Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce	Bc. Jan Soukup		
Název práce	Drawing geometric graphs on red-blue point sets		
Rok odevzdání	2021		
Studijní program	Informatika	**Studijní obor**	Diskrétní modely a algoritmy

Autor posudku	Mgr. Jan Kynčl, Ph.D.	**Role**	vedoucí
Pracoviště	Katedra aplikované matematiky		

Text posudku:

Ve své diplomové práci se Jan Soukup věnuje několika problémům z oblasti kreslení grafů na obarvené množiny bodů v rovině, konkrétně hledání rovinných geometrických nakreslení cest a párování. Předpokládáme, že R a B jsou disjunktní množiny bodů v rovině, jejichž sjednocení $R \cup B$ je v obecné poloze, tj. žádné tři body neleží na přímce. Body množiny R jsou obarveny červeně a body B modře. Cílem je pro zadaný bipartitní graf G najít rovinné geometrické nakreslení G (tj. nakreslení pomocí úseček bez křížení) takové, že každá hrana spojuje vrchol z B s vrcholem z R. Nakreslení G s těmito vlastnostmi nazveme *alternující*. Je-li G cesta nebo párování, nazývame alternující nakreslení G *alternující cestou* resp. *alternujícím párováním*.

V práci jsou dokázány dva hlavní výsledky: Věta 1 v 1. kapitole a Věta 3 ve 2. kapitole. Věta 3 rozšiřuje dosud známé konfigurace množin n červených a n modrých bodů, na které lze vždy nakreslit alternující cestu pokrývající všechny zadané body. Dosud bylo známé, že taková *hamiltonovská* alternující cesta existuje, pokud R a B jsou oddělené přímkou, nebo pokud množina R tvoří vrcholy konvexního mnohoúhelníku, který obsahuje všechny body B uvnitř. Věta 3 oba tyto speciální případy zobecňuje na situaci, kdy podmnožina $R' \subseteq R$ tvoří vrcholy konvexního mnohoúhelníku, jehož vnitřek obsahuje všechny body B, ale žádný bod z $R \setminus R'$; tedy všechny zbývající červené body jsou vně tohoto mnohoúhelníku.

Důkaz Věty 3 netriviálním způsobem zobecňuje metody použité při důkazech dřívějších výsledků. Kombinací topologického KKM lemma a chytře navržené indukce se zkonstruuje rozklad roviny na konvexní části takový, že v každé části už jsou červené a modré body ve vyváženém počtu a oddělené přímkou; v každé části tohoto rozkladu pak lze najít hamiltonovská alternující cesta, a tyto dílčí cesty se nakonec pospojují do alternující cesty pokrývající celou zadanou množinu bodů.

Kapitola 1 je věnována případu, kdy zadaná množina $R \cup B$ je v *konvexní poloze*, tj. tvoří vrcholy konvexního mnohoúhelníka, což je kombinatoricky ekvivalentní případu, kdy $R \cup B$ leží na kružnici. Navíc se předpokládá, že každá z množin R a B má n bodů. Tato situace byla v literatuře zatím studována nejvíce. Je známo, že v určitých konfiguracích nelze celou zadanou množinu pokrýt hamiltonovskou alternující cestou. Populární zkoumanou otázkou je tedy délka nejdelší možné alternující cesty, kterou lze pro dané n a libovolnou konfiguraci n červených a n modrých bodů na kružnici vždy najít. I přes relativně nedávné nové výsledky je tato otázka stále široce otevřená. Autor se zaměřuje speciálně na případ, kdy obarvení bodů na kružnici má konstantní *diskrepanci*, tj. počet červených a modrých bodů na každém oblouku kružnice se liší nejvýše o konstantu. Z předchozích výsledků je známé, že konfigurace s velkou diskrepancí garantují separované párovaní větší velikosti než v obecném případě. Z tohoto důvodu je případ konfigurací s konstantní diskrepancí zajímavou výzvou.

V případě bodů na kružnici už dříve byla známá blízká souvislost alternujících cest a alternujících *separovaných párování*; tj. párování, jejichž všechny hrany lze protnout společnou přímkou. „Rozstřižením“ kružnice na dva oblouky a přebarvením bodů v jednom z nich lze problém hledání separovaných párování dále převést na problém hledání společné podposloupnosti dvou binárních posloupností. Tento převod není úplně přímočarý, ale v případě konstantní diskrepance funguje dobře minimálně v jednom směru; podrobně jej popisuje Lemma 5. Délka společné podposloupnosti se zde vyhodnocuje ne vzhledem k délkám zadaných dvou posloupností, ale vzhledem k délkám jejich prefixů, které společnou podposloupnost obsahují. Cílem je pak maximalizovat podíl délky společné podposloupnosti a součtu délek příslušných prefixů. Věta 6 a Lemma 7 téměř přesně řeší případ, kdy jedna ze zadaných posloupností má diskrepanci 1 a druhá diskrepanci nejvýše k. Věta 1 řeší případ, kdy obě zadané posloupnosti mají diskrepanci nejvýše 2. Výsledné odhady jsou opět velmi přesné, horní a dolní odhad na délku nalezené společné podposloupnosti se liší jen o konstantu. Z Věty 1 je pak odvozen Důsledek 2, který tvrdí, že v konfiguraci n červených a n modrých bodů na kružnici s diskrepancí nejvýše 2 lze vždy najít separované párování pokrývající asymptoticky $8n/5 - O(1)$ bodů, což velmi výrazně zlepšuje předchozí známý odhad $4n/3$. Důkaz Věty 1 byl proveden indukcí, částečně s pomocí počítačového programu, ale jeho výstup není příliš dlouhý a je velmi názorně prezentovaný ve formě ilustrací, které umožňují ruční ověření.

Kromě občasných jazykových drobnosti a překlepů jsem neodhalil žádné vážnější nedostatky. Celkově mi práce přijde velmi kvalitní, po matematické stránce i srozumitelností textu a důkazů. Každá z kapitol obsahuje dostatek originálních a zajímavých výsledků pro publikaci v odborném kombinatorickém časopise. Navrhuji práci uznat jako diplomovou.

Práci doporučuji k obhajobě.

V Praze dne 18. 06. 2021

Podpis: