Oponentský posudek diplomové práce

M. Zindulka: Basic sequences in Banach spaces

Práce se skládá ze dvou v podstatě nesouvisejících částí. V první se autor zabývá studiem operátorů mezi prostory se Schauderovými bázemi, které zobrazují jednu bázi na druhou. Za jistých podmínek je takový operátor slabě kompaktní. Hlavním výsledkem je speciální verze známé faktorizační věty, která v tomto případě říká, že daný operátor lze faktorizovat skrze reflexivní prostor s bází. Studuje se též reformulace existence výše zmíněného operátoru jako jisté uspořádání na množině bází a ukazuje se, že je to svaz. Toto nicméně není nijak využito.

Druhá část se zabývá studiem prostorů posloupností s normou zadanou iterativním způsobem pomocí nějaké normy N na $\mathbb{R}^2$. Ukazuje se, že tyto prostory jsou kanonicky izomorfní Orliczovým prostorům, přičemž příslušnou Orliczovu funkci lze přirozeně popsat pomocí jednotkové kružnice normy N.

V práci je ovšem několik vážnějších chyb (zejména v důkazu hlavní věty) a též příliš velké množství méně závažných nedostatků. Celkový dojem je poněkud nevyrovnaný. Na jednu stranu autor neváhá (správně) vysvětlovat relativně jednoduché věci, na druhou stranu často mnohem složitější úvahy přejde komentářem „zřejmé“, nebo dokonce mlčením.

Dle mého názoru nicméně předložená práce splňuje požadavky pro to, aby byla uznána jako diplomová práce oboru Matematická analýza.

Závažnější matematické chyby:

1) Lemma 2.5, konec důkazu: Místo $y \in Y$ má být $y \in [y_n]$!
2) Důkaz Lemmatu 2.15, str. 15 nahoře: Tvrzení, že $((x_n^*, y_n^*)^*)$ je bázická posloupnost v $(X^* \oplus Y^*)^*$ asi není pravdivé.
3) Definice 2.18: Vůbec se neřeší, zda je tato definice konzistentní.
4) Důkaz Tvrzení 2.23, předposlední řádek: Pracuje se s objektem, jehož existenci chci dokázat (konvergentní řada)!
5) Důkaz Věty 0.3, ke konci: „Diagonal argument“ nic není. Navíc tvrzení, že $\{Tx_{n,n}\}$ konverguje, není pravdivé!
6) Důkaz Věty 0.3, ke konci: Vůbec se neřeší, jestli $z \in jY$.
7) Důkaz Věty 0.3, ke konci: Proč platí první nerovnost ve (2.11)?
8) Důkaz Tvrzení 3.11, str. 31, ř. 10: Špatné pořadí kvantifikátorů!
9) Důkaz Lemmatu 3.16, poslední řádek: Podle str. 31 je ta nerovnost obráceně!

Méně závažné nedostatky:

1) Důkaz Tvrzení 2.1 na konci: Vysvětlit, proč $x_n^*(u_j) = y_n^*(Tu_j)$.
2) Důkaz Lemmatu 2.4: Důkaz 3) okomentovat.
3) str. 11, ř. 3: Nerovnost $(x_n) \preceq (y_n)$ má být obráceně!
4) str. 13, před Lemmatem 2.11: Definice x_m^{**} je třeba v obecnější situaci – pro $\{x_n\}$ bázickou posloupnost a $x_n^* \in [x_n]^*$.
5) Definice 2.14: na předposledním řádku asi chybí *. Definice (2.4) je předčasná, nevíme, co má daný objekt znamenat, neboť ještě není známo, že (x_n^*, y_n^*) je bázická posloupnost. Na konci by asi bylo vhodnější $[(x_n^*, y_n^*)]$ místo $X^* \oplus Y^*$.
6) Důkaz Lemmatu 2.15, str. 14 úplně dole: Bylo by lépe tu nerovnost více rozepsat.
7) Důkaz Lemmatu 2.15, str. 15 nahoře: Používáme Tvrzení 1.19. Takže (x_n) a (y_n) jsou nyní báze X a Y?
8) Důkaz Lemmatu 2.15, konec: Používá se Tvrzení 2.7, ale to nehovoří o ekvivalenci. Navíc posloupnosti, na které se to aplikuje, nejsou báze.
9) Důkaz Věty 2.16, infimum: Co jsou zde ty prostory X a Y?
10) Důkaz Lemmatu 2.17: Posloupnost (u_n) je třeba vzít omezenou.
11) Důkaz Lemmatu 2.17: To, že (u_n^1) je omezená, je jediná zajímavá věc v celém důkazu a není tam pořádně vysvětlená.
12) Příklad 2.21, druhý odstavec: Co je (a_n)?

13) Příklad 2.21, druhý odstavec: Nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, supremum se dělá i přes $n \in \mathbb{N}$.
14) Definice 2.22, 2.26, 3.27: V definicích se postulují vlastnosti objektů, které jsou ukázány až později (aniž by to bylo zmíněno).
15) Důkaz Tvrzení 2.23: Několikrát se používá bezpodmínečnost báze, bylo by dobré zmínit kde.
16) Důkaz Lemmatu 2.24: Údajně se používá bezpodmínečnost báze, kde?
17) Důkaz Lemmatu 2.27: To, že je to norma, neplyne přímo z definice. Viz též důkaz Lemmatu 2.30, kde se podobná věc za zřejmou nepovažuje.
18) Lemma 2.29: V tvrzení chybí, že $TX \subset Y$, jednak aby bylo definováno $j^{-1}(Tx)$, ale navíc se toto tvrzení používá v aplikaci lemmatu.
19) Důkaz Lemmatu 2.30: „Without loss of generality ... “ – jak to? (Ty interpolační prostory nějak závisejí na normě...)
20) Důkaz Věty 0.3, str. 24 nahoře: Toto Y není to Y z tvrzení věty. Navíc věta hovoří o tom, že báze je boundedly-complete a shrinking, o tom v důkazu není ani zmínka.
21) Důkaz Věty 0.3, str. 24: Proč $\|z_i - z_j\|_Z \leq \sup_n \ldots$? (Není přirozenější $\liminf$?) Hned za tím je lepší místo nerovnosti rovnost.
22) Důkaz Věty 0.3, poslední odstavec: Místo $b_n \to 0$ má být $b_n \to +\infty$.
23) str. 25 nahoře: K čemu je ta podmínka 2)? (Explicitně se nikde nepoužije.)
24) Důkaz Lemmatu 2.32: Když je to tak „straightforward“, tak proč se to neudělá?
25) Důkaz Lemmatu 2.32, ř. 5 odspodu: Rovnost by to chtělo vysvětlit, navíc tam chybí T.
26) Lemma 2.34: V tvrzení opět chybí, že $TX \subset Y$ (a zmínit to i v důkazu).
27) str. 26: Kde je důkaz Tvrzení 2.35? Na co jsou v práci ta Lemmata 2.32 a 2.34?
28) Důkaz Tvrzení 3.4: Proč to tu je (v podstatě je to opsáno z [Lindenstrauss, Tzafriri])?
29) str. 29 a dále: Často se používá, že pro $x = (x_n) \in \ell_\Phi$ a $\rho = \|x\|$ je $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(|x_n|/\rho) \leq 1$, ale není to nikde vysvětleno.
30) Důkaz Tvrzení 3.11: Proč $\left\|\sum_{i=1}^{k} e_i^1\right\| \to +\infty$?
31) Důkaz Tvrzení 3.11, na konci: Proč $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_1(|a_i|/\rho) \leq 1$? Odhad na normu (a_i) asi vyjde jinak.
32) str. 32, konec oddílu 3.1.3: „This is an immediate consequence... “ – jak z toho plyne implikace $\Leftarrow$?
33) Důkaz Tvrzení 3.24, ř. 2: Proč $N(1, b) \geq 1$?
34) Důkaz Lemmatu 3.26, ř. 7: Poslední rovnost by to chtělo rozepsat. Navíc tam má být N místo N_n.
35) Důkaz Lemmatu 3.36, str. 42: „The equality $N(0, 1) = 1$ can be proved similarly... “ – Důkaz by tu měl být, neboť to platí z jiných důvodů, než to tvrzení předtím, navíc není o moc delší, než ta věta s tím „similarly“. Ke konci důkazu se také používá spojitost.
36) Důkaz Tvrzení 3.38: Fakt, že $\|x\|_N = \|(a_i)_{i=n}^{\infty}\|_N$, není dokázán.
37) Důkaz Tvrzení 3.38, 3.46: Všude, kde se tvrdí, že se používá konvexita φ, se ve skutečnosti používá to, že funkce $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ je neklesající.
38) Důkaz Tvrzení 3.38, ř. 6: První nerovnost je ve skutečnosti rovnost. Je také potřeba, že $0 \leq \frac{|a_n|}{\lambda} \leq 1$ (opět Lemma 3.22).
39) Důkaz Tvrzení 3.43, ř. 4: Lépe vysvětlit tu poslední nerovnost.
40) Důkaz Tvrzení 3.43, ř. 6: Proč je to dobře definováno?

Drobnosti a doporučení:

1) Tvrzení 1.5, Důsledek 1.8, Tvrzení 1.14: n se používá jak pro dočasnou konstantu, tak pro běžící index, navíc chybí kvantifikátor pro n.
2) str. 7, definice M_θ: nekonzistence a_n vs. $x_n^*(x)$
3) str. 7, definice K_u: Přes co se bere supremum? Z použití této konstanty dále v textu je vidět, že definice je asi jiná, než v bibli bází [Lindenstrauss, Tzafriri].
4) Tvrzení 2.1: Co je T?
5) Důsledek 2.2: Uvést, že důkaz bude později na další stránce.
6) Poznámka 2.6: „The condition ... “ – která ze dvou uvedených v (i)?
7) Důkaz Lemmatu 2.17: Místo k_n je třeba všude mít $k_n + 1$, i tak je to ale nekonzistentní s Definicí 1.23.
8) Důkaz Lemmatu 2.17: „Fix z^*“ – odkud?
9) Důkaz Lemmatu 2.17, konec: Že řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_i, y_i)$ konverguje by možná chtělo vysvětlit.

10) Důkaz Věty 2.19: Pro pochopení by bylo vhodné napsat, že $((x_n^*, y_n^*))$ je boundedly-complete báze prostoru $[(x_n^*, y_n^*)] \subset X^* \oplus Y^*$ a $((x_n^*, y_n^*)^*)$ je shrinking báze prostoru $[(x_n^*, y_n^*)^*] \subset [(x_n^*, y_n^*)]^*$
11) Příklad 2.21: Báze je asi boundedly-complete vždy, bez podmínky na ty váhy.
12) str. 18: Před důkazem Věty 0.2 je lepší zopakovat znění.
13) Definice 2.22: Co je to Y? Značení je mírně podivné.
14) Definice 2.22: Asi by bylo dobré říci, jak vypadá ta norma na Y.
15) str. 19, zcela dole: Bylo by lepší ještě poslední normu odhadnout výrazem $\|y_{n_m} - y_n\|_Y$.
16) str. 20, zcela nahoře: Má být neostrá nerovnost místo ostré.
17) Důkaz Tvrzení 2.25, ke konci: Když se zmiňuje, co vše se v nerovnosti použilo, není uvedena bezpodmínečnost báze.
18) Definice 2.28: Místo „scalars“ má být „positive numbers“.
19) str. 23: Před důkazem Věty 0.3 je lepší zopakovat znění.
20) str. 23: Proč je tu definice tak základního pojmu jako je duální norma?
21) Důkaz Lemmatu 2.32, ř. 3 odspodu: Místo rovnosti má být nerovnost, na konci by bylo dobré napsat, že je to rovno $\|x\|_X^2 + \|z\|_Z^2$.
22) Důkaz Lemmatu 2.34, ř. 7: Místo první nerovnosti asi může být rovnost.
23) Důkaz Tvrzení 2.37: Místo „poznámka za Tvrzením 2.25“ je lepší „Poznámka 2.26“.
24) Důkaz Tvrzení 2.37: Místo „Věta 1.27“ je lepší „Věta 1.27 a poznámka za ní“.
25) Tvrzení 3.5: Ve vzorci (3.3) je supremum přes n.
26) Lemma 3.6, Tvrzení 3.11, Věta 3.33: Lépe „The identity mapping ... is defined and bounded.“
27) Důkaz Lemmatu 3.6, ř. 4: Asi tam chybí ρ.
28) Důkaz Lemmatu 3.10: Toto je mnohem zřejmější, než jiná „zřejmá“ nedokazovaná tvrzení.
29) Důkaz Tvrzení 3.11, str. 31: Místo 2^n má být asi n (vícekrát).
30) Důkaz Tvrzení 3.11, str. 31: Mělo by být „together with (3.6) and Corollary 2.2“.
31) str. 31, před Důsledkem 3.12: Logičtější by bylo $\Phi(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2}\Phi(t_2)$. Dále „This shows that $t \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ is non-decreasing.“
32) Důkaz Tvrzení 3.12: Místo prvního odstavce stačí Tvrzení 2.8.
33) Lemma 3.16: Proč není φ definována jen na $[0, t_1]$? Na co je to t_0?
34) str. 33, poznámka za Definicí 3.17: Nestačí $C_u = 0$?
35) Důkaz Tvrzení 3.24 (iii): Formálně chybí důkaz implikace $\Leftarrow$.
36) str. 36: Lemma 3.28 by bylo lepší přehodit před Definici 3.27.
37) Důkaz Lemmatu 3.28: (i) plyne ihned z (ii) a Lemmatu 3.20.
38) Důkaz Lemmatu 3.28: (ii) Místo Lemmatu 3.22 by měla stačit jen normalizovanost.
39) Důkaz Tvrzení 3.29: Na konci str. 37 by bylo vhodné zmínit, že se použije omezenost Cauchyovské posloupnosti. Na další straně, že se použije předchozí odstavec. V důkazu (iii), že se použije Lemma 3.28.
40) str. 38: V definici subsymetrické báze chybí bezpodmínečnost!
41) Definice 3.30: Proč nejsou (3.12) a (3.13) konzistentní?
42) Lemma 3.32: Platí i ekvivalence.
43) Důkaz Věty 3.33: Musí být $\varepsilon \leq K$. Poslední rovnost na ř. 8 má být nerovnost a hned za tím při výčtu toho, co se použilo chybí Lemma 3.28. Zcela na konci je napsáno „třetí nerovnost“, ačkoli jsou tam jen dvě.
44) str. 40, ř. 7 odspodu: $\lambda \geq 1$ plyne z Lemmatu 3.22. Použití Lemmatu 3.22 není zmíněno ještě častokrát.
45) Důkaz Tvrzení 3.34, str. 41: „Přejmenování“ K na K_1 je matoucí, lepší by bylo položit $K_1 = K$ a hledat K_0 místo K. Co je v tom důkazu C_1?
46) Důkaz Tvrzení 3.34, str. 41: Opět se několikrát mlčky použije Lemma 3.22.
47) Důkaz Věty 3.35: Použije se ještě Poznámka 3.31.
48) str. 42, před Tvrzením 3.37: U $a, b \geq 0$ by mělo být také $\lambda > 0$.
49) Důkaz Tvrzení 3.37: V (3.25) by mělo být na konci ještě > 0. Místo a_{n+1} by všude mělo být $|a_{n+1}|$.
50) Důkaz Tvrzení 3.38, poslední odstavec: Nepoužívá se věta o uzavřeném grafu, ale věta o inverzním zobrazení. Zcela na konci se použije Tvrzení 3.37.
51) Důkaz Lemmatu 3.39, ř. 3: Přidat „je ekvivalentní v 0, dle Poznámky 3.39“.

52) Věta 3.40: Možná by bylo vhodné přidat „Pro odpovídající Φ a N je izomorfismus dán…“.
53) Důkaz Věty 3.40: Jak je to s tou identitou v případě degenerované funkce?
54) str. 45, ř. 5: Lépe asi $|a_{n+1}|$ a $|b_{n+1}|$ místo a_{n+1} a b_{n+1}, navíc zmínit, že se používá dualita.
55) Důkaz Tvrzení 3.46: Vzhledem k tomu, co chceme dokázat asi má být $Q = 4$. Nerovnosti $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 2$ opět plynou z Lemmatu 3.22. Co je podmínka Δ_2 s konstantou $2K$? Co je C_1?
56) Důsledek 3.48: Není vysvětleno, jak je to s tou nedegenerovaností.

Překlepy:

1) Definice 1.23: Místo k_{n+1} má být k_n.
2) str. 15, ř. 4: Je tam pravá závorka navíc.
3) str. 15, ř. 6: Místo $(x_{i,n})$ má být $(x_{1,n})$.
4) str. 15, ř. 12: Místo $(y^*_{1,n})$ má být $(x^*_{2,n})$.
5) str. 15, ř. 13: Místo $(x^*_{2,n})$ má být $(y^*_{1,n})$.
6) str. 16, ř. 16 odspodu: Místo „sequence for scalars“ má být „sequence of scalars“.
7) Důkaz Tvrzení 2.25, konec: Místo (y_n) má být $[y_n]$.
8) str. 22, ř. 1: Místo 2.26 má být 2.28.
9) Důkaz Lemmatu 3.6, ř. 1: Místo h_Φ má být c_0.
10) Důkaz Tvrzení 3.11, str. 31, ř. 12: Místo k_{n-1} má být $k_n - 1$. Místo e^1_i má být $e^1_{k_n-1}$.
11) str. 33, ř. 6: Místo „reminder“ má být „remainder“. Na konci řádku něco chybí.
12) Důkaz Lemmatu 3.20: Místo λ_1 má být λ.
13) str. 37, ř. 9 odspodu: Místo 1) má být (i).
14) str. 40, ř. 5 odspodu: Místo $\varphi_2(\frac{b}{\lambda})$ má být $\varphi_1(\frac{b}{\lambda})$.

Terminologické poznámky:

1) str. 3, konec 1. odstavce (a jinde): „Canonical unit vectors“ není dobrý termín. Lépe: canonical basis vectors. (Ostatně tyto vektory ani nemusejí mít normu 1. Na druhou stranu podle Definice 3.21 by pak každá norma byla normalizovaná.)
2) str. 3, 4. odstavec: „Circle“ je kružnice; kruh je „disc“.
3) str. 5, ř. 2: „Hammel“ má být „Hamel“.
4) str. 5 dole, a dále mnohokrát: „Grundblum“ je špatně opsáno – v [Albiac, Kalton] je „Grunblum“, i to je ale špatně, správně je Grinblum (nebo v české transkripci Grinbljum). Název je nicméně pochybný, R.C. James uvádí (vedle citace Grinbljuma), že Tvrzení 1.5 bylo známo již o 10 let dříve Banachovi.
5) Definice 3.19: Taková norma se obvykle nazývá „strongly lattice“.
6) str. 37 a dále: Místo „pseudonorm“ by mělo být „seminorm“.

23.6.2021
Michal Johanis