Posudek vedoucího diplomové práce

Mikuláš Zindulka: „*Basic sequences in Banach spaces*“

Cílem práce bylo zkoumat relaci dominování pro bázové posloupnosti v Banachových prostorech, její vztah k některým důležitým třídám bázových posloupností a ilustrovat to na příkladech, mj. prostorů s iterativně definovanou normou. Cíle bylo dosaženo a výsledkem je kvalitní a zajímavá práce.

Práce je rozdělena do tří kapitol a je doplněna úvodem. V úvodu jsou uvedeny některé pojmy klíčové pro práci a stručně představeny hlavní výsledky. První kapitola obsahuje zejména základní fakta o (Schauderových) bázích, bázových posloupnostech a obecněji o biortogonálních systémech v Banachových prostorech. Mj. jsou připomenuty definice důležitých tříd bází – ‘shrinking’ (Schauderova báze je ‘shrinking’, pokud souřadnicové funkcionály tvoří bázi duálního prostoru) a ‘boundedly complete’ (Schauderova báze je ‘boundedly complete’, pokud z omezenosti částečných součtů ‘nekonečné lineární kombinace’ plyne konvergence příslušné řady).

Druhá kapitola se podrobně věnuje výše zmíněné relaci, kterou lze po vhodné faktorizaci interpretovat jako částečné uspořádání. Jsou dokázány základní vlastnosti, jako například charakterizace, které jsou jednostrannou verzí charakterizací ekvivalence bázových posloupností, a vztah k dualitě. Dále je ukázáno, že bázové posloupnosti s touto relací lze interpretovat jako svaz (Theorem 2.16), přičemž ‘shrinking’ i ‘boundedly complete’ bázové posloupnosti tvoří podsvazy (Theorem 2.19). Dále jsou dokázány faktorizační věty, které říkají jaké bázové posloupnosti lze najít ‘mezi’ dvěma danými bázovými posloupnostmi. Pokud je ‘boundedly complete’ posloupnost dominována ‘shrinking’ posloupností, lze mezi nimi najít posloupnost, která je zároveň ‘boundedly complete’ a ‘shrinking’, a tedy prostor jí generovaný je reflexivní (Theorem 0.3 dokázaný v oddílu 2.2.1). Na druhou stranu se může stát, že ‘mezi’ dvěma posloupnostmi, co jsou ‘boundedly complete’ i ‘shrinking’, je posloupnost, co nemá ani jednu z těchto vlastností (Proposition 2.37).

Třetí kapitola se zabývá speciálními případy bází – Orliczovými prostory posloupností a prostory s iterativně definovanou normou. Relace dominování mezi bázemi Orliczových prostorů posloupností je charakterizována pomocí přirozené relace mezi Orliczovými funkcemi (Proposition 3.11). Je ukázáno, že prostory s iterativně definovanou normou jsou kanonicky izomorfní Orliczovým prostorům posloupností (Theorem 3.40), což je využito k charakterizaci situace, kdy příslušná báze je boundedly complete pomocí známých výsledků o Orliczových prostorech (Theorem 3.47).

Zadání práce bylo nepochybně splněno. Uchazeč pracoval velmi samostatně, o čemž svědčí například formulace těch správných otázek (ve druhé kapitole) či propojení iterativně definovaných norem s teorií Orliczových prostorů posloupností. Za zmínku stojí i úspěch v soutěži SVOČ – s prací obsahující výsledky třetí kapitoly diplomové práce se umístil na děleném druhém místě ve spojených kategoriích M1 a M2 (první cena nebyla udělena). Domnívám se rovněž, že některé z dosažených výsledků by stály za publikaci. Jsem tedy přesvědčen, že předložená práce jednoznačně splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

V Praze, dne 14.6.2021

Prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK