Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Libuše Samková

Otevřený přístup k matematickému vzdělávání v profesní přípravě učitelů

An open approach to mathematics education
in the professional preparation of teachers

Habilitační práce

Praha 2020

Abstrakt

Tato práce představuje otevřený přístup k matematickému vzdělávání a zkoumá způsoby, jakými je možné tento přístup uplatnit v profesní přípravě učitelů prvního stupně základní školy: při plánování a realizaci výuky obsahově zaměřených kurzů pro budoucí učitele, při plánování a realizaci výuky didakticky zaměřených kurzů, při zkoumání a rozvoji znalostí budoucích učitelů během těchto kurzů. Text práce je komentovaným souhrnem 30 dílčích odborných publikací (1 monografie, 2 kapitol v monografii, 11 odborných článků a 16 příspěvků ve sbornících konferencí), s cílem představit tyto publikace ve společném kontextu a vyjasnit jejich vzájemné propojení, objasnit podmínky, za kterých vznikaly, a zdůraznit klíčové okamžiky jejich tvorby. Empiricky práce vychází z osmi na sebe navazujících výzkumných studií exploračního charakteru, jejichž příprava a realizace spadají do období let 2011 až 2019; sedm z těchto studií je kvalitativního designu a jedna smíšeného. Těžištěm výzkumu byl experimentální dvousemestrální povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, který byl připravený a vedený tak, aby v jeho průběhu docházelo k systematickému uplatňování badatelsky orientované výuky. Tento experimentální kurz se uskutečnil v akademickém roce 2014/15 a jedna ze studií mapovala dění během celého kurzu. Tvorbě kurzu, jeho realizaci a realizaci empirické studie předcházela tříletá teoretická a empirická příprava. Poznatky získané při přípravě kurzu a v jeho průběhu vyústily v realizaci návazných studií. Všechny relevantní studie jsou v práci chronologicky představeny.

Abstract

This work presents an open approach to mathematics education and examines the ways in which this approach can be applied in the professional preparation of primary school teachers: in designing and conducting content courses for future teachers, in designing and conducting didactic courses, while investigating and developing knowledge of future teachers during these courses. The text is an annotated summary of 30 partial publications (1 monograph, 2 chapters in monographs, 11 journal papers and 16 proceedings papers) that intends to present the publications in one common context to clarify their interconnection and the conditions under which they were created, to emphasize key moments of their development. Empirically, the work is based on eight consecutive research studies of an exploratory character, the preparation and realization of which fall between years 2011 and 2019; seven of the studies have a qualitative design and one a mixed design. The focus of the research is on an experimental two-semester compulsory arithmetic course for future primary school teachers that was designed and conducted in a systematic inquiry based manner. This experimental course took place in the academic year 2014/15, and one of the research studies mapped the entire course. The process of designing the course, its realization and the realization of the empirical study were preceded by a three-year theoretical and empirical preparation. The findings gained while designing the course and during the course resulted in the realization of the follow-up studies. All relevant studies are presented chronologically in the work.

Obsah

Úvod

Mezi nejčastější mylné představy o matematice patří názory, že každá matematická úloha má právě jedno správné řešení a že ke každé matematické úloze existuje jen jeden správný postup řešení (Schoenfeld, 1992). Otevřený přístup (anglicky *open approach*; Nohda, 2000) je teoretický rámec matematického vzdělávání, jenž přistupuje k výuce matematiky prostřednictvím učebních úloh, které mají více různých správných řešení nebo více různých správných postupů řešení, a tak tyto mylné představy opakovaně zpochybňuje.

Cílem této habilitační práce je představit otevřený přístup k matematickému vzdělávání a různé způsoby, jakými je možné tento přístup uplatnit v profesní přípravě učitelů prvního stupně základní školy: při plánování a realizaci výuky obsahově zaměřených kurzů pro budoucí učitele, při plánování a realizaci výuky didakticky zaměřených kurzů, při zkoumání a rozvoji znalostí budoucích učitelů během těchto kurzů.

Teoreticky práce vychází z šesti klíčových konceptů, kterými jsou: badatelsky orientovaná výuka matematiky, otevřený přístup, znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu v matematice, porovnávání strategií a konceptů, na obrázcích založené reprezentace výukových situací a vzdělávací pomůcka Concept Cartoons. Spojovacím článkem mezi jednotlivými koncepty jsou matematické učební úlohy.

Empiricky práce vychází z osmi na sebe navazujících studií exploračního charakteru, jejichž příprava a realizace spadají do období let 2011 až 2019. Sedm studií má kvalitativní design, osmá studie má design smíšený s důrazem na kvalitativní složku. Těžištěm realizovaného výzkumu byl experimentální dvousemestrální povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, který byl připravený a vedený tak, aby v jeho průběhu docházelo k systematickému uplatňování badatelsky orientované výuky, přičemž na badatelsky orientovanou výuku bylo nahlíženo perspektivou otevřeného přístupu. Tento experimentální kurz se uskutečnil v akademickém roce 2014/15 a jedna z kvalitativních studií mapovala dění během celého kurzu. Tvorbě kurzu, jeho realizaci a realizaci empirické studie předcházela tříletá teoretická a empirická příprava. Poznatky získané při přípravě kurzu a v jeho průběhu vyústily v realizaci několika návazných empirických studií. Všechny relevantní realizované studie budou v práci podrobně chronologicky představeny.

Habilitační práce má následující strukturu: představení teoretického rámce, představení empirického rámce (včetně experimentálního kurzu), popis přípravné studie realizované před experimentálním kurzem, popis empirických studií realizovaných během kurzu, popis empirických studií realizovaných po skončení kurzu a přehled centrálních nálezů. Strukturu obsahu práce podrobně představuje tabulka 0.1.

Tabulka 0.1: Struktura obsahu habilitační práce

kapitola	obsah kapitoly
1	Teoretický rámec, představení šesti klíčových konceptů.
2	Empirický rámec - příprava a podoba experimentálního kurzu (kap. 2.1); - přehled realizovaných empirických studií a jejich charakteristik (kap. 2.2).
3	Přípravná empirická studie - pilotáž Concept Cartoons jako pomůcky pro diagnostiku didaktických znalostí obsahu u účastníků experimentálního kurzu (kap. 3.1).
4	Empirické studie realizované během experimentálního kurzu, vycházející z dat získávaných průběžně během celého kurzu a pokrývajících všechna zásadní obsahová témata experimentálního kurzu - vliv kurzu na uplatňování principů otevřeného přístupu jednotlivými účastníky kurzu (kap. 4.1); - kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu v matematice u účastníků kurzu realizovaná prostřednictvím Concept Cartoons (kap. 4.2); - smíšená diagnostika znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v matematice u účastníků kurzu realizovaná prostřednictvím Concept Cartoons (kap. 4.3).
5	Empirické studie realizované s účastníky experimentálního kurzu po skončení kurzu - kvalitativní diagnostika znalostí matematického obsahu u účastníků kurzu realizovaná prostřednictvím Concept Cartoons (kap. 5.1). Empirické studie realizované po skončení experimentálního kurzu s budoucími učiteli, kteří se nezúčastnili experimentálního kurzu - zkoumání dalšího potenciálu prostředí Concept Cartoons pro profesní přípravu učitelů (kap. 5.2 a 5.3). Souhrnná empirická studie pokrývající celé výzkumné období - stanovení typologie Concept Cartoons, metodiky jejich využití při sběru dat a metodiky jejich tvorby (kap. 5.4).
6	Přehled centrálních nálezů - vztah badatelsky orientované výuky a otevřeného přístupu (kap. 6.1); - vliv systematické realizace otevřeného přístupu na budoucí učitele (kap. 6.2); - možnosti využití Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů (kap. 6.3).

Text habilitační práce je komentovaným souhrnem několika dílčích prací již publikovaných v monografiích, odborných časopisech a sbornících z konferencí. Jeho cílem je představit tyto dílčí publikace ve společném kontextu a vyjasnit jejich vzájemné propojení, objasnit podmínky, za kterých vznikaly, a zdůraznit klíčové okamžiky jejich tvorby. Některé úseky textu habilitační práce jsou z těchto dílčích publikací převzaty a případně upraveny (přeloženy, doplněny o nové informace, zkráceny) – zdroje převzatých úseků jsou na příslušných místech specifikovány v poznámce pod čarou.

Experimentální kurz, jedna jemu předcházející teoretická studie a některé empirické studie vznikly jako součást výzkumného projektu GA ČR *Zkvalitňování znalostí matematického obsahu u budoucích učitelů 1. stupně prostřednictvím badatelsky orientované výuky* (panel P407, registrační číslo 14-01417S), jehož byla autorka této práce hlavní řešitelkou. Spoluřešitelkou projektu byla Mgr. Marie Tichá, CSc. z Matematického ústavu Akademie věd ČR v Praze, dalšími spolupracovníky doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D. z Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a PhDr. Filip Roubíček, Ph.D. z Matematického ústavu Akademie věd ČR v Praze. U některých studií jsou tak spoluřešitelka nebo spolupracovníci z projektu vedeni jako spoluautoři. Rozsah a povaha jejich spolupráce jsou na příslušných místech habilitační práce specifikovány v poznámce pod čarou. Přehled všech relevantních publikací a autorských podílů je uveden v kapitole 6, tematicky odděleně v tabulkách 6.1 až 6.4.

KAPITOLA 1: Teoretický rámec

Prvotním impulsem pro vznik této práce se kolem roku 2011 stal zvyšující se zájem pedagogické veřejnosti o badatelsky orientovanou výuku matematiky a s ním související otázka, jestli a jak je možné tento typ výuky smysluplně využít v profesní přípravě učitelů. Vzhledem ke vstupu do neznámého terénu se zastřešujícím výzkumným designem práce stal kvalitativní design exploračního charakteru a od tohoto designu se odvíjí povaha konceptuálního uchopení práce. Habilitační práce tak teoreticky vychází z konceptu badatelsky orientované výuky matematiky a další klíčové koncepty se vynořují postupně, v závislosti na průběžných výzkumných nebo vzdělávacích požadavcích a v závislosti na průběžných rešeršních a výzkumných nálezech.

První kapitola teoreticky představuje všechny klíčové koncepty habilitační práce a způsob, jakým na sebe tyto koncepty navazují. Šesti klíčovými koncepty se ukázaly býti: badatelsky orientovaná výuka matematiky (kapitola 1.1), otevřený přístup (kapitola 1.2), znalosti obsahu a didaktické znalostí obsahu v matematice (kapitola 1.3), porovnávání strategií a konceptů (kapitola 1.4), na obrázcích založené reprezentace výukových situací (kapitola 1.5) a vzdělávací pomůcka Concept Cartoons (kapitola 1.6).

Spojovacím článkem mezi jednotlivými klíčovými koncepty jsou matematické učební úlohy, prostřednictvím kterých na výuku a její jednotlivé etapy (přípravu, realizaci, hodnocení) nahlížíme. V souladu s Pedagogickým slovníkem (Průcha, Walterová & Mareš, 2009) chápeme učební úlohu jako „pedagogickou situaci, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle", přičemž tato situace je „zaměřena na pět aspektů učení: obsahový, stimulační (motivační), operační, formativní a regulativní" (ibid: 323). Věnovat se budeme hlavně učebním úlohám aritmetickým, neboť experimentální kurz, od kterého se odvíjí empirická část práce (kapitola 2), je kurzem zaměřeným na aritmetická témata.

Kapitola 1.1: Badatelsky orientovaná výuka[1]

V posledních desetiletích je celosvětově věnována pozornost badatelsky orientovanému vzdělávání v přírodních vědách a v matematice a s tímto typem vzdělávání jsou spojena očekávání směrem ke zvýšení zájmu žáků o tyto předměty a ke zkvalitnění jejich učení. V USA byla katalyzátorem těchto aktivit jedna ze zpráv národní rady pro výzkum v 90. letech 20. století (NRC, 1996) a její revidovaná verze (NRC, 2000), v Evropě pak tzv. Rocardova zpráva (Rocard a kol., 2007). Obě zprávy se věnovaly badatelsky orientovanému přírodovědnému vzdělávání, a tak byl tento pojem zprvu diskutován pouze ve vztahu

[1] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2018c) a upraven.

k přírodovědným předmětům. Nicméně v následujících letech se rozšířil i do výuky dalších školních předmětů, včetně matematiky (Artigue & Blomhøj, 2013). V českém vzdělávacím prostředí se první zmínka o badatelsky orientovaných pedagogických metodách objevila přibližně před 10 lety (Janoušková, Novák & Maršák, 2008).

Badatelsky orientovaná výuka bývá obvykle popisována jako výuka, při které je žákům nabídnuta možnost používat podobné postupy a metody práce, které při své výzkumné práci používají odborní vědečtí pracovníci (Dorier & Maass, 2014). Žáci tak mohou provádět pozorování, klást si otázky, vyhledávat informace, plánovat a navrhovat způsoby řešení, sbírat data, analyzovat je a interpretovat, formulovat odpovědi, vysvětlení a předpovědi, vyvozovat a sdělovat závěry, diskutovat je se svými spolužáky (NRC, 1996). Tyto činnosti se souhrnně nazývají *bádání*. Objekt bádání a jeho metody jsou přizpůsobeny věku žáků, a tak žáci mohou například znovuobjevovat školskou matematiku nebo řešit jednoduché problémy z běžného života.

Za pedagogický základ badatelsky orientované výuky bývá považováno bádání ve smyslu J. Deweye (1938), za psychologický základ pak učení se objevováním J. S. Brunera (1965). Z jejich myšlenek doplněných o Piagetovy úvahy vychází kognitivní konstruktivismus, jenž mj. vidí žáka jako naivního vědce a učitele jako facilitátora (Kalhous, Obst a kol., 2009). Badatelsky orientovanou výuku tak můžeme chápat jako jednu z cest uplatňování konstruktivistického přístupu (v matematice Hejný & Kuřina, 2009). V matematickém vzdělávání má podobný myšlenkový základ jako badatelsky orientovaná výuka například učení řešením úloh a problémů (Pólya, 1945, česky 2016; u nás Vyšín, 1972; Kuřina, 1976, 2005), genetický styl vyučování, řízené objevování a znovuobjevování (Freudenthal, 1973; Wittmann, 1974; u nás Vyšín, 1976). Tyto hlavní směry se pak promítají do různých dalších teoretických rámců, jako jsou teorie didaktických situací (Brousseau, 1997, česky 2012), projektová metoda (u nás Kubínová, 2002), podnětná výuková prostředí a budování schémat (Skemp, 1971; Wittmann, 2001; u nás Stehlíková, 2007; Hejný, 2014), uchopování situací (Koman & Tichá, 1997, 1998) aj. Vztahy těchto didaktických rámců k badatelsky orientované výuce podrobně mapuje přehledová studie Samkové, Hošpesové, Roubíčka a Tiché (2015).

Experiment ve smyslu bádání byl také zmiňován již v Hrušově a Vyšínově metodice vyučování matematice (1964)[2] a experimentální řešení úloh bylo využíváno od 60. let 20. století na pokusných školách *Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice MÚ ČSAV* (Vyšín, 1979; Tichá, 2013).

[2] Hruša a Vyšín (1964) na stranách 39–40 nabádají k častějšímu využívání experimentů ve škole, aby se žáci nebáli něco zkusit a v pokusech viděli dobrou pomocnou metodu. Zároveň však upozorňují na dvě velká nebezpečí: a) pokusy se nesmějí zvrhnout v hraní, vždy musí mít nějaký cíl; je třeba si uvědomit, že pokus je situace vytvořená uměle za tím účelem, abychom dostali odpověď na určitou otázku; b) žáci nesmějí začít považovat matematiku za vědu pokusnou, experimentování se nesmí stát hlavní pracovní metodou.

Vliv badatelsky orientované výuky na žáky různých stupňů škol zkoumalo mnoho empirických studií, ale jejich výsledky jsou různorodé a odpovědi není možné jednoznačně zobecnit. Jistou představu nabízí tři přehledové studie (Hattie, 2009; Minner, Levy & Century, 2010; Bruder & Prescott, 2013), jejichž závěry se částečně překrývají a indikují, že největší pozitivní vliv na procesové a obsahové znalosti žáků mívá tzv. *nasměrované bádání*, při kterém učitel formuluje otázky a žáci sami navrhují postup řešení, realizují ho a diskutují výsledky. Ke stejnému závěru došli také Jiang a McComas (2015), kteří ve své plošné studii zkoumali vliv různých typů badatelsky orientované výuky přírodovědy na výsledky žáků při testování PISA v USA. Nedávná studie Oliver(ové), McConneye a Woods(ové)-McConney(ové) (2019), která rozšířila výzkum přírodovědných dat z testování PISA v USA o dalších pět anglofonních zemí, upozorňuje, že podle jejích zjištění (1) příliš častý výskyt badatelských aktivit ve výuce má negativní vliv na úspěšnost žáků v PISA testech a že (2) pozitivní vliv na úspěšnost žáků mají praktické experimenty a následné vyvozování závěrů z nich žáky, pokud jsou tyto aktivity realizovány jen občas.

Empirické studie zaměřené na badatelsky orientovanou výuku ve vztahu k učiteli zpravidla hledají vhodné formy dalšího vzdělávání učitelů v praxi, aby učitelé byli schopni badatelsky orientované postupy uplatňovat při své výuce (Swan, Pead, Doorman & Mooldijk, 2013). Studií o možném vlivu badatelsky orientované výuky na budoucí učitele není mnoho, obvykle se zaměřují na jednorázové intervence realizované v rámci metodicky nebo obecně didakticky zaměřených kurzů (např. Jao, 2017).

U nás se v souvislosti s badatelsky orientovanou výukou objevují spíše práce zaměřené na žáky (např. Vácha & Ditrich, 2016; Rokos & Lišková, 2019), na učitele v praxi (např. Hošpesová, 2016; Radvanová, Čížková & Martinková, 2018) a práce obecného charakteru (např. Papáček, 2010; Činčera, 2014; Dostál, 2015). Kvantitativní sonda Radvanové, Čížkové a Martinkové (2019) zaměřená současně na učitele v praxi a na jejich žáky ukazuje, že učitelé biologie na vyšších gymnáziích badatelsky orientovanou výuku příliš nevyužívají a pokud ano, tak během praktických cvičení. V kontextu výsledků výše zmiňované studie Oliver(ové) a kol. (2019) nemusí být takové zjištění nutně negativní povahy.

Odborné publikace o badatelsky orientované výuce obvykle teoreticky vycházejí z činnostního vymezení bádání (podobně jako v NRC, 1996; Dorier & Maass, 2014) a z něj vyplývajícího badatelského cyklu[3], tedy posloupnosti činností, jež pro žáka utvářejí proces bádání (Eisenkraft, 2003). Za myšlenkový základ badatelsky orientované výuky bývá v tomto kontextu často považováno pochopení povahy vědy (anglicky *nature of science*), ke kterému

[3] Badatelský cyklus = posloupnost činností/úkolů žáka při bádání: „zjistit – zapojit se – zkoumat – vysvětlovat – rozpracovat – vyhodnotit – rozšířit" (Eisenkraft, 2003: 57, vlastní překlad).
V původním znění: „Elicit – Engage – Explore – Explain – Elaborate – Evaluate – Extend", tzv. „7E model".

podle Ledermana a kol. (2002) patří uvědomění si dvou zásadních skutečností: (1) vědecké poznatky jsou vždy provizorní, empirické, kreativní, subjektivní a sociokulturní, (2) ve vědě neexistuje žádný univerzální postup, žádná vědecká metoda, která by spolehlivě vedla k získání nových vědeckých poznatků.

Pro výzkumnou práci zaměřující se na výuku matematiky z pohledu učebních úloh však badatelský cyklus ani pochopení povahy vědy nepřináší mnoho konkrétních vodítek, a tak bylo nutné hledat jiný, alternativní přístup k badatelsky orientované výuce matematiky. Přístup, který by byl více vztažený k učebním úlohám a k námi prosazované myšlence, že při realizaci badatelsky orientované výuky matematiky se východiskem pro bádání žáků stává vhodné výukové prostředí dané úlohou, již mají žáci řešit. Vhodnou alternativou se ukázal být původní pragmatický Deweyův přístup (1938), který bádání vymezuje prostřednictvím situací a jejich transformací:

> Bádání je kontrolovaná nebo řízená transformace neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku. Ta počáteční neurčitá situace není pouze „otevřená” bádání, ale je také otevřená v tom smyslu, že její součásti nedrží pohromadě. (Dewey, 1938: 104–105, vlastní překlad)[4]

V souladu s Deweyovým vymezením bádání by tak úloha určená pro badatelsky orientovanou výuku měla obsahovat něco neurčitého, co je řešitelem vnímáno jako podnětné nebo zajímavé. Sám Dewey tyto neurčitosti pojmenovává jako „znepokojivé, svízelné, nejednoznačné, popletené, plné protichůdných tendencí, mlhavé apod.” (1938: 105; vlastní překlad)[5].

Jednu z možností, jak takové neurčité úlohy vybírat, zkoumat a vytvářet, nabízí v kontextu matematického vzdělávání tzv. *otevřený přístup*. Tomuto přístupu se budeme věnovat v následující kapitole.

[4] V původním znění: „Inquiry is the controlled or directed transformation of an indeterminate situation into one that is so determinate in its constituent distinctions and relations as to convert the elements of the original situation into a unified whole. The original indeterminate situation is not only „open” to inquiry, but it is open in the sense that its constituents do not hang together.”

[5] Celé znění: „Neurčité situace mohou být charakterizovány různými pojmenováními. Jsou znepokojivé, svízelné, nejednoznačné, popletené, plné protichůdných tendencí, mlhavé apod.”
V původním znění: „A variety of names serves to characterize indeterminate situations. They are disturbed, troubled, ambiguous, confused, full of conflicting tendencies, obscure, etc.”

Kapitola 1.2: Otevřený přístup

Otevřený přístup je didaktický rámec, jehož počátky je možné datovat do 70. let 20. století. Podle Beckera a Shimady (1997) bylo v Japonsku v letech 1971 až 1976 v rámci modernizace matematického vzdělávání uskutečněno několik na sebe navazujících výzkumných studií zaměřených na vývoj nové metody pro hodnocení náročnějších myšlenkových operací[6] žáků v matematice. Tyto studie jako jeden z diagnostických nástrojů využívaly učební úlohy zvané *open-ended* (česky *s otevřeným koncem*), což jsou prakticky založené úlohy, které mají více správných odpovědí. Becker a Shimada upřesňují, že tyto odpovědi mohou odkazovat na různá správná řešení[7] dané úlohy (včetně různých řešení vzniklých v důsledku různých interpretací zadání úlohy), ale také na různé interpretace jediného řešení nebo různé postupy řešení vedoucí k jedinému řešení. Úlohy s otevřeným koncem byly v rámci výzkumných šetření průběžně zařazovány do výuky a byla sledována jejich účinnost při odhalování náročnějších myšlenkových operací žáků: zda a jak jsou žáci schopni matematizovat praktické situace, na kterých jsou úlohy založeny, jestli a jak jsou schopni při řešení úloh mezi sebou spolupracovat. Protože poznatky z výuky uskutečněné během výzkumných šetření naznačovaly, že úlohy s otevřeným koncem by mohly mít pozitivní vliv na podobu vyučování i na učení žáků, tak bylo následně provedeno dílčí výzkumné šetření zaměřené na využití úloh s otevřeným koncem při výuce matematiky. Šetření potvrdilo pozitivní vliv těchto úloh na vyučování i učení (lepší zapojení žáků do výuky, aktivní podíl na výuce i u žáků průměrných a podprůměrných, snaha žáků o samostatnou práci a o následné sdílení svých myšlenek se spolužáky a učitelem), ale také odhalilo nejistotu učitelů při zařazování takových úloh do výuky. Publikace (Becker & Shimada, 1997) toto výzkumné šetření reflektuje a v reakci na nejistotu učitelů představuje obecný návod na tvorbu úloh s otevřeným koncem a na jejich začleňování do výuky a didaktické rozbory 23 konkrétních úloh.

Přístup založený na úlohách s otevřeným koncem (anglicky *open-ended approach*) bývá v Asii a Austrálii často využíván nejen ve výuce matematiky (Sullivan, Warren & White, 2000), ale i v dalším vzdělávání učitelů matematiky (Kadroon & Inprasitha, 2012), obvykle jako součást tzv. *lesson study*, intenzivní formy spolupráce učitelů, která má v Japonsku více než stoletou tradicí (Quaresma a kol., 2018; u nás Vondrová, Cachová, Coufalová & Krátká, 2016). V Evropě se tomuto přístupu dlouhodobě věnuje Pehkonen (1997, 2017).

[6] „Náročnější myšlenkové operace přicházejí na řadu, pokud člověk vezme nové informace a informace, které má uložené v paměti, a navzájem je propojuje a/nebo přeskupuje a rozšiřuje tyto informace k dosažení nějakého účelu nebo k nalezení možných odpovědí ve zmatených situacích." (Lewis & Smith, 1993: 136, vlastní překlad) V původním znění: „Higher order thinking occurs when a person takes new information and information stored in memory and interrelates and/or rearranges and extends this information to achieve a purpose or find possible answers in perplexing situations."

[7] řešení ve smyslu výsledný produkt postupu řešení, výsledek

Jak již bylo zmíněno výše, otevřenost konce (tj. existence více správných odpovědí k dané úloze) může mít svůj původ v různých etapách procesu řešení úlohy (interpretace zadání, postup řešení, výsledky a jejich interpretace), a tak odkaz na *konec* vyskytující se v názvu úloh a v názvu přístupu může být matoucí. Někteří autoři (například Nohda, 2000) tak navrhují tento odkaz na konec z názvů odstranit a mluvit o *open problems* (česky *otevřené úlohy*) a *open approach* (česky *otevřený přístup*). Různé etapy procesu řešení úlohy pak Nohda (2000) promítá i do své typologie otevřených úloh: odlišuje *úlohy s otevřeným postupem* (tj. úlohy, pro které existuje více různých postupů řešení; anglicky *process is open*) a *úlohy s otevřeným výsledným produktem* (tj. úlohy, které mají více správných řešení; anglicky *end products are open*), navíc k nim nově přidává *úlohy s otevřenou další cestou* (tj. úlohy, pro které existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou; anglicky *ways to develop are open*). Různé interpretace zadání úlohy, které ve svém upřesnění k vymezení úloh s otevřeným koncem zmiňovali Becker a Shimada (1997), nejsou v Nohdově typologii zastoupeny.

Řešením prakticky založených matematických úloh se v českém prostředí zabývali Koman s Tichou (např. 1997, 1998), a to hlavně v souvislosti s procesem uchopování situací. Podle Komana a Tiché je uchopováním situace rozuměno hledání a objevování různých jevů klíčových pro vyřešení úlohy, hledání a objevování vzájemných vztahů mezi těmito jevy v kontextu dané praktické situace, hledání řešení úlohy na základě objevených vztahů, interpretace nalezených řešení v kontextu dané praktické situace, subjektivní posouzení smysluplnosti výsledků (z hlediska konkrétního řešitele), objektivní posouzení smysluplnosti výsledků (z hlediska různých osob, které s praktickou situací mohou mít něco společného), hledání případných kompromisů a optimálních řešení. Má-li prakticky založená úloha více správných řešení, mohou být tato řešení pro různé zúčastněné osoby různě vhodná nebo různě výhodná a objektivní klasifikace takových řešení může být nejasná, obtížná, či dokonce neproveditelná. K rozdvojení procesu řešení prakticky založené úlohy může dojít v libovolném kroku procesu uchopování: od identifikace klíčových jevů až po rozhodnutí o optimálním řešení. I z tohoto pohledu Nohdově typologii otevřených úloh chybí typ vztahující se k samému počátku procesu řešení úlohy, kdy v rámci interpretace zadání řešitel provádí identifikaci jevů klíčových pro řešení úlohy a jejich rozbor vzhledem k dané praktické situaci.

Na základě předchozích úvah, ve snaze o maximální obecnost, přehlednost a úplnost vymezení pojmu otevřená úloha, jsme Nohdovo (2000) vymezení otevřených úloh rozšířili a jeho typologii otevřených úloh upravili. Nové vymezení uvádí následující odstavec.

Za *otevřenou úlohu* budeme považovat každou úlohu, která splňuje aspoň jednu z následujících charakteristik:

- má *otevřené zadání*, tj. existuje více způsobů, jak zadání úlohy interpretovat;
- má *otevřený postup řešení*, tj. existuje více způsobů, jak úlohu řešit;
- má *otevřený výsledek*, tj. existuje více řešení úlohy nebo více způsobů, jak jedno řešení interpretovat;
- má *otevřenou další cestu*, tj. existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou.

Vzhledem k tomu, že tyto čtyři charakteristiky můžeme sledovat i u matematických úloh, které nejsou prakticky založené, tak požadavek, aby otevřená úloha byla prakticky založená, v našem vymezení chybí.

Otevřenost zadání může být způsobena nejednoznačností zadání úlohy (které pak různí řešitelé mohou různě chápat) nebo nejasnou důležitostí jednotlivých součástí vstupní situace (takže různí řešitelé mohou různě chápat jevy klíčové pro správné vyřešení úlohy). Otevřenost výsledku může být způsobena otevřeností zadání, ale i prostou existencí více řešení k jednoznačně zadané a jednoznačně chápané úloze. Pokud jde o otevřenost postupu a otevřenost další cesty, tak vzhledem ke vzájemné provázanosti matematických témat a didaktických modelů mají všechny matematické úlohy otevřenou další cestu a téměř všechny matematické úlohy mají otevřený postup (výjimkou jsou úlohy, u kterých je požadovaný postup stanoven v zadání, například pokynem „Použij postup, který jsme se učili včera.”). Smyslem otevřeného přístupu není otevřenost postupu a otevřenost další cesty konstatovat, ale na ně upozorňovat a plně je ve výuce využít[8]: nechat žáky hledat, navrhovat, uplatňovat a diskutovat různé postupy řešení, různé další cesty.

Tabulka 1.1 uvádí konkrétní příklady otevřených úloh a jejich charakteristiky; zařazena je i otevřená úloha, která není prakticky založená (úloha Ú3). Charakteristiky otevřených úloh lze snadno měnit drobnými úpravami zadání. Například úloha Ú2 v tabulce 1.1 vznikla modifikací úlohy z učebnice (Molnár & Mikulenková, 2018a)[9]: odstraněním druhé části otázky, jež zakazovala nastavování šňůr, vznikla úloha s více postupy řešení. Změnou délky šňůry z 360 cm na 340 cm navíc vznikla úloha s možností další cesty, jež vede k otevřenému výsledku (při zvětšení počtu šňůr na 7 je výsledek při nastavování šňůr odlišný od výsledku bez nastavování; při délce šňůry 360 cm tomu tak nebylo). Úloha Ú5a vznikla modifikací

[8] Obdobu uplatňování otevřeného postupu využívají ve výuce na střední škole a v profesní přípravě učitelů Leikin(ová) a Levav-Waynberg(ová), které v geometrii zadávají tzv. *MSTs* neboli *multiple solution tasks* (česky ve významu *úlohy s více způsoby řešení*): úlohy, které žákům a budoucím učitelům předkládají s pokynem vyřešit je co možná největším počtem různých způsobů (Leikin & Levav-Waynberg, 2009; Levav-Waynberg & Leikin, 2012).

[9] „Maminka potřebuje 6 šňůr na prádlo dlouhých 360cm. Šňůra se prodává v délce 8 m. Kolik takovýchto šňůr musí maminka koupit, jestliže žádnou svoji šňůru nechce mít nastavenou?” (Molnár & Mikulenková, 2018a: 5)

jedné z úloh z Nohdova příspěvku o typologii otevřených úloh (Nohda, 2000: 43): změnou počtu dětí z 37 na 31 vznikla z úlohy s otevřeným výsledkem úloha, která výsledek otevřený nemá. Úloha Ú5b pak představuje další možnost, jak z úlohy s výsledkem, který není otevřený, vytvořit úlohu s otevřeným výsledkem, a to změnou otázky.

Tabulka 1.1: Ukázky otevřených úloh a jejich charakteristiky

	Znění úlohy	**Otevřenost úlohy**
Ú1	Máš zaplatit přesně 11 korun. Jaké mince použiješ?	*Zadání je otevřené*, není jasné, zda se otázka ptá jen po druhu použitých mincí, nebo i po jejich počtu; *postup řešení je otevřený*, úlohu je možné řešit například tabulkou, nebo manipulací s konkrétními předměty (mincemi); *výsledek je otevřený*, úloha má 6 řešení pro druh použitých mincí a 12 řešení pro druh a počet; *další cesta je otevřená*, například můžeme změnit částku na 12 korun, nebo omezit počet použitých mincí na 6.
Ú2	Maminka potřebuje 6 šňůr na prádlo dlouhých 340 cm. Šňůra se prodává v délce 8 m. Kolik takových šňůr musí maminka koupit?	*Zadání je otevřené*, není jasné, zda je možné šňůry nastavovat; *postup řešení je otevřený*, můžeme počítat v metrech nebo v centimetrech; jiný postup použijeme v případě s nastavováním (6 · 340 : 800 = 2,55… potřebuje 3), jiný bez nastavování (800 : 340 = = 2 + zb. 120… z každé dlouhé udělá 2 krátké… 6 : 2 = 3… potřebuje 3); *výsledek není otevřený*, vždy vyjde stejný výsledek; *další cesta je otevřená*, například můžeme změnit délku prodávané šňůry na 10 m, nebo počet šňůr na prádlo na 7; změnou počtu šňůr na 7 vytvoříme úlohu s otevřeným výsledkem (v případě s nastavováním dostaneme jiný výsledek než v případě bez nastavování).
Ú3	Vypočítej 73 – 25.	*Zadání není otevřené*, úloha je jednoznačně zadaná; *postup řešení je otevřený*, můžeme využít algoritmus písemného odčítání, různé postupy pamětného počítání (73 –20 – 5, nebo 73 – 30 + 5, nebo 73 – 25 = 78 – 30), znázornění na číselné ose (pohyb od 73 o 25 doleva, nebo délka úseku mezi 25 a 73), manipulaci s konkrétními předměty (kamínky, kuličky na počítadlu); *výsledek není otevřený*, vždy vyjde stejný výsledek; *další cesta je otevřená*, například můžeme obě čísla v zadání vynásobit stem, nebo prohodit menšenec a menšitel.

Ú4	Standa, Pepa a Karel mají průměrně 15 kuliček. Kolik kuliček má Standa a kolik Pepa, jestliže Karel má 25 kuliček?	*Zadání není otevřené*, úloha je zadána jednoznačně; *postup řešení je otevřený*, úlohu je možné řešit například úvahou, algebraicky, manipulací s konkrétními předměty; *výsledek je otevřený*, úloha má 21 řešení; *další cesta je otevřená*, například můžeme přidat požadavek, aby Standa a Pepa měli stejně kuliček, nebo změnit průměrný počet kuliček na 8.
Ú5	Děti budou vyrábět z barevného papíru pohlednice o rozměrech 15 cm a 10 cm.	
	(a) Kolik archů barevného papíru o rozměrech 45 cm a 35 cm musí paní učitelka minimálně koupit, je-li ve třídě 31 dětí a každé dítě má vyrobit jednu pohlednici?	*Zadání není otevřené*, úloha je zadána jednoznačně; *postup řešení je otevřený*, úlohu je možné řešit například geometricky načrtnutím rozložení pohlednic na jednom archu, manipulací s konkrétními předměty (sadou pohlednic a archem), nebo aritmetickou úvahou[10]; *výsledek není otevřený*, pro různá rozložení je počet pohlednic vyrobený z jednoho archu sice různý (svisle se vejde 8 kusů, vodorovně 9, kombinovaně možno i 10)[11], ale maximální možný počet pohlednic na archu je 10, a tak 3 archy nestačí; stejný výsledek dává i aritmetická úvaha; *další cesta je otevřená*, například můžeme kratší rozměr archu změnit na dvojnásobek, změnit rozměry archu na v obchodě běžnější formát A3 či A4, nebo změnit počet dětí na 26.
	(b) Paní učitelka koupila archy barevného papíru o rozměrech 45 cm a 35 cm. Jak mají děti při vystřihování pohlednic postupovat?	*Zadání je otevřené*, není jasné, kolik je dětí, kolik archů paní učitelka koupila, ani jestli děti musí šetřit papírem; *postup řešení je otevřený*, úlohu je možné řešit například geometricky načrtnutím rozložení pohlednic na jednom archu, manipulací s konkrétními předměty (sadou pohlednic a archem), nebo aritmetickou úvahou; *výsledek je otevřený*, existuje více způsobů, jak pohlednice na arch rozložit a jak je vystřihnout; *další cesta je otevřená*, například můžeme změnit delší rozměr archu na 40 cm, nebo požadovat, aby při vystřihování bylo použito co možná nejméně střihů.

[10] Porovnáním obsahu jednoho archu a obsahu jedné pohlednice podílem, tedy z výpočtu $(45 \cdot 35) : (15 \cdot 10) = 10{,}5$ plyne, že z jednoho archu nepůjde vyrobit více než 10 pohlednic. Protože dětí je 31, tak paní učitelka musí koupit aspoň 4 archy. Delší rozměr pohlednice se do delšího rozměru archu vejde třikrát, kratší rozměr pohlednice se do kratšího rozměru archu vejde také třikrát, na jeden arch se tedy určitě vejde $3 \cdot 3 = 9$ pohlednic. Na 4 archy se určitě vejde $4 \cdot 9 = 36$ pohlednic, a to pro 31 dětí stačí.

[11] Rozkreslení některých rozložení pohlednic na archu uvádí publikace (Samková, 2019c).

Speciálnímu typu otevřených úloh s více řešeními o různé obtížnosti se věnuje Hellmig (2010) a pojmenovává je polyvalentní úlohy. Podle Hellmiga si při řešení vhodně sestavené polyvalentní úlohy může každý žák najít „své” řešení odpovídající jeho schopnostem a znalostem. Podrobný rozbor různých typů otevřených úloh provedený v rámci studie (Samková, 2019c) ukázal jako účelné rozšíření tohoto pojmu o úlohy, které mají sice jen jedno řešení, ale k tomuto řešení vedou různě obtížné postupy řešení. Jako *polyvalentní úlohu* tak budeme chápat každou úlohu, která má více různě obtížných řešení nebo více různě obtížných postupů řešení.

Polyvalentní úlohou s více různě obtížnými řešeními (tedy polyvalentní úlohou podle Hellmiga) je úloha Ú1 z tabulky 1.1: mezi méně obtížné patří řešení spočívající v jedné desetikorunové a jedné korunové minci či řešení spočívající v jedenácti korunových mincích; mezi obtížnější (na odvození i na početní kontrolu) patří například řešení spočívající v jedné pětikorunové a třech dvoukorunových mincích. Polyvalentní úlohou s více různě obtížnými postupy řešení (tedy polyvalentní úlohou podle nového vymezení, ale ne podle Hellmiga) je úloha Ú3 z tabulky 1.1, protože postupné odčítání desítek a jednotek (73 – 20 – 5) je méně obtížné na odvození než vyrovnání (73 – 25 = 78 – 30). Také úloha Ú5a z tabulky 1.1 je polyvalentní díky tomu, že má různě obtížné postupy řešení: u ní uvedená aritmetická úvaha je abstraktnější a tedy obtížnější než manipulace s konkrétními předměty.

Pokud jde o hodnocení otevřených úloh, Nohda (2000) tyto úlohy hodnotí podle několika kritérií: kolik různých řešení nebo postupů řešení je žák schopen předložit, kolik různých myšlenek žák při řešení použil nebo objevil, do jaké míry je žákovo řešení originální, do jaké míry je žákovo myšlení elegantní. Bulková a Čeretková (2017), které využívají otevřené úlohy v matematických soutěžích, zdůrazňují při hodnocení spíše praktické a analytické aspekty, a tak kromě originality hodnotí správnost závěrů (přesnost, srozumitelnost a konzistentnost použitých informací, relevanci použitých zdrojů, blízkost závěrů cíli úlohy) a aplikovatelnost závěrů a použitého postupu řešení (do jaké míry mohou být závěry nebo postup zobecněny a použity ve stejném, podobném, nebo odlišném kontextu). Hledisko aplikovatelnosti úzce souvisí s otevřeností další cesty.

Kapitola 1.3: Znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu[12]

Učitelé a jejich znalosti ovlivňující průběh výuky jsou středem zájmu mnoha výzkumů, my se budeme věnovat oblastem vztahujícím se k Shulmanově konceptu poznatkové báze učitelství a k Rowlandově konceptu znalostního kvarteta.

1.3.1 Poznatková báze učitelství

Shulmanově přístupu a jeho terminologickému vymezení v českém prostředí se jako první podrobněji věnoval Janík (2004), z jehož práce také přebíráme českou terminologii. Shulmanova teorie je založena na tzv. poznatkové bázi učitelství tvořené sedmi kategoriemi, z nichž tři jsou vázány na obsah vzdělávání (1986) – znalosti obsahu, didaktické znalosti obsahu, znalosti kurikula – a čtyři jsou obecné povahy (1987) – obecné pedagogické znalosti, znalosti o žákovi a jeho charakteristikách, znalosti o kontextech vzdělávání, znalosti o cílech, smyslu a hodnotách vzdělávání. My se zaměříme na znalosti obsahu (anglicky *subject matter content knowledge*, zkr. SMK) a na didaktické znalosti obsahu (anglicky *pedagogical content knowledge*, zkr. PCK). *Znalosti obsahu* budeme chápat jako znalosti „pro sebe", tedy vlastní znalosti, které jedinec uplatní při svém studiu odborného předmětu (např. při řešení odborného problému, při čtení odborného textu, při učení se apod.). *Didaktické znalosti obsahu* budeme chápat jako znalosti „pro pomoc jiným", tedy znalosti, které jedinec uplatní, pokud učí někoho jiného. Vztah mezi těmito dvěma kategoriemi znalostí může být u různých jedinců různý, obecně lze znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu považovat za dvě nestejné množiny s neprázdným průnikem. Učitelovy znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu mají podstatný vliv na úspěšnost žáků (např. Krauss, Baumert & Blum, 2008), a to i na prvním stupni základní školy (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Podle Grossman(ové) (1990, cit. dle Janík a kol., 2007: 31) sestávají didaktické znalosti obsahu ze čtyř komponent: (a) znalosti a pojetí cílů, k nimž má směřovat vyučování v daném předmětu na určitém stupni školy; (b) znalosti kurikulárních materiálů, které jsou pro vyučování v daném předmětu k dispozici, znalosti horizontálních a vertikálních vazeb mezi předměty v kurikulu; (c) znalosti žákových koncepcí a miskoncepcí určitého učiva v rámci vyučovacího předmětu, znalosti vztahující se k možnostem a mezím žákova porozumění; (d) znalosti výukových strategií a reprezentací pro vyučování určitého učiva. Tato práce se vztahuje hlavně k posledním dvěma komponentám.

Více podrobností o didaktických znalostech obsahu a možnostech jejich rozvíjení lze nalézt v publikacích (Janík a kol., 2007, 2009). Vymezení didaktických znalostí obsahu v českém (resp. česko-německém) vzdělávacím prostředí se věnoval i Kuřina (2011, 2012).

[12] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2016b) a upraven.

1.3.2 Znalostní kvarteto

V kontextu vyučování matematice na prvním stupni základní školy se výzkumu učitelových znalostí vázaných na obsah také věnovali Rowland a jeho spolupracovníci. Jako součást studie podrobně popsané v publikacích (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005; Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009; Rowland, Turner & Thwaites, 2014) pořizovali videozáznamy hodin matematiky během souvislých praxí studentů závěrečných ročníků studia učitelství pro první stupeň základní školy. Při kvalitativní analýze videozáznamů v designu zakotvené teorie identifikovali celkem 20 kategorií učitelových znalostí, které mají významný vliv na dění ve třídě, a posléze tyto kategorie roztřídili do čtyř skupin, tzv. dimenzí: základní znalosti (teoretická průprava učitele a jeho přesvědčení; anglicky *foundation*), znalosti reprezentací (způsob předvedení učiva, využití pomůcek, analogie, příklady, názorné ukázky; anglicky *transformation*), znalosti souvislostí (návaznost učiva v rámci hodiny i mezi hodinami, správné řazení úloh a příkladů; anglicky *connection*) a znalosti v nepředvídaných situacích (reakce na nečekané či neplánované události; anglicky *contingency*). Takto vytvořené schéma nazvali znalostní kvarteto (anglicky *knowledge quartet*).[13]

Rowland a kol. (2009) zmiňují i Shulmanovu poznatkovou bázi učitelství a přibližně vymezují vztah dimenzí znalostního kvarteta a (didaktických) znalostí obsahu: základní znalosti zahrnují většinu znalostí obsahu, znalosti reprezentací jsou většinou didaktickými znalostmi obsahu, znalosti souvislostí a znalosti v nepředvídaných situacích jsou kombinaci znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu.

V této práci se mj. budeme podrobněji věnovat čtvrté dimenzi znalostního kvarteta a její kategorii „reakce učitele na podněty žáků“. Tato kategorie se týká schopnosti učitele reagovat přesvědčivě, uvážlivě a zasvěceně na ústní či písemné nápady, návrhy a názory žáků.

1.3.3 Zkoumání didaktických znalostí obsahu

Vzhledem k rozmanitosti struktury didaktických znalostí obsahu je rozmanitý i repertoár přístupů, metod a technik uplatňovaných při jejich zkoumání. Výzkumná data jsou získávána prostřednictvím rozhovorů s učiteli o jejich výuce, pozorováním výuky, pozorováním diskuse několika učitelů nad tím, jak vyučovat určitému učivu, z pojmových map nebo komentovaných souhrnů učiva vytvořených učiteli, z učitelových příprav na výuku, z učitelových vyjádření ke zpracování učiva v učebnici, k učebním úlohám a jejich začleňování do výuky nebo ke kritickým situacím z výuky apod. (podrobný přehled výzkumných studií a používaných metod nabízí Janík a kol., 2008; Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013).

[13] Autoři znalostního kvarteta plánují modifikovat systém kategorií tak, aby odpovídal i výuce na druhém stupni základní školy (Rowland, Thwaites & Jared, 2016).

Z pohledu didaktických znalostí matematického obsahu si pozornost zaslouží sada studií provedených v rámci výzkumného projektu COACTIV (souhrn projektu nabízí např. Krauss, Baumert & Blum, 2008). V rámci projektu byly vytvořeny testy pro zjišťování znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu u učitelů matematiky na druhém stupni základní školy. Tyto testy byly předloženy učitelům, jejichž žáci se zúčastnili testování PISA. Bylo tak možné zkoumat vztahy mezi znalostmi učitelů a znalostmi jejich žáků.

Na projekt COACTIV navázalo mnoho dalších studií, jedna z nich se například zabývala vlivem učitelova vzdělání na jeho znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu (Kleickmann a kol., 2013). Tato studie poukazuje na to, že didaktické znalosti obsahu mohou učitelé získávat ze čtyř hlavních zdrojů: z vlastních zkušeností v roli žáka (např. pozorováním vlastních učitelů a spolužáků), v rámci učitelské profesní přípravy, z kurzů dalšího vzdělávání učitelů a z vlastních zkušeností v roli učitele. Pro lepší zmapování vlivu vzdělání na znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu tato studie porovnává prostřednictvím písemného testu znalosti budoucích učitelů matematiky v různých fázích univerzitní přípravy se znalostmi zkušených učitelů. U didaktických znalostí obsahu se zaměřuje na tři komponenty: (i) znalosti žákových poznávacích procesů, tedy strategií, miskoncepcí, možností a mezí žákova porozumění, možných obtíží, zdrojů možného neporozumění apod. (budeme je stručně označovat jako **znalosti žákova porozumění**); (ii) znalosti učebních úloh, tedy různých způsobů jejich řešení (včetně odůvodnění zvolených postupů), jejich potenciálu pro výuku žáků apod. (stručně **znalosti úloh**); (iii) znalosti obsahu potřebného pro realizaci vyučování, tedy znalosti různých reprezentací, modelů, vysvětlení, názorných ukázek, možností využití pomůcek, souvislostí mezi tématy apod. (stručně **znalosti obsahu pro vyučování**). Test byl sestaven z otevřených otázek, které mohou mít více správných odpovědí. Odpovědi na testové otázky byly bodovány a zpracovány kvantitativně. Příklady testových otázek pro jednotlivé komponenty didaktických znalostí obsahu uvádí tabulka 1.2.

Tabulka 1.2: Ukázky testových otázek k jednotlivým komponentám podle Kleickmanna a kol. (2013: 102, vlastní překlad, vynechána ilustrace k první otázce)

komponenta didaktických znalostí obsahu	**testová otázka**
znalosti žákova porozumění	Obsah rovnoběžníku můžeme vypočítat jako součin jeho základny a výšky. Načrtněte takový rovnoběžník, u kterého by žáci mohli mít s tímto způsobem výpočtu obsahu problémy.

znalosti úloh	Jak se změní obsah čtverce, pokud jeho stranu ztrojnásobíme? Svou odpověď zdůvodněte. Uveďte co nejvíce různých způsobů řešení této úlohy (a co nejvíce různých zdůvodnění).
znalosti obsahu pro vyučování	Žák říká: Nerozumím tomu, proč $(-1) \cdot (-1) = 1$. Uveďte co nejvíce různých způsobů, jak tuto záležitost žákovi vysvětlit.

Podobný přístup byl zvolen i ve studii Depaepe(ové) a kol. (2015), kteří mj. porovnávají (didaktické) znalosti obsahu v oblasti zlomků u budoucích učitelů na prvním a druhém stupni základní školy. Respondentům studie byly předloženy otevřené testové otázky a zkoumané didaktické znalosti obsahu byly rozděleny do dvou komponent: znalosti žákových miskoncepcí a znalosti výukových strategií, reprezentací a modelů. Odpovědi na testové otázky byly bodovány a zpracovány kvantitativně. Příklady testových otázek uvádí tabulka 1.3.

Tabulka 1.3: Ukázky testových otázek k jednotlivým komponentám podle Depaepe(ové) a kol. (2015: 87, vlastní překlad, zkráceno, obrázky vynechány)

komponenta didaktických znalostí obsahu	**testová otázka**
znalosti žákových miskoncepcí	Na obrázku jsou uvedena tři různá žákovská řešení. Pro každé řešení napište pravděpodobnou žákovu úvahu vedoucí k tomuto řešení a určete, zda je řešení správné.
znalosti výukových strategií, reprezentací a modelů	Během hodiny zaměřené na sčítání zlomků použil učitel koláčový model na znázornění součtu 4/7 + 5/7. Uveďte dva důvody, proč byste tento model v dané situaci nepoužili.

Zkoumání didaktických znalostí obsahu prostřednictvím testových otázek se věnovali také Lim-Teo(ová), Chua(ová), Cheang a Yeo (2007), kteří u budoucích učitelů prvního stupně základní školy porovnávali znalosti na začátku a na konci jejich dvouleté profesní přípravy. Lim-Teo(ová) a její kolegové se zaměřili na znalosti v oblasti přirozených čísel, racionálních čísel a geometrie, přičemž rozlišovali čtyři komponenty didaktických znalostí obsahu: porozumění matematickým strukturám a jejich vazbám, znalosti alternativních reprezentací pojmů za účelem jejich vysvětlení, dovednost analyzovat kognitivní nároky kladené matematickými úlohami na žáka a schopnost porozumět učebním obtížím žáků a žákovským miskoncepcím a umět s nimi vhodně pracovat. Odpovědi na testové otázky byly bodovány (podle zjištěné úrovně učitelova porozumění), zpracovány kvantitativně a opatřeny kvalitativními komentáři. Příklady testových otázek uvádí tabulka 1.4.

Tabulka 1.4: Ukázky testových otázek k jednotlivým komponentám podle Lim-Teo(ové) a kol. (2007: 257, vlastní překlad)

komponenta didaktických znalostí obsahu	**testová otázka**
porozumění matematickým strukturám a jejich vazbám	Žák tvrdí, že když se vynásobí dvě čísla, tak výsledek je vždy větší než každé z čísel. Jak na tohoto žáka zareagujete?
znalosti alternativních reprezentací pojmů za účelem jejich vysvětlení	Jednou z možností, jak ilustrovat dělení číslem 3 jako *spravedlivé rozdělování*, je prostřednictvím příběhu „Benny má 12 bobulí vína a rozdělil je spravedlivě mezi své tři syny. Kolik bobulí každý syn dostal?” Napište příběh, který ilustruje dělení jako *opakované odčítání*.
dovednost analyzovat kognitivní nároky úloh na žáka	Následující dvě úlohy si přečtěte, ale neřešte. (i) Ali prodává melouny, 3 jsou za 5 dolarů. Kolik by stálo 9 melounů? (ii) Leni prodává melouny, 3 jsou za 6 dolarů. Kolik by stálo 9 melounů? Myslíte, že pro žáky budou tyto úlohy *stejně obtížné*, nebo že jedna z úloh bude pro žáky *méně obtížná*? Pečlivě svou odpověď vysvětlete.
schopnost porozumět učebním obtížím žáků a vhodně s nimi pracovat	Tim má některé výsledky příkladů na sčítání správně, ale některé z těch nejméně obtížných má nesprávně. Tady je pět příkladů, jak je vypracoval. Pokud Tim udělá stejnou chybu i u *šestého příkladu*, jak to bude vypadat? $\begin{array}{r} 46 \\ +\ \ 3 \\ \hline 13 \end{array}$ $\begin{array}{r} 18 \\ +30 \\ \hline 48 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ +16 \\ \hline 15 \end{array}$ $\begin{array}{r} 42 \\ +56 \\ \hline 98 \end{array}$ $\begin{array}{r} 85 \\ +\ \ 6 \\ \hline 19 \end{array}$ $\begin{array}{r} 72 \\ +\ \ 5 \\ \hline \end{array}$ Navrhněte, jak by se dalo Timovi pomoci, aby počítal správně.

Typologie používaná Kleickmannem a jeho kolegy (2013) je podrobnější než typologie používané Grossman(ovou) (1990) či Depaepe(ovou) a jejími kolegy (2015), neboť se odděleně věnuje učebním úlohám. Typologie používaná Lim-Teo(ovou) a jejími kolegy (2007) je v mnohém podobná typologii používané Kleickmannem a kol. (2013), jen znalosti obsahu pro vyučování jsou v ní rozdělené na porozumění matematickým strukturám a znalosti reprezentací za účelem vysvětlení. Pro systematické zkoumání didaktických znalostí obsahu v kontextu výzkumné práce primárně založené na učebních úlohách jsme jako nejpřiléhavější vybrali typologii podle Kleickmanna a kol. (2013). Tato typologie jako jediná z výše uvedených explicitně zmiňuje porozumění strategiím žáků (tedy nejen chybným, ale i správným) i znalosti různých způsobů řešení úloh.

Kapitola 1.4: Porozumění vztahům a pojmům v matematice

Jednou z komponent didaktických znalostí obsahu v matematice podle Kleickmanna a kol. (2013; kapitola 1.3.3) jsou znalosti žákových poznávacích procesů, tedy znalosti různých strategií, miskoncepcí, možností a mezí žákova porozumění, možných obtíží, zdrojů možného neporozumění apod. S touto komponentou úzce souvisí i znalost, jak žákovy poznávací procesy podpořit a jak úspěšně rozvíjet žákovo porozumění vztahům a pojmům v matematice. Proto se nyní budeme věnovat tomu, jak je možné chápat charakter a míru porozumění žáků matematice (kapitola 1.4.1), jak je možné toto porozumění rozvíjet (kapitola 1.4.2) a jakých konkrétních podob může nabývat (kapitola 1.4.3). Na základě výsledků aktuálního výzkumu se zaměříme na možnosti rozvoje porozumění žáků matematice prostřednictvím porovnávání strategií a konceptů.

1.4.1 Procedurální a konceptuální znalosti

Charakter a míru porozumění žáků matematice popisují různé teoretické rámce, v této práci využijeme rámec rozlišující procedurální a konceptuální znalosti. Jedno z prvních vymezení procedurálních a konceptuálních znalostí poskytli Hiebert a Lefevre(ová) (1986), ale jejich pojetí se dočkalo kritiky a prošlo několika rekonceptualizacemi. Následující pojetí je tak kombinací vymezení konceptuálních znalostí podle Kilpatricka, Swafford(ové) a Findella (2001) a vymezení povrchních konceptuálních znalostí, procedurálních znalostí a hlubokých procedurálních znalostí podle Stara (2005, 2007).

Konceptuální znalosti (anglicky *conceptual knowledge*) v tomto pojetí spočívají v chápání matematických konceptů[14], operací a vztahů; jsou ze své podstaty hlubokými znalostmi bohatými na souvislosti. *Povrchní konceptuální znalosti* (anglicky *superficial conceptual knowledge*) spočívají v chápání matematických konceptů, operací a vztahů, které není hluboké ani bohaté na souvislosti. *Procedurální znalosti* (anglicky *procedural knowledge*) spočívají v ovládání procedur, tedy symbolických zápisů, pravidel a algoritmů potřebných pro vyřešení matematických úloh; jsou ze své podstaty povrchní v tom smyslu, že jsou chudé na souvislosti (opírají se o znalosti jednotlivých postupů, bez ohledu na možné spojitosti mezi různými postupy). *Hluboké procedurální znalosti* (anglicky *deep procedural knowledge*) spočívají v chápání procedur spojeném s porozuměním, flexibilitou a kritickým posuzováním; jsou tedy znalostmi bohatými na souvislosti. Někteří autoři místo o hlubokých procedurálních znalostech mluví o *procedurální flexibilitě* nebo *procedurální adaptivitě* (anglicky *procedural flexibility* nebo *procedural adaptivity*), které vymezují jako znalost různých alternativních

[14] *koncept*, anglicky *concept*; uvažováno v obou významech překladu: „**1** pojem **2** pojetí” (Mareš & Gavora, 1999: 37)

postupů řešení a dovednost vhodně a výhodně je vybírat a přizpůsobovat při řešení úloh (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009)[15]. V této práci budeme pro hluboké procedurální znalosti využívat pojmenování procedurální flexibilita.

1.4.2 Porovnávání strategií a konceptů

Ve své metastudii o vlivu vyučování na učení se žáků Hiebert a Grouws (2007) identifikovali dva způsoby podpory žákových poznávacích procesů v matematice, které vykazují empiricky doložené pozitivní výsledky: explicitní věnování pozornosti pojmům a vztahům (učitelem i žáky) a vynakládání úsilí žáků při práci s důležitými matematickými pojmy. Vondrová na jejich práci navázala provedením rešerše aktuálního výzkumu za účelem identifikace charakteristik výukových situací, jež mají potenciál vést k výuce matematiky s porozuměním (Vondrová, 2019: 27–50). Výsledky její rešerše v oblasti explicitního věnování pozornosti pojmům a vztahům mj. naznačují, že na porozumění žáků má pozitivní vliv výuka zahrnující prezentaci různých strategií řešení matematických úloh a jejich vzájemné porovnávání, tedy poukazování na jejich shody a rozdíly. Této problematice se budeme věnovat podrobněji.

Systematický výzkum na téma vzájemného porovnávání různých strategií řešení matematických úloh nabízí souhrnná studie Durkin(ové), Stara a Rittle(ové)-Johnson(ové) (2017). Jejich práce se teoreticky opírá o výsledky psychologického výzkumu, které opakovaně naznačují, že proces porovnávání má schopnost podpořit proces učení se v různých oblastech vědění[16], například díky tomu, že pomáhá rozpoznávat obecnější, abstraktnější vztahy mezi porovnávanými objekty (Kotovsky & Gentner, 1996; Kurtz, Boukrina & Gentner, 2013) a že zvýrazňuje jejich důležité společné vlastnosti (Gentner, 1989). Při porovnávání se využívají analogie (Pólya, 1954), analogické uvažování (Gentner & Smith, 2012) a na něm založené analogické učení (Richland & Simms, 2015). Analogie jsou podobnosti dvou nebo více objektů uvažované ve vztahu ke konkrétním konceptům[17], což znamená, že analogie

---

[15] Většina autorů považuje tyto dva pojmy za synonyma, jsou však autoři, kteří mezi nimi rozlišují: *procedurální flexibilitu* vztahují přednostně k hladkému přecházení (přepínání) mezi více strategiemi, kdežto *procedurální adaptivitu* vztahují k výběru jedné konkrétní vhodné strategie – viz (Verschaffel a kol., 2009). Na toto rozlišení nebudeme reflektovat.

[16] Podrobný přehled tohoto výzkumu nabízí Alfieri, Nokes-Malach a Schunn (2013).

[17] „*Analogie* je druhem podobnosti. Dalo by se říci, že to je podobnost na konkrétnější a koncepčnější úrovni. Přesto se můžeme vyjádřit trochu přesněji. Zdá se mi, že zásadní rozdíl mezi analogií a jinými druhy podobnosti je v úmyslech myslitele. Podobné objekty se v určitém aspektu vzájemně shodují. Pokud máte v úmyslu zredukovat ten aspekt, ve kterém se shodují, na konkrétní koncepty, považujete takové podobné objekty za *analogické*. Pokud se vám podaří dostat se k jasným konceptům, *objasnili* jste analogii." (Pólya, 1954: 13, vlastní překlad)
V původním znění: „*Analogy* is a sort of similarity. It is, we could say, similarity on a more definite and more conceptual level. Yet we can express ourselves a little more accurately. The essential difference between analogy and other kinds of similarity lies, it seems to me, in the intentions of the thinker. Similar objects agree

nepoukazuje jen na vnější projevy podobnosti, ale i jejich hlubší podstatu. Jednou z forem analogického učení je tzv. analogické kódování (anglicky *analogical encoding*; Gentner, Loewenstein & Thompson, 2003), při kterém žák porovnává příklady konceptů nebo strategií, mezi kterými existuje analogie, a díky tomu dokáže porozumět základním myšlenkovým strukturám, které mají tyto příklady společné. Ukazuje se, že při takové činnosti se žákovi zviditelňují a vyjasňují koncepty, a to i v případě, že je dříve neznal nebo jim rozuměl jen částečně (Gentner a kol., 2003).

Rittle(ová)-Johnson(ová), Star a Durkin(ová) v pěti navazujících kvantitativních studiích publikovaných v letech 2007 až 2012 (Rittle-Johnson & Star, 2007; Star & Rittle-Johnson, 2009; Rittle-Johnson & Star, 2009; Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2009; Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012) zkoumali různé způsoby, jak je možné porovnávání realizovat s žáky základní školy. Žáci pracovali s dvojicemi podobných úloh řešených stejným postupem, s dvojicemi odlišných úloh řešených stejným postupem nebo s dvojicemi různých postupů řešení pro stejnou úlohu. Tyto úlohy a postupy jim byly předkládány najednou (k přímému, simultánnímu porovnávání) nebo postupně ve dvou po sobě jdoucích dnech (s opožděným porovnáváním nebo bez porovnávání), počet dvojic předkládaných během jedné vyučovací hodiny se měnil. Výsledky studií ukázaly, že pro žáky nejvíce přínosný byl přístup, při kterém pracovali s dvojicemi různých postupů řešení jedné úlohy, jež jim byly předkládány k simultánnímu porovnávání. Pro žáky s malými předchozími znalostmi bylo přínosnější pracovat méně intenzivně – s menším množstvím dvojic během jedné vyučovací hodiny. Žáci, kteří opakovaně na pokyn realizovali přímé porovnávání postupů řešení, při následné výuce často sami porovnávali, aniž by k tomu byli vyzváni, a při řešení úloh častěji využívali alternativní strategie. Proces porovnávání různých postupů řešení pro stejné úlohy vedl k lepšímu konceptuálnímu porozumění a větší procedurální flexibilitě než porovnávání různých úloh se stejnými postupy; na procedurální porozumění mělo porovnávání postupů stejný vliv jako porovnávání úloh. Tedy, přestože byly porovnávány postupy (procedury), docházelo též k rozvoji konceptuálního porozumění. Žáci, kteří prováděli simultánní porovnávání postupů řešení, prokazovali vyšší procedurální flexibilitu než žáci, kteří prováděli postupná porovnávání nebo žádná, a to i o měsíc později a bez ohledu na úroveň jejich předchozích znalostí.

Durkin(ová) a Rittle(ová)-Johnson(ová) (2012) také realizovaly kvantitativní studii s žáky prvního stupně základní školy, ve které zjišťovaly, jestli je účinnější předkládat žákům k porovnávání dva správné postupy řešení, nebo jeden správný a jeden nesprávný; u každého

with each other in some aspect. If you intend to reduce the aspect in which they agree to definite concepts, you regard those similar objects as *analogous*. If you succeed in getting down to clear concepts, you have *clarified* the analogy.”

postupu bylo explicitně uvedeno, jestli je správný, nebo nesprávný. Výsledky studie ukázaly, že žáci se správné postupy a správné porozumění klíčovým pojmům lépe naučili porovnáváním správných postupů s nesprávnými, a to bez ohledu na úroveň jejich předchozích znalostí, tedy že se dokázali učit z chyb. Takové výsledky jsou v souladu s výzkumnými poznatky, že reflektování chyb mívá kladný vliv na znalosti žáků (Booth a kol., 2017; u nás se tématu učení se z chyb věnuje Hejný, 2004).

Loibl(ová) a Leuders ve svých kvantitativních výzkumných studiích (2018, 2019) nechávali žáky ve věku 10–12 let porovnávat dva správné postupy řešení jedné úlohy, ale některým žákům navíc předložili dva postupy nesprávné. Správná a nesprávná řešení byla odlišena barvou rámečku – správná řešení měla zelený rámeček, nesprávná červený. Předkládané nesprávné postupy se vztahovaly k typickým žákovským chybám ze vstupního testu realizovaného na začátku výzkumného šetření. Část žáků byla k porovnávání postupů vyzývána explicitně a část implicitně. Výsledky studií ukazují, že pro žáky nejpřínosnější byl přístup, při kterém žáci byli k porovnávání vyzýváni explicitně a pro toto porovnávání měli k dispozici správná i nesprávná řešení. Ale výrazně lepších výsledků bylo dosaženo u žáků, kteří ve vstupním testu udělali ty typické chyby, na kterých byly založeny porovnávané nesprávné postupy. Žákům, kteří ve vstupním testu udělali jiné chyby, porovnávání správného řešení s „cizím" nesprávným řešením v procesu učení příliš nepomohlo. Takové výsledky jsou v souladu s výzkumnými poznatky, že pokud žák porovnává vlastní chybný postup se správným postupem, je mnohem pravděpodobnější, že postřehne rozdíly mezi oběma postupy a bude je reflektovat (Smith, diSessa & Roschelle, 1993).

Porovnávání z trochu jiné perspektivy než předchozí výzkumná šetření zkoumala přehledová studie Alfieriho, Nokese-Malacha a Schunna (2013), která analyzovala výsledky 57 různých experimentů z výzkumných šetření o učení se porovnáváním. Její autoři se mj. zaměřili na dvě součásti porovnávání (poukazování na shody a poukazování na rozdíly) a zjistili, že největší pozitivní vliv na znalosti žáků vykazuje poukazování na shody, za ním následuje poukazování na shody i rozdíly, nejmenší vliv vykazuje poukazování na rozdíly. Některé studie navíc doporučují, aby poukazování na shody bylo intenzivní, tedy aby je žáci nejen specifikovali, ale pokusili se je i interpretovat (např. Gentner a kol., 2003), aby se tím podpořilo analogické uvažování žáků. Pokud je součástí procesu porovnávání společná diskuse nalezených shod a rozdílů, měly by být porovnávané strategie na očích po celou dobu diskuse (Richland & McDonough, 2010). Alfieri a kol. (2013) také zjistili, že z hlediska načasování mělo větší pozitivní vliv na znalosti žáků porovnávání, po kterém následovalo seznámení žáků s obecnými principy v pozadí porovnávaných konceptů a strategií, než to, ke kterému obecné principy nebyly sděleny nebo byly sděleny s předstihem. Stejně jako ve výzkumných šetřeních Rittle(ové)-Johnson(ové), Stara a Durkin(ové) mělo větší pozitivní vliv na znalosti žáků okamžité simultánní porovnávání než porovnávání opožděné.

Kromě strategií (úloh a jejich postupů řešení) je možné porovnávat i koncepty. V matematice může mít porovnávání konceptů podobu porovnávání několika příkladů téhož pojmu (např. desetinného čísla 1,2 a desetinného čísla 1,02), několika příkladů odlišných pojmů (zlomku 1/2 a desetinného čísla 1,2), nebo několika různých pojetí téhož pojmu (zlomku jako části celku a zlomku jako podílu dvou čísel). Porovnávání několika různých pojetí téhož pojmu nebývá v matematice tak časté jako v přírodovědných předmětech (Kurtz, Miao & Gentner, 2001). Porovnávání správných příkladů téhož pojmu s nesprávnými příklady (s tzv. protipříklady) je možné využít k budování znalosti pojmu: identifikovat, které atributy pojmu jsou pro žáky kritické, a tyto atributy pak jeden po druhém žákům představit prostřednictvím příkladu a protipříkladu (Guo & Pang, 2011).

V přehledové studii (Alfieri a kol., 2013) je také představen model procesu učení při simultánním porovnávání, který sestává z pěti kroků: (1) podání podnětu k porovnávání; (2) usilovné vyhledávání společných rysů; (3) uspořádání relevantních nálezů; (4) zobecnění relevantních nálezů, vytvoření jejich reprezentace; (5) budoucí analogická vyhledávání.

1.4.3 Žákovské představy o učivu

Máme-li žákům předkládat k porovnávání různé správné či nesprávné postupy řešení matematických úloh, různá správná či nesprávná pojetí matematických pojmů nebo jejich různé příklady a protipříklady, je nutné mít přehled o tom, jak takové alternativy k porovnávání mohou vypadat. Správné postupy, pojetí a příklady mohou být odvozeny z matematických a didaktických teorií a přizpůsobeny aktuálním záměrům učitele. U nesprávných alternativ je situace poněkud složitější. Žákovo neporozumění matematice může nabývat mnoha podob, které závisí na předchozím průběhu učení, dosavadních představách žáka o daném učivu (tzv. *prekonceptech*), na tom, jak žák uvažuje, co dovede, jak je naladěn, ale také na tom, jak obvykle pracuje s novými informacemi, které nejsou v souladu s jeho předchozími zkušenostmi a představami (Kalhous, Obst a kol., 2009).

