

Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce Bc. Žaneta Semanišínová
Název práce Higher commutators in loop theory
Rok odevzdání 2021
Studijní program Matematika **Studijní obor** Matematické struktury

Autor posudku Jakub Bulín **Role** oponent
Pracoviště KTIML MFF UK

Text posudku:

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce se zabývá teorií vyšších komutátorů a pojmem supernilpotence v teorii lup. Vyšší komutátory jsou víceárním zobecněním klasického (binárního) komutátoru známého z teorie grup. Zatímco v grupách lze vyšší komutátory vyjádřit iterováním binárního komutátoru (např. $[\alpha, \beta, \gamma] = [[\alpha, \beta], \gamma]$), v obecných algebrách tomu tak není: vyšší komutátory a pojem supernilpotence (tj. $[1_A, 1_A, \dots, 1_A] = 0_A$) poskytují jemnější strukturní popis a od svého objevu našly několik důležitých aplikací zejména v Mal'tsevských algebrách. Jejich teorie ale zatím nebyla dostatečně prozkoumána; lupy jsou z tohoto hlediska pro svou příbuznost s grupami zajímavým případem.

První kapitola představuje relevantní pojmy a výsledky z teorie lup, včetně zjednodušeného, moderního, úplného důkazu Bruckovy věty a Wrightovy věty. Najdeme zde dále tři ekvivalentní definice vyššího komutátoru (termovou podmínku, relační popis, a popis pomocí absorbujících polynomů) a pojmu supernilpotence a dále přehled jejich základních vlastností. Vše s důrazem na stručnost.

Druhá kapitola obsahuje původní teoretické výsledky diplomantky. Nejprve jednoduchý důkaz, že supernilpotence v lupách implikuje nilpotenci (značně zjednodušený oproti obecnému argumentu pro Mal'tsevské algebry). Dále charakterizaci 1- a 2-supernilpotence a nutnou podmínku pro 3-supernilpotenci v jazyce vnitřních zobrazení. A nakonec zesílení jedné implikace Wrightovy věty na nekonečné lupy: důkaz, že je-li lupa k -supernilpotentní, potom její multiplikatívni grupa je k -nilpotentní. Výsledky jsou založené na analýze absorbujících polynomů a struktury termů a jsou pěkně ilustrovány na příkladech.

Třetí kapitola popisuje algoritmus testování supernilpotence, založený na exhaustivním generování relace popisující vyšší komutátor. Jsou zde popsány i detaily implementace a výsledky experimentů. Podařilo se zejména najít příklady lup, které jsou supernilpotentní, mají 3-supernilpotentní multiplikatívni grupy, ale nejsou 3-supernilpotentní.

V závěru najdeme nejen shrnutí hlavních výsledků, ale oceňuji zejména popis postupu práce včetně směrů, které se ukázaly nebýt plodnými, a limitů použitých postupů. Nechybí zde ani diskuze dalších oblastí, kterými by se mohl výzkum vyvíjet.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Téma práce bylo poměrně náročné, už i klasická teorie komutátorů je pověstná svou hloubkou a složitostí. Jeho zpracování vyžadovalo osvojení několika různých matematických nástrojů a řešerši z vícero zdrojů.

Vlastní příspěvek. Jde o práci výzkumného typu. Příspěvkem diplomantky jsou kromě netriviální řešerše (včetně převedení několika důkazů do moderního jazyka a jejich zjednodušení) zejména vlastní matematické výsledky, a dále efektivní implementace algoritmu pro testování supernilpotence lup včetně experimentů.

Matematická úroveň. Matematická úroveň textu je velmi dobrá, odpovídá standardům publikací v dané oblasti. Značení je vhodně zvolené a konzistentní, matematické argumenty lze i v technických částech dobře sledovat.

Implementace. Implementace algoritmu pro testování supernilpotence v jazyce C# je kvalitní a je vidět snaha o efektivitu, viz např. zvolená datová struktura (dynamicky linkovaný strom) pro uchování relace. Kód je velmi dobře strukturovaný a čitelný. Pro snažší reprodukovatelnost a rozšiřitelnost by bylo dobré definovat nějaké public rozhraní a přidat dokumentaci — např. v jakém adresáři a formátu očekává program vstup?

Formální úprava. Práce je psaná velmi dobrou angličtinou s jen malým množstvím chyb (místo chybějící členy nebo přebývající interpunkce). Všechny převzaté výsledky jsou řádně citovány.

Práci doporučuji k obhajobě.

V Praze dne 16. 6. 2021

Podpis: