Posudek oponenta k diplomové práci
Význačné prvky grupových okruhů
Bc. Zuzany Procházové

Studium centrálních idempotentů grupového okruhu patří ke klasickým tématům teorie okruhů. Máme-li konečnou grupu G a těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$, existuje úzká souvislost mezi primitivními centrálními idempotenty $\mathbb{C}G$ a charaktery ireducibilních reprezentací G nad $\mathbb{C}$. Tato souvislost je v obecnější formě popsána v kapitole 2. Úloha hledání takových charakterů je algoritmicky řešitelná. Jednoduchý algoritmus navržený Frobeniem se ale pro praktické počítání moc nehodí, studují se proto i jiné přístupy.

Autorka v třetí kapitole představila využití Shodových a silných Shodových párů pro konstrukci centrálních idempotentů v algebrách $\mathbb{Q}G$ a $\mathbb{F}G$, kde G je konečná grupa a $\mathbb{F}$ je konečné těleso char $\mathbb{F} \nmid |G|$. Tato kapitola je kompilací 4 článků doplněných o Tvrzení 33 a Příklady 44 a 45, kde jsou metodou Shodových párů spočteny primitivní centrální idempotenty algeber $\mathbb{Q}Q_8$ a $\mathbb{Q}D_{12}$.

Čtvrá kapitola vychází z článku F. de Melo Hernández et al. (2020), který konstruuje centrální idempotenty pomocí zvedání přes tzv. CNC-systém ideálů. Autorce se povedlo některé výsledky původně formulované pouze pro komutativní grupové okruhy zobecnit (Věta 60, Věta 64).

Závěrečná kapitola stručně komentuje možnosti zvedání idempotentů pro modulární případ, tj pro algebry $\mathbb{F}G$, kde G je konečná grupa a char $\mathbb{F} \mid |G|$.

Práce dává dobrý souhrn výše popsaných metod hledání centrálních idempotentů v grupových okruzích. Text je dobře uspořádaný, práce se hezky čte. Nad rámec běžné kompilační práce jsou pak uvedená zobecnění ve čtvrté kapitole.

Na několika místech by výklad mohl být podrobnější. Ke škodě by jistě nebylo celou práci alespoň jednou ještě pročíst. Další konkrétní připomínky jsou v seznamu níže.

Dle mého názoru studentka splnila zadání, práci proto doporučuji uznat jako práci diplomovou.

V Praze, 16. 6. 2021

Pavel Příhoda

Připomínky k práci

- Terminologie: Česká terminologie označuje reprezentace odpovídající jednoduchým modulům jako ireducibilní a nerozložitelným modulům jako nerozložitelné. Nad totálně rozložitelným okruhem v tom není rozdíl.

- Literatura: Určitě by bylo lepší mít všechny zdroje v seznamu literatury psané jednotným stylem. Ze seznamu autorů Sudarshan K. Milies César Polcino a Seghal není úplně jasné, kdo knihu vlastně napsal.

- Příklad 7: $x^n - 1$ nemá násobné kořeny (např. v $\overline{K}$); nebo $x^n - 1$ je bezčtvercový
- Věta 14: Asi by bylo lepší značit r_i jako n_i; $M_n(D_i)$ by mělo být $M_{r_i}(D_i)$.
- Definice 9: (okruh) je tam asi navíc; $\deg_K(V)$ má být $\dim_K(V)$.
- Tvrzení 21: Nejsou doplněny předpoklady, $\mathrm{Irr}(G)$ je vysvětleno až o dost později
- str. 13, Poznámka: $\mathrm{Aut}_K(V)$ má být $\mathrm{End}_K(V)$
- str. 14, Důkaz: Rozklad KG uvedený nahoře není rozklad na jednoduché moduly, pokud předpokládáte e_i centrální
- Tvrzení 24: f je centrální idempotent.
- Tvrzení 28: Výpočet $\chi^*(\widehat{H} - \widehat{M_p})$, mohl být podrobnější- $|M_p|$ může být víc než p.
- Tvrzení 30: Jak je definován pojem reprezentace grupy nad okruhem?
- str. 23: Není mi úplně jasné, zda má $\mathcal{A} \times G$ levou akci na $\mathbb{C}G$, když G působí zprava. Značení $\varepsilon(K, H) \cdot g$ (v kontextu akce) se mi zdá nevhodné
- str. 26: Nerozumím posledním 2 řádkům důkazu. Argument budí dojem, že centralizátor leží v H
- str. 27, důkaz Tvrzení 40: podmínka (SS2) pracuje s maximální abelovskou podgrupou, ne s největší
- str. 31: v součtu nahoře chybí stupeň triviální reprezentace
- str. 36: V důkazu Věty 50 nerozumím, proč je $e_{\mathcal{C}}(G, K, H)$ primitivní (z důkazu je jasné, že jde o idempotent).
- str. 38: Důkaz Tvrzení 53: g, h jsou také ortogonální
- str. 40: Potřebujeme $p_1 p_2 \cdots p_m = s$, to je trochu víc než $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ jsou prvočísla z rozkladu s
- Důsledek 65: Izomorfismus RG a $\prod_{i=1}^{l} R_i G$ bych značil jinak než ϕ
- Příklad 67: Vzhledem k značení používanému v práci by bylo konzistentní značit $R = M_2(\mathbb{Z}_9)$.
- str. 45 dole: Index $J(Z(R))$ v $Z(R)$ je 2 $(J(Z(R))^2 = 0)$
- str. 46: vzorce pro idempotenty asi nejsou vysázené celé
- Tvrzení 69: Co znamená $\langle 1 - h; h \in H \rangle$?

- str. 47: ωP byl nilpotentní ideál
- Tvrzení 78: Přijde mi, že pro $H = A_4$, $G = K$, Kleinova podgrupa, $P = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4)\}$, $p = 2$ dostaneme protipříklad
- Příklad 79: Nalezený idempotent $b + b^2$ není v $Z(\mathbb{F}A_4)$. Nemůže se ale stát, že $b + b^2 + \omega K$ bude obsahovat prvek z centra?