\ &= -\frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty t e^{-2t} (1 - e^{-t})^{\alpha-2} dt, \\ a_{22} &= -\mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log f(X_1; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + (\alpha - 1) \mathbf{E} X_1^2 \frac{e^{-\lambda X_1}}{(1 - e^{-\lambda X_1})^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + (\alpha - 1) \mathbf{E} Y_1^2 \frac{e^{-Y_1}}{(1 - e^{-Y_1})^2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \alpha(\alpha - 1) \int_0^\infty t^2 e^{-2t} (1 - e^{-t})^{\alpha-3} dt \right).\end{aligned}$$

Determinant je tvaru $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{d(\alpha)}{\lambda^2}$. Jeho znaménko zřejmě nezávisí na λ . Graficky nahlédneme, zda je funkce $d(\alpha)$ kladná, což implikuje pozitivní definitnost informační matice, protože $a_{11} > 0$.

Inverzní matice obsahuje v prvním řádku a prvním sloupci člen $b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$, který je funkcí pouze α . Jedná se o asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu parametru α .



Obrázek 2.4: Determinant Fisherovy informační matice náhodné veličiny X_1 v závislosti na α ($\lambda = 1$).



Obrázek 2.5: b_{11} v závislosti na α .

Připomeňme větu podstatnou pro odhady metodou maximální věrohodnosti (předpokládáme, že platí podmínky regularity).

Věta 4. (*Asymptotická normalita maximálně věrohodného odhadu*) Necht $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_X) \xrightarrow{D} N_d(0, I^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X)).$$

V případě zobecnění I i zobecnění II máme $\boldsymbol{\theta}_{X_i} = (\alpha, \lambda)$, $i = 1, 2$.

Hledejme nyní odhady parametrů pro zobecnění I metodou maximální věrohodnosti. Uvažujme náhodný výběr T_1, \dots, T_n z rozdělení s hustotou (1.1).

Věrohodnostní funkce je obecně dána:

$$L_n(\alpha, \lambda) := \prod_{i=1}^n f(T_i; \alpha, \lambda).$$

V případě zobecnění I máme

$$L_n(\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \alpha \lambda (1 - \exp\{-\lambda T_i\})^{\alpha-1} \exp\{-\lambda T_i\}.$$

Logaritmická věrohodnost má tvar

$$\ell_n(\alpha, \lambda) = n \log \alpha + n \log \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\lambda T_i\}) - \lambda \sum_{i=1}^n T_i.$$

Pro nalezení kritického bodu zderivujeme podle složek odhadovaného parametru (podle α a λ) a položíme rovno nule. Obdržíme

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\lambda T_i\}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (T_i \exp\{-\lambda T_i\}) - \sum_{i=1}^n T_i = 0. \quad (2.11)$$

Soustavu rovnic (2.10),(2.11) je třeba vyřešit pro konkrétní náhodný výběr numericky, vyřešíme v kapitole 3.

V případě zobecnění II máme

$$L_n(\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \alpha \lambda (\lambda T_i + 1)^{\alpha-1} \exp\{1 - (\lambda T_i + 1)^\alpha\}.$$

Logaritmická věrohodnost má tvar

$$\ell_n(\alpha, \lambda) = n \log \alpha + n \log \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\lambda T_i + 1) + \sum_{i=1}^n (1 - (\lambda T_i + 1)^\alpha).$$

Pro nalezení kritického bodu zderivujeme podle složek odhadovaného parametru (tedy dle α a λ) a položíme rovno nule. Obdržíme

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n (\lambda T_i + 1) - \sum_{i=1}^n \log(\lambda T_i + 1) (\lambda T_i + 1)^\alpha = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n T_i - \alpha \sum_{i=1}^n (T_i (\lambda T_i + 1)^{\alpha-1}) = 0. \quad (2.13)$$

Soustavu rovnic (2.12),(2.13) je třeba vyřešit pro konkrétní náhodný výběr numericky, vyřešíme v kapitole 3.

3. Simulační studie

Pro srovnání kvality odhadů použijeme střední čtvercovou odchylku.

Definice 3. (*Střední čtvercová chyba*). Mějme odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ , pak

$$MSE_{\hat{\theta}_n} = E(\hat{\theta}_n - \theta)^2. \quad (3.1)$$

Střední čtvercovou chybu odhadneme jako průměr čtvercových odchylek od předem stanoveného parametru. Průměr vždy určíme ze 100 opakování daného experimentu. Kromě MSE jsou v tabulkách shrnujících výsledky simulace uvedeny také odhady vychýlení a rozptylu (tabulky 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6).

Provedeme sadu experimentů – vygenerujeme náhodný výběr (T_1, T_2, \dots, T_N) z rozdělení určeného zobecněním I nebo II pro $N \in \{100, 1000, 10000\}$, spočteme pro tato data maximálně věrohodné odhady a odhady momentovou metodou vyřešením příslušných rovnic. (Pro metodou maximální věrohodnosti jsou to rovnice (2.10), (2.11) pro zobecnění I, (2.12), (2.13) pro zobecnění II a pro momentovou metodu to jsou (2.3), (2.4) pro zobecnění I, (2.7), (2.8) pro zobecnění II). Každý experiment je 100 krát zopakován pro fixní N .

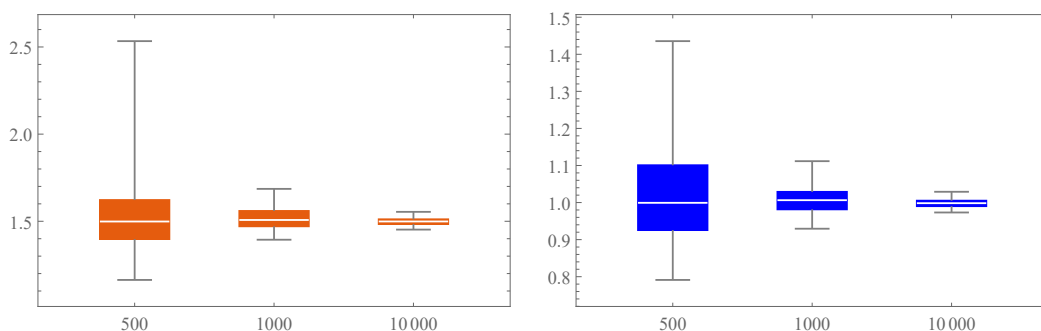
Na dalších stranách následují boxploty (obrázky 3.1 – 3.6) pro jednotlivé odhady a jejich charakteristiky, jedná se vždy o reprezentaci odhadů metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou. Tyto odhady byly provedeny na stejných datech (před začátkem sady experimentů pro zvolenou metodu je nastaveno random seed na 31415926).

Můžeme pozorovat, jak rozptyl odhadů v porovnání mezi metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou vždy hovoří ve prospěch metody maximální věrohodnosti, také střední čtvercová chyba je u odhadů získaných metodou maximální věrohodnosti značně menší.

Vzhledem k chování hustot náhodných veličin X_1 a X_2 byly pro ukázkou do této práce pro zobecnění I zvoleny hodnoty parametrů α rovny 1,5 a 0,5 (rozdílné chování hustoty (1.1) pro $\alpha \leq 1$ a $\alpha > 1$ viz obrázek 1.1) a pro zobecnění II pouze $\alpha = 0,5$. Ve všech případech byl zvolen parametr měřítka roven jedné.

Podle očekávání jsou odhady přesnější s rostoucím N . Porovnejme asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu α pro zobecnění I s hodnotami $N \text{ var } \hat{\alpha}$. Z tabulky 3.1 vychází přibližně hodnoty 5.7, 3.8, 3.9. Asymptotický rozptyl ($b_{11}(1.5)$) je přibližně 4.5. Z tabulky 3.3 vychází přibližně hodnoty 0.52, 0.44, 0.42. Asymptotický rozptyl ($b_{11}(0.5)$) je přibližně 0.35.

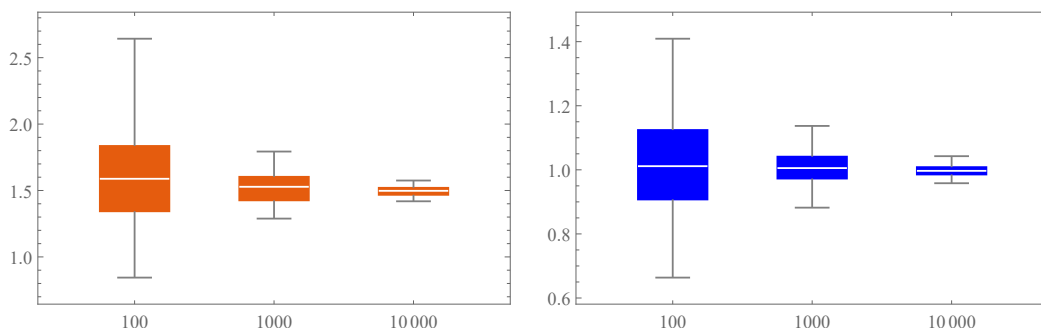
Simulace byly provedeny i pro další hodnoty parametrů, výsledky byly obdobné.



Obrázek 3.1: Odhady parametrů $\alpha = 1,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,03627	0,05706	0,05781	0,00837	0,01422	0,01415
1000	0,01424	0,00379	0,00395	0,00523	0,00125	0,00127
10000	-0,00133	0,00039	0,00039	-0,0015	0,00012	0,00012

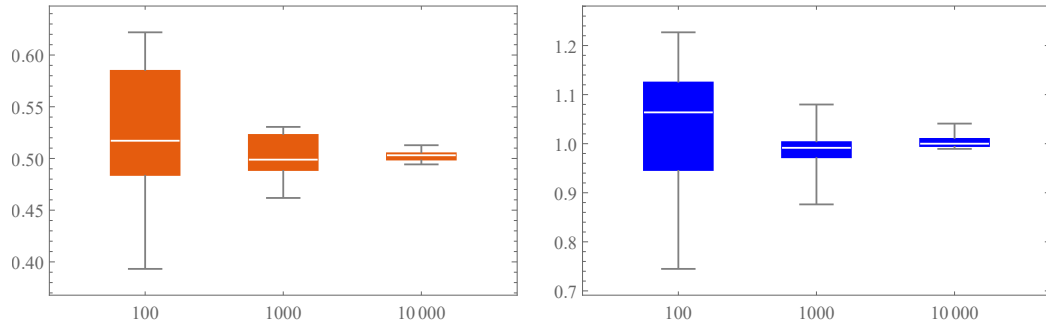
Tabulka 3.1: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 1,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.



Obrázek 3.2: Odhady parametrů $\alpha = 1,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,10622	0,14127	0,15114	0,02865	0,02756	0,0281
1000	0,02206	0,01243	0,0128	0,00755	0,00274	0,00277
10000	-0,00416	0,00128	0,00129	-0,00269	0,00024	0,00024

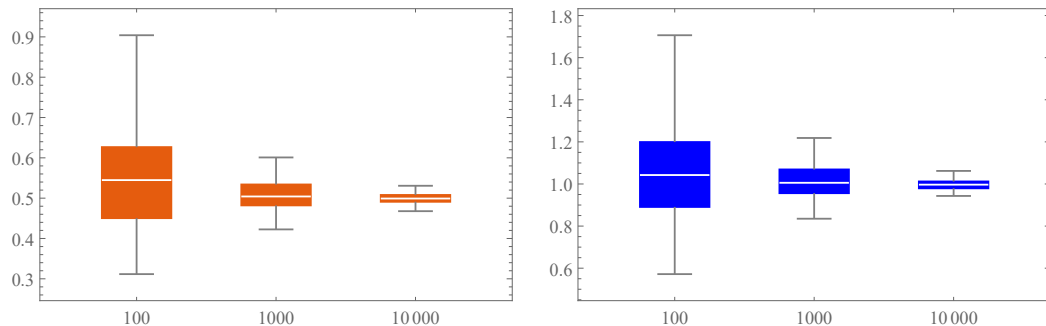
Tabulka 3.2: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 1,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.



Obrázek 3.3: Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,02607	0,00511	0,00528	0,03415	0,02011	0,01927
1000	0,00036	0,00049	0,00044	-0,00855	0,00299	0,00276
10000	0,00318	0,00004	0,00004	0,00595	0,00029	0,00029

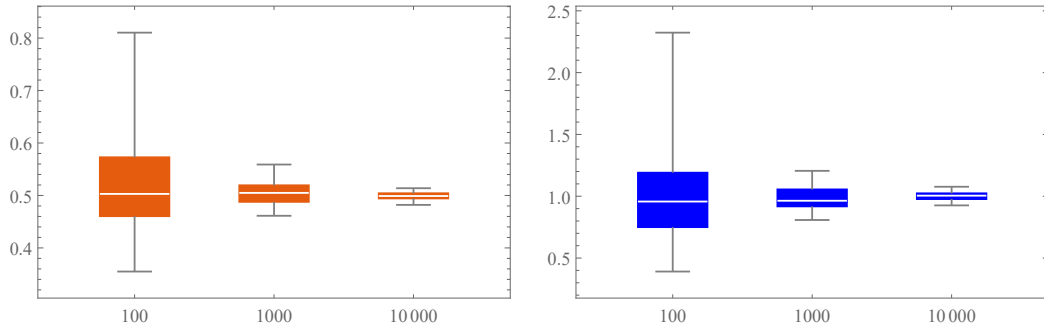
Tabulka 3.3: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.



Obrázek 3.4: Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,04488	0,01622	0,01807	0,06472	0,05971	0,0633
1000	0,0073	0,00159	0,00163	0,01249	0,0059	0,006
10000	-0,00089	0,00018	0,00018	-0,00312	0,00051	0,00052

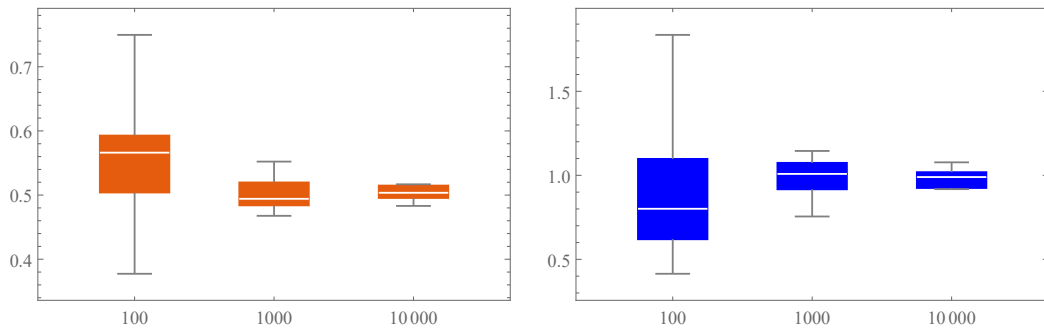
Tabulka 3.4: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.



Obrázek 3.5: Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním II.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,02335	0,00814	0,0086	0,00696	0,13383	0,13254
1000	0,00521	0,00052	0,00054	-0,01442	0,00939	0,00951
10000	-0,00071	0,00005	0,00005	0,00262	0,00122	0,00122

Tabulka 3.5: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním II.



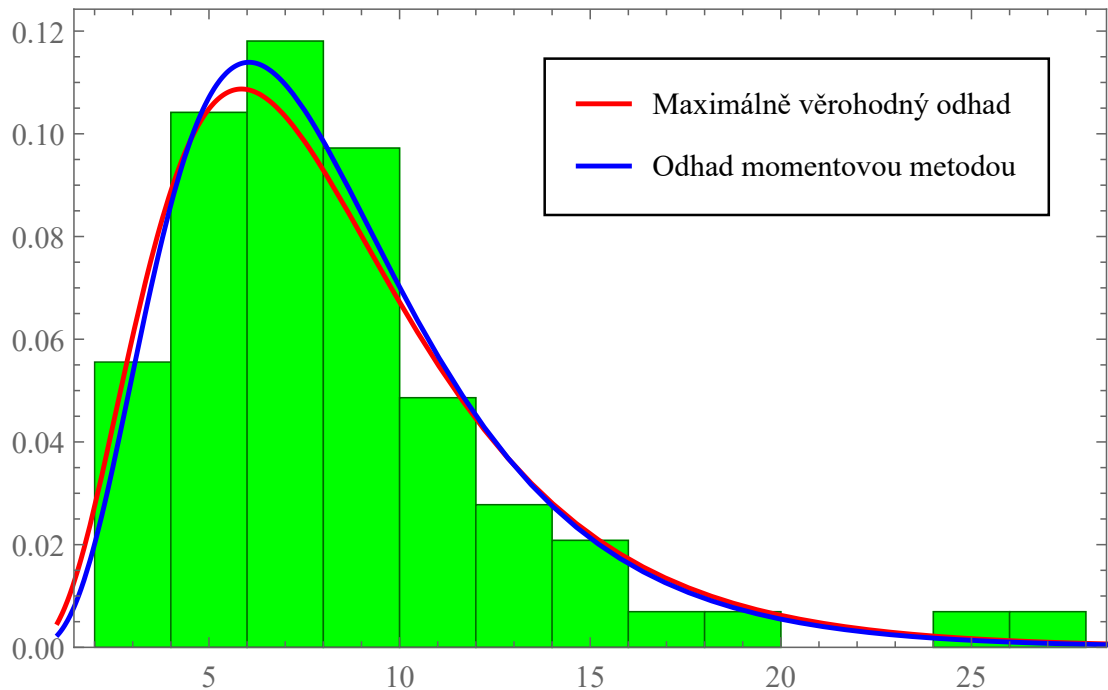
Obrázek 3.6: Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním II.

N	$E \hat{\alpha}_n - \alpha$	$\text{var } \hat{\alpha}_n$	$\text{MSE } \hat{\alpha}_n$	$E \hat{\lambda}_n - \lambda$	$\text{var } \hat{\lambda}_n$	$\text{MSE } \hat{\lambda}_n$
100	0,06474	0,01261	0,01667	-0,13164	0,12892	0,14496
1000	0,04397	0,00843	0,01028	-0,08096	0,13473	0,13994
10000	0,06685	0,01197	0,01632	-0,11065	0,13166	0,14259

Tabulka 3.6: Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním II.

4. Studie na reálných datech

4.1 Srážky v Logan International Airport



Obrázek 4.1: Histogram celkových měsíčních úhrnů srážek na letišti Logan International Airport v Bostonu v letech 2000–2005 a aproximace hustoty na základě pozorovaných dat.

Histogram na obrázku 4.1 znázorňuje rozložení 72 pozorovaných hodnot měsíčních úhrnů srážek. Vzhledem k náhledu na data pomocí histogramu byla zvolena aproximace hustoty pouze pomocí hustoty zobecnění I.

Metodou maximální věrohodnosti vyšly následující odhady

$$(\hat{\alpha}; \hat{\lambda}) = (5,47008; 0,280892).$$

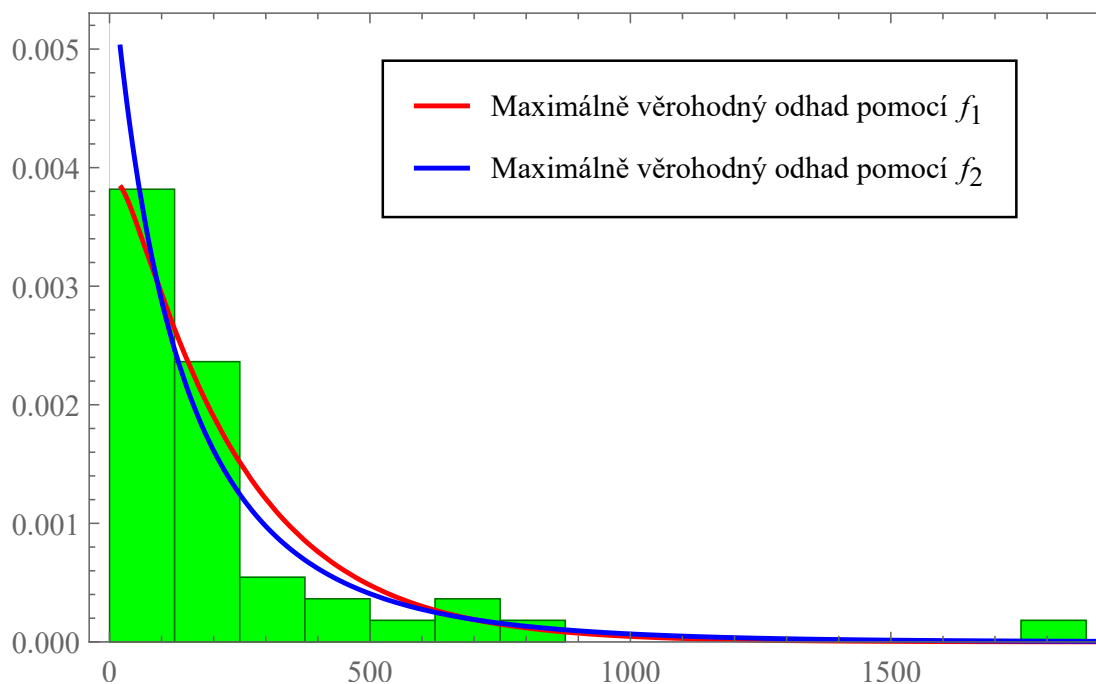
Momentovou metodou vyšly následující odhady

$$(\hat{\alpha}; \hat{\lambda}) = (4,66872; 0,263254).$$

Data byla získána v softwaru Mathematica [3] pomocí funkce WeatherData.

4.2 Čas zbývajícího života pacientů

Na obrázku 4.2 je uveden histogram zbývajících časů (v měsících) života pacientů trpících rakovinou v oblasti hlavy a krku, kteří jsou léčeni kombinovanou metodou zahrnující rádio i chemoterapii. Histogram na obrázku 4.2 obsahuje 41 pozorovaných hodnot.



Obrázek 4.2: Histogram zbývajících časů (v měsících) života a aproximace hustoty na základě pozorovaných dat.

Pro aproximaci pomocí f_1 (hustota příslušející zobecnění I) vyšlo

$$(\hat{\alpha}; \hat{\lambda}) = (1,07137; 0,00468621).$$

Pro aproximaci pomocí f_2 (hustota příslušející zobecnění II) vyšlo

$$(\hat{\alpha}; \hat{\lambda}) = (0,694028; 0,00855385).$$

Data byla získána z článku [6].

Závěr

V této práci jsme se zabývali zkoumáním a porovnáním dvou navržených zobecnění exponenciálního rozdělení. Zkoumali jsme základní vlastnosti hustot. Mezi zajímavý poznatek patří, že hustota zobecnění II, je pro libovolné hodnoty α, λ vždy klesající, což může být v reálných aplikacích omezující.

Dále jsme se zabývali odhady parametrů určujících hustoty zobecněných exponenciálních rozdělení, pomocí momentové metody a metody maximální věrohodnosti.

Posléze byla provedena simulační studie, na které lze pozorovat rozdíly mezi použitými metodami. Odhady získané metodou maximální věrohodnosti měly menší rozptyl a střední čtvercovou chybu. Ke konci práce je obsažena ukázka aproximace hustoty dat z reálných situací.

5. Dodatek

5.1 Gama funkce

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \Re(z) > 0$$

5.2 Horní gama funkce

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \Re(s) > 0$$

5.3 Digama funkce

$$\psi(x) = \psi(x) = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x))$$

5.4 Polygama funkce

$$\psi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \psi(z)$$

Pomocí integrálu:

$$\psi^{(m)}(z) = - \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1-t} (\log t)^m dt.$$

5.5 Harmonické číslo

$$H_\alpha = \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt$$

Platí identita

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \psi(\alpha+1) - \psi(1) = - \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1-t} dt + \int_0^1 \frac{t^0}{1-t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt. \end{aligned}$$

Aproximace harmonického čísla [7].

$$H_x = \gamma + \log(x) + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

5.6 Exponenciální integrální funkce

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt.$$

5.7 Zeta funkce

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Literatura

- [1] Jiří Anděl. *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, 2011.
- [2] Rameshwar D. Gupta and Debasis Kundu. Generalized exponential distribution: Existing results and some recent developments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(11):3537–3547, 2007. Special Issue: In Celebration of the Centennial of The Birth of Samarendra Nath Roy (1906–1964).
- [3] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.2. Champaign, IL, 2020.
- [4] Michal Kulich. Přehledový větník. https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pesta/NMFM301/statistika_fm.pdf, Sep 2014. Accessed: 2021-04-22.
- [5] Saralees Nadarajah and Firoozeh Haghghi. An extension of the exponential distribution. *Statistics*, 45(6):543–558, 2011.
- [6] Shanker Rama, Fesshaye Hagos, and Selvaraj Sujatha. On modeling of lifetimes data using exponential and Lindley distributions. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, 2(5):140–147, 2015.
- [7] Mark B. Villarino. Ramanujan’s Harmonic Number Expansion into Negative Powers of a Triangular Number. <https://arxiv.org/pdf/0707.3950.pdf>, 2007. Accessed: 2021-05-22.

Seznam obrázků

1.1	Hustoty zobecnění I pro parametr měřítka $\lambda = 1$ a různé volby parametru α	5
1.2	Hustoty zobecnění II pro parametr měřítka $\lambda = 0,3$ a různé volby parametru α	6
1.3	Chování šikmosti a špičatosti Y_1 v závislosti na parametru α , logaritmická škála na obou osách.	7
1.4	Chování čtvrtého obecného momentu Y_2 a špičatosti Y_2 v závislosti na parametru α . Je použita logaritmická škála na obou osách . . .	8
2.1	Srovnání harmonického čísla (chování prvního obecného momentu X_1 pro fixní parametr $\lambda = 1$) a přirozeného logaritmu.	10
2.2	Chování druhého obecného momentu X_1 pro fixní parametr $\lambda = 1$	10
2.3	Inverzní funkce k funkcím $h_{X_1}(\alpha)$ a $h_{X_2}(\alpha)$	12
2.4	Determinant Fisherovy informační matice náhodné veličiny X_1 v závislosti na α ($\lambda = 1$).	14
2.5	b_{11} v závislosti na α	14
3.1	Odhady parametrů $\alpha = 1,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	17
3.2	Odhady parametrů $\alpha = 1,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	17
3.3	Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	18
3.4	Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	18
3.5	Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním II.	19
3.6	Odhady parametrů $\alpha = 0,5$ (vlevo), $\lambda = 1$ (vpravo) momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním II.	19
4.1	Histogram celkových měsíčních úhrnů srážek na letišti Logan International Airport v Bostonu v letech 2000–2005 a aproximace hustoty na základě pozorovaných dat.	20
4.2	Histogram zbývajících časů (v měsících) života a aproximace hustoty na základě pozorovaných dat.	21

Seznam tabulek

3.1	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 1,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	17
3.2	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 1,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	17
3.3	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	18
3.4	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním I.	18
3.5	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ metodou maximální věrohodnosti pro data z rozdělení určeného zobecněním II.	19
3.6	Charakteristiky odhadů parametrů $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1$ momentovou metodou pro data z rozdělení určeného zobecněním II.	19