Jistou představu o povaze porozumění či neporozumění matematice u konkrétních žáků můžeme získat například analýzou jejich výkonu, prostřednictvím didaktického testu, sledováním diskuse žáků, rozhovorem s žákem. Obecnější představu pak nabízejí výzkumná šetření o žákovských chybách a žákovských prekonceptech a z nich odvozené teorie (Radatz, 1979; VanLehn, 1982; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987; Confrey, 1990; Ryan & Williams, 2011; Vinner, 2014)[18].

[18] V češtině přehled výzkumu o chybách v matematice nabízí Pilous (2014).

Tyto teorie obvykle rozlišují chyby *triviální* (jednorázové, náhodné, nesystematické, které nejsou konceptuálně ukotvené[19]) a chyby *konceptuální* (opakované nebo systematické projevy prekonceptu, který není v souladu s aktuálním učivem[20]). Triviální chyby mohou být způsobené například nepozorností, úzkostí, chybějící nebo přílišnou motivací, chybným zapamatováním faktů (Ryan & Williams, 2011). Konceptuální chyby jsou přirozenou součástí procesu učení se matematickým konceptům (Vinner, 2014), mohou být hluboce zakořeněné, jejich zdroje mohou mít vlastní strukturu s vlastními logickými pravidly a vlastními významovými systémy a nemusí být snadné je zpochybnit (Bertrand, 1998).

Konceptuální chyby je možné třídit podle různých hledisek, například Radatz (1979) nabízí třídění podle způsobu práce s informacemi a rozlišuje chyby sémantické (související s rozdíly mezi jazykem matematiky a běžným jazykem), chyby vizuální (související se čtením vizuálních informací, tedy ikonických reprezentací, diagramů, schémat, grafů aj.), chyby související s nedostatečným zvládnutím prerekvizit (nezbytných dovedností, znalostí faktů a konceptů), chyby v transferu informací (projevující se uplatňováním nesprávných asociací či neadekvátního zobecňování, a to jak při interpretaci zadání úlohy, tak při interpretaci výsledků) a chyby související s používáním irrelevantních pravidel, algoritmů nebo postupů řešení.

Ryan(ová) a Williams (2011) nabízí třídění konceptuálních chyb podle komponent matematického uvažování a rozlišují chyby související s modelováním (projevující se vytvořením modelu situace, který není adekvátní), chyby související s aplikací tzv. prototypů (projevující se využitím reprezentanta matematického pojmu, u kterého jsou jako obecné vnímány i vlastnosti, které obecné nejsou), chyby související s přílišným zobecňováním (projevující se rozšiřováním poznatků na případy, u kterých nebyly ověřeny předpoklady) a chyby související s procepty[21] (projevující se nekompletní interpretací vztahů mezi procesy a objekty).

---

[19] VanLehn (1982) tyto náhodné, neúmyslné chyby nazývá „slips" (přeřeknutí, přebrepty); v jeho empirickém výzkumu s 895 žáky prvního stupně základní školy se takové chyby objevily u 20 % respondentů. Pokud byli respondenti testováni dva po sobě jdoucí dny, polovina z respondentů, kteří první den vyřešili všechny úlohy bez chyby, udělala nějakou triviální chybu druhý den.

[20] V některých odborných publikacích (mj. v těch zmiňovaných v kapitole 1.3: Janík a kol., 2007; Lim-Teo a kol., 2007; Kleickmann a kol., 2013; Depaepe a kol., 2015) se pro tyto prekoncepty používá označení *miskoncepce* nebo *miskoncepty*, které však mnoha autory není považováno za vhodné vzhledem k negativnímu zabarvení směrem k žákovi (Kalhous, Obst a kol., 2009; Fujii, 2014). Z důvodu zachování autentičnosti budeme v případech odvíjejících se od publikací (Janík a kol., 2007; Lim-Teo a kol., 2007; Kleickmann a kol., 2013; Depaepe a kol., 2015) nadále používat výraz *miskoncepce*.

[21] „*Elementární procept* je směsicí tří složek: *procesu*, který vytváří matematický *objekt*, a *symbolu*, který reprezentuje buď proces, nebo objekt." (Gray & Tall, 1994: 121, vlastní překlad)
V původním znění: „An *elementary procept* is the amalgam of three components: a *process* which produces a mathematical *object*, and a *symbol* which is used to represent either process or object."

Přesnější představu o povaze porozumění či neporozumění žáků matematice nabízejí výzkumná šetření zaměřená na konkrétní chyby u konkrétních matematických témat (např. u tématu zlomků: Tichá & Macháčková, 2006), nebo na kritická místa matematiky u konkrétních skupin žáků (např. u žáků druhého stupně základní školy: Rendl & Vondrová, 2014; Rendl a kol., 2013; Vondrová a kol., 2015). Pro profesní přípravu učitelů mají svůj význam i výzkumná šetření zaměřená na chyby budoucích učitelů u didakticky zaměřených témat (např. při tvoření úloh se zlomky: Tichá a Hošpesová, 2009).

V okruhu aritmetických témat kurikula prvního stupně základní školy (tedy těch témat, kterým se věnuje tato práce) bývají pro žáky i budoucí učitele problematické hlavně algoritmy písemného počítání (Ashlock, 2002, 2010), slovní úlohy (Novotná, 2000) a přechod od oboru přirozených čísel k oboru celých nebo racionálních čísel. S přirozenými čísly žáci na prvním stupni pracují intenzivně několik prvních let školní docházky, a tak mají tendenci do své pozdější práce s celými a s racionálními čísly neodůvodněně přenášet mnohé úvahy a postupy naučené v oboru přirozených čísel (anglicky tzv. *natural number bias*; Hansen, 2011; Alibali & Sidney, 2015). V teorii didaktických situací (Brousseau, 1997, česky 2012) spadají takové neodůvodněné transfery pod tzv. *překážky*, tedy znalosti, které jsou užitečné a pravdivé v nějakém kontextu (zde v oboru přirozených čísel) a žák je má v tomto kontextu ověřené mnoha zkušenostmi, ale v novém kontextu (zde obor racionálních čísel) tyto znalosti selhávají a dávají špatné výsledky. Překážky vyskytující se při přechodu od přirozených čísel k číslům racionálním jsou nezbytné pro správný proces postupného nabývání znalostí o číselných oborech, patří tedy mezi překážky s *epistemologickým původem* (Novotná, Pelantová, Hrabáková & Krátká, 2006).

Van Dooren, Lehtinen a Verschaffel (2015) rozlišují čtyři různé typy neodůvodněných transferů z oboru přirozených čísel do oboru racionálních čísel podle toho, jestli se týkají velikosti čísel (způsobu jejich porovnávání), operací (jejich vlastností a vlastností jejich výsledků), reprezentací (významů různých symbolických zápisů čísel a vztahů mezi nimi[22]), nebo hustoty (existence nekonečně mnoha racionálních čísel mezi libovolnými dvěma danými čísly jako protikladu k lineární diskrétní struktuře čísel přirozených). Na základě takových neodůvodněných transferů žáci při práci s desetinnými čísly považují za větší číslo, které má delší zápis, při práci s kmenovými zlomky považují za větší zlomek, který má větší jmenovatel, operaci násobení vnímají jako opakované sčítání a díky tomu usuzují, že násobení každé číslo zvětší, operaci dělení vnímají jako spravedlivé rozdělování a díky tomu usuzují, že tato operace každé číslo zmenší, zlomek vnímají jako symbolický zápis dvou čísel (čitatele a jmenovatele), desetinné číslo vnímají jako symbolický zápis dvou čísel (čísla před desetinnou čárkou a čísla za desetinnou čárkou), předpokládají, že racionální čísla mají každé

[22] Tuto tematiku podrobně zkoumají Hejný a Stehlíková (1999).

svého jednoznačně daného předchůdce a následovníka, a že mezi čísly a jejich (domnělými) následovníky neleží žádná racionální čísla. U některých jedinců takové mylné představy ovlivňují uvažování i v dospělosti (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2013).

Jak naznačil obsah kapitoly 1.4, žákovské představy o učivu mohou být rozmanité, založené na různých více či méně správných úvahách, a jejich správnému rozvoji může pomoci proces porovnávání. V další kapitole se budeme věnovat tomu, jak se s žákovskými představami o učivu mohou seznamovat budoucí učitelé a jak se mohou učit na ně reagovat.

Kapitola 1.5: Na obrázcích založené reprezentace školní praxe[23]

Jednou z možností, jak u budoucích učitelů rozvíjet jejich didaktické znalosti obsahu a připravovat je tak na jejich budoucí učitelskou praxi, je seznamovat je s různými reprezentacemi školní praxe: ukázkami reálné výuky, videozáznamy nebo písemnými záznamy výuky (Sowder, 2007; Janík a kol., 2009; Ponte & Chapman, 2016; Buchbinder & Kuntze, 2018). Pro budoucí učitele na počátku profesní přípravy mohou být takové reprezentace někdy příliš komplexní nebo nejasně interpretovatelné, a tak bývá vhodnější školní praxí rozložit na dílčí komponenty a zabývat se každou komponentou zvlášť (Grossman a kol., 2009).

Taková komponenta se může zaměřovat například na důsledky různého pedagogického jednání učitele v konkrétní výukové situaci, na práci učitele s různými didaktickými modely při vysvětlování konkrétního pojmu nebo při odůvodňování konkrétního postupu řešení, nebo na různá uvažování žáků v konkrétní výukové situaci a reakci učitele na ně. Při práci s komponentou, která je dílčí reprezentací školní praxe, dochází k soustředění budoucích učitelů pouze na ty záležitosti, kterých se komponenta týká. Například při práci s obsahově zaměřenou komponentou tak nedochází k zaměření pozornosti budoucích učitelů na neobsahové záležitosti. Toho bývá někdy obtížné dosáhnout při práci s komplexnějšími reprezentacemi (např. s videozáznamy reálné výuky) – hlavně v počátcích práce s nimi bývá často pozornost budoucích učitelů zaměřena spíše neobsahově: na způsob řízení třídy učitelem, metody výuky, využití času a pomůcek (Stehlíková, 2010; Vondrová & Žalská, 2012).

V této kapitole si představíme přehled forem, kterých mohou nabývat dílčí reprezentace školní praxe zaměřené na výukové situace svázané s matematickým obsahem (kapitola 1.5.1). Podrobněji se budeme zabývat reprezentacemi výukových situací, které jsou založené na obrázcích (kapitola 1.5.2).

1.5.1 Typologie reprezentací výukových situací

Na základě rešerše pedagogického výzkumu zaměřené na různé typy reprezentací výukových situací využívané v profesní přípravě učitelů jsme identifikovali tři hlavní hlediska, podle kterých je možné reprezentace výukových situací třídit: míra objektivní autenticity, aktéři výukové situace a způsob realizace.

Podle míry objektivní autenticity je možné reprezentace výukových situací roztřídit do čtyř kategorií:

[23] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a upraven.

- Skutečná výuka bez vnějšího vlivu, kdy učitel i žáci se chovají autenticky. Sem patří například záznam pořízený při náslechové nebo výstupové pedagogické praxi, virtuální hospitace (Slavík, Janík, Najvar, Švecová & Minaříková, 2011), ale také mikrovyučování (Svatoš, 1997) a vrstevnické mikrovyučování (Sucháček, 2016).
- Skutečná výuka s vnějším vlivem na přípravu učitele, kdy učitel postupuje podle předem připraveného scénáře, ale žáci se chovají autenticky. Sem patří například *lesson study* (Vondrová a kol., 2016).
- Simulovaná výuka, kdy učitel autenticky reaguje na žáky, kteří postupují podle předem připraveného scénáře. Sem patří například **Simulace podle Webela**[24], **Concept Cartoons**, nebo simulace rozhovoru učitele a jednoho žáka na základě předem vytvořeného profilu žáka (Shaughnessy & Boerst, 2018);
- Inscenovaná výuka, kdy učitel i žáci postupují podle předem připraveného scénáře. Sem patří například **Viněty podle Friesen(ové)**, které mohou mít podobu inscenovaného videozáznamu, písemného záznamu nebo obrázkového komiksu.

Zajímavou variantou vrstevnického mikrovyučování je tzv. hraní rolí (anglicky *role-playing*; Lajoie, 2018), kdy všichni účastníci mikrovyučování provádějí společně přípravu na vyučování a svou konkrétní roli ve vyučovací jednotce (učitel, žák) se dozvědí až těsně před začátkem vyučovací jednotky. V závislosti na charakteru přípravy provedené konkrétní mikroskupinou může tato výuka spadat pod libovolnou z výše uvedených kategorií.

Reprezentace výukových situací mohou znázorňovat různé skupiny aktérů nebo jejich výkony: učitele a celou třídu (např. virtuální hospitace), učitele a několik žáků (např. Viněty podle Friesen(ové), mikrovyučování), učitele a jednoho žáka (např. záznam rozhovoru učitele a žáka, Simulace podle Webela), učitele bez žáků (např. záznam učitelova výkladu, učitelova příprava hodiny, terénní poznámky), několik žáků bez učitele (např. záznam rozhovoru několika žáků, záznamy žákovských řešení vybrané úlohy, Concept Cartoons), jednoho žáka (např. záznam žákova názoru, záznam žákovského řešení úlohy). Mezi reprezentace znázorňující několik žáků bez učitele patří i fiktivní písemné scénáře obsahově zaměřených rozhovorů žáků, které na daná matematická témata tvoří sami budoucí učitelé. Takové scénáře využívají v profesní přípravě učitelů Zazkis(ová) a Zazkis (2014) nebo Buchbinder(ová) a Cook(ová) (2018). Spitzer(ová) a kol. (2011) pro rozvoj didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů využívají kartičky se simulovanými písemnými reakcemi žáků na vybrané matematické téma a kartičky s vypsanými konceptuálními a procedurálními cíli hypotetického učitele. Prostřednictvím přiřazování kartiček s reakcemi žáků ke kartičkám s cíli tak u budoucích učitelů rozvíjejí svou schopnost identifikovat projevy úspěšného zvládnutí cíle

[24] **Tučným písmem** vyznačené příklady reprezentací budou podrobně představeny v kapitole 1.5.2.

žákem. V takové reprezentaci nejsou znázorněny konkrétní výkony učitele, ale přesto je v ní učitel přítomen.

Podle způsobu realizace je možné rozlišovat sedm různých typů reprezentací výukových situací: reálná výuková situace, videozáznam, výuková situace zprostředkovaná virtuální realitou (např. virtuální třída; Stará, 2019), audiozáznam, textový záznam (např. přepis rozhovoru, písemný záznam řešení úlohy, záznam výkladu na tabuli), obrázkový záznam (např. Viněty podle Friesen(ové), Simulace podle Webela, Concept Cartoons) a specificky vytvořené multimediální prostředí kombinující různé výše uvedené formy (např. DiViWeb na http://didacticaviva.ped.muni.cz/). Přehled rozličných kombinovaných multimediálních prostředí založených na videozáznamech uvádí studie (Janík a kol., 2020 v tisku).

Nedávná zahraniční výzkumná šetření, která se zabývala reakcemi budoucích učitelů na různé formy reprezentující výukové situace (videozáznamy, inscenované videozáznamy, obrázkové komiksy, textové přepisy) neodhalila žádné podstatné rozdíly mezi jednotlivými formami z hlediska kvality reakcí respondentů ve vztahu k učitelovým znalostem (Herbst, Aaron & Erickson, 2013; Herbst & Kosko, 2013; Friesen & Kuntze, 2016). Nebyl ani odhalen žádný vliv zvolené formy na obtížnost úkolu. Navazující výzkumná šetření dokonce ukázala, že při vhodném zpracování mohou obrázky na respondenty působit více autenticky než videozáznamy (Friesen & Kuntze, 2018).

V dalším textu se zaměříme na reprezentace výukových situací, které jsou založené na obrázcích. Z praktického hlediska mají tyto obrázkové reprezentace mnoho výhod oproti reprezentacím založeným na videozáznamech: je s nimi spojena menší časová, technická a administrativní náročnost (při tvorbě i při jejich použití v profesní přípravě budoucích učitelů), je možné je vytvořit na libovolné téma a znázornit v nich libovolné názory hypotetických žáků nebo hypotetických učitelů, při jejich tvorbě nedochází k žádnému nakládání s osobními daty (není tedy potřeba získávat souhlasy rodičů) a je možné je použít i za jiným účelem, než za jakým původně vznikly (na rozdíl od videozáznamů, u kterých musí být konkrétní účel uveden ve formuláři, který rodiče podepisují, a k jinému účelu nesmí být použity).

1.5.2 Příklady na obrázcích založených reprezentací výukových situací

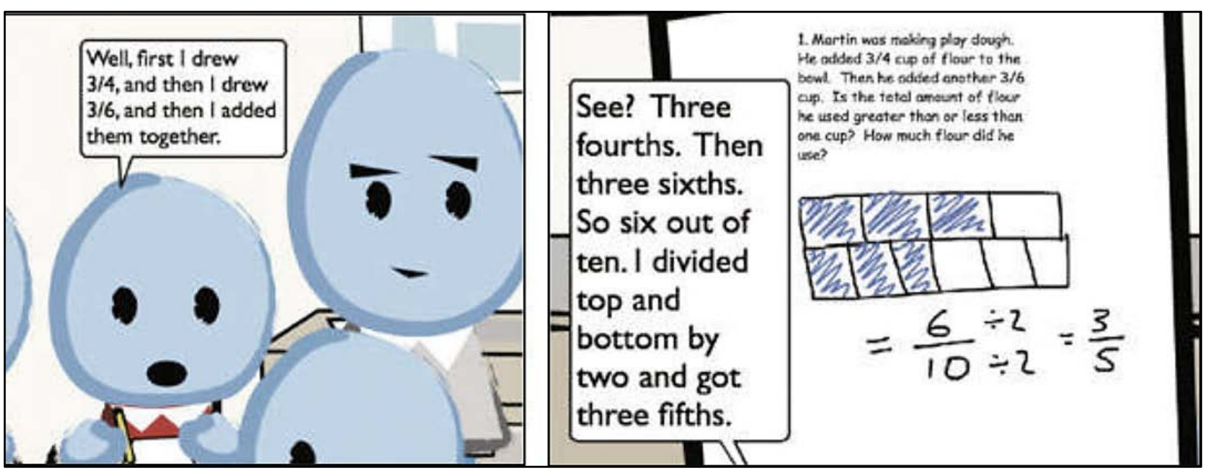
Simulace podle Webela

Reprezentace, která je v kapitole 1.5.1 označena jako Simulace podle Webela, má podobu on-line rozhovoru učitele a jednoho žáka v obrázkovém prostředí LessonSketch (Webel, Conner & Zhao, 2018).

Tato simulace je kinoautomatem v obrázkové podobě, ve kterém o výběru dalšího kroku rozhoduje respondent. Ten se prostřednictvím několika na sebe navazujících obrázků s rozhovorovými bublinami nejprve seznámí s výukovou situací (s názorem žáka, žákovským řešením učební úlohy apod.), a pak vybírá ze tří různých možností, jak by na danou situaci zareagoval, kdyby byl v roli učitele, konkrétně jakou doplňující otázku by žákovi položil. Poté, co respondent svůj výběr doplňující otázky písemně odůvodní, je seznámen s žákovou odpovědí na vybranou doplňující otázku a písemně reflektuje svůj výběr. Na závěr se respondent seznámí s odpověďmi žáka na jednu z doplňujících otázek, které si nevybral, a zpětně hodnotí svůj výběr (vybral by znovu stejně?). Proces může pokračovat dalším kolem – výběrem z dalších možností, jak v dané výukové situaci pokračovat v dotazování.

Prostředí simulace tak poskytuje budoucím učitelům příležitost vidět důsledky různého pedagogického jednání v jedné konkrétní výukové situaci a představuje jim v širším kontextu různé alternativy učitelova jednání.

Obrázek 1.1 představuje ukázku Webelova krátkého obrázkového komiksu znázorňujícího výukovou situaci na téma sčítání zlomků. Celý scénář simulace k této výukové situaci je uveden v tabulce 1.5, tři různé doplňující otázky (mezi kterými respondent v bodu 5 vybírá) jsou zde odlišeny barvou písma. Překlad textů z obrázku 1.1 je součástí tabulky 1.5, a to bodu 1 (zadání úlohy uvedené v sešitě na obrázku vpravo) a bodu 3 (obsah levé a pravé rozhovorové bubliny).



Obrázek 1.1: Obrázkový komiks s výukovou situací na téma sčítání zlomků; převzato z publikace (Webel, Conner & Zhao, 2018: 101)

Tabulka 1.5: Scénář simulace na téma sčítání zlomků (Webel, Conner & Zhao, 2018: 101), vlastní překlad

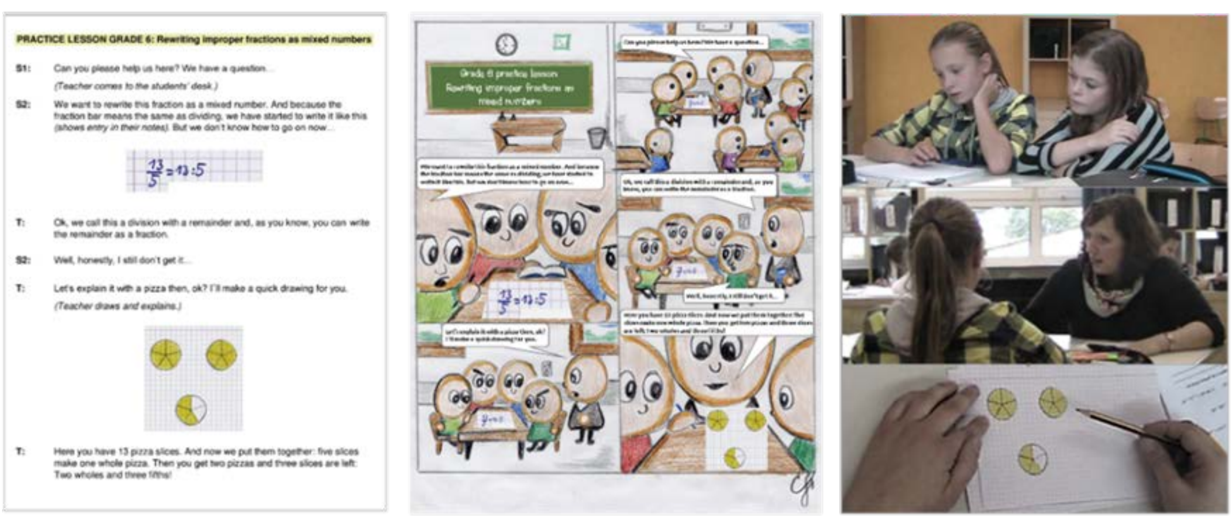
<table>
<tr><td colspan="3">1. Vyřeš matematickou úlohu
Martin vyrábí domácí modelínu. Do misky dal 3/4 hrnku mouky. Potom přidal další 3/6 hrnku.
Je celkové množství mouky, kterou použil, větší nebo menší než jeden hrnek? Kolik mouky použil?</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Rozeber učební cíle
Jaké důležité matematické myšlenky jsou vyzdviženy v této úloze?
Jaké miskoncepce může úloha odhalit?</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Prohlédni si výukovou epizodu a interpretuj ji
viz obrázek 1.1
levá bublina: No, nejdřív jsem namaloval 3/4, potom jsem namaloval 3/6, a pak je dal dohromady.
pravá bublina: Vidíš? Tři čtvrtiny. Potom tři šestiny. Takže šest z deseti. Vydělil jsem nahoře i dole dvěma a dostal tři pětiny.
v sešitě vpravo vedle bubliny je uvedeno zadání matematické úlohy z bodu 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Vytvoř otázku, kterou bys položil žákovi (a vysvětli)</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Vyber otázku, kterou položíš žákovi</td></tr>
<tr><td>„Víš, co je potřeba udělat se jmenovateli před tím, než budeš sčítat zlomky?”</td><td>„V úloze se říká, že máme tři čtvrtiny a tři šestiny. Jsou čtvrtiny to samé jako šestiny?”</td><td>„Můžeš mi říct víc o tom, kde na tvém obrázku jsou ty čtvrtiny, šestiny a desetiny?”</td></tr>
<tr><td>6. Odůvodni svůj výběr</td><td>6. Odůvodni svůj výběr</td><td>6. Odůvodni svůj výběr</td></tr>
<tr><td>7. Prohlédni si žákovu reakci
Brandon: „Jé, vynásobit je spolu! Šest krát čtyři je 24! Takže je to 24?”</td><td>7. Prohlédni si žákovu reakci
Brandon: „Ale ne…”
[se zmateným výrazem].
Učitel: „Pamatuj si, nemůžeš sčítat zlomky, pokud nejsou stejně velké.”
Brandon: „Dobře.”</td><td>7. Prohlédni si žákovu reakci
Brandon: „Tyhle větší kousky jsou čtvrtiny a tyhle menší jsou šestiny. Když si to pak prohlídnu celé, je tam deset kousků, takže to jsou desetiny?”</td></tr>
<tr><td>8. Reflektuj svůj výběr otázky</td><td>8. Reflektuj svůj výběr otázky</td><td>8. Reflektuj svůj výběr otázky</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Prohlédni si žákovu reakci na alternativní otázku
„Můžeš mi říct víc o tom, kde na tvém obrázku jsou ty čtvrtiny, šestiny a desetiny?”</td><td>9. Prohlédni si žákovu reakci na alternativní otázku
„V úloze se říká, že máme tři čtvrtiny a tři šestiny. Jsou čtvrtiny to samé jako šestiny?”</td></tr>
<tr><td colspan="3">10. Zhodnoť dvě otázky.
Při pohledu zpátky, jak bys porovnal druhou otázku se svou první otázkou? (vysvětli)</td></tr>
</table>

Viněty podle Friesen(ové)

Reprezentace v kapitole 1.5.1 označená jako Viněty podle Friesen(ové) může mít podobu textu s obrázky, sady na sebe navazujících obrázků s rozhovorovými bublinami, nebo krátkého inscenovaného videozáznamu (Friesen, 2017; Friesen & Kuntze, 2018). Prostřednictvím viněty se respondent seznámí s rozhovorem učitele a několika žáků, ve kterém učitel reaguje na otázku žáků, ale žáci jeho vysvětlení neporozumí, a tak jim učitel poskytne ještě jiné vysvětlení (založené na jiném didaktickém modelu). Některé didaktické modely využité ve vysvětleních se vhodně doplňují, jiné nikoliv. Respondenti se pak v písemném dotazníku vyjadřují k přiměřenosti reakce učitele a k didaktickým modelům použitým při vysvětlování: Korespondovaly zvolené modely s dotazem žáků? Navazovaly modely vhodně na sebe? Podpořila jejich kombinace porozumění žáků, nebo spíše způsobila větší zmatek?

Tímto způsobem prostředí vinět nabízí budoucím učitelům možnost vidět různá vysvětlení v jedné konkrétní výukové situaci a představuje jim různé alternativy didaktických modelů a jejich kombinace.

Autoři tohoto prostředí využili možnosti vytvořit vzdělávací viněty se stejným obsahem ve třech různých formách (text, obrázkový komiks, videozáznam) a porovnat reakce respondentů na tyto formy. Náhled na podobu všech tří forem pro stejný obsah znázorňuje obrázek 1.2, textová podoba jedné z vinět je podrobně představena na obrázku 1.3. Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.5.1, analýza reakcí respondentů neodhalila žádné podstatné rozdíly mezi jednotlivými formami ve vztahu k učitelovým znalostem (Friesen & Kuntze, 2018).



Obrázek 1.2: Náhled na tři různé podoby viněty na téma převod zlomku na smíšené číslo; obrázek převzat z publikace (Friesen & Kuntze, 2018: 119)

Krácení zlomků

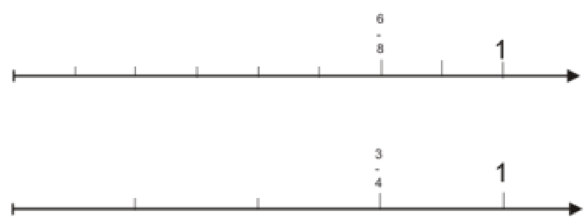
Ž1: Pane učiteli, můžete přijít k nám, my se chceme na něco zeptat...

(Učitel přichází k lavici.)

U: Jak vám mohu pomoci?

Ž2: My nerozumíme ... jak to, že $\frac{6}{8}$ a $\frac{3}{4}$ mohou být na stejném místě na číselné ose?

(Žáci ukazují na číselné osy v pracovním sešitě.)



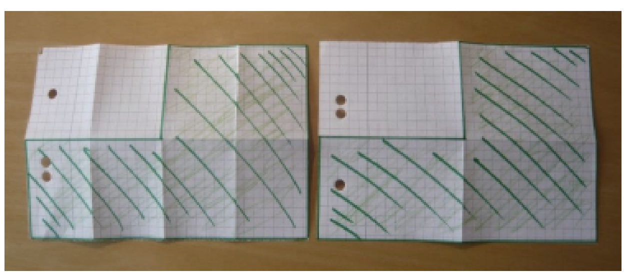
U: To je jednoduché: Když krátíme $\frac{6}{8}$ na $\frac{3}{4}$, tak čitatel a jmenovatel se vydělí stejným číslem, ale hodnota zlomku zůstává stejná.

Ž2: Já tomu pořád nerozumím...

Ž1: Nemělo by to ten výsledek zmenšit?

U: Já vám to ukážu, podívejte, přeložím tyhle papíry:

(Učitel přeloží nejprve papír vlevo, potom vpravo.)



Tady je šest osmin (*vybarvuje plochu na levém papíru*) a tady jsou tři čtvrtiny (*vybarvuje plochu na pravém papíru*).

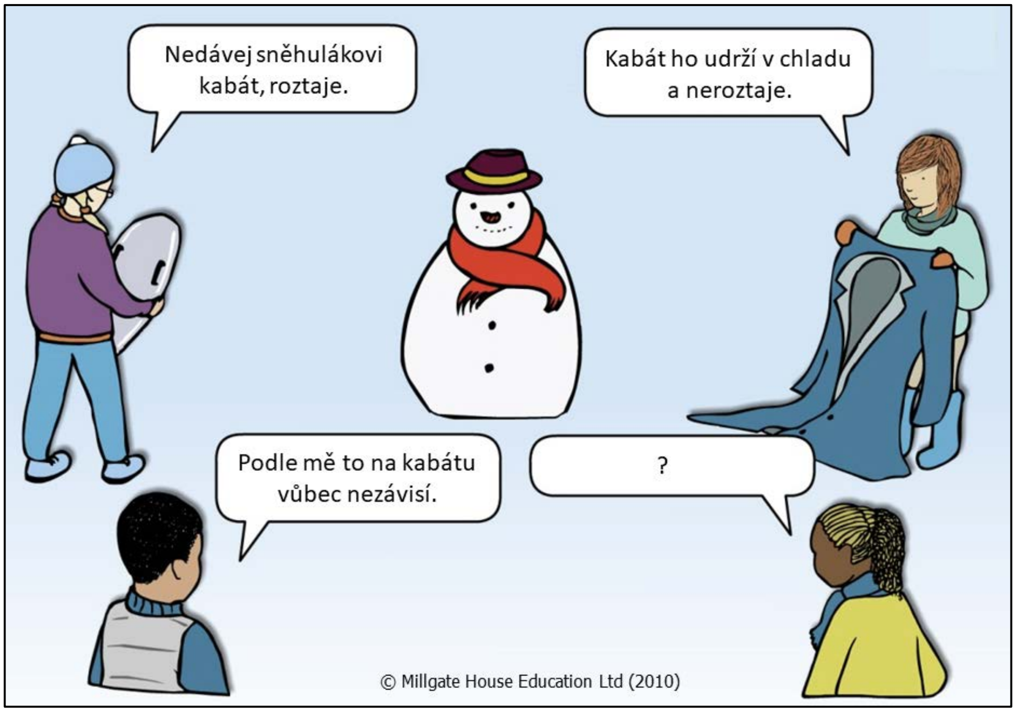
A když zlomky krátíme, tak se části zvětší, ale velikost plochy zůstává stejná.

Ž1, Ž2 = žáci U = učitel

Obrázek 1.3: Textová viněta na téma krácení zlomků; archiv M. Friesen(ové), vlastní překlad

Concept Cartoons

Reprezentace v kapitole 1.5.1 označená jako Concept Cartoons je založena na samostatném obrázku, který prostřednictvím bublinového rozhovoru představuje názory několika žáků na nějakou problémovou situaci vztahující se ke konkrétnímu učivu; učitel není na obrázku přítomen. Příklad takové reprezentace uvádí obrázek 1.4.



Obrázek 1.4: Concept Cartoon *Sněhulák*; obrázek převzat z elektronické publikace (Naylor & Keogh, 2010: č. 3_2), vlastní překlad

Tímto způsobem Concept Cartoons poskytují možnost vidět různé způsoby uvažování žáků v jedné konkrétní výukové situaci, představují různé alternativy žákova jednání.

V následujících kapitolách se budeme prostředí Concept Cartoons a různým možnostem jeho využití v profesní přípravě učitelů věnovat podrobněji. Concept Cartoons zatím nemají český název. Používat budeme jejich originální anglický název, bez skloňování, s rozlišováním jednotného a množného čísla stejně jako v angličtině: jednotné číslo *Concept Cartoon*, množné číslo *Concept Cartoons*.

Kapitola 1.6: Výuková pomůcka Concept Cartoons[25]

Výuková pomůcka zvaná *Concept Cartoons* vznikla na počátku devadesátých let 20. století ve Velké Británii. Jejími autory byli Brenda Keogh(ová) a Stuart Naylor, kteří si od pomůcky slibovali zvýšení motivace žáků a jejich lepší zapojení do výuky (Keogh & Naylor, 1993).

Název výukové pomůcky je poněkud nepřesný, anglické slovo *cartoon* se používá pro kreslený vtip nebo obrázkový seriál[26], ale Concept Cartoons nejsou vtipy ani seriály, jsou to samostatné, na sobě nezávislé kreslené obrázky (např. obrázek 1.4). Každý Concept Cartoon znázorňuje situaci vztahující se ke konkrétnímu učivu a několik dětí, které na tuto situaci reagují prostřednictvím bublinového rozhovoru. V bublinách se objevují různé alternativní názory na zobrazenou situaci; některé jsou správné, jiné nesprávné, u některých může být správnost nejasná nebo podmíněná určitými okolnostmi, které na obrázku nejsou uvedeny. Texty v bublinách jsou stručné, neformálně vyjádřené, používají jednoduchou slovní zásobu. Bublina vlevo nahoře bývá považována za „první", obvykle je v ní přesněji specifikován problém, který děti diskutují. Jedna z dolních bublin může obsahovat místo textu jen otazník jako zdůraznění toho, že mohou existovat i jiné názory, na obrázku dosud neuvedené.

I když jsou Concept Cartoons tvořeny jen jedním autonomním obrázkem, vztahuje se na ně mnohé z teorie komiksu[27]. Pro práci s Concept Cartoons jsou podnětné tři aspekty komiksu zmiňované Groensteenem (2005: 19–24): obraz jako dominantní složka vyprávění, fragmentární charakter výpovědi a důraz na očekávanou aktivní spolupráci čtenáře. Vazba na matematický obsah vyprávěný prostřednictvím Concept Cartoons pravděpodobně nedovolí vždy zachovat obraz jako dominantní složku vzhledem k textu, ale ne každý teoretik komiksu sdílí svůj názor na dominanci obrazu s Groensteenem. Například McCloud (1993), který vztah obrazu a textu v komiksech rozpracovává systematicky, rozlišuje sedm různých typů kombinací obrazu a textu, jež je možné při tvorbě komiksu úspěšně uplatnit (typ slovně dominantní, obrazově dominantní, se stejným sdělením textu i obrazu, aditivní, paralelní, montáž, se vzájemně závislým textem a obrazem), aby nakonec konstatoval, že „nejobvyklejším typem kombinace slovo/obraz je vzájemná závislost: slova a obrazy jdou ruku v ruce a snaží se vyjádřit myšlenku, kterou by samy nezvládly." (ibid: 155), přičemž

[25] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a upraven.

[26] **cartoon** n. **1** (satirical; esp political) karikatura, kreslený vtip; (sequence of drawings) obrázkový seriál, **2** also **animated c**. kreslený film, groteska (Fronek, 1999: 72)

[27] **comics** [komiks], **komiks** neskl. i –ů m mn. <a zkr.: comic strips> (pův. USA) obrázkové seriály s dobrodružnými n. komickými příběhy, event. doprovázené textem promluv, otiskované v časopisech (Petráčková, Kraus a kol., 2001: 131)

„v těch nejlepších komiksech jsou slova a obrázky jako dva tanečníci, kteří se střídají ve vedení toho druhého.” (ibid: 156)

Přehledovou studii obecně zaměřenou na vzdělávací komiksy v přírodovědném vzdělávání publikovali Trnová, Janko, Trna a Pešková (2016); jejich přehled různých komiksových forem zahrnuje i Concept Cartoons. Studie představuje SWOT analýzu využívání komiksů v přírodovědné výuce, některé její součásti lze vztáhnout i k matematickému vzdělávání: mezi silné stránky je zařazeno minimum textu, motivační potenciál a využívání analogií, mezi slabé stránky ne vždy kvalitně odborně a didakticky vytvořené komiksy a časté obtíže žáků při rozlišování podstatných a nepodstatných součástí obrazu a textu, mezi příležitosti je zařazena možná podpora kritického myšlení, představivosti a správného vyjadřování žáků, mezi hrozby nadměrné, neadekvátní či metodicky nesprávné zapojování komiksů do výuky a přílišné zkracování nebo zjednodušování textů, které může vést k nesprávným představám žáků.

1.6.1 Uplatnění ve výuce na základní škole

Jako výuková pomůcka jsou Concept Cartoons obvykle nabízeny žákům s otázkami „Co si myslíš ty?”, „Které děti na obrázku mají pravdu?”, „Proč?”, „Co můžeme doplnit do prázdné bubliny místo otazníku?” a žáci diskutují o odpovědích na tyto otázky.

Keogh(ová) a Naylor nejprve vytvářeli Concept Cartoons pro výuku přírodovědných předmětů na prvním a druhém stupni základních škol a publikovali několik sad takových obrázků (Naylor & Keogh, 2000; Naylor & Naylor, 2000a, 2000c, 2000d; Naylor, Moules & Horlock, 2014). Později spolupracovali s dalšími autory na sadách i pro další školní předměty: matematiku (Dabell, Keogh & Naylor, 2008), anglický jazyk (Turner, Smith, Keogh & Naylor, 2013), finanční výchovu (Jones, Evans & Storey, 2015), výchovu ke zdraví (Keogh, Naylor, Hankey & Williams, 2012). Vznikla i přírodovědná audiovizuální sada pro mateřské školy a mladší školní věk, ve které nejsou alternativní názory psané v bublinách, ale čtené a bohatě ilustrované (Naylor & Naylor, 2000b).

Již od počátku své práce s výukovou pomůckou Concept Cartoons spolupracovali její autoři intenzivně s učiteli na základních školách ve Velké Británii a pořádali pro ně kurzy dalšího vzdělávání zaměřené na představení myšlenky Concept Cartoons a na metodiku použití Concept Cartoons ve výuce. V letech následujících po kurzech pak účastníci kurzů prostřednictvím různých dotazníkových šetření průběžně poskytovali autorům zpětnou vazbu o pomůcce, o rekcích žáků na ni, o vlastních pocitech a názorech, o změnách, které se díky pomůcce v jejich výuce odehrály. Souhrn výsledků těchto výzkumných šetření uvádějí dva přehledové články (Keogh & Naylor, 1999; Naylor & Keogh, 2013). Výzkumná šetření potvrdila kladnou motivační roli pomůcky při výuce. Ukázalo se, že diskuse nad bublinami se zúčastňují i žáci, kteří se jinak zdráhají mluvit nebo projevit svůj názor. Dotazníková data nabízí jako jedno z možných vysvětlení fakt, že na rozdíl od běžné výuky, kdy bývají žáci posuzováni učitelem (a mohou mít obavy z případného selhání), při odpovědích na otázky „Které děti na obrázku mají pravdu?” a „Proč?” žáci sami posuzují názory někoho jiného. Takže pokud se později ukáže, že názor byl nesprávný, může žák svést odpovědnost za chybu na dítě z obrázku (Keogh & Naylor, 1999). Nesoulad v názorech, který panuje mezi dětmi na obrázku, zase povzbuzuje žáky k odpovědi na otázku „Co si myslíš ty?” a k přednesení vlastního názoru (Naylor, Keogh & Downing, 2007). V širším smyslu může být kladný motivační efekt obrázků Concept Cartoons důsledkem tzv. kognitivního nesouladu (Hatano, 1988), tedy žákova pocitu, že jeho současné porozumění situaci diskutované dětmi na obrázku je nedostatečné. Spouštěčem takového kognitivního nesouladu může podle Hatana být (a) setkání s nečekanou informací, která je v rozporu s dosavadními znalostmi žáka, (b) neschopnost žáka rozhodnout se mezi stejnou měrou přesvědčivými, ale protichůdnými názory, nebo (c) žákovo uvědomění si disharmonie panující mezi jemu dostupnými znalostmi z různých tematických okruhů, jež všechny se zobrazenou situací souvisí.

Veškerá autorská výzkumná šetření se týkala přírodovědného vzdělávání, ale Naylor a Keogh(ová) předpokládali, že výsledky z přírodovědných výzkumů jsou natolik obecného charakteru, že nezávisí na konkrétním vyučovacím předmětu[28].

Dalších zahraničních odborných publikací o Concept Cartoons jako výukové pomůcce není mnoho. Většina z nich se věnuje metodice využití této pomůcky při přírodovědném vzdělávání na základní škole (např. Reyes-Roncancio, Romero-Osma & Bustos-Velazco, 2019) nebo zkoumá porozumění žáků základní školy jednotlivým fyzikálním, biologickým či chemickým pojmům a vliv Concept Cartoons na toto porozumění (např. Chin & Teou, 2009; Atasoy & Ergin, 2017). Ojediněle lze nalézt publikace věnující se porozumění u dětí předškolního věku (např. Kallery, 2015) či u žáků střední školy (Kusumaningrum, Ashadi & Indriyanti, 2018). Zajímavé tematické vybočení nabízí studie věnující se profesnímu porozumění u optiků (Ozdemir, Coramik & Urek, 2020). Některé publikace porovnávají výkony žáků při výuce, která využívá Concept Cartoons, a při výuce, která je nevyužívá (např. Çil & Çepni, 2016; Pekel, 2019). Výsledky těchto výzkumných šetření informují o pozitivním vlivu Concept Cartoons na znalosti žáků.

V českém vzdělávacím prostředí představil Concept Cartoons patrně jako první Ed van den Berg, který se podělil o své zkušenosti s nimi ve výuce přírodovědných předmětů na základní a střední škole (van der Berg, 2013, 2014). Van den Berg a Kruit(ová) (2017) vypracovali metodiku pro učitele, jak Concept Cartoons využít pro plánování přírodovědných pokusů; tuto metodiku je možné využít již na prvním stupni základní školy. Přibližně ve stejnou dobu jako

[28] Stuart Naylor, osobní konzultace, 13. 5. 2014.

van den Berg představila českým učitelům obrázky Concept Cartoons také Hejnová (2014), která se od té doby soustavně věnuje zkoumání možností jejich využití ve výuce fyzikální části přírodovědy na prvním stupni základní školy a ve fyzice na druhém stupni základní školy. Hejnová využívá Concept Cartoons při konstruktivistické výuce ke zjišťování znalostí žáků o vybraných fyzikálních pojmech (Hejnová, 2016b, 2017; Hejnová & Hejna, 2018) a podobně jako van den Berg vytváří Concept Cartoons s náměty na jednoduché fyzikální pokusy (Hejnová, 2016a). Na Slovensku se možnostem využití Concept Cartoons na prvním stupni základní školy při zjišťování žákovských prekoncepcí a miskoncepcí o vybraných fyzikálních pojmech věnuje Minárechová (2014), která pro tento způsob využití úloh Concept Cartoons vytvořila metodickou příručku pro učitele (2017).

1.6.2 Uplatnění v profesní přípravě učitelů

V profesní přípravě učitelů je některými výzkumníky využívána původní metodika Keogh(ové) a Naylora pro ověřování přírodovědných znalostí, tedy budoucím učitelům je předložena sada několika obrázků Concept Cartoons a oni písemně odpovídají na otázky „Které děti na obrázku mají pravdu?”, „Proč?”. Vyhodnocení odpovědí je prováděno kvantitativně bodováním (Ormanci & Sasmaz-Oren, 2011) nebo kvalitativně obsahovou analýzou textu (Temel & Sen, 2019). Variantu s kvantitativním bodováním využívali také Keogh(ová), Naylor, Boo a Feasey(ová) (1999).

Jedinou autorce známou výjimkou v odborných zahraničních publikacích co do zaměření výzkumu a školního předmětu je publikace Depaepe(ové) a kol. (2018), jež popisuje empirickou studii, ve které matematické Concept Cartoons slouží jako didaktická pomůcka v profesní přípravě učitelů. Studie sleduje znalosti obsahu a didaktické znalosti obsahu v matematice u dvou skupin budoucích učitelů prvního stupně základní školy před a po semestrálním kurzu didaktiky matematiky. Jedna ze skupin během kurzu pravidelně pracuje s krátkými autentickými videozáznamy výuky a s Concept Cartoons, druhá nikoliv. Přestože před kurzem byly znalosti obou skupin srovnatelné, po kurzu vykazovala první skupina lepší znalosti obsahu i didaktické znalosti obsahu než skupina druhá. Podobné zaměření mají i dílčí studie publikované kolegy z projektu GA ČR zmiňovaného v úvodu: Hošpesová a Tichá (2017) se věnovaly tvoření obrázků Concept Cartoons budoucími učiteli prvního stupně základní školy, Roubíček (2017) diskutoval s učiteli v praxi několik geometricky zaměřených Concept Cartoons.

Není nám známa žádná významnější zahraniční odborná publikace o pedagogickém výzkumu, jenž by se věnoval zkoumání didaktických znalostí obsahu u učitelů nebo budoucích učitelů prostřednictvím Concept Cartoons.

1.6.3 Concept Cartoons jako prostředí pro porovnávání strategií a konceptů

Díky tomu, že Concept Cartoons nabízejí k posouzení různé alternativní názory žáků na situace související s matematickým obsahem, lze na ně pohlížet jako na prostředí, jež nabízí k porovnání různé strategie a koncepty (kapitola 1.4.2). Pokud jde o porovnávání strategií, tak souhrn relevantních výsledků výzkumu uvedený v kapitole 1.4.2 ukazuje, že

- k lepšímu konceptuálnímu porozumění a větší procedurální flexibilitě žáků vede simultánní porovnávání správných a nesprávných postupů řešení jedné úlohy, zvláště pokud jsou žáci k porovnávání explicitně vyzýváni;
- pokud je součástí procesu porovnávání společná diskuse nalezených shod a rozdílů, měly by být porovnávané strategie na očích po celou dobu diskuse;
- poukazování na shody a rozdíly by mělo být intenzivní, tedy žáci by se nalezené shody a rozdíly měli pokusit interpretovat.

V kontextu obrázků Concept Cartoons takovým požadavkům odpovídají obrázky s několika správnými a několika nesprávnými bublinami, opatřené doprovodnou otázkou explicitně vyzývající k porovnání bublin. Jelikož jsou u Concept Cartoons všechny bubliny umístěny na jednom obrázku, simultánnost a viditelnost je zaručena automaticky. Interpretace nalezených shod a rozdílů je u Concept Cartoons částečně iniciována požadavkem na odůvodnění (doprovodnou otázkou „Proč?”).

Formy podobné obrázkům Concept Cartoons se objevují v některých výzkumných šetřeních na téma porovnávání. Například Durkin(ová) a kol. (2017) k diagnostice znalostí žáků druhého stupně základní školy využívají obrázky podobné úlohám Concept Cartoons, ale jejich obrázky mají jen dvě bubliny a texty v bublinách nejsou stručné. Loibl(ová) a Leuders (2018, 2019) využívají ve výuce i k diagnostice kartičky s obrázkem a jednou bublinou a jako nejvhodnější vyhodnotili předkládání těchto kartiček žákům po čtyřech (dvě správné a dvě nesprávné). Jejich přístupu tedy odpovídají obrázky Concept Cartoons se dvěma správnými a dvěma nesprávnými bublinami. Ve výuce využívají k odlišení správnosti barevné rámečky kartiček (zelený rámeček pro správný postup, červený pro nesprávný), těm by u Concept Cartoons mohla odpovídat barevná ohraničení jednotlivých bublin.

Podobné formy se také objevují v některých odborných publikacích zaměřených na žákovské chyby. Například Ryan(ová) a Williams (2011) jako formu práce s chybami žáků nabízejí diskusi žáků. Pro podporu této diskuse a pro odstranění stresu z opakovaného nabízení chybných názorů v diskusi u některých žáků nabízejí tzv. *discussion prompt sheets* (listy s pobídkou k diskusi). Tyto diskusní listy obsahují 6–8 různých bublin s názory žáků, přičemž 1–2 názory jsou obvykle správné, ostatní nesprávné. Nesprávné názory v bublinách byly vytvořeny na základě rozsáhlého výzkumného šetření o chybách, které Ryan(ová) a Williams realizovali.

Správné a nesprávné alternativy do bublin obrázků Concept Cartoons je možné tvořit na základě výzkumných šetření o uvažování žáků v matematice (kapitola 1.4.3) a vybírat či upravovat je s ohledem na aktuální záměry učitele. Výsledky výzkumných šetření z kapitoly 1.4.2 navíc ukazují, že žáci se správné postupy a správné porozumění klíčovým pojmům lépe naučí, pokud porovnávají správné postupy s vlastním chybným postupem, a tak je vhodné nesprávné alternativy do bublin umisťovat rozmanitě, aby každý z žáků měl aspoň občas možnost diskutovat bublinu, jež je podobná jeho vlastnímu chybnému uvažování.

V některých reprezentacích výukových situací je přítomen učitel (např. viněty, simulace; kapitola 1.5.2). Při jejich tvorbě je tak nutné mít přehled o různých způsobech uvažování učitelů, protože úvahy učitelů jsou v reprezentacích přímo vypsány (nebo jinak znázorněny). U obrázků Concept Cartoons učitel není přítomen, takže ukázky uvažování učitelů se v nich nevyskytují. Naopak je možné obrázky Concept Cartoons využít k získání přehledu o různých způsobech uvažování učitelů, neboť při vhodné podobě prostředí Concept Cartoons mohou ukázky takového uvažování nabídnout sami respondenti – budoucí učitelé, kteří s Concept Cartoons pracují. Možnostem takového využití Concept Cartoons se věnují kapitoly 3.1, 4.2 a 5.1.

KAPITOLA 2: Empirický rámec

Základem empirické části habilitační práce se stal experimentální dvousemestrální povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, který jsme zrealizovali v rámci výzkumného projektu GA ČR *Zkvalitňování znalostí matematického obsahu u budoucích učitelů 1. stupně prostřednictvím badatelsky orientované výuky*. Tento kurz byl připravený a vedený tak, aby v jeho průběhu docházelo k systematickému uplatňování badatelsky orientované výuky; podrobnosti o přípravě a průběhu experimentálního kurzu představuje kapitola 2.1.

Souběžně s experimentálním kurzem bylo naplánováno empirické výzkumné šetření exploračního kvalitativního designu. Toto výzkumné šetření mělo za cíl zkoumat vliv aktivní účasti na experimentálním kurzu na znalosti matematického obsahu u jeho účastníků. Protože výzkumné šetření bylo exploračního charakteru, tak znalosti účastníků kurzu jsme zkoumali šířeji (kromě znalostí matematického obsahu jsme se věnovali i didaktickým znalostem obsahu v matematice), pro zkoumání znalostí účastníků kurzu jsme využili i nástroje, které nejsou běžné (konkrétně obrázky Concept Cartoons) a podnětná průběžná zjištění jsme dále rozpracovávali prostřednictvím navazujících výzkumných šetření.

Jako výsledný produkt tohoto snažení vznikla sada osmi na sebe navazujících výzkumných šetření, která zkoumají různé aspekty znalostí budoucích učitelů v matematice a různé způsoby, jak je možné využít prostředí Concept Cartoons pro diagnostiku a rozvoj těchto znalostí. Souhrnný přehled těchto výzkumných šetření uvádí kapitola 2.2. Podrobné popisy jednotlivých výzkumných šetření jsou obsahem kapitol 3 až 5.

Kapitola 2.1: Experimentální kurz[29]

Jak již bylo zmíněno v úvodu, naplánovali jsme s kolegy v rámci výzkumného projektu prostor pro systematickou realizaci badatelsky orientované výuky matematiky dlouhodobějšího charakteru a pro souběžná empirická výzkumná šetření. Pro tyto účely jsme vybrali povinný kurz aritmetiky pro studenty druhého ročníku pětiletého magisterského oboru učitelství pro první stupeň základní školy. Tento kurz je dvousemestrální, v týdenním rozsahu 1 hodina přednášky a 2 hodiny semináře; celkem se tedy jedná o 81 hodin výuky. Na semináře jsou studenti obvykle rozvrhově rozděleni do dvou skupin. Obsahem kurzu jsou témata „úvod do matematické logiky”, „úvod do teorie množin” a „číselné obory”. Autorka této práce celý kurz vyučovala a jeho účastníky zkoušela každoročně od akademického roku 2010/11.

[29] Text v této kapitole byl převzat z publikací (Samková, 2016a, 2018c) a upraven.

Pro potřeby výzkumného projektu jsme pro akademický rok 2014/15 obvyklý průběh kurzu upravili tak, aby vyhovoval požadavkům na badatelsky orientovanou výuku v rozsahu nasměrovaného bádání, při kterém učitel formuluje otázky a žáci sami navrhují postup řešení, realizují ho a diskutují výsledky. Důvodem pro výběr nasměrovaného bádání byly výsledky studií (Hattie, 2009; Minner a kol., 2010; Bruder & Prescott, 2013; Jiang & McComas, 2015), které indikují, že tato úroveň bádání mívá největší pozitivní vliv na znalosti žáků. Protože se jedná o povinný kurz, který směřuje ke státní závěrečné zkoušce, musel při úpravě zůstat plně zachován obsah kurzu a způsob jeho hodnocení (typy úloh ve dvou průběžných písemných testech a jejich bodování, seznam otázek k ústní části zkoušky a hodnocení odpovědí na ně).

Na základě studia odborné literatury o badatelsky orientované výuce a o didaktických rámcích jí blízkých, vlastních zkušeností z mezinárodních workshopů o badatelsky orientované výuce navštěvovaných v letech 2011–2013, zkušeností s realizací jednotlivých badatelsky orientovaných úloh na seminářích pro učitele a budoucí učitele v letech 2011–2013 a na základě rozhovorů se zkušenými učiteli, kteří takové úlohy zkoušeli ve vlastní praxi, jsme vytvořili inovovaný plán kurzu, kompletně přepracovali jeho přednášky a sestavili širší předvýběr badatelských úloh vhodných pro jeho semináře. Vybrané badatelské úlohy jsme v akademickém roce 2013/14 jednotlivě pilotovali na volitelných seminářích pro budoucí učitele z vyšších studijních ročníků. Při pilotážích se jako důležité hledisko pro přístup k badatelským úlohám (jejich řazení, vlastní realizace, hodnocení, odhad časové dotace aj.) ukázala otevřenost úloh a její charakter, tj. kolik součástí úlohy je otevřených a které to jsou.

V souladu s Deweyovým (1938) vymezením bádání má badatelská úloha obsahovat něco pro řešitele neznámého, co je vnímáno jako podnětné nebo zajímavé. Na základě zkušeností s řešením badatelských úloh ale toto neznámé nesmí být příliš vzdáleno od věcí řešitelovi známých, protože pouze známá fakta a jejich souvislosti mohou vést řešitele k domněnkám a úsudkům, které mu umožňují hledat cestu k řešení úlohy. Proto se hlavním krokem při přípravě nové podoby přednášek stal výběr učiva, které při řešení badatelských úloh na seminářích bude hrát roli té „známé” části. Jednalo se hlavně o nezbytná vymezení pojmů (např. u tématu „úvod do teorie množin” se jednalo o pojmy množina, prvek množiny, podmnožina, prázdná množina, sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk, Vennův diagram) a o důkazy důležitých tvrzení, jejichž dokazování formou objevování by pro účastníky kurzu bylo příliš obtížné (u tématu „úvod do teorie množin” žádný takový důkaz nebyl, ale např. u tématu „číselné obory” to byl důkaz rovnosti množiny všech zlomků a množiny všech desetinných čísel s ukončeným nebo periodickým rozvojem). Tato nezbytná vymezení a tvrzení vytvořila nový obsah přednášek.

V první polovině kurzu byly badatelské úlohy na seminářích zadávány hlavně ve formě otevřených slovních úloh obsahově úzce svázaných s matematickým obsahem na úrovni kurikula pro první stupeň základní školy, tedy s tím matematickým obsahem, který budou účastníci kurzu v budoucnu sami učit. Při řešení těchto úloh nebylo povoleno využívat aparát mimo kurikulum pro první stupeň základní školy (neznámé, rovnice, nerovnice). Ukázky takových otevřených slovních úloh s údaji o povaze jejich otevřenosti uvádí tabulka 2.1. Otevřený přístup jsme účastníkům kurzu nejprve představili při řešení slovních úloh s jednoznačně uchopitelnou vstupní situací a jedním řešením (tj. úloh, u kterých zadání ani výsledek nejsou otevřené). Tyto úlohy jsme vybírali z učebnic pro první stupeň základní školy a dle potřeby je upravovali – měnili nebo uvolňovali jsme jejich parametry, zvyšovali jejich obtížnost, obohacovali je o nové otázky. U každé úlohy byli účastníci vyzýváni k hledání různých postupů řešení a k zaznamenávání *všech* těchto postupů na tabuli. Některé úlohy jsme dále rozvíjeli: měnili nebo uvolňovali jsme jejich parametry, zvyšovali jejich obtížnost, obohacovali je o nové otázky (tj. poukazovali jsme na to, že další cesta je otevřená). Přibližně po dvou měsících takové výuky jsme na semináře začali zařazovat i slovní úlohy s otevřeným zadáním nebo s otevřeným výsledkem. Tyto úlohy účastníci nejprve řešili samostatně nebo v malých skupinkách, a poté všichni společně na tabuli představovali své postupy a nalezená řešení, diskutovali a obhajovali je, hledali mezi nimi souvislosti.

Tabulka 2.1: Ukázky zadání otevřených slovních úloh a charakteristiky jejich otevřenosti

Znění úlohy	Otevřenost úlohy
Jirka měl o 7 nálepek na kola více než Lucie. Vsadili se o 3 nálepky. Jirka sázku prohrál. Kdo z nich měl pak více nálepek a o kolik? (Hošpesová, Divíšek & Kuřina, 2000: 14)	*Zadání není otevřené*; *postup řešení je otevřený*, například je možné úlohu řešit relativně z pohledu změn, nebo Lucii přidělit konkrétní počet nálepek; *výsledek není otevřený*; *další cesta je otevřená*, například můžeme změnit počet nálepek v sázce (na 4, na 8), ptát se na počet samolepek, které Jirka a Lucie mohli mít před sázkou.
Dvacet sedm žáků jelo na výlet. Za jízdné zaplatil každý z nich 32 Kč, za vstupné na hrad 45 Kč a do zoo 60 Kč. Kolik korun vybrala paní učitelka od všech žáků? (Blažková, Matoušková & Vaňurová, 2018: 9)	*Zadání není otevřené*; *postup řešení je otevřený*, například je možné nejprve určit, kolik byly náklady jednoho žáka, a ty pak vynásobit počtem žáků; nebo je možné náklady jednoho žáka vůbec neurčovat a místo toho sečíst celkové náklady za všechny žáky za jízdné, celkové náklady za všechny žáky na hradě a celkové náklady za všechny žáky v zoo; *výsledek není otevřený*; *další cesta je otevřená*, například můžeme uvažovat, že žáci platili před výletem zálohu 200 Kč a ptát se, kolik paní učitelka každému vrátí, nebo že platili zálohu 100 Kč a ptát se, kolik musí doplatit.

Z 25 dětí ve třídě umí 18 lyžovat a 13 bruslit. Kolik dětí ovládá oba sporty?[30]	*Zadání není otevřené*; *postup řešení je otevřený*, úlohu mohu řešit úvahou, využít tabulku nebo Vennovy diagramy; *výsledek je otevřený*, úloha má 8 řešení (počet dětí, které neumí lyžovat ani bruslit, může být 0, 1, 2,… 7); *další cesta je otevřená*, můžeme například změnit počet dětí ve třídě na 33, nebo do zadání přidat tvrzení „každé dítě umí bruslit nebo lyžovat”.
Anička bydlí 2 km od školy. Kolik metrů asi ujde Anička denně cestou do školy a ze školy? Kolik asi udělá Anička kroků za týden? Na 1 metr musí udělat 2 kroky. (Divíšek, Hošpesová & Kuřina, 1999: 36)	*Zadání je otevřené*, není jasné, zda vzdálenost 2 km je myšlena vzdušnou čarou, nebo po cestě, kterou Anička chodí; také není zcela jasné, jestli „za týden” znamená „od pondělí do pátku”, nebo nějaký jiný rozsah dnů; *postup řešení je otevřený*, například převod z kilometrů na kroky je možné provést na začátku, nebo na konci výpočtu; mohu počítat cesty, nebo dny; *výsledek je otevřený*, záleží na interpretaci zadání; *další cesta je otevřená*, můžeme se například ptát, kolik kroků udělá Anička za měsíc, za školní rok, za kalendářní rok.
V stromkové školce mají čtyři záhony sazenic borovice. Na každém záhonu je pět řad s 240 sazenicemi. Kolik sazenic borovice mají ve školce? (Divíšek, Hošpesová & Kuřina, 1999: 71)	*Zadání je otevřené*, není jasné, jestli „je 5 řad a v nich celkem 240 sazenic“, nebo „je 5 řad, v každé z nich 240 sazenic“; *postup řešení je otevřený*, záleží na interpretaci zadání; navíc u druhé interpretace mohu určit počet všech řad, nebo ho vůbec neurčovat; *výsledek je otevřený*, záleží na interpretaci zadání; *další cesta je otevřená*, můžeme se například ptát, kolik záhonů by bylo potřeba na 10 tisíc sazenic, nebo přidat do zadání vzdálenost sazenic v řádku a vzdálenost řádků a ptát se na rozměry záhonu.

Průběžně (v druhé polovině kurzu častěji) k otevřeným slovním úlohám přibývaly i otevřené aplikační úlohy (např. s požadavkem využití známých pojmů pro objevení neznámého postupu řešení; viz tabulka 2.2) a matematické úlohy, jež od řešitelů vyžadovaly hledání vlastností matematických objektů a jejich zobecňování (viz tabulka 2.3 a 2.4). Tyto úlohy účastníci řešili v malých skupinkách, a poté opět na tabuli představovali své postupy a nalezená řešení, diskutovali a obhajovali je a hledali mezi nimi souvislosti.

[30] Tato úloha vznikla modifikací úlohy „26 dětí ve třídě umí lyžovat nebo bruslit. 18 dětí umí lyžovat a 13 dětí bruslit. Kolik dětí umí lyžovat i bruslit?” (Divíšek, Hošpesová & Kuřina, 1999: 30). Počet 26 byl změněn na 25 z toho důvodu, aby číslo 13 nemělo v rámci postupu řešení více významů (počet dětí, které umí bruslit, vs. počet dětí, které umí lyžovat, ale neumí bruslit). Odstraněním informace o tom, kolik dětí ve třídě umí lyžovat nebo bruslit, vznikla z úlohy s jedním řešením úloha s více řešeními.

Tabulka 2.2: Ukázka zadání aplikační úlohy s otevřeným postupem, téma Vennovy diagramy

Je možné využít Vennovy diagramy při řešení následujících dvou slovních úloh? Jak?
Některé děti z páté třídy jely o podzimních prázdninách na výlet a navštívily Prahu, Brno nebo Olomouc. Na výlet jeli 3 kluci, do každého města jeden. Jitka jela do Brna a do Olomouce, Vlasta do Brna a do Prahy, Eva se Sylvou jely do Prahy a do Olomouce. Dana a Alena navštívily všechna 3 města. Kolik dětí bylo v Brně? Kolik v Praze nebo v Olomouci? Kolik dětí bylo v Brně, ale nebylo v Praze?
Z 25 dětí ve třídě má 12 doma psa a 9 kočku, přičemž 5 dětí má psa i kočku. Kolik dětí nemá psa ani kočku?

Tabulka 2.3: Ukázka zadání matematické úlohy vyžadující zobecňování, téma sudá a lichá čísla v nedesítkových soustavách

Která z následujících čísel jsou sudá? $(103)_4$ $(112)_3$ $(111)_2$ $(111)_3$ $(102)_5$ $(121)_3$ $(120)_4$ V desítkové soustavě poznáme sudé číslo podle toho, že na místě jednotek má sudou číslici. Platí to i v nedesítkových soustavách? Ve čtyřkové? V trojkové? Zformulujte kritérium, podle kterého v libovolné nedesítkové soustavě poznáme sudá čísla.
Zadáno na semináři o týden později: Vaši kolegové minulý týden navrhli následující nesprávná znění kritérií pro sudá čísla v soustavách o lichém základu: - Poslední číslice je lichá. - Na jakémkoliv místě v čísle je sudá číslice. - Poslední číslice je sudá a předposlední číslice je lichá. - Poslední nebo předposlední číslice je sudá. Ke každému návrhu nalezněte protipříklad, tedy číslo, které kritérium splňuje, ale je liché.

Tabulka 2.4: Ukázka zadání matematické úlohy vyžadující zobecňování, téma prvočísla a operace s prvočísly

Vysvětli, co to je prvočíslo: Napiš 5 čísel, která jsou prvočísla: Kolik existuje sudých prvočísel? Napiš 5 čísel, která nejsou prvočísla: Je součet prvočísel vždy prvočíslo? Svou odpověď zdůvodni:

Napiš dvě prvočísla, jejichž součet není prvočíslo:
    a ještě další dvě:
    a další:
    Dají se takové dvojice prvočísel nějak charakterizovat? Mají něco společného?
Napiš dvě prvočísla, jejichž součet je prvočíslo:
    a ještě další dvě:
    a další:
    Dají se takové dvojice prvočísel nějak charakterizovat? Mají něco společného?
Je součin prvočísel vždy prvočíslo?
Svou odpověď zdůvodni:

Z hlediska vztahu ke „známé” části učiva byly otevřené úlohy na seminářích čtyř různých typů: úlohy uplatňující nedávno nabyté poznatky v neznámých kontextech (např. hledání neznámých metod řešení), úlohy nabízející nový pohled na dříve probíraná a účastníky kurzu již osvojená témata (propojení témat s jejich praktickými aplikacemi, sloučení více různých témat do jedné úlohy apod.), úlohy připravující na zcela nové téma (v těchto případech seminář předcházel přednášce) a úlohy aktuálně reagující na obtíž týkající se nedávno nabytých poznatků, se kterou se účastníci kurzu nebyli schopni na semináři vypořádat (např. poskytnutím nového pohledu na tyto poznatky a na jejich souvislosti s jinými již osvojenými poznatky).

Výše popsaným způsobem byla prostřednictvím systematického uplatňování otevřeného přístupu do kurzu implementována badatelsky orientovaná výuka. Účastníci kurzu opakovaně zažívali proces sekvenčního i simultánního představování a porovnávání konceptů a strategií, správných i chybných. Důraz byl kladen na hledání souvislostí, tedy shod mezi porovnávanými koncepty a strategiemi.

V akademickém roce 2014/15 si povinný kurz aritmetiky zapsalo 35 budoucích učitelů, ale tři z nich předčasně ukončili nebo přerušili studium, a tak celý kurz absolvovali 32 účastníci. Podobně jako v letech předcházejících i v tomto akademickém roce byli účastníci kurzu na semináře rozvrhově rozděleni do dvou skupin. Celý kurz (přednášky i obě skupiny seminářů) vedla autorka této práce.

Kapitola 2.2: Přehled realizovaného empirického výzkumu

Tato práce zahrnuje osm na sebe navazujících empirických studií, které se navzájem liší nástroji pro sběr dat (slovní úlohy, obrázky Concept Cartoons s různými sadami doprovodných otázek, písemné reflexe, terénní poznámky), výzkumným designem (kvalitativní, smíšený), časovým umístěním sběru dat vzhledem k experimentálnímu kurzu (před kurzem, během kurzu, po skončení kurzu) a vztahem respondentů k experimentálnímu kurzu (zúčastnili se kurzu, nezúčastnili se kurzu). Protože hlavní výzkumné šetření, od kterého se ostatní empirické studie odvíjely, zkoumalo vliv experimentálního kurzu na jeho účastníky a protože jsme chtěli minimalizovat vliv výzkumu na účastníky kurzu (na jejich výkon, postoje), tak jsme rozhodli, že veškeré aktivity související se sběrem dat se musí odehrávat během výuky tohoto kurzu a musí být do ní začleněny tak, aby ji nenarušovaly. Všechna výzkumná data tak byla od účastníků kurzu sbírána v písemné podobě a jejich sběr byl přirozenou součástí výuky: na seminářích kurzu jsme od jednotlivých účastníků průběžně sbírali písemné záznamy řešení úloh, vyplněné pracovní listy a vypracované kontrolní písemné testy. Jedinou výjimkou co do začlenění do výuky byly závěrečné písemné reflexe, které účastníci kurzu vypracovávali na semináři v posledním týdnu výuky kurzu.

Přehled empirických studií, jejich základních charakteristik a jejich umístění v kapitolách této práce uvádí tabulka 2.5. Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.1, experimentálního kurzu se celkem zúčastnilo 35 budoucích učitelů. Někteří z nich však nebyli přítomni během některých sběrů dat, a tak čísla uvedená u písmena K v posledním sloupci tabulky 2.5 jsou zpravidla menší než 35. Pro získání lepší představy o povaze výzkumných poznatků jsme ve dvou případech realizovali navazující studie se stejnými výzkumnými otázkami s respondenty z jiných univerzit (v kapitolách 5.1 a 5.2 je na tyto studie odkázáno ve výsledkové části v poznámce pod čarou). Tito respondenti z jiných univerzit jsou v posledním sloupci tabulky 2.5 označeni kurzívou.

Vysvětlivky zkratek v tabulce 2.5:

- kap. = kapitola, ve které je výzkumné šetření podrobně zpracováno;
- sběr = nástroje pro sběr dat;
- CCs = Concept Cartoons;
- SÚ = slovní úlohy;
- R = písemné reflexe;
- TP = terénní poznámky;
- design = výzkumný design;
- kvalit. = kvalitativní;
- smíš. = smíšený;
- čas = časové umístění sběru dat vzhledem k experimentálnímu kurzu;
- před = před kurzem;
- během = během kurzu;
- po = po skončení kurzu;
- resp. = počet respondentů, kteří odevzdali kompletní sadu dat, a vztah těchto respondentů k experimentálnímu kurzu;
- K = účastník kurzu;
- N = není účastník kurzu.

Tabulka 2.5: Přehled realizovaných výzkumných šetření (1. část tabulky)

kap.	výzkumné otázky	sběr	design	čas	resp.
3.1	Jaká podoba prostředí Concept Cartoons je vhodná pro zkoumání didaktických znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?	CCs	kvalit.	před	127 N
4.1	Jak se do způsobu, jakým budoucí učitelé prvního stupně základní školy řeší matematické úlohy, promítlo dvousemestrální systematické uplatňování otevřeného přístupu realizované během jejich povinného univerzitního kurzu aritmetiky? - Jaké různé jevy související s otevřeným přístupem bylo možné nalézt v záznamech řešení matematických úloh a v pracovních listech předložených budoucím učitelům během tohoto kurzu? - Do jaké míry uplatňovali jednotliví budoucí učitelé principy otevřeného přístupu na začátku kurzu a na konci kurzu? - Reflektovali učitelé uplatňování otevřeného přístupu během kurzu, když po skončení kurzu byli obecně požádáni o jeho zhodnocení? Pokud ano, jak?	CCs + SÚ + R	kvalit.	během	24 K
4.2	S jakými didaktickými znalostmi obsahu v oblasti číselných oborů vstupují do kurzu didaktiky matematiky budoucí učitelé prvního stupně základní školy, kteří absolvovali dvousemestrální kurz aritmetiky zaměřený na systematické uplatňování otevřeného přístupu?	CCs	kvalit.	během	29 K
4.3	Jakým způsobem může kvantitativní složka obohatit kvalitativní podobu prostředí Concept Cartoons určenou pro zkoumání znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?	CCs	smíš.	během + po	23 K

Tabulka 2.5: Přehled realizovaných výzkumných šetření (2. část tabulky)

kap.	**výzkumné otázky**	**sběr**	**design**	**čas**	**resp.**
5.1	Jaké způsoby uvažování o zlomcích je možné odhalit u budoucích učitelů prostřednictvím úloh Concept Cartoons?	CCs	kvalit.	po	28 K + *78 N*
5.2	Můžeme prostřednictvím Concept Cartoons získat informace o znalostech matematického obsahu, které neodhalily standardní kontrolní písemné testy se slovními úlohami?	CCs + SÚ	kvalit.	po	16 N + *44 N*
5.3	Je možné prostředí Concept Cartoons využít pro podnícení diskuse budoucích učitelů o didaktických tématech v matematice? Jak takové využití prostředí Concept Cartoons reflektují účastníci diskuse?	CCs + R + TP	kvalit.	po	12 N
5.4	Jaká hlediska jsou klíčová pro výběr a tvorbu úloh Concept Cartoons za účelem jejich využití při výuce aritmetiky a v profesní přípravě budoucích učitelů pro výuku aritmetiky? Jaké pořadí hledisek klíčových pro výběr a tvorbu úloh Concept Cartoons je vhodné pro tvorbu nových Concept Cartoons? Jaká metodika je vhodná pro využití prostředí Concept Cartoons za účelem diagnostiky nebo rozvoje (didaktických) znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?	CCs + TP	kvalit.	před + během + po	35 K + 284 N

KAPITOLA 3: Empirická studie realizovaná před experimentálním kurzem

Hlavní výzkumná šetření naplánovaná k realizaci během experimentálního kurzu měla za úkol sledovat vliv kurzu na znalosti obsahu jeho účastníků – budoucích učitelů. Protože tato šetření byla exploračního charakteru, rozhodli jsme se zkoumat znalosti účastníků kurzu šířeji a pro jejich zkoumání využít i nástroje, které nejsou běžné. Kromě znalostí obsahu jsme se tak zaměřili i na didaktické znalosti obsahu a jako jeden z výzkumných nástrojů jsme naplánovali využít prostředí Concept Cartoons. Hledali jsme totiž nástroj, který by přednostně sledoval ty záležitosti související s badatelsky orientovanou výukou, které běžné testy nesledují (například uvědomění si možnosti existence více interpretací zadání úlohy, více postupů řešení, více řešení, více zápisů a interpretací těchto řešení), a to, co jsme v té době věděli o prostředí Concept Cartoons, bylo s touto představou v souladu.

Pro zkoumání didaktických znalostí obsahu prostřednictvím Concept Cartoons neexistovala žádná metodika, bylo tedy nutno ji vytvořit. Za tímto účelem vznikla přípravná empirická studie (kapitola 3.1) zaměřená na možnou podobu prostředí Concept Cartoons vhodnou pro zkoumání didaktických znalostí obsahu u individuálních respondentů. Studie byla celá realizována před začátkem experimentálního kurzu. Na jejím základě vznikly obrázky Concept Cartoons se sadou doprovodných otázek, které jsme během kurzu využili jako nástroj pro systematické zkoumání didaktických znalostí obsahu (viz kapitola 4.2). Vzhledem k tematickému obsahu experimentálního kurzu (témata „úvod do matematické logiky”, „úvod do teorie množin” a „číselné obory”) a vzhledem k tomu, že kurz je určen pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, jsme v přípravné studii pracovali s obrázky Concept Cartoons zaměřenými na téma „číselné obory” v rozsahu odpovídajícím učivu prvního stupně základní školy. Zbylá dvě témata byla v některých obrázcích obsažena implicitně.

Kapitola 3.1: Podoba prostředí Concept Cartoons vhodná pro kvalitativní diagnostiku didaktických znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů[31]

Při prvním setkání s obrázky Concept Cartoons (v roce 2012) nás kromě jejich významu pro výuku žáků zaujala i skutečnost, že jednotlivé obrázky znázorňují různé názory dětí na nějakou situaci, a tak vlastně imitují rozličné situace, jež by mohly být situacemi výukovými. Odtud vzešel prvotní nápad použít Concept Cartoons pro zkoumání znalostí, jež učitel uplatňuje ve výukových situacích, konkrétně pro zkoumání didaktických znalostí obsahu. Dalším impulsem pro volbu Concept Cartoons jako výzkumného nástroje byla šetření

[31] Text v této kapitole byl převzat z publikací (Samková, 2016b, 2020b) a upraven.

ukazující, že obrázky Concept Cartoons při použití ve třídě podněcují žáky (i ty, kteří se běžně zdráhají projevit svůj názor) k účasti na diskusi a k přednesení vlastního názoru. Tato šetření naznačují, že při použití Concept Cartoons by nemusely nastat problémy s neochotou respondentů odpovídat na otázky a s nedostatkem dat. Je však otázkou, zda se tato vlastnost Concept Cartoons projeví i při jejich použití pro sběr dat v písemné podobě.

Kompozice Concept Cartoons je podobná kompozici některých testových otázek používaných pro zkoumání didaktických znalostí obsahu (kapitola 1.3.3): podobně jako v bublinách se nabídka různých odpovědí žáků a požadavek na jejich posouzení objevuje v testových otázkách zkoumajících znalosti žákových poznávacích procesů (komponenta *znalosti žákova porozumění* ve studii Kleickmann a kol., 2013; částečně komponenta *znalosti žákových miskoncepcí* ve studii Depaepe a kol., 2015; částečně komponenta *schopnost porozumět učebním obtížím žáků* ve studii Lim-Teo a kol., 2007), požadavek doplnit do prázdné bubliny nějaké alternativní řešení je podobný testovým otázkám zkoumajícím znalosti učebních úloh (komponenta *znalosti úloh* ve studii Kleickmann a kol., 2013).

Originální metodice Concept Cartoons však oproti testovým otázkám chybí dotazy na pravděpodobné žákovy úvahy a na možné zdroje žákova neporozumění, a také požadavky na poskytnutí vysvětlení, jež by bylo žákovi srozumitelné – tyto nedostatky originální podoby obrázků Concept Cartoons snad bude možné vyřešit rozšířením sady otázek předkládaných spolu s obrázky. Oproti testovým otázkám dále obrázkům chybí požadavky na posouzení činnosti jiného učitele, ale ty jsou ve stávající podobě prostředí Concept Cartoons obtížně realizovatelné.[32]

Na možnou podobu rozšíření prostředí Concept Cartoons tak, aby bylo vhodné pro systematické zkoumání didaktických znalostí obsahu, se soustředí tato studie. V jejím rámci jsme k obrázkům Concept Cartoons vytvořili sadu didakticky zaměřených doprovodných otázek a ověřovali jsme, jestli a jaké obrázky opatřené touto sadou otázek umožňují získat dostatečné množství relevantních dat pro zkoumání didaktických znalostí obsahu.

3.1.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na výzkumnou otázku:

> Jaká podoba prostředí Concept Cartoons je vhodná pro zkoumání didaktických znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?

[32] Požadavky na posouzení činnosti jiného učitele jsou však součástí vinět podle Friesen(ové), viz kapitola 1.5.2.

Výzkumný plán

Přípravné studie se zúčastnilo 127 studentů různých ročníků vysokoškolského studia učitelských oborů učitelství pro první stupeň základní školy a učitelství matematiky pro druhý stupeň základní školy, v prezenční i kombinované formě; 55 z nich již mělo absolvovaný aspoň jeden semestr kurzu didaktiky matematiky.

Studie se uskutečnila v akademickém roce 2013/14. Od účastníků šetření jsme jednorázově sbírali písemné odpovědi na doprovodné otázky k vybraným obrázkům Concept Cartoons. Na všech datových materiálech pracovali účastníci šetření individuálně.

Vycházeli jsme z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014), a poté sledovali hustotu relevantních kódů u jednotlivých Concept Cartoons, jednotlivých bublin a jednotlivých otázek. Soustředili jsme se na projevy znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu.

3.1.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat

Z originální sady Concept Cartoons (Dabell a kol., 2008) byly vybrány čtyři obrázky z oblasti číselných oborů (přirozená čísla, desetinná čísla a zlomky) v rozsahu odpovídajícím učivu prvního stupně základní školy. Obrázky byly vybrány tak, aby se lišily typem zobrazené situace (dvě školní a dvě mimoškolní aktivity), typem textu v bublinách (bubliny s výsledky, s postupy řešení a výsledky, s radami žákovi) a počtem bublin se správnými odpověďmi.

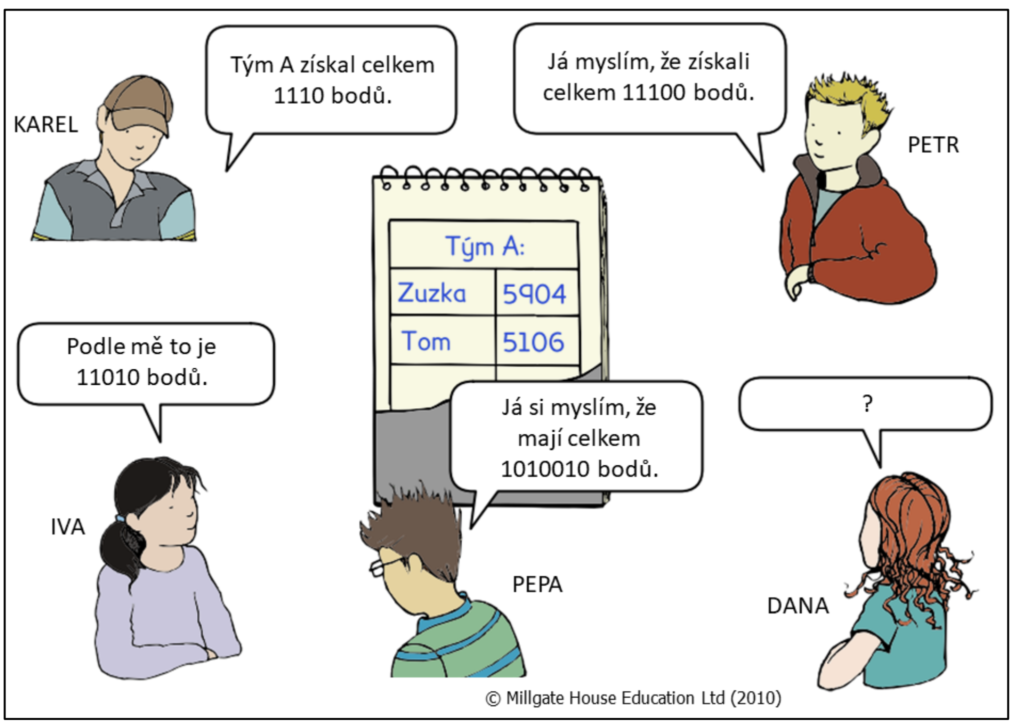
Dále jsme vytvořili 14 vlastních obrázků Concept Cartoons z oblasti číselných oborů. Některé vznikly pouhou úpravou textu jedné či více bublin v originálních Concept Cartoons (Dabell a kol., 2008), jiné zcela nově. Přibyly i nové typy textu v bublinách, např. vyjádření se k platnosti tvrzení, k počtu řešení, odkaz na neuvedené schéma. Při tvorbě nových Concept Cartoons jsme do bublin umisťovali obvyklé i méně obvyklé úvahy hypotetických žáků, správné i nesprávné. Inspirovali jsme se vlastními zkušenostmi z výuky, zkušenostmi kolegů i výsledky pedagogických výzkumů (Bana, Farrell & McIntosh, 1995; Hejný & Stehlíková, 1999; Tichá & Macháčková, 2006; Hansen, 2011; Ryan & Williams, 2011 aj.).

Celkem tedy bylo k dispozici 18 různých aritmetických obrázků Concept Cartoons. Různým skupinám účastníků byly předkládány různé kombinace těchto obrázků, vždy dva až čtyři najednou. Každý účastník obrázky obdržel ve formě pracovního listu (každý obrázek na zvláštním listu papíru) s pokyny, které uvádí tabulka 3.1. Respondenti pracovali samostatně, na vyplnění pracovních listů měli cca 20 minut na každý obrázek.

Tabulka 3.1: Pokyny k obrázkům Concept Cartoons

U každého obrázku okomentujte jednotlivé názory v bublinách takto:
1) Napište, s kterým názorem nejvíce souhlasíte, tj. který je Vám nejbližší. 2) Napište, s kterým názorem rozhodně nesouhlasíte. 3) Rozhodněte, které názory jsou správné a které chybné. Své rozhodnutí zdůvodněte. 4) U chybných názorů se pokuste odhalit, proč vznikly. 5) Vysvětlete autorům chybných názorů, kde udělali chybu. Poraďte jim, jak tuto chybu napravit. 6) Vymyslete text, který by mohl být v bublině s otazníkem – nezáleží na tom, jestli bude správný, nebo chybný. Může souviset s nějakým jiným správným řešením/postupem nebo nějakou další chybnou úvahou.

Originální Concept Cartoons nemají děti na obrázcích nijak pojmenované (podobně jako na obrázku 1.4). Při vyplňování pracovních listů s první skupinou respondentů se však někteří respondenti ozvali, že neví, jak se mají při vyplňování listů na jednotlivé děti z obrázků odkazovat. Nechali jsme je tedy doplnit k dětem písmena (A, B,…) a pro další skupiny respondentů jsme již připravili obrázky Concept Cartoons se jmény (jako na obrázku 3.1).



Obrázek 3.1: Concept Cartoon *Jedničky*; obrázek převzat z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 1_8), doplněna jména, vlastní překlad

Analýza dat[33]

Analýza dat se soustředila na kvalitu a množství dat poskytnutých respondenty k jednotlivým úlohám Concept Cartoons, k jednotlivým bublinám a k jednotlivým otázkám. Kvalita byla posuzována podle toho, jestli získaná data umožňovala identifikovat projevy znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu. V závěru analýzy dat jsme také sledovali, jestli a jak se liší data respondentů, kteří ještě nenavštěvovali kurz didaktiky matematiky, od dat respondentů, kteří kurz již navštěvovali.

3.1.3 Výsledky

Jednotlivé obrázky a jejich bubliny

Jako úlohy s nejvyšším množstvím a kvalitou získaných dat byly vyhodnoceny obrázky Concept Cartoons, v jejichž bublinách se vyskytovaly postupy řešení spolu s výsledky, neboť v takových případech mohli respondenti komentovat jak postupy, tak i výsledky. Mohli hledat odůvodnění známých i neznámých postupů vedoucích ke správným výsledkům, chyby v postupech vedoucích k nesprávným výsledkům, ale i chyby v postupech vedoucích ke správným výsledkům.

Jako výhodné se ukázalo kombinování těchto úloh Concept Cartoons s úlohami, v jejichž bublinách byly uvedeny pouze výsledky. Absence uvedeného postupu zjednodušuje odůvodnění u správných výsledků a odpověď na třetí otázku, ale komplikuje určení možného zdroje chyb při odpovědi na čtvrtou otázku. Nicméně u některých obrázků s bublinami tohoto typu docházelo k problémům s nedostatkem relevantních dat: pokud byl obrázek založen na výpočtu, dost často se stávalo, že respondenti jen porovnali nabízené výsledky se správným výsledkem, odpověděli na první tři otázky a při odpovědi na čtvrtou a pátou otázku se jen odkázali na odpovědi přechozí nebo nabízeli bezobsažné rady typu „máš to špatně”, „spočítej to znovu”. Jedinou výjimkou mezi početními úlohami s bublinami bez postupů byl Concept Cartoon z obrázku 3.1, na kterém jsou všechny výsledky v bublinách zapsány jen pomocí číslic 1 a 0, což pravděpodobně respondenty zaujalo natolik, že ochotně hledali a odůvodňovali možné zdroje chybných výsledků.

Jednotlivé otázky

Analýza dat potvrdila rozlišovací funkci otázek 3 až 5: respondenti, kteří ještě nenavštěvovali žádný kurz didaktiky matematiky, dost často poskytovali pro všechny tři otázky společnou

[33] Analýza části dat (konkrétně dat ke čtyřem obrázkům Concept Cartoon získaných od 29 budoucích učitelů prvního stupně základní školy před kurzem didaktiky matematiky a od 35 budoucích učitelů prvního stupně základní školy po jednom semestru kurzu didaktiky matematiky) byla realizována ve spolupráci s kolegyní Alenou Hošpesovou, použita byla technika dvojitého kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014: 42). Výsledky této analýzy byly publikovány formou příspěvku na konferenci CERME9 (Samková & Hošpesová, 2015).

odpověď, někteří z nich na listech dokonce vyjádřili své rozhořčení nad tím, že se otázky ptají pořád dokola na to samé. U respondentů, kteří měli za sebou alespoň jeden semestr kurzu didaktiky matematiky, se tyto společné odpovědi neobjevily.

Otázky 1 a 2 jsme původně do sady zařadili s úmyslem zjišťovat spontánní (okamžité) reakce na názory v bublinách. Na rozdíl od otázek 3 až 5, které vedou spíše k promyšleným odpovědím, totiž otázky 1 a 2 nevyžadují žádné odůvodnění. V souvislosti s nepředvídanými situacemi ve třídě považujeme okamžité reakce učitele na názory žáků za velice důležité. Data náležející k těmto otázkám však prokazovala poměrně vysokou míru škrtání a přepisování – nedalo se tak s jistotou říci, zda respondenti dodržovali pořadí otázek, zdali se někteří po zodpovězení otázky 3 nevrátili k otázkám 1 a 2 a odpovědi na ně nepřepsali. Podobně by se nedaly odhalit ani případy, kdy by respondenti jako první řešili otázku 3 a až poté se vrátili k otázkám 1 a 2. Po zvážení všech pro (mezi odpověďmi na tyto dvě otázky se objevilo několik velice zajímavých reakcí) a proti (výše uvedené nejasnosti ohledně pořadí vyplňování odpovědí) jsme se nakonec rozhodli obě otázky v sadě ponechat. Odpovědi na ně však spíše než jako spontánní reakci budeme chápat jako doplněk k odpovědi na otázku 3.

Datové úryvky

Výše uvedené výsledky si nyní ilustrujme prostřednictvím datových úryvků vztahujících se k úloze z obrázku 3.1. Datové úryvky byly získány od dvou skupin budoucích učitelů prvního stupně základní školy: skupiny, která ještě nenavštěvovala žádný kurz didaktiky matematiky (kódové označení těchto respondentů začíná písmenem P), a skupiny, která již absolvovala jeden semestr kurzu didaktiky matematiky (kódové označení začíná písmenem A).

Úloha z obrázku 3.1 má jednu správnou bublinu (Iva) a tři nesprávné bubliny založené na několika mylných představách souvisejících s číslem nula a s algoritmem písemného sčítání: Karlovi chybí ve výsledku jedna z nul (buď byl nepozorný, nebo nulu nenapsal úmyslně – mohl si myslet, že nula se nemusí psát), Petr jednu desítku převáděnou z řádu jednotek nepřičetl v řádu desítek, ale až v řádu stovek (buď na ni zapomněl, nebo si myslel, že k nule ji přičíst nemůže), Pepa nic nepřeváděl, jen pod každý řád napsal celý jeho součet, i když byl dvouciferný.

Přestože v bublinách tohoto obrázku jsou pouze výsledky bez postupů, mnozí respondenti dokázali věrohodně popsat, jaké žákovské postupy mohly vést k uvedeným výsledkům:

P14 Petr si asi myslel, že nula není číslo a přičetl 1 až k dalšímu součtu.
Karel úplně vyřadil sloupeček s nulami.

P37 Petr – zapomněl přičíst 1 na místě desítek, ale připočetl ji na místě stovek.

A2 Pepa – při překročení desítky si nepřičítá do dalšího řádu, ale rovnou píše výsledek bez ohledu na řády.

V datech se ale také objevily popisy méně věrohodných příčin chyb a popisy, které se místo na příčiny chyb soustředily na prosté porovnávání výsledku v bublině se správným výsledkem:

P13 Petr prohodil 0 a 1.

A3 Karel zapomněl napsat 0 mezi 11 a 10.
Petr napsal třetí 1 na nesprávné místo.

Někteří z respondentů na takovém porovnání bez hledání příčiny chyby založili i rady dětem:

A10 Pepa – takový výsledek po sečtení nemůže vyjít, ani kdyby tato dvě čísla násobil. Ve výsledku má dvě nuly navíc. Nevím, jak mohl vzniknout takový názor. Je zde více nul, žák se mohl přepočítat a zapsat více nul.
Rada Pepovi: Výsledek máš vysoký oproti počítaným číslům, přepočítej znova příklad a uber nějaká čísla.
Petr – blíží se ke správnosti, ale má výsledek o 90 větší.
Rada Petrovi: Přepočítej si opět příklad, výsledek máš o 90 větší než je správný výsledek.

Z hlediska didaktických znalostí obsahu se jedná o nedostatečné znalosti žákova porozumění a nedostatečné znalosti obsahu pro vyučování.

3.1.4 Závěr

Tato přípravná studie potvrdila, že při vhodném výběru obrázků Concept Cartoons je možné tyto obrázky doplněné sadou doprovodných otázek využít pro sběr dat a následnou diagnostiku didaktických znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů.

Pro výzkumné šetření o didaktických znalostech obsahu naplánované k realizaci během experimentálního badatelsky orientovaného kurzu (toto výzkumné šetření představí kapitola 4.2) jsme na základě výsledků přípravné studie vybrali z testované sady 18 obrázků Concept Cartoons čtyři originální obrázky a čtyři nově vytvořené. Šest z těchto vybraných obrázků bylo na téma přirozená čísla, jeden na téma desetinná čísla a jeden se zaměřoval na všechny číselné obory. Chyběl vhodný obrázek na téma zlomky. Vzhledem k tomu, že téma zlomky se na kurzu aritmetiky probírá jako jedno z posledních, rozhodli jsme se chybějící obrázek vytvořit dodatečně, až po dalších zkušenostech se sběrem a zpracováním dat. Nakonec obrázek na téma zlomky vznikl až v září 2015 na základě jedné aktuálně neúspěšné maturitní úlohy (okolnosti jeho vzniku popisuje kapitola 4.2.5).

KAPITOLA 4: Empirické studie realizované během experimentálního kurzu

Během experimentálního kurzu (kapitola 2.1) se uskutečnilo hlavní výzkumné šetření zkoumající vliv kurzu (tedy vliv systematického uplatňování otevřeného přístupu) na znalosti obsahu v matematice u jeho účastníků; toto výzkumné šetření představuje kapitola 4.1. Souběžně byly využity výsledky přípravné studie (kapitola 3.1) a během kurzu byla prostřednictvím obrázků Concept Cartoons se sadou doprovodných otázek sbírána i data vztahující se k didaktickým znalostem obsahu. Průběh a výsledky kvalitativní diagnostiky těchto dat představuje kapitola 4.2, zatímco kapitola 4.3 se věnuje možnostem uplatnění smíšeného přístupu k datům za účelem společné diagnostiky znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu.

Při zkoumání znalostí obsahu prostřednictvím obrázků Concept Cartoons jsme vyšli z původní metodiky Keogh(ové) a kol. (1999; viz kapitola 1.6.2). Ponechali jsme jejich způsob sběru dat, ale místo kvantitativního zpracování jsme uplatnili zpracování kvalitativní. Tuto upravenou metodiku jsme využili pro zkoumání vlivu kurzu na uplatňování otevřeného přístupu jednotlivými účastníky kurzu (kapitola 4.1, část k SVO2). Při zkoumání didaktických znalostí obsahu jsme využili metodiku odvozenou v přípravné studii (kapitola 3.1).

Účastníky výzkumných šetření v kapitole 4 byli vždy *všichni* účastníci experimentálního kurzu popsaného v kapitole 2.1, ale někteří z nich chyběli na seminářích, kde probíhal sběr dat. Z důvodu zachování autenticity dat nebyla data od absentujících účastníků získávána dodatečně. Participaci jednotlivých účastníků na jednotlivých výzkumných šetřeních mapuje tabulka 4.1. Pro přehlednější práci s daty má každý účastník experimentálního kurzu přidělen vlastní identifikační kód skládající se z kódového písmene „S“ a náhodně přiděleného pořadového čísla. V celé kapitole 4 budou tyto kódy využívány místo jmen u datových úryvků.

Tabulka 4.1: Přehled participace účastníků kurzu na jednotlivých výzkumných šetřeních v kapitolách 4.1, 4.2 a 4.3

kap.	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18
4.1																		
4.2																		
4.3																		

kap.	S19	S20	S21	S22	S23	S24	S25	S26	S27	S28	S29	S30	S31	S32	S33	S34	S35	Σ
4.1																		24
4.2																		29
4.3																		23

Kapitola 4.1: Vliv systematického uplatňování otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy[34]

Tato empirická studie se zaměřuje na otázky související se systematickým uplatňováním otevřeného přístupu v pregraduálním vzdělávání budoucích učitelů prvního stupně základní školy, konkrétně během dvousemestrálního povinného kurzu aritmetiky realizovaného v badatelsky orientovaném stylu; kurz a jeho vztah k otevřenému přístupu byl podrobně představen v kapitole 2.1. V rámci kurzu jsme provedli kvalitativní šetření exploračního typu, ve kterém jsme sledovali jevy související s otevřeným přístupem v záznamech řešení matematických úloh a v reflexích sepsaných účastníky na konci kurzu.

4.1.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumné otázky

Předkládaná empirická studie hledá odpovědi na hlavní výzkumnou otázku s využitím tří specifických výzkumných otázek:

- HVO Jak se do způsobu, jakým budoucí učitelé prvního stupně základní školy řeší matematické úlohy, promítlo dvousemestrální systematické uplatňování otevřeného přístupu realizované během jejich povinného univerzitního kurzu aritmetiky?
- SVO1 Jaké různé jevy související s otevřeným přístupem bylo možné nalézt v záznamech řešení matematických úloh a v pracovních listech předložených budoucím učitelům během tohoto kurzu?
- SVO2 Do jaké míry uplatňovali jednotliví budoucí učitelé principy otevřeného přístupu na začátku kurzu a na konci kurzu?
- SVO3 Reflektovali učitelé uplatňování otevřeného přístupu během kurzu, když po skončení kurzu byli obecně požádáni o jeho zhodnocení? Pokud ano, jak?

Specifické výzkumné otázky zpřesňují široce formulovanou hlavní výzkumnou otázku.

Výzkumný plán

Účastníky výzkumného šetření byli všichni účastníci experimentálního kurzu (kapitola 2.1), ale někteří z nich chyběli na některých seminářích, kde probíhal sběr dat. Z důvodu zachování autenticity dat nebyla data od absentujících účastníků získávána dodatečně, a tak kompletní sadu dat poskytlo 24 respondentů.

Od účastníků šetření jsme kontinuálně během celého kurzu sbírali písemné materiály dvojího typu: záznamy řešení matematických úloh a vyplněné pracovní listy. Na konci kurzu jsme

[34] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2018c) a upraven.

účastníky požádali o písemnou reflexi celého kurzu. Na všech datových materiálech pro toto výzkumné šetření pracovali účastníci šetření individuálně, v rámci seminářů.

Vzhledem k povaze hlavní výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování a konstantní komparace (Švaříček, Šeďová a kol., 2014).

4.1.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat k SVO1

Pro potřeby SVO1 jsme od účastníků kurzu sbírali záznamy řešení slovních úloh a vyplněné pracovní listy. Slovní úlohy byly součástí průběžných kontrolních testů, které ověřovaly znalost témat probraných na kurzu a tvořily součást oficiálního hodnocení účastníků kurzu (známky). Pracovní listy byly účastníkům předkládány nezávisle na probíraných tématech a na známku neměly vliv. Všechny slovní úlohy měly otevřený postup řešení, některé i otevřený výsledek (úloha 5 v tabulce 4.2). Každý účastník řešil celkem šest slovních úloh.

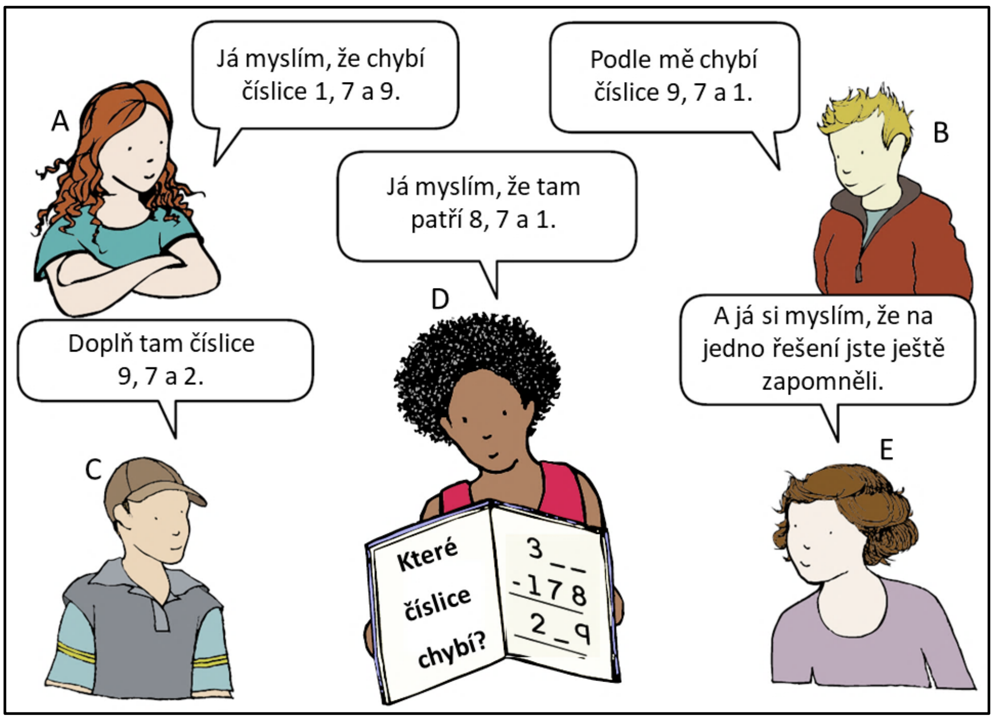
Tabulka 4.2: Ukázky slovních úloh předložených účastníkům v rámci kontrolních testů

Úloha 1	Karel a Tonda mají dohromady 68 kuliček. Karel má o 14 kuliček více než Tonda. Kolik kuliček má Tonda?
Úloha 2	Edita a Jana si společně koupily knížku. Jana na ni dala 120 Kč, Edita 74 Kč. Kolik Kč musí ještě Edita doplatit Janě, aby se na nákupu podílely stejně?
Úloha 3	Chovatel má 1/3 bílých králíků, ostatní šedivé. Dnes dá 3 šedivé králíky sousedovi a dostane za ně 3 bílé. Po této výměně stoupne podíl bílých králíků na 4/9. Kolik králíků má chovatel?
Úloha 4	Velkým čerpadlem by se vodní nádrž napustila za 7 dní, malým za 9. Velké čerpadlo se rozbilo a je třeba ho opravit, a tak první tři dny bude možné používat pouze malé čerpadlo. Od čtvrtého dne budou zapnuta obě čerpadla. Za jak dlouho se nádrž napustí?
Úloha 5	Jak rozdělíme 44 dětí beze zbytku do 3-členných a 5-členných družstev, pokud chceme, aby 3-členných družstev bylo méně než 10?

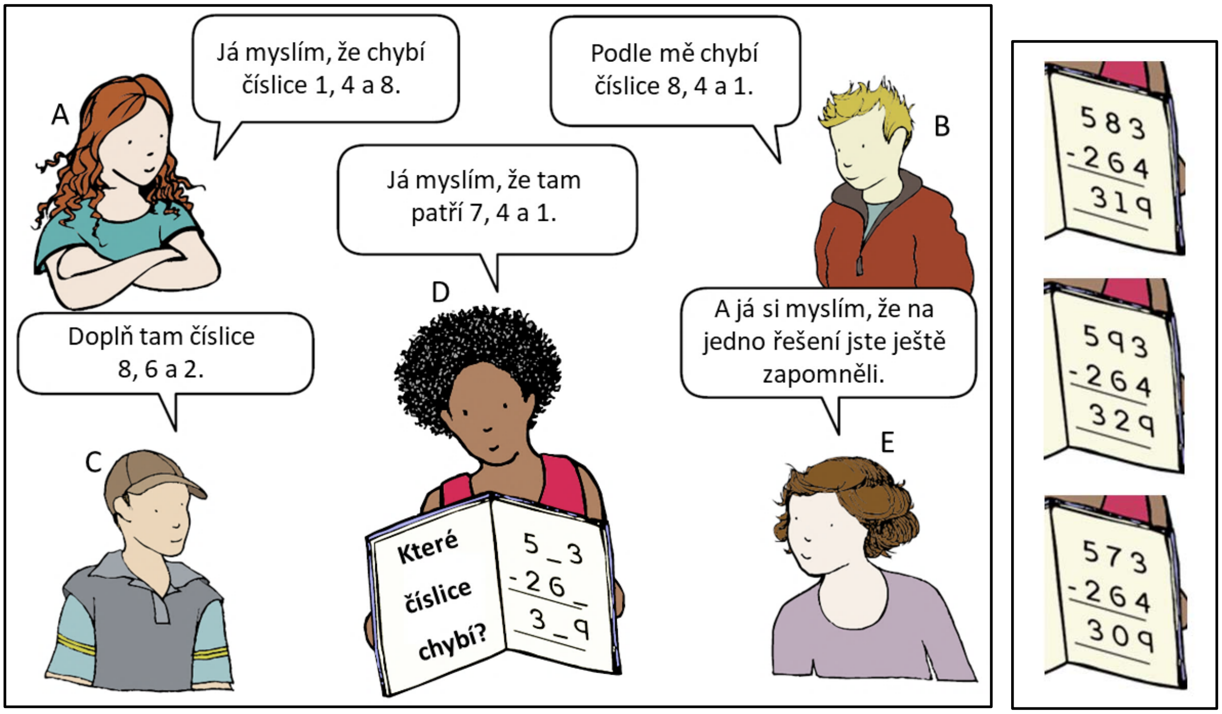
Pracovní listy byly účastníkům předkládány ve formě Concept Cartoons; celkem jim takto bylo předloženo deset pracovních listů s aritmetickou tematikou. Účastníci byli požádáni, aby písemně odpověděli na otázky „Které děti na obrázku mají pravdu?” a „Proč?”. Byla tedy aplikována původní metodika Keogh(ové) a kol. (1999; viz kapitola 1.6.2) pro ověřování znalostí obsahu u budoucích učitelů. Pro lepší přehled (při práci s pracovními listy i při zpracování dat) byly jednotlivé děti na obrázcích Concept Cartoons označeny písmeny A, B,…, podobně jako na obrázku 4.1a.

Sběr dat k SVO2

Pro potřeby SVO2 byly vybrány dva z pracovních listů, které tvořily pár (obrázky 4.1a, 4.2a). První z páru byl předložen účastníkům hned na začátku kurzu a druhý na jeho konci. Oba listy znázorňují skupinu dětí, která diskutuje řešení otevřené úlohy. Na prvním listu má úloha dvě řešení (obrázek 4.1b), přičemž jedno řešení je v bublinách zapsáno dvěma různými způsoby (bubliny A, B) a u druhého řešení je pouze zmíněna možnost jeho existence (bublina E). Na druhém listu má úloha tři řešení (obrázek 4.2b), jedno z nich je v bublinách zapsáno dvěma různými způsoby (bubliny A, B), u druhého je zmíněna možnost jeho existence (bublina E) a třetí není zmíněno vůbec. Úlohy na obrázcích jsou si velice podobné, je možné je řešit stejným postupem, jen druhá úloha je obtížnější v tom, že má o jedno řešení více.



Obrázek 4.1: Concept Cartoon z pracovního listu předloženého účastníkům na začátku kurzu: (a) zadání, (b) všechna řešení zobrazené úlohy; předloha obrázku s prázdnými bublinami a prázdnou knihou převzata z (Dabell a kol., 2008: č. 2_10)



Obrázek 4.2: Concept Cartoon z pracovního listu předloženého účastníkům na konci kurzu: (a) zadání, (b) všechna řešení zobrazené úlohy; předloha obrázku s prázdnými bublinami a prázdnou knihou převzata z (Dabell a kol., 2008: č. 2_10)

Sběr dat k SVO3

Pro potřeby SVO3 jsme na konci kurzu požádali účastníky, aby písemnou formou reflektovali průběh kurzu. Žádné bližší pokyny k obsahu reflexe účastníci neobdrželi.

Analýza dat k SVO1

Při analýze dat k SVO1 jsme zpracovávali všechny datové materiály kromě závěrečných reflexí. V první fázi analýzy jsme nerozlišovali jednotlivé respondenty. Každé nově získané materiály jsme nejprve zpracovali odděleně (podrobně je pročetli, opatřili otevřenými kódy a kódy opakovaně porovnávali mezi sebou, seskupovali a upravovali), a až poté jsme je přičlenili k datům z předchozích sběrů a provedli konstantní komparaci. Po zpracování všech materiálů se vynořily následující kategorie jevů souvisejících s otevřeným přístupem:

A. uplatňování různých postupů řešení (např. kódy „správný postup", „chybný postup" a kódy označující konkrétní použité postupy řešení u jednotlivých úloh);
B. hledání různých řešení (např. „hledá jen jedno řešení", „hledá jen jedno další řešení");
C. systematická snaha o nalezení všech řešení (např. „systematicky hledá všechna řešení", „nalezl/la všechna řešení, ale nahodile");
D. akceptace různých zápisů stejného řešení (např. „odmítá jiný zápis").

Během zpracovávání dat se projevila nesourodost dat daná různou odezvou účastníků na různé úlohy, a tak jsme systém obohatili o nové kódy vztahující se k charakteristikám řešených úloh. Během následné analýzy se jako relevantní vynořily tyto kategorie:

E. forma zadání úlohy (např. kódy „slovní úloha”, „bublinový rozhovor”);
F. obtížnost úlohy (např. kódy „základní obtížnost”, „střední obtížnost”, „vysoká obtížnost”).

V poslední fázi analýzy jsme ještě provedli konstantní komparaci, která nově rozlišovala jednotlivé účastníky výzkumného šetření. Z tohoto analytického procesu vzešla nová kategorie, vztahující se k jevům z kategorie A:

G. obvyklost použitého správného postupu v rámci sledované skupiny (např. kódy „běžný postup”, „většinový postup”, „menšinový postup”)

Analýza dat k SVO2[35]

Analýza dat k SVO2 volně navázala na analýzu k SVO1: z datových materiálů jsme oddělili ty, které náležely k pracovním listům uvedeným na obrázcích 4.1a, 4.2a. Využili jsme finální sadu kódů k SVO1 a provedli jsme přímé porovnání dat z prvního pracovního listu s daty z druhého. Tento analytický proces obohatil kategorie B, C, D a během následné komparace došlo ke sloučení kategorií B, C do jedné společné kategorie:

BC. počet hledaných řešení a způsob jejich hledání (kódy „hledání jen jednoho řešení”, „nahodilé hledání dalšího řešení”, „systematické hledání všech řešení”)

Analýza dat k SVO3

Při analýze dat k SVO3 jsme zpracovávali datové materiály z reflexí. Podobně jako v předchozích fázích analýzy jsme data podrobně pročetli, opatřili otevřenými kódy a kódy opakovaně porovnávali mezi sebou, seskupovali a upravovali. Po zpracování se vynořily následující kategorie jevů souvisejících s otevřeným přístupem:

H. sledování různých postupů řešení (např. kódy „každý z nás to může vidět jinak”, „můžeme se porovnávat mezi sebou”);
I. výběr vlastního postupu řešení (např. kódy „mohu si vybrat postup, co mi vyhovuje”, „když nepochopím jeden postup, mohu pochopit jiný”);
J. posuzování různých postupů řešení (např. kódy „žák to může chápat jinak než já”, „učitel musí zkoumat, co žák vymyslel”, „učitel se může dostat do úzkých”).

[35] Analýza dat k SVO2 byla realizována ve spolupráci s kolegyní Marií Tichou, použita byla technika dvojitého kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014: 42). Výsledky této analýzy byly publikovány formou příspěvku v odborném časopise (Samková & Tichá, 2016c).

Analýza dat k HVO

Pro potřeby hlavní výzkumné otázky jsme využili finální kódy k SVO1, SVO2 a SVO3 a provedli jsme jejich komparaci.

4.1.3 Výsledky

Jevy vztahující se k otevřenému přístupu

Různým jevům vztahujícím se k otevřenému přístupu se věnovala SVO1. Zde se jako kategorie s největší nasyceností dat projevila kategorie A zahrnující jevy související s uplatňováním různých postupů řešení. Jako nejsilnější se ukázala vazba těchto jevů s jevy z kategorií E a F, tedy s formou a obtížností řešených úloh. V závěru analytického procesu se ukázal i vztah k jevům z kategorie G (obvyklost použitého postupu).

U slovních úloh účastníci jako celek vždy využívali více různých postupů řešení, a to i u otevřených úloh s jediným řešením. U každé takové úlohy bez ohledu na její obtížnost se vždy vyskytly aspoň 3 různé správné postupy řešení. Někdy byly použité správné postupy rovnoměrně rozloženy mezi všechny úspěšné řešitele (např. u úlohy 1 z tabulky 4.2), takové postupy budeme v dalším textu označovat jako *běžné*. Jindy se objevil jeden výrazně převažující správný postup – například u úlohy 2 z tabulky 4.2 jeden ze správných postupů použilo 13 účastníků a zbylé dva po 2 účastnících. Takové postupy budeme označovat jako *většinové*, resp. *menšinové*. Analýza vzájemných vztahů kategorií F a G odhalila zajímavý trend: až na pár výjimek bylo možné účastníky rozdělit na *příznivce většinových postupů* (tyto postupy se u nich objevily u všech úloh s jedním výrazně převažujícím postupem, které vyřešili správně) a na *příznivce menšinových postupů* (dtto).

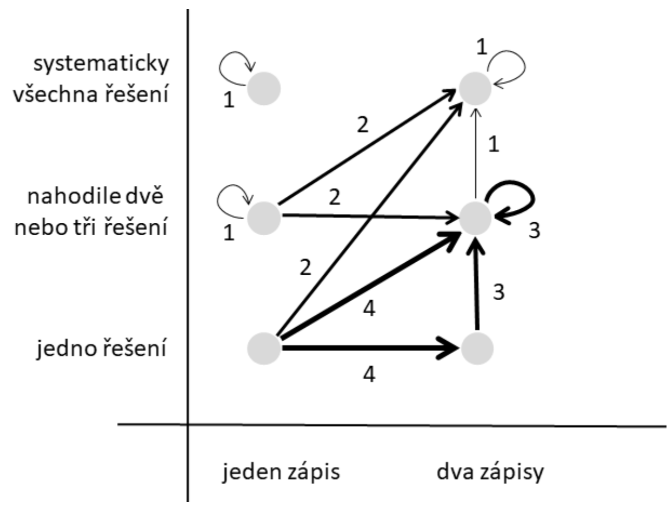
V druhé části kurzu byly účastníkům předloženy 2 úlohy s nejvyšší obtížností (úlohy 3 a 4 z tabulky 4.2), každé polovině sledované skupiny jedna. První úlohu vyřešilo správně pouze 4 (z 13) účastníků, přičemž *každý* z nich použil *jiný* postup řešení. Druhou úlohu vyřešilo správně 6 (z 11) účastníků, pouze dva z nich použili stejný postup.

V datových materiálech k pracovním listům jsme žádné vzájemné souvislosti mezi odpověďmi k jednotlivým listům nenalezli (kromě dvou listů použitých u SVO2), jako možný důvod se nabízí přílišná roztříštěnost textů, které se nacházely v bublinách.

Posuny v otevřeném přístupu

Přímé porovnání dat ze dvou pracovních listů k SVO2 (obrázky 4.1a, 4.2a) ukázalo, jak se jevy náležející ke kategoriím BC (počet hledaných řešení a způsob jejich hledání) a D (akceptace různých zápisů stejného řešení) změnily v čase.

Na začátku kurzu 13 (z 24) účastníků hledalo pouze jedno řešení úlohy, neuvažovalo existenci dalšího řešení a ani se takové další řešení nesnažilo hledat (10 z nich zároveň akceptovalo pouze jeden způsob zápisu konkrétního řešení), 9 účastníků hledalo více než jedno řešení, ale toto hledání bylo nahodilé, nesystematické. Pouze 2 účastníci hledali systematicky všechna řešení. Během kurzu se tento přístup viditelně zlepšil, zlepšení ilustruje graf na obrázku 4.3: šedá kolečka označují jednotlivé kombinace aspektů (např. kolečko vlevo dole je pro situaci, kdy účastník akceptuje pouze jeden zápis konkrétního řešení a hledá pouze jedno řešení úlohy) a posuny v otevřeném přístupu jsou znázorněny šipkami (čím širší šipka, tím více účastníků, u kterých byl daný posun zaznamenán, počty účastníků jsou uvedeny u šipek). Šipky směřující nahoru odpovídají zvýšení počtu hledaných řešení nebo zlepšení způsobu jejich hledání z nahodilého na systematický, šipky směřující doprava odpovídají zvýšení počtu akceptovaných zápisů řešení. Žádný účastník se nezhoršil, což dokumentuje absence šipek, které by směřovaly dolů nebo doleva. Někteří účastníci svůj přístup nezměnili a jejich šipky vedou zpět do stejného kolečka, žádný z nich ale nepatří mezi ty, kteří hledali jen jedno řešení.



Obrázek 4.3: Posuny v otevřeném přístupu, *n* = 24

V počtu hledaných řešení nebo způsobu jejich hledání se zlepšilo 12 (z 24) účastníků, v počtu akceptovaných zápisů řešení se zlepšilo 14 účastníků. V obou těchto aspektech se zlepšilo 8 účastníků, v aspoň jednom z nich se zlepšilo 18 účastníků.

Reflexe otevřeného přístupu

V reflexích sepsaných na konci kurzu 9 (z 24) účastníků zmínilo záležitosti související s otevřeným přístupem. Hlavně se jednalo o jevy z kategorií H (sledování různých postupů řešení) a I (výběr vlastního postupu řešení), okrajově také J (posuzování různých postupů řešení). Hlubší analýza dat odhalila souvislost těchto jevů s jevy z kategorie G, tedy s obvyklostí postupů uplatňovaných účastníky při řešení úloh.

Ti účastníci, kteří při řešení úloh používali menšinové postupy řešení, oceňovali v reflexích možnost výběru „vlastního" postupu řešení:

S32 Žáci sami objevují řešení. Pokud se jich objeví více, zapíší se na tabuli a následně si každý vybere způsob řešení, který mu vyhovuje.

S34 … vyzkoušeli jsme si různé metody, jak to jde i jinak…. Na střední škole… pan učitel pustil prezentaci a řekl, že takhle se to počítá, tak to budeme dělat i my. Nehledal jiné postupy pro někoho, kdo v tom 'plaval'.

nebo se vyjadřovali k obtížím, jež s používáním menšinových postupů mohou souviset:

S21 Ne vždy učitel pochopí, jak danou myšlenku žák myslel.

Jedna z účastnic se také svěřila s úspěchem, který jí otevřený přístup přinesl:

S32 Díky tomuto pojetí výuky jsem pochopila učivo, které bylo pro mě nikdy NEDOSAŽITELNÉ (SLOVNÍ ÚLOHY). Na základě úloh, které jsme probírali v hodině,… jsem přišla na hlavní princip vyhledávání informací z těchto slovních úloh.

A skutečně: v testech dokázala úspěšně vyřešit všechny slovní úlohy, což kromě ní zvládlo jen 6 dalších účastníků.

Ti účastníci, kteří při řešení úloh používali většinové postupy řešení, v reflexích oceňovali možnost seznámit se i s jinými než jejich vlastními postupy:

S25 Je zajímavé vidět, jak každý z nás vidí různé situace jinak, nebo stejně, ale pomocí jiného postupu. Bylo zajímavé i to, že se můžeme srovnávat mezi sebou.

a o těchto záležitostech se zmiňovali i ve vztahu ke své budoucí praxi:

S30 Pochopila jsem, že dítě může vidět příklad, postup… úplně jinak než já.

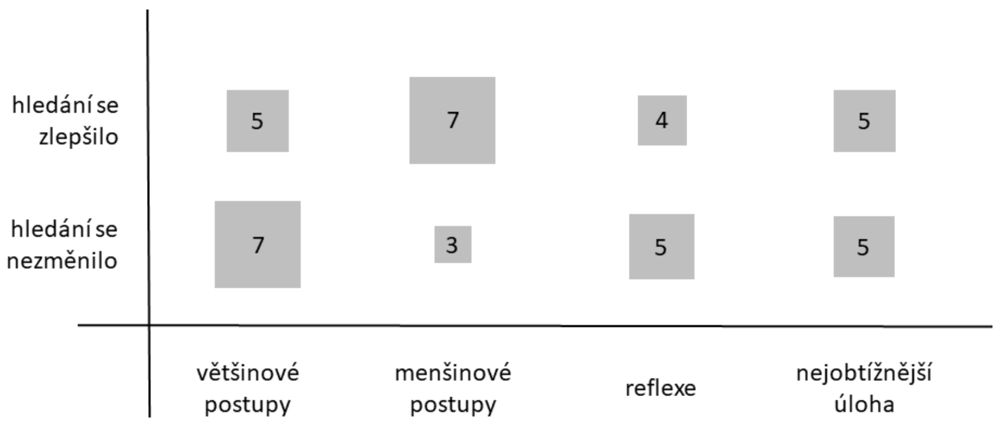
S9 Nevýhody pro učitele jsou např. při opravování. Vždy se mu sejde spousty návrhů a postupů.[36]

Celkový pohled na situaci

U HVO se jako kategorie s největší nasyceností dat projevila kategorie BC (počet hledaných řešení a způsob jejich hledání), která vzešla z SVO2. Na základě výsledků k SVO2 jsme tak účastníky roztřídili podle toho, jakou změnu prodělali v počtu hledaných řešení a způsobu jejich hledání: do skupiny „hledání se nezměnilo" jsme umístili účastníky, u kterých se počet hledaných řešení a způsob jejich hledání nezměnil (na obrázku 4.3 jim patří vodorovné šipky

[36] Respondent S9 k výzkumnému šetření z kapitoly 4.1 neodevzdal kompletní sadu dat, a tak jeho data nejsou vedena jako výzkumná; v tabulce 4.1 je označen jako neparticipující. Reflexi na konci kurzu však odevzdal a jeho názor vhodně doplňuje názory jeho kolegů. Dovolili jsme si tedy jeho úryvek zařadit jako ilustrační.

a šipky směřující zpět do stejného kolečka), do skupiny „hledání se zlepšilo” jsme umístili účastníky, u kterých se zvětšil počet hledaných řešení nebo způsob jejich hledání (na obrázku 4.3 jim patří šipky směřující svisle nahoru a šipky směřující šikmo nahoru). Příslušnost k těmto skupinám jsme pak porovnali s výsledky k SVO1 a SVO3: na základě výsledků k SVO1 byli účastníci přiděleni do skupin „většinové postupy” (příznivci většinových postupů), „menšinové postupy” (příznivci menšinových postupů) a „nejobtížnější úloha” (úspěšní řešitelé úlohy s nejvyšší obtížností), na základě výsledků k SVO3 byli účastníci přiděleni do skupiny „reflexe” (účastníci, kteří se v reflexi vyjádřili k otevřenému přístupu) a sledovali jsme kombinace skupin přidělených jednotlivým účastníkům. Výsledky porovnání znázorňuje graf na obrázku 4.4: šedé čtverečky označují jednotlivé kombinace skupin, například čtvereček vlevo dole je pro účastníky ze skupiny „hledání se nezměnilo“ (SVO2), kteří zároveň patří do skupiny „většinové postupy“ (SVO1). Čím větší je čtvereček, tím více je účastníků s danou kombinací skupin, počty účastníků jsou uvedeny uvnitř čtverečků.



Obrázek 4.4: Vzájemné vztahy výsledků k SVO1, SVO2 a SVO3, $n = 24$

Ke zlepšení v počtu hledaných řešení nebo způsobu jejich hledání došlo u poloviny řešitelů nejobtížnější úlohy, u méně než poloviny příznivců většinových postupů a u méně než poloviny účastníků vyjadřujících se k otevřenému přístupu v reflexi. U příznivců menšinových postupů byla situace odlišná: ke zlepšení v počtu hledaných řešení nebo způsobu jejich hledání došlo u více než dvou třetin z nich.

Autorská reflexe metodiky sběru dat

Na základě analýzy dat k devíti obrázkům Concept Cartoons z šetření k SVO1 jsme se do budoucna rozhodli mezi původní dvojici otázek „Které děti na obrázku mají pravdu?” a „Proč?” (metodika Keogh(ové) a kol., 1999) vložit ještě otázku „Které nemají?”, aby respondenti explicitně věděli, že se mají vyjadřovat i k bublinám, jež obsahují chybu.

Jedno útržkovité zjištění

Během analýzy dat k SVO1 jsme při komparaci dat odhalili zajímavý izolovaný rozpor v datech. Jeden z respondentů v rámci kontrolního testu úspěšně vyřešil slovní úlohu o dělení na nestejné části, ale u obrázku Concept Cartoon se stejnou tematikou označil jako správnou bublinu s chybným výsledkem[37]. Tento izolovaný poznatek jsme při analýze dat nikde dále nevyužili, ale na jeho základě jsme si položili otázku, jak odlišné mohou být informace o znalostech obsahu získané prostřednictvím řešení slovních úloh a prostřednictvím obrázků Concept Cartoons. Otázce jsme věnovali navazující výzkumné šetření (kapitola 5.2).

4.1.4 Diskuse

Předložená studie představuje teoretický rámec otevřeného přístupu a jeho realizaci v rámci badatelsky orientovaného dvousemestrálního kurzu aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy. Při hledání odpovědi na otázku *Jak se do způsobu, jakým budoucí učitelé prvního stupně základní školy řeší matematické úlohy, promítlo dvousemestrální systematické uplatňování otevřeného přístupu realizované během jejich povinného univerzitního kurzu aritmetiky?* jsme v písemných datových materiálech sledovali jevy související s otevřeným přístupem: různé postupy řešení a jejich obvyklost v rámci sledované skupiny, počet hledaných řešení a způsob jejich hledání, počet akceptovaných zápisů nějakého konkrétního řešení. Jako zjednodušenou odpověď na výzkumnou otázku je možné konstatovat, že většina účastníků výzkumného šetření změnila své způsoby řešení úloh směrem k otevřenému přístupu: akceptují více zápisů jednoho řešení nebo hledají více řešení dané úlohy, někteří i systematicky.

Účastníci experimentálního kurzu měli během kurzu možnost opakovaně zažívat proces sekvenčního i simultánního představování různých konceptů a strategií a jejich porovnávání, s důrazem na hledání shod, podobně jako ve studiích (Durkin a kol., 2017; Loibl & Leuders, 2018, 2019; aj.). Vzhledem k tomu, že respondenti na tabuli představovali a poté porovnávali vlastní postupy řešení úloh, vyskytovaly se mezi porovnávanými postupy jak postupy správné, tak nesprávné. Zároveň měli všichni nesprávní řešitelé možnost porovnávat svůj vlastní nesprávný postup s postupy správnými, byla tak větší pravděpodobnost, že postřehnou rozdíl mezi jednotlivými postupy a budou ho reflektovat (Smith a kol., 1993). Na základě analýzy dat byla k původní dvojici doprovodných otázek (Keogh a kol., 1999) přidána otázka třetí, explicitně vyzývající k reakci na bubliny s nesprávnými alternativami, což by mělo přispět nejen k obohacení sběru dat, ale podle Loibl(ové) a Leuderse (2019) také k rozvoji konceptuálních znalostí budoucích respondentů.

[37] Tuto záležitost rozebírá publikace (Samková & Tichá, 2015), česky (Samková, 2020b: kapitola 5.2.1).

Uplatňování otevřeného přístupu bývá často považováno jen za projev určitého postoje, například Schoenfeld (1992) uvádí názory, že každá matematická úloha má právě jedno řešení, či že ke každé úloze existuje jen jeden správný postup řešení, jako jedny z nejčastějších mylných představ žáků o matematice. My však uplatňování otevřeného přístupu považujeme za nedílnou součást výuky matematiky, se kterou se žáci mohou seznamovat již od nejútlejšího věku a která se zvyšující se obtížností úloh nabývá na důležitosti. Při řešení komplexnějších úloh není možné mít pro každou úlohu připravený její vlastní postup řešení, řešitel se musí umět zamýšlet nad rozličnými souvislostmi, zkoušet různé postupy a hledat, které z nich jsou jen slepými cestami a které ho dovedou k řešení. Tuto záležitost vhodně ilustruje situace z předkládaného šetření, kdy dvě nejobtížnější úlohy měly celkem deset úspěšných řešitelů, ale pouze dva z nich použili stejný postup řešení.

Popisovaný badatelsky orientovaný kurz matematiky, v rámci kterého byl otevřený přístup uplatňován, zároveň představuje způsob, jak něco podobného s žáky realizovat: postupovat od úloh s jedním řešením, ale více možnými postupy, nechat žáky samotné, aby různé postupy vymýšleli a psali na tabuli, a aby je společně diskutovali. Jak ukázaly písemné reflexe tohoto kurzu, takový přístup je cenný z mnoha směrů: žáci (v našem případě studenti učitelství) si při takové výuce mohou vybírat postupy, které lépe vyhovují jejich aktuálním znalostem a jejich způsobu uvažování, mohou sledovat, jak uvažují jejich spolužáci. Budoucí učitelé mohou navíc objevovat šíři názorů a postupů, se kterými se v budoucnu budou setkávat ve třídě při své vlastní výuce. Jsou-li řešené úlohy dostatečně svázány s příslušným matematickým obsahem (tak, jako tomu bylo u zde popisovaného kurzu), mohou budoucí učitelé navíc získat konkrétní představy o možném uvažování svých budoucích žáků.

Možnost vybírat si „své vlastní" postupy řešení se ukázala klíčovou v případě tzv. „menšinových" řešitelů, tedy řešitelů, kteří jsou zvyklí používat spíše méně obvyklé způsoby řešení. Více než dvě třetiny „menšinových" řešitelů (7 z 10) se během kurzu zlepšily v počtu hledaných řešení nebo ve způsobu jejich hledání z nahodilého na systematický. Mezi ostatními řešiteli nebylo zastoupení těch, kteří se zlepšili, tak výrazné (zlepšilo se jen 5 ze 14). Vysvětlení tohoto stavu patrně nabízí názory „menšinových" řešitelů vyjádřené v reflexích: ocenili možnost seznámit se s více postupy řešení a vybrat si postup, který jim nejvíce vyhovuje. Z pohledu konstruktivistického pojetí výuky je to vhodný stav: takový řešitel má větší možnost stavět na svých předchozích znalostech. Zjištěné výsledky jsou v souladu s výsledky dosavadních výzkumných šetření na téma otevřeného přístupu (např. Pehkonen, 1997, 2017; Sullivan a kol., 2000), ale kvalitativní studie o souvislostech mezi obvyklostí používaných postupů a sílou příklonu k otevřenému přístupu žádná k dispozici není.

Záležitost „menšinových” a „většinových” řešitelů nyní zkoumáme podrobněji. Navazující kvalitativní výzkumné šetření zaměřené na „menšinové” a „většinové” řešitele v různých skupinách respondentů a na upřesnění vymezení pojmů s touto tematikou souvisejících zpracovává publikace (Samková, 2020a). Toto šetření zahrnuje celkem 149 respondentů s různým typem studia učitelství pro první stupeň základní školy (denní magisterské studium, nebo kombinované rekvalifikační kurzy pro učitele druhého stupně základní školy libovolných aprobací) a s různou podobou kurzu aritmetiky (s prezentacemi různých postupů řešení slovních úloh na tabuli a jejich porovnáváním, s uváděním pouze jednoho postupu řešení ke každé slovní úloze, nebo zcela bez řešení konkrétních slovních úloh); jednou skupinou jsou i účastníci experimentálního kurzu. Nově provedená kvalitativní analýza písemných řešení slovních úloh vedla k upřesnění vymezení některých stávajících pojmů (stejný postup řešení, odlišný postup řešení, běžný postup, příznivce menšinových postupů, příznivce většinových postupů) a k vymezení nového pojmu (*smíšený řešitel* pro řešitele, který nepatří mezi příznivce menšinových ani většinových postupů, ale oba tyto typy postupů využívá rovnoměrně). Výsledky analýzy dat mimo jiné odhalily rozdílné podíly příznivců menšinových postupů v jednotlivých skupinách respondentů. Například ve skupině respondentů, která se účastnila experimentálního kurzu, tvořili příznivci menšinových postupů téměř polovinu z celé skupiny, ale ve skupině, která studovala stejný studijní program, ale při seminářích kurzu aritmetiky ke každé slovní úloze zapisovala na tabuli pouze jedno řešení, byla příznivců menšinových postupů méně než šestina. Přesná identifikace faktorů ovlivňujících podíl příznivců menšinových postupů mezi řešiteli matematických úloh však musí být předmětem dalšího zkoumání.

Obrázky Concept Cartoons v této studii částečně potvrdily svou schopnost sloužit jako nástroj pro zkoumání znalostí obsahu v matematice, na základě dvou z těchto obrázků jsme porovnávali, do jaké míry respondenti uplatňovali otevřený přístup při řešení úloh na začátku a na konci kurzu. Data získaná prostřednictvím zbylých osmi Concept Cartoons byla příliš roztříštěná pro souhrnné kvalitativní zpracování, ale budou využita ve výzkumném šetření zaměřeném na možnosti smíšené diagnostiky znalostí budoucích učitelů (kapitola 4.3).

Respondenty, kteří se v akademickém roce 2014/15 zúčastnili tohoto výzkumného šetření, jsme sledovali dlouhodobě, i po skončení experimentálního kurzu. Kolegyně Alena Hošpesová pro ně v následujícím akademickém roce 2015/16 připravila povinný dvousemestrální kurz didaktiky matematiky, na jehož seminářích byl vytvořen prostor pro badatelsky orientované aktivity (řešení badatelských úloh, jejich didaktické rozbory, tvorbu badatelských úloh). Společně s kolegyní Marií Tichou jsme pak zrealizovali nové výzkumné šetření (Samková, Hošpesová & Tichá, 2016), které kromě písemných dat získaných během experimentálního kurzu aritmetiky a během seminářů kurzu didaktiky matematiky zahrnovalo také data z videozáznamů pořízených během matematických výstupových praxí konaných v letním semestru akademického roku 2015/16. Výsledky tohoto šetření ukázaly, že přes téměř dvouletou zkušenost s badatelsky orientovanou výukou matematiky z pozice žáka si většina respondentů ponechala své představy o převážně transmisivním charakteru matematického vyučování: při své pedagogické praxi nepodporovali diskusi ve třídě, nebyli otevřeni k neočekávaným vstupům do diskuse a nedostatečně reagovali na podněty žáků. Zaznamenané pozitivní změny v postojích k matematice a v síle příklonu k otevřenému přístupu tak nebyly dostatečným impulsem pro mnohem komplexnější změnu v přístupu k vlastnímu matematickému vyučování.

Omezení výzkumu

Jako u každé empirické studie založené na kvalitativním designu, i v tomto případě je hlavním omezením subjektivita výzkumu (při kódování, při interpretaci kódů aj.), malá velikost zkoumaného vzorku a nemožnost zobecňovat výsledky. Zároveň je však třeba připomenout, že výzkumu se zúčastnili všichni studenti z daného studijního ročníku.

Vzhledem k výhradně písemné podobě datových materiálů mohla být některá vyjádření respondentů při analýze dat nesprávně interpretována a není možné jednoznačně odlišit případy, kdy respondent neuměl reagovat, od případů, kdy se nesnažil nebo úmyslně nechtěl reagovat. Nicméně všechna výzkumná data k první specifické otázce (SVO1) byla získána během kontrolních písemných testů, jež jsou součástí oficiálního hodnocení účastníků kurzu (známky), čímž byla výrazně snížena pravděpodobnost výskytu případů, kdy se respondent nesnaží nebo úmyslně nechce reagovat.

Kapitola 4.2: Kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů prvního stupně základní školy prostřednictvím Concept Cartoons[38]

Empirická studie, kterou představuje tato kapitola, navazuje přímo na přípravnou studii z kapitoly 3.1. Přípravná studie ustanovila metodiku pro zkoumání didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů prostřednictvím obrázků Concept Cartoons a pro tento účel vybrala osm aritmetických obrázků Concept Cartoons. Devátý obrázek vznikl po skončení přípravné studie. Vybrané obrázky s doprovodnými otázkami nyní využijeme pro zkoumání didaktických znalostí obsahu u účastníků experimentálního kurzu.

4.2.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na výzkumnou otázku:

> S jakými didaktickými znalostmi obsahu v oblasti číselných oborů vstupují do kurzu didaktiky matematiky budoucí učitelé prvního stupně základní školy, kteří absolvovali dvousemestrální kurz aritmetiky zaměřený na systematické uplatňování otevřeného přístupu?

Výzkumný plán

Účastníky výzkumného šetření byli všichni účastníci experimentálního kurzu (kapitola 2.1), ale někteří z nich chyběli na některých seminářích, kde probíhal sběr dat. Z důvodu zachování autenticity dat nebyla data od absentujících účastníků získávána dodatečně, a tak kompletní sadu dat poskytlo 29 respondentů.

Všichni sledovaní účastníci přišli na vysokou školu bezprostředně po maturitě, bez zkušeností s vlastní výukou. Nezávisle na našem výzkumu se v první polovině akademického roku 2014/15 (tj. roku, kdy experimentální kurz probíhal) zúčastnili kurzu obecné didaktiky a týdenní náslechové praxe, v druhé polovině akademického roku 2014/15 se zúčastnili týdenní asistentské praxe a úvodních kurzů didaktiky českého jazyka, přírodovědy a tělesné výchovy.

Od účastníků šetření jsme sbírali písemné odpovědi na doprovodné otázky k obrázkům Concept Cartoons podobně jako v přípravné studii (kapitola 3.1). Na všech datových materiálech pracovali respondenti individuálně, v rámci seminářů experimentálního kurzu.

[38] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2016b) a upraven.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování a konstantní komparace (Švaříček, Šeďová a kol., 2014). Soustředili jsme se na projevy znalostí matematického obsahu a didaktických znalostí matematického obsahu.

4.2.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat

Sběr dat proběhl ve dvou etapách, v únoru 2015 (tj. na začátku druhé poloviny kurzu aritmetiky) a v říjnu 2015 (tj. po skončení kurzu aritmetiky, na úvodním semináři kurzu didaktiky matematiky). V první etapě byly respondentům předloženy pracovní listy se čtyřmi obrázky Concept Cartoons na téma přirozená čísla (které se probíralo v první polovině kurzu aritmetiky) a v druhé etapě pracovní listy se třemi obrázky Concept Cartoons – jedním na téma přirozená čísla, jedním na téma desetinná čísla a jedním na téma zlomky. Pracovní listy byly opatřeny stejnými pokyny a časovými dispozicemi jako v přípravné studii (viz kapitola 3.1.2). Zbylé dva obrázky Concept Cartoons vybrané v přípravné studii byly ponechány pro pozdější testování a do této studie nejsou zahrnuty.

Analýza dat

Během analýzy dat bylo nejprve provedeno otevřené kódování veškerého materiálu. Vzniklé kódy byly rozděleny do kategorií:

A. rozpoznání správného/chybného tvrzení v bublině (např. kódy „správný názor považuje za chybný”, „nedokáže se rozhodnout o správnosti”);
B. vlastní respondentovy chyby a omyly, které se vyskytly v rámci vysvětlování a rad (např. kódy „plete si celek a část”, „chybný obrázek”, „neporozuměl zadání úlohy”);
C. rozpoznání postupů v bublinách a jejich podstaty (např. kódy „neuvedena příčina chyby”, „jen porovnává svůj výsledek a bublinu”, „odhalil chybný krok”, „jasné vysvětlení”, „nerealistická představa”, „příliš obecné”, „neúplná identifikace příčiny”);
D. rozlišování mezi identifikací chyby, její příčinou a její nápravou (např. kódy „rozlišuje IPN”, „nerozlišuje IPN”, „jedna odpověď pro otázky 3, 4, 5”);
E. prázdná bublina (např. kódy „nevyplněno”, „alternativní postup správný”, „alternativní postup chybný”, „nerealistické představy”, „3 a 3 je 33, 8 a 9 je 89”).
F. největší (ne)souhlas (např. kód „nejvíc nesouhlasí s Honzou”);
G. formální zpracování (např. kódy „pečlivě dodržuje členění podle bodů”, „odpovědi píše vedle bublin”, „používá slovo číslo místo číslice”, „30 + 30 = 60 + 17 = 77”);
H. orientace v obrázku a kontextu (např. kódy „nespojila si bubliny se jmény”, „považuje za správné dva různé výsledky početního příkladu”);
I. zatím nezařazeno (např. kódy „zajímavé”, „nejasné”).

Byla použita metoda konstantní komparace, data byla opakovaně pročítána a v případě potřeby opatřována novými kódy, kódy byly opakovaně porovnávány s daty i mezi sebou, upravovány a přerovnávány. Pro lepší orientaci byl každý kód opatřen znaménkem „+” nebo „–” podle toho, jestli jemu příslušné sekvence považujeme za pozitivní nebo negativní z hlediska (didaktické) znalosti obsahu. Během procesu konstantní komparace byl přeorganizován i seznam kategorií:

- kódy z kategorie I byly průběžně upravovány a umisťovány do jiných kategorií, až byla nakonec kategorie I vyprázdněna a zrušena;
- kategorie H byla zrušena a její kódy rozděleny mezi kategorie B a G;
- kategorie G byla nakonec také zrušena a její kódy buď vyřazeny (např. kód „nespojila si bubliny se jmény”), přesunuty do kategorie D (např. kód „pečlivě dodržuje členění podle bodů”), nebo přesunuty do kategorie B (např. kód „používá slovo číslo místo číslice”);
- během jedné z úvodních fází procesu komparace vznikla také nová kategorie sdružující nově vzniklé kódy související s radami dětem (např. kódy „pěkně formulovaná rada”, „příliš obecná rada”, „rada jako popis toho, co je špatně”), ale časem byla zrušena z důvodu přílišné provázanosti s kategoriemi C a D; její kódy byly přesunuty do těchto dvou kategorií, některé duplicitně.

Do další fáze zpracování dat tak zůstaly kategorie A až F.

Kódy byly komparovány v rámci jednotlivých Concept Cartoons i v rámci reakcí jednotlivých respondentů. Při druhém způsobu se opakovaně negativně projevovala nesourodost dat daná různou odezvou na různé kompozice Concept Cartoons. Pro lepší přehlednost struktury dat a kódů jsme tak systém obohatili o novou kategorii kódů – o kódy vyjadřující se ke kompozici obrázku (typ textů v bublinách, počet bublin se správnou odpovědí, počet řešení zobrazené úlohy, typ a množství chyb v bublinách apod.). Následné komparace byly prováděny v rámci Concept Cartoons se stejnými kompozičními kódy.

Jako kategorie s nejvyšší nasyceností dat byly identifikovány kategorie A, C a E, tedy kategorie související s tou částí didaktických znalostí obsahu, která zahrnuje schopnost znát a rozpoznat různé běžné strategie řešení a schopnost znát a rozpoznat běžné žákovské miskoncepce a jejich pravděpodobné zdroje.

4.2.3 Obecná zjištění

Zjištění výzkumného šeření představíme nejprve v obecné podobě, poté je budeme ilustrovat konkrétními datovými úryvky. Odkazy na datové úryvky budeme uvádět v tvaru: číslo respondenta/jméno dítěte, na které v úryvku respondent reaguje. Respondenti tohoto výzkumného šetření mají kódová označení začínající písmenem „S”.

Přestože respondenty výzkumu byli budoucí učitelé, kteří se ještě nezúčastnili žádného kurzu didaktiky matematiky, tak získaná data odhalila několik respondentů s didaktickými znalostmi obsahu na vysoké úrovni. Tito respondenti na pracovních listech

- uváděli různé alternativní postupy řešení (např. respondenti S4/Pepa, S5/Pepa, S10/Pepa), a to i ty „chytré“, které výhodně využívají nějakých specifických souvislostí a prokazují tak procedurální flexibilitu svých autorů (např. S3/Pepa, S26/Pepa);
- poznávali různé žákovské miskoncepce (např. S9/Eva, S11/Honza, S16/Honza, S19/Honza, S30/Pavla, S31/Pavla+Radek);
- uměli nalézt chybu v postupu a jasně zdůvodnit, proč k ní došlo a jak je možné ji opravit (např. S3/Honza, S4/Pavla+Karel+Radek, S9/Honza, S16/Honza, S19/Honza);
- měli snahu hledat v chybných postupech správné kroky a na těch postavit rady dětem, tj. jejich rady byly konstruktivní (např. S3/Honza, S3/Eva, S9/Honza, S16/Honza, S19/Honza);
- vhodně využívali vizualizaci (S2/Tonda, S4/Tonda, S24/Tonda, S22/Tonda);
- dokázali správně provést zkoušku u úlohy, kterou sami neřešili, a dětem s chybnou odpovědí dokázali vysvětlit, proč jejich názor nemůže být správný (např. S6/Tonda+Pavla+Radek, S10/Pavla+Karel+Radek).

Zároveň data odhalila i respondenty s nízkou úrovní didaktických znalostí obsahu, kteří

- jako možné alternativní žákovské postupy řešení nabízeli nerealistické mylné představy (např. S11/Iva, S29/Iva);
- jako možná vysvětlení neznámých postupů nabízeli nerealistické mylné představy (např. S1/Tonda, S21/Tonda) nebo představy zcela nesouvisející se zadáním úlohy (např. S15/Tonda);
- nesnažili se nebo nebyli schopni v chybných postupech hledat správné kroky, v důsledku toho byly jimi určené příčiny chyb a jejich rady příliš obecné (např. S13/Eva, S17/Honza);
- místo konstruktivních oprav postupu, který si zvolilo dítě, nutily dítě do jiného, „svého” postupu (např. S18/Eva);
- měli tendenci rozhodně odmítat postupy, které sami nepochopili (např. S12/Tonda) nebo které jim připadaly moc složité (např. S11/Honza).

Někteří respondenti ve svých odpovědích vykazovali snahu rozlišovat mezi identifikací chyby, příčinou chyby a nápravou chyby. Všichni byli v této snaze poměrně úspěšní. Výhradně se jednalo o respondenty, u kterých jsme i v jiných ohledech odhalili vyšší úroveň didaktických znalostí obsahu (např. S4/Pavla+Karel+Radek, S9/Honza, S19/Honza). Ostatní respondenti (podobně jako v přípravné studii z kapitoly 3.1 tvořili většinu ze sledovaného vzorku) poskytovali odpovědi, které mezi identifikací, příčinou a nápravou nerozlišovaly (např. S3/Honza, S12/Tonda, S16/Honza).

Výše uvedená zjištění nyní podrobně doložíme konkrétními úryvky z pracovních listů. Pro tento účel jsme vybrali data náležející ke dvěma obrázkům Concept Cartoons, na kterých většina bublin obsahuje postupy a výsledky, právě jedna bublina je správně (prázdnou bublinu nepočítáme) a úloha má právě jeden správný výsledek.

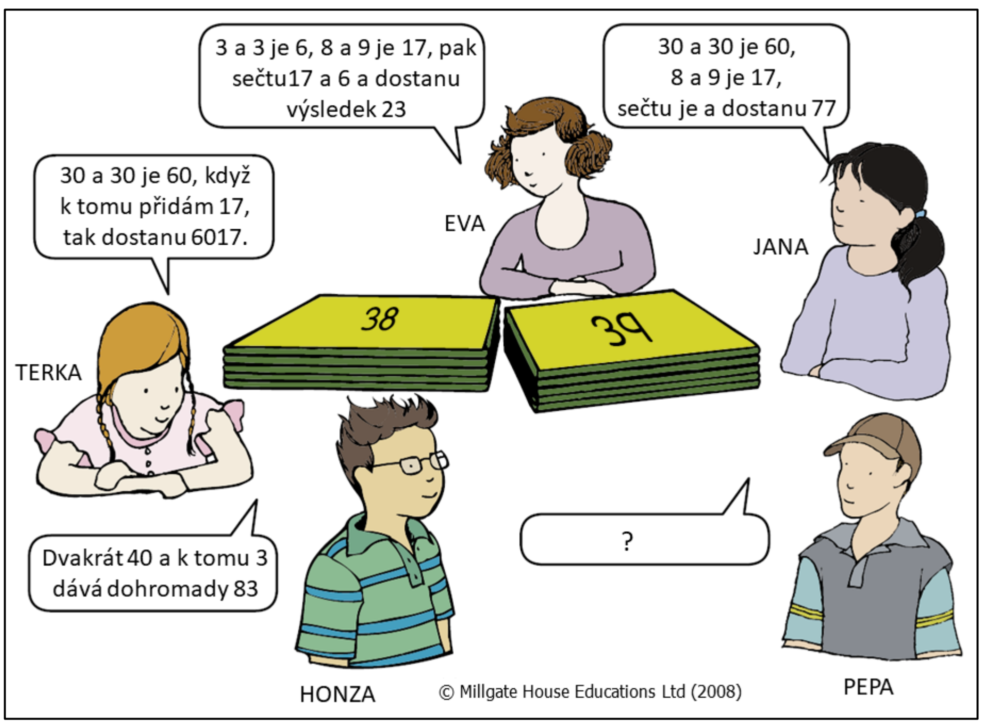
Datové úryvky budeme třídit podle jednotlivých bublin, na které respondenti v úryvcích reagovali. Přepisy datových úryvků budeme uvádět ve tvaru:

číslo respondenta číslo otázky odpověď nebo část odpovědi na tuto otázku

Pokud respondent své odpovědi nečlenil podle čísel otázek, bude číslo otázky v přepisu vynecháno.

4.2.4 Datové úryvky – Concept Cartoon na téma sčítání dvojciferných čísel

Concept Cartoon na obrázku 4.5 je překladem originálního obrázku (Dabell a kol., 2008: č. 2.3). Osvědčil se v přípravné studii, a tak jsme ho nezměněný zařadili i do vlastního výzkumu. Jeho tématem je sčítání do 100, konkrétně početní příklad 38 + 39. Obsah bublin byl vytvořen na základě jednoho obvyklého, jednoho méně obvyklého a jednoho tvůrčího žákovského postupu pro pamětné sčítání (více o různých žákovských postupech a mylných představách souvisejících s tímto tématem uvádí např. Hošpesová, 2003; Hansen, 2011).



Obrázek 4.5: Concept Cartoon *Honza*; obrázek převzat z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 2_3), doplněna jména dětí, vlastní překlad

Obvyklý bývá postup spočívající v rozkladu na desítky a jednotky, desítky jako první, tedy posloupnost myšlenkových kroků 30 + 30 = 60, 8 + 9 = 17, 60 + 17 = 77. Méně obvyklý je postup sčítající desítky zvlášť a jednotky zvlášť, opět desítky jako první, tedy 3 + 3 = 6, 8 + 9 = 17, 6 desítek + 17 = 77. Příkladem tvůrčího postupu je využití blízkosti obou čísel ke stejné desítce (kombinace dvojí kompenzace a dvojnásobku), tedy například posloupnost myšlenkových kroků 2 · 40 = 80, 40 – 38 = 2, 40 – 39 = 1, 2 + 1 = 3, 80 – 3 = 77. Do jedné bubliny byl vložen postup správný, do ostatních postup s chybou v některém kroku.

Honza

Vysokou hustotu kódů souvisejících s didaktickými znalostmi obsahu vykazovaly reakce na Honzovu bublinu obsahující tvůrčí postup s chybou v posledním kroku. Někteří respondenti Honzův postup dokázali ocenit a upozornili ho na chybu v posledním kroku:

> S3 Honza – Fajn nápad, ale zapomněl, že při vytvoření dvou čtyřicítek zvýšil jedno číslo o 2 a druhé o 1 (celkem o 3), proto je musí od 80 (40 + 40, tedy 2 · 40) odečíst, nikoliv číslo ještě zvyšovat.
>
> S16 Honza také zvolil správný postup, ale v posledním kroku udělal chybu, kdy 3 přičetl, místo odečetl.
> Vysvětlení: Když přidá do jedné 40 2 navíc a do druhé 1 navíc, potom tato čísla musí od výsledku odečíst.
>
> S19 1) Nejvíce souhlasím s názorem Honzy (kdyby byl správně)
> 4) Honza si vypočítal součet nejbližších desítkových čísel, ale rozdíl neodečetl, ale přičetl.
> 5) Honzo, sčítal jsi větší čísla než původní, musíš tedy rozdíl odečíst, ne přičíst.

Část respondentů ale Honzu označila jako toho, s kým nejvíce nesouhlasí. A to i přesto, že jeho postup a chybu v něm dokázali odhalit i zdůvodnit:

> S9 2) S Honzou.
> 4) Honza – číslo 3 měl od celkového součtu odečíst (ne přičíst).
> 5) Honza – musím si uvědomit, že do 40 mi chybí 2 a do další 40 mi chybí 1 (tzn., že nemám celé 40ky a musím od nich odečíst to, co mi chybí)
>
> S11 Honza – mohl by si udělat 2x40, ale pak tu trojku by si musel odečíst a ne přičíst. (Honza si spletl odčítání a sčítání).
> Nejvíc nesouhlasím s Honzou. Je to moc složité. Zbytečně.

Někteří respondenti sice odhalili pravděpodobnou úvahu stojící za Honzovým postupem, ale chybu v ní se nesnažili (nebo nebyli schopni) objasnit. V důsledku toho byly jimi poskytnuté rady příliš obecné:

> S17 4) Honza podle mne zaokrouhlil obě dvě čísla a ty vynásobil dvěma.
> Potom asi přičetl sečtená čísla, která chyběla do 40 na obou stranách (pouze domněnka).
> 5) Viz 4) + procvičit sčítání a odčítání

Eva

Také reakce na Evinu bublinu vykazovaly vysokou hustotu kódů souvisejících s didaktickými znalostmi obsahu.

Někteří respondenti dokázali Evin postup obhájit:

S3 Eva – Úvaha by byla bývala správná, kdyby Eva nezapomněla, že 3+3 jsou z řádu desítek, nikoliv jednotek. Pak by tedy výslednou šestku přičetla pouze k jedničce z čísla 17. Dostala by výsledek 77.

Jiní se v něm nedokázali orientovat, což někdy vedlo k příliš obecným určením příčin chyb či k nucení dítěte do jiného postupu:

S13 2) Eva.
4) Eva – neumí rozeznat desítky od jednotek.

S5 2) Rozhodně nesouhlasím s Evou
3) Eva – nemohu sčítat čísla 3+3, protože 3 je na místě desítek, tudíž je to číslo 30.

S18 4) Eva: 3 a 3 je 6 → neuvědomila si, že 3 vyjadřují počet desítek, tudíž <u>musí</u> počítat 30 a 30 je 60

Terka

Přestože postup Terky je z nabízených variant asi nejvíce problematický a mohl by indikovat hluboké neporozumění, mezi respondenty vyvolal nejmenší znepokojení. Obvykle se spokojili s konstatováním, že Terka čísla místo sečtení pouze dala za sebe, ale nepřikládali tomu žádný větší význam:

S13 4) Terka – sečetla desítky zvlášť a jednotky zvlášť a myslela si, že se to píše vedle sebe.
5) Terka – 30 a 30 je správně, 17 také, ale 60 a 17 měla sečíst a ne je napsat vedle sebe.

Objevili se však i respondenti, kteří Terku uvedli jako toho, s kým rozhodně nesouhlasí:

S4 2) Terka
5) Terko, nepleť si „přidat“ a „sčítat“. V příkladu musíme sečíst 60 a 17, ne přidat.

Pepa

Do prázdné Pepovy bubliny respondenti zpravidla navrhovali různé správné alternativní postupy výpočtu součtu 38 + 39, například rozdělení obou sčítanců na jednotky a desítky, rozdělení druhého sčítance na desítky a jednotky a jejich postupné přičítání k prvnímu sčítanci, písemné sčítání, vyrovnání, využití blízkosti sčítanců a dvojnásobku menšího z nich, opravený Honzův postup:

S5 6) Nejprve sečtu řády 10, 30 + 30 = 60, poté sečtu řády jednotek, 8 + 9 = 17. Poté tyto čísla sečtu, 60 + 17 a dostanu číslo 77.

S10 6) 2 · 30 = 60, k tomu 9 je 69 a pak ještě 8 => 77

S11 6) 38 + 30 = 68, 68 + 9 = 77

S26 6) Z čísla 38 si jedničku půjčím a přidám jí k číslu 39 => 40 + 37 = 77. Lépe se to počítá, protože tam není přechod přes desítku.

S3 6) 38 a do 40 zbývají 2, které si půjčím z 39. Takže mi zbyde 40 + 37 = 77.

S4 6) (38 · 2) + 1 = 77

S18 6) Dvakrát 40 a odečteme 3.

Respondenti, kteří do bubliny navrhli nesprávný postup, nabízeli různé mylné představy o roli číslic a řádů v desítkové soustavě:

S23 6) (3 + 3) = 6, (8 + 9) = 17, 38 + 39 = 617

S16 6) Žák může zapomenout připočíst jedničku ve druhém kroku, kdy 8 + 9 = 17, 7 píšu, 1 si pamatuju → zapomene na ni, výsledek mu vyjde o 10 menší

Některé postupy se na první pohled podobaly postupům Evy nebo Terky:

S28 6) 3 a 8 je 11, 3 a 9 je 12, pak sečtu 11 a 12 a dostanu výsledek 23

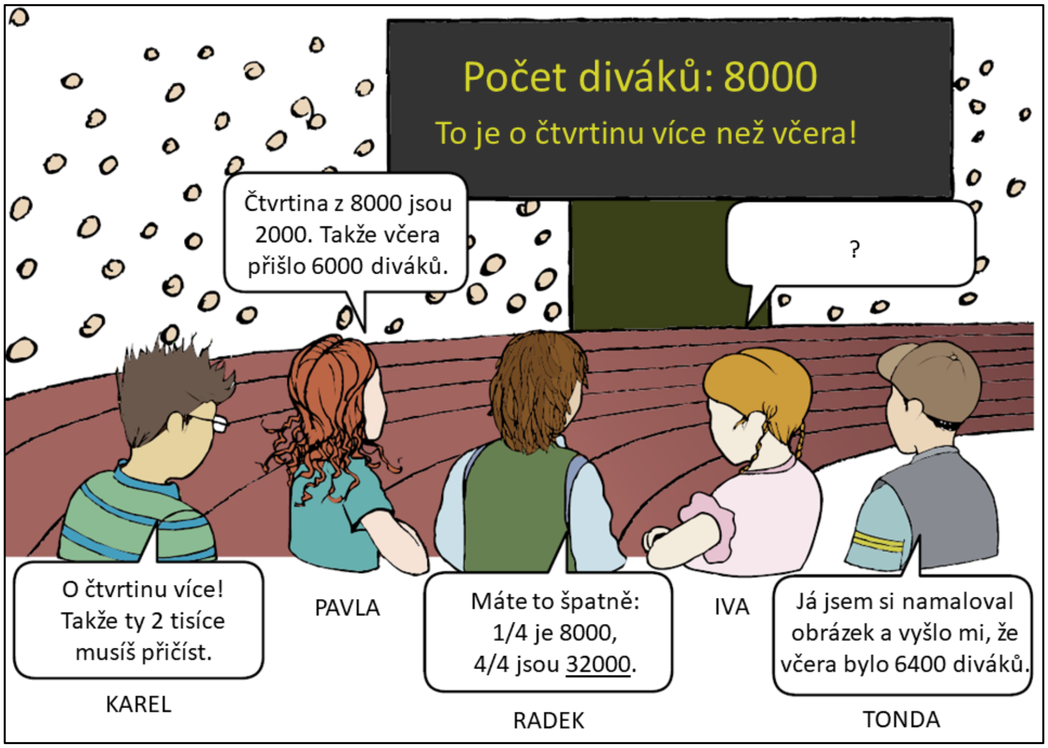
S27 6) 3839 → složím nové číslo

4.2.5 Datové úryvky – Concept Cartoon na téma změna vyjádřená zlomkem

Tento Concept Cartoon o zlomcích (obrázek 4.6) vznikl až po skončení přípravné studie. Při jeho tvorbě jsme se inspirovali jednou z méně úspěšných maturitních úloh[39]. Úloha je sice maturitní, ale je založena na změně vyjádřené zlomkem, a tak patří do kurikula prvního stupně základní školy. Z originální sady Concept Cartoons bylo použito pouze pozadí obrázku s dětmi a prázdnými bublinami (Dabell a kol., 2008: č. 1.2).

Při tvorbě tohoto obrázku jsme nově použili takovou kombinaci typů textů v bublinách, která se v originální sadě Concept Cartoons (Dabell a kol., 2008) nevyskytuje: tři bubliny obsahují postup řešení a výsledek (chybný), čtvrtá bublina obsahuje jen výsledek (jediný správný) a odkaz na neznámý obrázek, který prý dítěti pomohl při řešení. Obsahy bublin byly vytvořeny na základě rozboru maturitních výsledků (Řídká a kol., 2015) a na základě mylných představ žáků uvedených v publikaci Tiché a Macháčkové (2006). Bublina vlevo nahoře obsahuje nejčastěji se vyskytující mylný názor.

[39] Text úlohy z didaktického testu pro podzimní termín maturit v roce 2015: „Na koncert přišlo 800 osob, tedy o čtvrtinu osob více, než organizátoři očekávali. Vypočtěte, kolik osob organizátoři očekávali.” (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2015: 2). Úspěšnost úlohy při maturitě byla 33 procent, nejčastější chybná odpověď byla „600 osob” (Řídká a kol., 2015).



Obrázek 4.6: Concept Cartoon *Stadion*; šablona obrázku se stadionem, prázdnou cedulí, dětmi a prázdnými bublinami převzata z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 2_16)

Na rozdíl od úlohy z obrázku 4.5 bylo pro respondenty obtížné bubliny z obrázku 4.6 správně posoudit, a tak odpovědi na otázku 3 byly dvojího typu: souhlas s Pavlou (chybný) nebo souhlas s Tondou (správný).[40]

Pavla vs. Tonda

Respondenti, kteří souhlasili s Pavlou, často rozhodně nesouhlasili s Tondou. Někteří z nich zároveň přiznali, že je to z toho důvodu, že Tondovi vůbec nerozumí, že nechápou, jakým postupem mohl k číslu 6 400 dojít:

S12	2)	Nesouhlasím s Radkem a Tondou.
	3) = 4) = 5)	Tondův názor není správný. Jeho uvažování jsem zcela nepochopila.

Část respondentů uváděla opravdu zvláštní vysvětlení toho, jak Tonda mohl dojít ke svému výsledku:

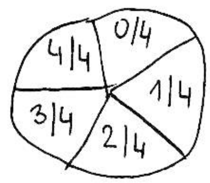
S15	4) = 5)	Tonda počítal 80 · 80.

[40] Naši respondenti byli o něco úspěšnější než maturanti, s Tondou jich souhlasilo 41 procent, zbylých 59 procent souhlasilo s Pavlou.

S1 Tonda – tento názor je nejvíce chybný → nejprve odečetl čtvrtinu (2000) a poté přičetl z každé čtvrtiny 100

S21 4) Tonda – zřejmě si dělal „koláč” a do počtů započítal i nulu → tedy výsledek mu vyšel 8000 – 1600 = 6400

Respondent S21 doplnil svou úvahu obrázkem (obrázek 4.7).



Obrázek 4.7: Ukázka z pracovního listu respondenta S21

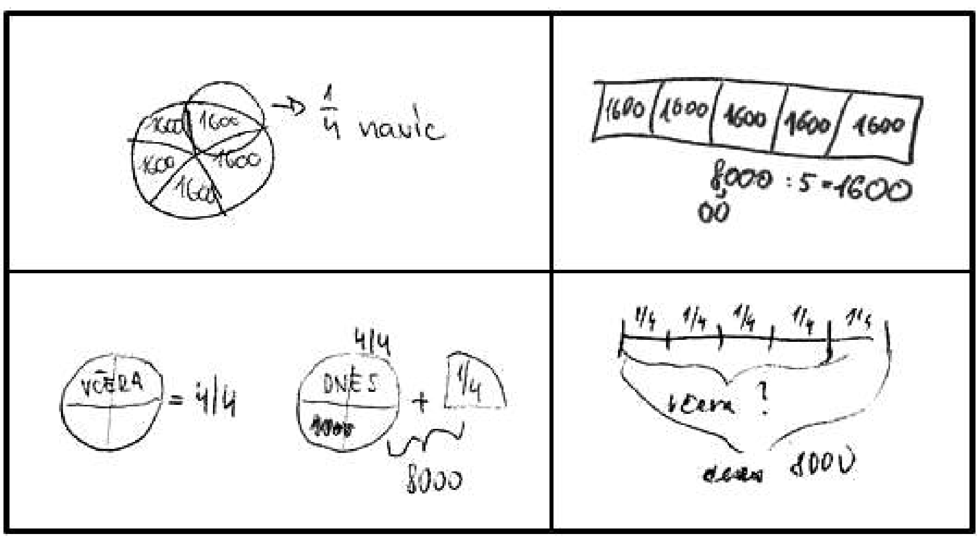
Objevily se i popisy velice pravděpodobných způsobů, jak by Tonda mohl postupovat, avšak tyto postupy jejich autoři zároveň odmítli jako nesprávné:

S9 2) Tonda

4) Tonda – nejspíš si namaloval obrázek, kde měl čtyři čtvrtiny a tu jednu ještě přičetl, tudíž částku 8000 dělil 5.

5) Tonda – namaluj si obrázek a ten počet 8000 rozdělíš do kolika dílů, když chceš zjistit 1/4?

Respondenti, kteří s Tondou souhlasili, podpořili svůj souhlas různě. Někteří nabídli obrázek (viz obrázek 4.8), jiní si sami vyřešili úlohu bez obrázku a porovnali svůj výsledek s Tondovým.



Obrázek 4.8: Ukázky ze čtyř různých pracovních listů, na kterých respondenti souhlasili s Tondou (S24, S4, S22 a S2)

Respondenti souhlasící s Tondou pak zpravidla uměli nalézt chyby v postupech ostatních dětí a zdůvodnit, proč k nim došlo, případně jak je možné chyby opravit:

S30 4) Pavla si neuvědomila, že se ta čtvrtina počítá z předchozího celku. Že dnes je diváků včerejší celek + jeho čtvrtina = 8000

S31 4) Karel – vycházel z čísla 8000, tedy z dnešního počtu diváků, ne ze včerejšího
Pavla – totéž jako Karel

S4 4) Pavla – Přičítala čtvrtinu z dnešního místo ze včerejšího.
Radek – Počítal, že dnes je čtvrtina ze včera, ne o čtvrtinu více.
5) Pavla, Karel – Počítáme o čtvrtinu více než včera, takže si musíme spočítat 1/4 ze včerejška, pomohl by Tondův obrázek, to by chybu napravilo.[41]
Radek – Přečti si pozorně zadání: čtvrtina z něčeho ≠ o čtvrtinu více

Mezi respondenty byli i takoví, kteří úlohu vůbec neřešili. Správnost Tondova výsledku ověřili zkouškou a u ostatních postupů uvedli důvody, proč si myslí, že jsou chybné:

S10 3) Tonda – správně, 6400 + čtvrtina = 8000
Pavla – čtvrtina ze včerejšího počtu, ne dnešního
Radek – špatně, když včera bylo nějaké množství a dnes o 1/4 více, tak včera nemohlo být více lidí než dnes (větší číslo – 32000 – hloupost)

S6 3) Pavla – kdyby včera přišlo 6000 diváků, jedna čtvrtina z nich by byla 1500. Což nám nedá 8000, ale pouze 7500.
Karel – kdyby přišlo 8000 diváků včera, byla by jedna čtvrtina 2000 a ty bychom dnes přičetli. 8000 diváků přišlo ale až dnes.
Radek – kdyby byla pravda to, co říkal, v zadání by bylo psáno:
Počet diváků: 8000, to je čtvrtina.

Iva

Obsah Iviny bubliny závisel na výsledku, který respondent považoval za správný. Respondenti, kteří považovali za správný Tondův výsledek, obvykle nabízeli „nápovědu" k Tondovu výsledku:

S10 6) 8000 je 5/4

S22 6) Myslím, že včera bylo o 1600 diváků méně.

S4 6) Je to 6400, protože podle obrázku je to 4/5 z 8000.

Respondenti, kteří považovali za správný Pavlin výsledek, obvykle nabízeli obrázek ilustrující její postup – koláč rozdělený na čtvrtiny (S16, S18) nebo „nápovědu" o 8000 jako 4/4 (S12). Některým k odhalení chyby v úsudku nepomohlo ani provedení alternativního postupu:

[41] Tondův obrázek od respondenta S4 je na obrázku 4.8 vpravo nahoře.

S28 6) x diváků… včera
x + 1/4 d…. 8000

8000 : 4 = 2000
2000 · 3 = 6000

V odpovědích se také objevily nerealistické mylné představy:

S29 6) Čtvrtina z 8000 je 6000, takže včera přišlo jen 2000 diváků.

S11 6) Včera přišlo 4000 lidí. Protože 1/4 je 4000.

Na rozdíl od prvního obrázku Concept Cartoon (kapitola 4.2.4) se mezi návrhy na obsah prázdné Iviny bubliny vůbec nevyskytovaly alternativní postupy řešení.

4.2.6 Diskuse

Výsledky výzkumného šetření jsou v souladu s poznatky obdobných šetření zabývajících se didaktickými znalostmi obsahu. Podobně jako ve studiích (Kleickmann a kol., 2013; Krauss, Baumert & Blum, 2008) jsme ukázali, že neformální základy didaktických znalostí obsahu mohou někteří budoucí učitelé úspěšně získávat z vlastních zkušeností v roli žáka na základní škole, střední škole a během nedidaktických univerzitních kurzů, tedy již před univerzitními kurzy didaktiky matematiky a před vlastní matematickou pedagogickou praxí.

Někteří naši respondenti prokázali dobré znalosti učebních úloh (různých způsobů jejich řešení) a žákových miskoncepcí. Zároveň však výzkum odhalil i respondenty, kteří nejsou schopni rozlišovat mezi identifikací chyby, příčinou chyby a nápravou chyby a kteří mají o možném uvažování žáků nerealistické mylné představy. Tyto skutečnosti odpovídají výsledkům podobných výzkumů zaměřených na didaktické znalosti obsahu u budoucích učitelů prvního stupně (např. Turnuklu & Yesildere, 2007).

Zjištění našeho šetření odkazují na didaktické znalosti obsahu vztahující se téměř ke všem číselným oborům vyučovaným na prvním stupni základní školy. V tomto rysu se šetření podobá studii (Lim-Teo a kol., 2007) a studiím prováděným v rámci projektu COACTIV (Krauss, Baumert & Blum, 2008), ale projekt COACTIV sledoval jinou skupinu respondentů – učitele matematiky na druhém stupni základní školy a na nižších stupních víceletých gymnázií a jejich žáky. Takový obecný tematický přístup nebývá běžný, většina doposud provedených výzkumů didaktických znalostí obsahu se soustředila pouze na jedno dílčí matematické téma (viz Depaepe a kol., 2013).

Podobně jako např. ve studiích (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Depaepe a kol., 2015) se v naší studii potvrdil úzký vztah mezi znalostmi obsahu a didaktickými znalostmi obsahu, neboť u úlohy s nižšími nároky na znalosti obsahu jsme zaznamenali více typů pozitivních projevů didaktické znalosti obsahu (nabídky různých správných alternativních postupů, snaha hledat v chybných postupech správné kroky a na těch postavit rady dětem), kdežto u úlohy s vyššími nároky na znalosti obsahu bylo odhaleno mnohem více typů projevů nedostatečné didaktické znalosti obsahu (nabídky alternativních postupů v podobě nerealistických mylných představ, vysvětlení neznámých postupů vybudovaná na základě nerealistických mylných představ nebo představ zcela nesouvisejících se zadáním úlohy).

Na rozdíl od přípravné studie (kapitola 3.1) žádný z respondentů neposkytl v odpovědi na pátou otázku radu založenou na prostém číselném porovnání správného a chybného výsledku (tak jako to udělal respondent A10 v kapitole 3.1.3 v reakci na Pepovu a Petrovu bublinu). Nicméně odpovědi na pátou otázku umožňují zjišťovat, zdali respondenti poskytují vysvětlení orientovaná na principy (anglicky *principle-oriented explanations*), jež obsahují konceptuální odůvodnění použitých postupů (a tak umožňují rozvoj konceptuálních znalostí žáků), nebo vysvětlení orientovaná na postupy (anglicky *procedure-oriented explanations*), která použité postupy komentují bez konceptuálního odůvodnění. Přestože výzkumné studie zaměřené na povahu vysvětlení poskytovaných učiteli obvykle upozorňují na neochotu učitelů poskytovat konceptuální odůvodnění použitých postupů a na tendenci učitelů význam těchto odůvodnění podceňovat (Lachner, Weinhuber & Nückles, 2019), většina našich respondentů v odpovědi na pátou otázku konceptuální odůvodnění nabídla.

Jako výzkumný nástroj jsme použili prostředí obrázků Concept Cartoons. Ukázalo se, že obrázky opatřené sadou doprovodných otázek mohou být vhodným nástrojem pro zkoumání didaktických znalostí obsahu, hlavně v oblastech souvisejících se znalostí učebních úloh a se znalostí žákových poznávacích procesů (srov. Kleickmann a kol., 2013). V souladu se studiemi (Keogh & Naylor, 1999; Naylor a kol., 2007) se také potvrdila schopnost obrázků Concept Cartoons podněcovat řešitele obrázku k přednesení vlastního názoru na texty v bublinách a k odpovědím na otázky, i když na rozdíl od původních studií jsme Concept Cartoons použili v jiných kontextech: v matematice a v písemné podobě.

Obrázky Concept Cartoons jsme použili pro zjišťování reakcí budoucích učitelů na různé alternativní názory žáků, v jistém smyslu jsme tak vlastně u respondentů zkoumali neformální základy jejich schopnosti všímat si (Stehlíková, 2010), a to kategorie související s komentováním žákových promluv (kategorie *pupil commentary;* Vondrová & Žalská, 2015). Schopnost všímat si je zde výrazně ulehčena tím, že vybrané žákovy promluvy jsou umístěny do bublin a budoucí učitel je explicitně vyzván, aby se k nim vyjádřil; jedná se tedy konkrétně o schopnost interpretovat všimnuté.

Studie Depaepe(ové) a kol. (2015) vytýká některým předchozím výzkumům didaktických znalostí obsahu, že nezkoumají tyto znalosti nezávisle na znalostech obsahu, tj. že respondenti nejprve řeší nějakou úlohu, aby prokázali své znalosti obsahu, a potom se v kontextu té samé úlohy vyjadřují k didaktickým záležitostem. Dle názoru autorů studie tato závislost negativně ovlivňuje data související s didaktickými znalostmi obsahu. Při použití obrázků Concept Cartoons k žádné podobné závislosti nedochází, neboť vyřešení úlohy není požadováno, a tak respondenti mohou prokázat své didaktické znalosti obsahu i v případě, že úlohu neumí vyřešit – například tak, že správně provedou zkoušku výsledků nabízených dětmi, nebo že nezávisle na (jim neznámém) řešení úlohy dokážou dětem vysvětlit, proč některé postupy nemohou být správné – tak jako v datových úryvcích v kapitole 4.2.5.

Významnou komponentou obrázků Concept Cartoons je prázdná bublina, která umožňuje získat vhled do znalostí alternativních postupů a možných žákových miskoncepcí. Spektrum odpovědí našich respondentů bylo skutečně pestré, ale při zpětném pohledu na získaná data je vidět, že odpovědi byly zbytečně limitovány požadavkem uvést (pouze) jednu alternativu, která by mohla v prázdné bublině být (správnou, nebo chybnou). Potenciál této komponenty Concept Cartoons tak nebyl zdaleka vyčerpán. Pro další šetření by bylo vhodné nechat se inspirovat testovými úlohami ze studie (Kleickmann a kol., 2013) a otázku související s prázdnou bublinou rozdělit na dvě části a přeformulovat tak, aby respondenty vyzývala k uvedení co největšího množství možných alternativních postupů a co největšího množství možných žákových miskoncepcí. Takový přístup by pak mohl umožnit srovnání získaných dat např. s výzkumem (Tirosh, 2000), v rámci kterého byly odhaleny obtíže, jež mají budoucí učitelé s předvídáním chyb svých žáků. Výzkum zabývající se didaktickými znalostmi obsahu souvisejícími s dělením zlomků mj. ukázal, že ti budoucí učitelé, kteří jsou schopni chyby žáků předvídat, většinou předvídají jen procedurální chyby, tedy chyby v algoritmech nebo chyby na algoritmech založené. Naše data bohužel závěry tohoto typu neumožňují, protože respondenti do prázdných bublin nabízeli spíše alternativní správné postupy nebo rady, a tak je dat souvisejících s předvídáním chyb žáků velmi málo.

Poněkud problematickými se po přípravné studii (kapitola 3.1) jevily otázky zjišťující, s kterým dítětem na obrázku respondent nejvíce (ne)souhlasí. Otázky byly původně do sady zařazeny s úmyslem zkoumat spontánní reakce na názory v bublinách, ale při kódování dat nebylo možné určit, zda odpovědi na ně byly skutečně vypracovávány jako první. S jistým časovým odstupem lze konstatovat, že zařazení těchto otázek bylo pro šetření přínosem, ale že je třeba se také vrátit k původnímu úmyslu zkoumat spontánní reakce respondentů na názory v bublinách. Ve studiích (Krauss & Brunner, 2008; Pankow a kol., 2016, 2018) bylo pro obdobné účely využito počítačové prostředí. V první studii se respondentům postupně na monitoru objevovaly matematické úlohy s žákovou odpovědí a úkolem respondentů bylo se co nejrychleji rozhodnout, zda žák odpověděl správně, nebo špatně. V druhé a třetí studii bylo úkolem respondentů předvídat u úloh zobrazovaných na monitoru typické žákovské chyby. Taková uspořádání umožňovala zaznamenávat i časy, které respondenti potřebovali na svá rozhodnutí, a dávat je do souvislosti s obtížností úloh, se správností odpovědí jednotlivých respondentů apod. Jedním z dalších možných rozšíření našeho výzkumného šetření by tak mohlo být rozdělení sběru dat na dvě oddělené etapy: v první etapě předložit respondentům Concept Cartoons pouze s prvními dvěma doprovodnými otázkami, s velmi krátkým časovým limitem na odpovědi a možným využitím počítače; v druhé etapě pak již standardně s velkorysou časovou dotací předložit otázky třetí až šestou.

Dva obrázky Concept Cartoons, které byly v naší studii vybrané jako ilustrativní, mají kromě podobné kompozice (jedna bublina správná, ostatní nesprávné, žádná bublina nemá nejasnou nebo podmíněnou správnost) společnou ještě jednu záležitost: oba nepřímo diskutují roli jazyka v matematice, každý z odlišného pohledu. Concept Cartoon o pamětném sčítání dvojciferných čísel (obrázek 4.5) přispívá k diskusi o tom, kde leží hranice mezi neformálním vyjadřováním a matematickou terminologií, neboť Terka zde pro svou realizaci operace sčítání používá nevhodný význam neformálního výrazu přidávání. Concept Cartoon o změně vyjádřené zlomkem (obrázek 4.6) je založen na matematické úloze, která je obtížná kvůli matematickým vztahům, které jsou implicitně vyjádřené syntaxí zadání úlohy: řešitel úlohy musí vědět, že v popisu změny vyjádřené zlomkem se odkaz na celek vždy vyskytuje za částicí „než". Datové úryvky v kapitole 4.2.5 ukazují, že někteří respondenti si této skutečnosti nebyli vědomi. Obě úlohy Concept Cartoons tak ilustrují důležitost neopomíjení jazykových záležitostí při budování matematických znalostí (Schleppegrell, 2007; česky se hranici mezi neformálním a matematickým vyjadřováním věnuje například Kuřina, 1986).

Analýza dat získaných v reakci na Concept Cartoon o zlomcích nás dovedla k otázce, jaké povahy jsou miskoncepce o zlomcích u budoucích učitelů prvního stupně základní školy, k vytvoření navazujícího obrázku Concept Cartoon, který se problematickému tématu zlomků věnuje více do hloubky, a k empirické studii (se stejnými respondenty, ale realizované po skončení experimentálního kurzu), kterou představí kapitola 5.1.

Omezení výzkumu

Předložený výzkum má několik omezení: (1) zkoumaný vzorek je relativně malý a výsledky není možné zobecňovat; ale výzkumu se zúčastnili všichni studenti z daného studijního ročníku, v tomto smyslu jsou data reprezentativní; (2) zkoumány jsou jen některé komponenty didaktických znalostí obsahu, zcela opomenuty zůstávají znalosti související s cíli vyučování, s kurikulem a s výukovými strategiemi, znalosti reprezentací jsou zkoumány pouze částečně; (3) samotné Concept Cartoons jsou určitým omezením, neboť poskytují pouze úzký statický pohled na didaktické situace, ke kterým může ve třídě dojít; (4) výzkum je zaměřen kognitivně a nikterak nezohledňuje afektivní aspekty (osobnost učitele, jeho vztah k matematice a matematickému vzdělávání apod.); (4) vzhledem k písemné podobě pracovních listů mohla být některá tvrzení respondentů při analýze dat nesprávně interpretována a není možné jednoznačně odlišit případy, kdy respondent neuměl reagovat na nějakou zobrazenou situaci, od případů, kdy se nesnažil nebo úmyslně nechtěl reagovat.

Přes výše uvedená omezení považujeme předložený výzkum za relevantní sondu do didaktických znalostí obsahu budoucích učitelů. Získané výsledky poskytují přehled o reakcích jednotlivých respondentů na hypotetické názory žáků v různých matematicky zaměřených situacích. Zjištěné skutečnosti je možné využít v další profesní přípravě těchto respondentů, ale také v obecnějším kontextu: při tvorbě simulovaných reprezentací výukových situací, které explicitně obsahují učitele (např. viněty v kapitole 1.5.2).

Kapitola 4.3: Smíšená diagnostika znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů prvního stupně základní školy prostřednictvím Concept Cartoons[42]

Ve výzkumných šetřeních v kapitolách 4.1 a 4.2 byly Concept Cartoons využívány k diagnostice učitelových znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu, přičemž přístup k datům byl v obou případech kvalitativní. Tento kvalitativní přístup byl příležitostně obohacován o kvantitativní složku v podobě diagramů udávajících četnosti výskytu různých kvalitativních jevů (jako například v kapitole 4.1.3). Důležitost uplatňování kvalitativního přístupu v diagnostice znalostí prostřednictvím Concept Cartoons je neoddiskutovatelná, ale při dlouhodobé práci s respondenty nebo při práci s většími skupinami respondentů se začnou vynořovat nevýhody kvalitativního přístupu: nemožnost zobecňovat výsledky diagnostiky, vytvářet přehledné grafické charakteristiky respondentů, porovnávat je mezi sebou apod. Několik let jsme se s těmito nevýhodami potýkali, snažili se vylepšit parametry kvalitativního přístupu tak, aby se nevýhody oslabily. Výsledkem těchto snah bylo rozhodnutí zahrnout kvantitativní složku do diagnostiky trvale, smíšením kvalitativního a kvantitativního přístupu. Tímto smíšeným přístupem nechceme oslabit kvalitativní komponentu, ale naopak ji posílit o informace, které kvalitativní přístup není schopen poskytnout.

4.3.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na výzkumnou otázku:

> Jakým způsobem může kvantitativní složka obohatit kvalitativní podobu prostředí Concept Cartoons určenou pro zkoumání znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?

Výzkumný plán

Účastníky výzkumného šetření byli všichni účastníci experimentálního kurzu popsaného v kapitole 2.1. Do výzkumného šetření jsme jako datové materiály zařadili odpovědi na doprovodné otázky k obrázkům Concept Cartoons s aritmetickou tematikou, které jsme získali v rámci dvou předchozích kvalitativních výzkumných šetření, jež u účastníků kurzu zkoumala jejich znalosti obsahu (kapitola 4.1, sběr dat náležející k SVO1; 10 obrázků Concept Cartoons) a didaktické znalosti obsahu (kapitola 4.2; 7 obrázků Concept Cartoons). Z důvodu větší hustoty dat jsme účastníky kurzu v akademickém roce následujícím po skončení kurzu

[42] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a z vlastního překladu publikace (Samková, 2019a) a upraven.

požádali o vyplnění dalších 3 pracovních listů s obrázky Concept Cartoons a doprovodnými otázkami k didaktickým znalostem obsahu. Kompletní sadu dat poskytlo 23 respondentů.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu s využitím otevřeného kódování a konstantní komparace (Švaříček, Šeďová a kol., 2014). Pro účely dosažení komplexního porozumění znalostem budoucích učitelů jsme do dominantní kvalitativní složky paralelně vnořili složku kvantitativní, která využívala celočíselné skórování a deskriptivní statistiku. Cílem kvantitativního vnoření bylo získat možnost integrovat různé typy dat a tím obohatit kvalitativní popis u jednotlivých respondentů. K integraci kvalitativních a kvantitativních dat došlo v rámci analytické fáze i v rámci interpretační fáze výzkumu; Tashakkori a Teddlie (2010) takový případ označují jako vícefázovou integraci. Výsledný design je smíšeného typu; Tashakkori a Teddlie (2010) tento konkrétní typ označují jako *concurrent nested design*, Creswell a Plano Clark (2007) ho řadí mezi vnořené formy designu (anglicky *embedded*; srov. Vlčková & Lojdová, 2016).

4.3.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat – znalosti obsahu

Sběr dat ke znalostem obsahu se celý uskutečnil během experimentálního kurzu; respondenti byli požádáni, aby u deseti obrázků Concept Cartoons individuálně písemně odpověděli na dvě otázky: „Které děti na obrázku mají pravdu?" a „Proč?". V dalším textu budeme na tento způsob sběru dat prostřednictvím Concept Cartoons odkazovat jako na tzv. *krátkou verzi* (ve smyslu krátký seznam otázek). Každý z obrázků měl pět bublin, žádná z nich nebyla prázdná. Tento sběr dat byl součástí výzkumného šetření z kapitoly 4.1 (část k SVO1).

Jednotlivé obrázky se vztahovaly k různým tématům z aritmetiky prvního stupně základní školy (např. k algoritmu písemného sčítání, řazení desetinných čísel podle velikosti, slovní úloze založené na násobení a dělení přirozených čísel apod.), jen obrázky vztahující se k algoritmu písemného odčítání byly dva (obrázky 4.1a, 4.2a). Aby data ke znalostem obsahu byla tematicky vyvážená, vyřadili jsme obrázek 4.2a z datového souboru. Pro další zpracování tak zůstalo devět obrázků Concept Cartoons pokrývajících devět různých aritmetických témat.

Analýza dat – znalosti obsahu

Data ke znalostem obsahu jsme analyzovali kvantitativně: respondenti obdrželi jeden bod za každou bublinu, kterou správně posoudili, pokud své rozhodnutí správně odůvodnili. Za správná rozhodnutí bez správného odůvodnění nebyly přidělovány žádné body, stejně jako za rozhodnutí chybná. Za každý obrázek respondenti mohli obdržet od nuly do pěti bodů.

Každému respondentovi pak bylo přiděleno tzv. *krátké skóre*, vypočtené jako součet všech bodů za všech devět obrázků Concept Cartoons. Označení *krátké* odkazuje na krátkou verzi sběru dat. Protože obrázků Concept Cartoons ke znalostem obsahu bylo devět, tak maximální krátké skóre se rovnalo 45 bodům.

Během interpretační fáze bude vztah mezi konkrétními krátkými skóre a aritmetickým průměrem všech krátkých skóre přeměněn ve finální kategorie ke znalostem obsahu (tzv. krátké kategorie).

Sběr dat – didaktické znalosti obsahu

Sběr dat k didaktickým znalostem obsahu se uskutečnil během experimentálního kurzu (7 obrázků; tento sběr dat byl součástí výzkumného šetření, které popisuje kapitola 4.2) a půl roku po jeho skončení (3 obrázky; zcela nová data). Respondenti byli požádáni, aby ke každému obrázku individuálně písemně odpověděli na sadu šesti otázek (viz tabulka 4.3).

Tabulka 4.3: Pokyny k obrázkům Concept Cartoons při zkoumání didaktických znalostí obsahu

U každého obrázku okomentujte jednotlivé názory v bublinách takto: 1) Napište, s kterým názorem nejvíce souhlasíte, tj. který je Vám nejbližší. 2) Napište, s kterým názorem rozhodně nesouhlasíte. 3) Rozhodněte, které názory jsou správné a které chybné. Své rozhodnutí zdůvodněte. 4) U chybných názorů se pokuste odhalit, proč vznikly. 5) Vysvětlete autorům chybných názorů, kde udělali chybu. Poraďte jim, jak tuto chybu napravit. 6) Vymyslete text, který by mohl být v bublině s otazníkem – nezáleží na tom, jestli bude správný, nebo chybný. Může souviset s nějakým jiným správným řešením/postupem nebo nějakou další chybnou úvahou.

V dalším textu budeme na tento způsob sběru dat prostřednictvím Concept Cartoons odkazovat jako na tzv. *dlouhou verzi* (ve smyslu dlouhý seznam otázek). Každý z těchto obrázků měl pět bublin, jedna z nich vždy obsahovala pouze otazník (tzv. prázdná bublina, viz úvod kapitoly 1.6). Jednotlivé obrázky se vztahovaly k různým tématům z aritmetiky prvního stupně základní školy.

Jelikož odpovědi na otázky 1 a 2 nevyžadovaly žádné odůvodnění, tak nebyla zcela jasná jejich vazba na konkrétní znalosti respondentů. Proto jsme odpovědi na tyto dvě otázky vyřadili z datového souboru.

Analýza dat – didaktické znalosti obsahu

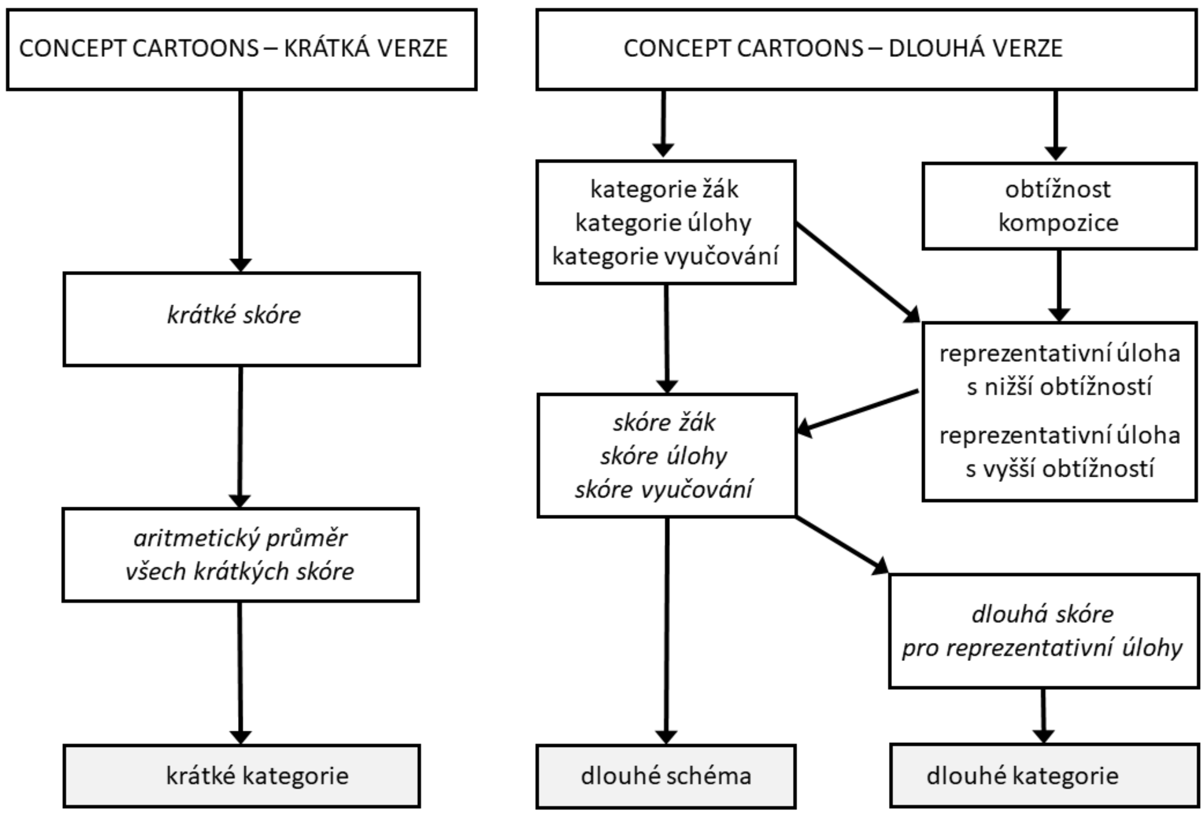
Data vztahující se k didaktickým znalostem obsahu jsme nejprve analyzovali kvalitativně, s využitím otevřeného kódování a konstantní komparace. Podobně jako v kapitole 4.2 jsme se soustředili na projevy související se znalostmi žákova porozumění, znalostmi úloh a znalostmi obsahu pro vyučování. Proces konstantní komparace však upozornil na roztříštěnost dat danou rozličnými charakteristikami jednotlivých obrázků Concept Cartoons. Hlavně se jednalo o rozličné množství a charakter relevantních dat v závislosti na obtížnosti obrázku Concept Cartoon, na počtu bublin se správnou odpovědí a na existenci bublin s nejasnou nebo podmíněnou správností. Tato roztříštěnost bránila dalšímu systematickému přístupu k datům, a tak v této fázi bylo přistoupeno k vnoření kvantitativní složky.

Za účelem vnoření byly obrázky roztříděny podle obtížnosti, kompozice (počtu správných bublin, počtu bublin s nejasnou nebo podmíněnou správností) a množství relevantních dat (počtu výskytů kvalitativních kódů vztahujících se k didaktickým znalostem obsahu). Pro další zpracování byly mezi obrázky s nejvyšším množstvím relevantních dat vybrány dva reprezentativní obrázky s odlišnou obtížností, ale podobnou kompozicí. Jako reprezentativní obrázek s nižší obtížností byl vybrán obrázek na téma pamětného sčítání dvojciferných čísel (obrázek 4.5), jako reprezentativní obrázek s vyšší obtížností byl vybrán obrázek na téma změny vyjádřené zlomkem (obrázek 4.6). Každý z těchto obrázků má jednu správnou a tři nesprávné bubliny, přičemž správnost bublin není nejasná ani podmíněná. Nesprávné bubliny prezentují obvyklé mylné představy.

Data k reprezentativním obrázkům byla oddělena z datového souboru a jejich kódy k didaktickým znalostem obsahu znovu kvalitativně zpracovány. Proces konstantní komparace byl aplikován tak dlouho, aby každý kód mohl být jednoznačně přidělen k jedné kategorii didaktických znalostí obsahu podle Kleickmanna a kol. (2013; kapitola 1.3.3): znalosti žákova porozumění, znalosti úloh, nebo znalosti obsahu pro vyučování. Následně byla data zpracována kvantitativně tak, že každý kód byl obodován *jedním kladným bodem*, pokud se vztahoval k projevu dobré didaktické znalosti obsahu (např. k uvedenému správnému alternativnímu řešení úlohy, k rozpoznání obvyklé žákovské chyby, k vhodně využité vizualizaci) nebo *jedním záporným bodem*, pokud se vztahoval k projevu slabé didaktické znalosti obsahu (např. k chybně vyřešené úloze, k návrhu nerealistického žákovského uvažování, k příliš obecné nekonstruktivní radě). Každému respondentovi byla pro každou reprezentativní úlohu určena tři dílčí skóre (*skóre žák, skóre úlohy, skóre vyučování*), která byla vždy součtem bodů za všechny výskyty kódů vyskytujících se v datech daného respondenta a dané reprezentativní úlohy, které náležely k příslušné kategorii didaktických znalostí obsahu (znalosti žákova porozumění, znalosti úloh, znalosti obsahu pro vyučování). Pro každého respondenta a každou reprezentativní úlohu pak bylo určeno ještě tzv. *dlouhé skóre* dané jako součet dílčích skóre.
Během interpretační fáze budou vztahy mezi oběma dlouhými skóre přeměněna v ilustrativní diagramy (tzv. dlouhá schémata) a ve finální kategorie k didaktickým znalostem obsahu (tzv. dlouhé kategorie).

Přehledné schéma práce s daty

Obrázek 4.9 shrnuje průběh analýzy dat při smíšeném přístupu. Jako výsledné motivy jsme obdrželi krátké kategorie, dlouhé kategorie a dlouhé schéma. Vzhledem k povaze doprovodných otázek krátké a dlouhé verze sběru dat a vzhledem k povaze provedené analýzy dat je možné krátké kategorie považovat za charakteristiky související se znalostmi obsahu a dlouhé kategorie a dlouhé schéma za charakteristiky související s didaktickými znalostmi obsahu.



Obrázek 4.9: Schéma práce s daty; zdroje dat jsou uvedeny velkými písmeny, kvalitativní motivy malými písmeny základním písmem a kvantitativní motivy malými písmeny kurzívou

4.3.3 Výsledky

Charakteristiky respondentů vztahující se ke znalostem obsahu

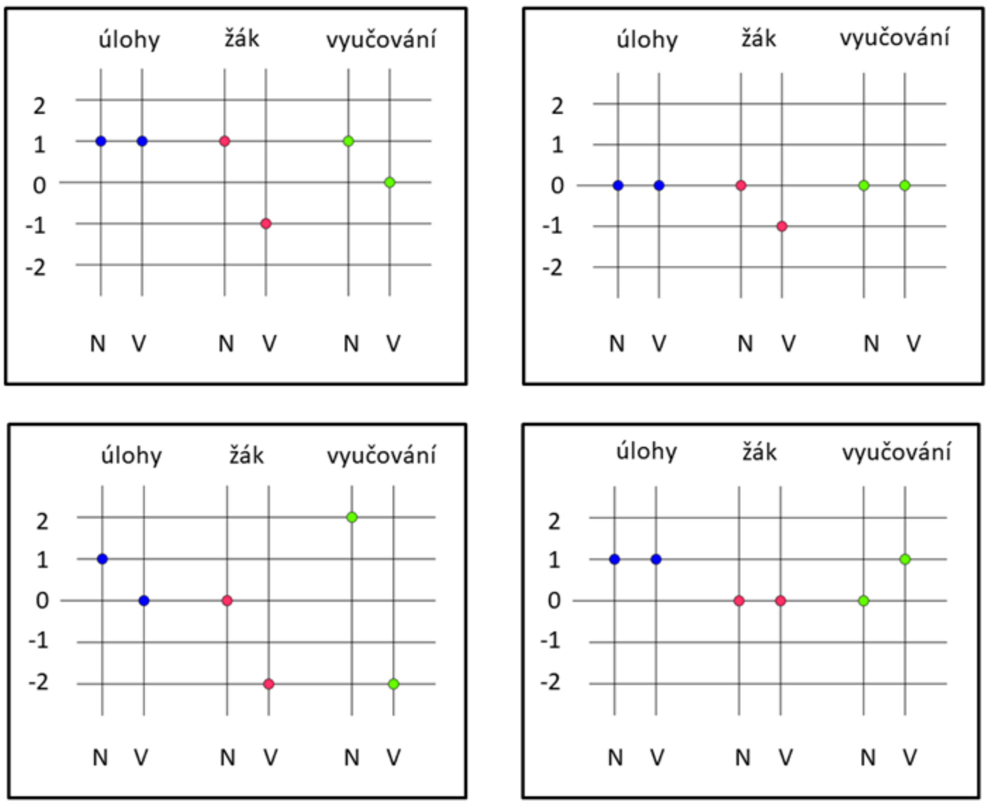
Ve sledované skupině respondentů byl aritmetický průměr krátkých skóre roven 30,96 bodům, respondent s nejnižším bodovým ziskem obdržel 20 bodů, respondent s nejvyšším bodovým ziskem všech 45 bodů. Podle přidělených krátkých skóre byli respondenti rozděleni do tří tzv. *krátkých kategorií*:

- *dobrý v krátké verzi* (více než 32 bodů; 7 respondentů);

- *průměrný v krátké verzi* (od 30 do 32 bodů; 9 respondentů);
- *slabý v krátké verzi* (méně než 30 bodů; 7 respondentů).

Charakteristiky respondentů vztahující se k didaktickým znalostem obsahu

Každému respondentovi byla při analýze dat přidělena pro každou reprezentativní úlohu tři dílčí skóre (*skóre úlohy, skóre žák*, *skóre vyučování*) a jejich součet (*dlouhé skóre*). Všechna dílčí skóre byla následně zaznamenána do společného komparativního diagramu, tzv. *dlouhého schématu* (viz obrázek 4.10).



Obrázek 4.10: Dlouhá schémata pro respondenty S5 (nahoře vlevo), S11 (nahoře vpravo), S16 (dole vlevo), S32 (dole vpravo); N = nižší obtížnost, V = vyšší obtížnost

Aritmetický průměr dlouhých skóre pro reprezentativní úlohu s nižší obtížností se ve sledované skupině respondentů rovnal 1,26 bodu, respondent s nejnižším bodovým ziskem obdržel mínus 3 body, respondent s nejvyšším bodovým ziskem 4 body. Aritmetický průměr dlouhých skóre pro reprezentativní úlohu s vyšší obtížností se ve sledované skupině rovnal 0,74 bodu, respondent s nejnižším bodovým ziskem obdržel mínus 4 body, respondent s nejvyšším bodovým ziskem 5 bodů.

Na základě všech možných kombinací hodnot obou dlouhých skóre (dlouhého skóre pro reprezentativní úlohu s nižší obtížností a dlouhého skóre pro reprezentativní úlohu s vyšší obtížností) byli respondenti rozděleni mezi čtyři tzv. *dlouhé kategorie*:

- *dobrý v dlouhé verzi*, pokud obě dlouhá skóre jsou kladná;
- *dobrý v dlouhé verzi při nižší obtížnosti*, pokud pouze dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností je kladné;
- *slabý v dlouhé verzi*, pokud žádné dlouhé skóre není kladné;
- *nezřetelný v dlouhé verzi*, pokud dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností není kladné, ale dlouhé skóre pro úlohu s vyšší obtížností kladné je.

Ve sledované skupině náleželo 10 respondentů do první dlouhé kategorie, 6 do druhé a 7 do třetí. Ve čtvrté kategorii nebyl nikdo.

Kombinované charakteristiky respondentů

Podle konkrétní podoby dlouhého schématu a podle příslušnosti ke krátkým a dlouhým kategoriím bylo možné pro každého respondenta získat přehledné informace o jeho znalostech obsahu (krátké kategorie) a didaktických znalostech obsahu (dlouhé kategorie). Ve sledované skupině se u respondentů objevilo osm různých kombinací krátkých a dlouhých kategorií, jejich četnosti uvádí tabulka 4.4.

Tabulka 4.4: Četnosti kombinací krátkých a dlouhých kategorií u jednotlivých respondentů

	dobrý v krátké verzi	**průměrný v krátké verzi**	**slabý v krátké verzi**
dobrý v dlouhé verzi	5	3	2
dobrý v dlouhé verzi při nižší obtížnosti	2	2	2
slabý v dlouhé verzi	0	4	3
nezřetelný v dlouhé verzi	0	0	0

Některé kombinace byly tvořeny odpovídajícími si kategoriemi (např. *dobrý v krátké verzi* a *dobrý v dlouhé verzi*), ale některé ne (např. *slabý v krátké verzi* a *dobrý v dlouhé verzi*). Neodpovídající si kategorie mohou mít různé příčiny, které je třeba hledat v dostupných datech nebo zjišťovat dalším sběrem dat.

Respondenti, jejichž dlouhá schémata byla uvedena na obrázku 4.10, měli rozličné kombinace krátkých a dlouhých kategorií:

- S5 byl dobrý v krátké verzi (krátké skóre 45 bodů) a dobrý v dlouhé verzi při nižší obtížnosti (dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností 3 body, dlouhé skóre pro úlohu s vyšší obtížností 0 bodů);
- S11 byl slabý v krátké i dlouhé verzi (krátké skóre 23 bodů; dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností 0 bodů, dlouhé skóre pro úlohu s vyšší obtížností mínus 1 bod);
- S16 byl průměrný v krátké verzi (krátké skóre 32 bodů) a dobrý v dlouhé verzi při nižší obtížnosti (dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností 3 body, dlouhé skóre pro úlohu s vyšší obtížností mínus 4 body);
- S32 byl slabý v krátké verzi (krátké skóre 28 bodů), ale dobrý v dlouhé verzi (dlouhé skóre pro úlohu s nižší obtížností 1 bod, dlouhé skóre pro úlohu s vyšší obtížností 2 body).

Pohled do dat ukázal, že neodpovídající si kategorie u S32 byly způsobeny hlavně chybějícími odůvodněními u několika správných rozhodnutí v krátké verzi (takovým rozhodnutím bylo přiděleno 0 bodů, i když byla správná) a několika chybnými rozhodnutími v úlohách vztahujících se k algoritmům písemného počítání, tedy k tématu, jež bylo součástí krátké verze, ale nebylo obsahem ani jedné reprezentativní úlohy v dlouhé verzi.

4.3.4 Diskuse

Tato studie představila další způsob, jak je možné úlohy Concept Cartoons využít při diagnostice znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů. Jako odpověď na otázku *Jakým způsobem může kvantitativní složka obohatit kvalitativní podobu prostředí Concept Cartoons určenou pro zkoumání znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?* je možné konstatovat, že vnoření kvantitativní složky do původně kvalitativního prostředí nám umožnilo vytvářet přehledné charakteristiky, komparativní diagramy a obecnější kategorie, tedy usnadnilo systematický přístup k datům a k respondentům. Studie ukázala, jak při zachování důrazu na kvalitativním přístupu mohou výzkumníci využít smíšený přístup pro lepší orientaci v datech při výzkumných šetřeních dlouhodobějšího charakteru nebo při práci s většími skupinami respondentů. Vzdělavatelé budoucích učitelů mohou smíšené charakteristiky a komparativní diagramy využít při své výuce k lepšímu přizpůsobení výuky potřebám studentů nebo k diferenciaci práce jednotlivých studentů. Smíšený přístup také může upozornit na neobvyklé vztahy ve výzkumných datech, tak jak tomu bylo u respondenta S32.

Výsledky studie nepřímo adresovaly otázku povahy vztahů mezi znalostmi obsahu a didaktickými znalostmi obsahu. Některé výsledky potvrdily úzký vztah mezi nimi obvykle vyjadřovaný ve smyslu, že dobré znalosti obsahu jsou nutnou, ale ne postačující podmínkou pro dobré didaktické znalosti obsahu (Krauss, Brunner, Kuntner a kol., 2008; Depaepe a kol., 2013): respondent S11 prokázal slabé znalosti obsahu i slabé didaktické znalosti obsahu, respondent S5 byl nejlepší z celé skupiny ve znalostech obsahu, ale v didaktických znalostech obsahu byl dobrý pouze u méně obtížné úlohy. Výsledky respondenta S32 (slabé znalosti obsahu, ale dobré didaktické znalosti obsahu i u více obtížné úlohy) nás vedly k úvahám o tom, jak přesně jsou znalosti obsahu nutnou podmínkou, a návrat k datům nás odkázal mimo jiné na schopnosti a dovednosti ne nutně svázané s konkrétním obsahem. V případě tohoto respondenta šlo možná jen o chybějící motivaci poskytnout odůvodnění v situacích, které respondent považoval za jasné, nebo o nedostatečné soustředění respondenta na zadání úkolu a z toho plynoucí opominutí poskytnutí požadovaných vysvětlení.

Výzkumné nástroje využívané pro diagnostiku znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu bývají často buď výhradně kvalitativní, nebo výhradně kvantitativní (Depaepe a kol., 2013). Někdy se však skládají ze dvou oddělených částí, kde první část je analyzována kvalitativně, a druhá kvantitativně. Takto odděleně přistupují k diagnostice například Friesen(ová) a Kuntze (2018), kteří u vinět mají první část diagnostického dotazníku tvořenou otevřenými otázkami (odpovědi na ně zpracovávají kvalitativně) a druhou část dotazníku mají založenou na Likertově škále. Smíšený design se objevuje ojediněle, obvykle v kombinaci s počítačovým zpracováním dat (Yankovskaya, Dementyev & Yamshanow, 2015). Nicméně někteří autoři doplňují své kvalitativní studie výraznými kvantitativními doplňky (např. van Es & Sherin, 2008; Simpson & Vondrová, 2019), nebo výsledky kvantitativních studií doplňují komentáři kvalitativní povahy (např. Lim-Teo a kol., 2007).

Omezení výzkumu

Smíšený přístup k diagnostice znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu, který přestavuje tato kapitola, vychází z původního kvalitativního přístupu, a tak je třeba podle toho interpretovat i jeho výsledky: získané krátké a dlouhé kategorie nemají absolutní charakter, jejich význam je úzce spjatý s konkrétní skupinou respondentů a s konkrétní sadou úloh Concept Cartoons, které byly k diagnostice použity. V případě dlouhé verze sběru dat jsou výsledky ovlivněny i konkrétním výzkumníkem, který prováděl otevřené kódování, výběr dvou reprezentativních úloh a přidělování bodů jednotlivým kódům. Postup je ale možné zopakovat s jinou skupinou respondentů, s jinou sadou úloh a jiným výzkumníkem, v tomto smyslu je metoda univerzální.

Vzhledem k výhradně písemné podobě datových materiálů mohla být některá vyjádření respondentů při analýze dat nesprávně interpretována a není možné jednoznačně odlišit případy, kdy respondent neuměl reagovat, od případů, kdy se nesnažil nebo úmyslně nechtěl reagovat.

KAPITOLA 5: Empirické studie realizované po experimentálním kurzu

V této kapitole si představíme některá výzkumná šetření, která se inspirovala průběhem a závěry studií z kapitoly 4 a která se všechna více či méně vztahují k různým možnostem využití obrázků Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů:

- Ve studii o povaze didaktických znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů (kapitola 4.2) se ukázaly významné neznalosti budoucích učitelů v oblasti zlomků, hledání zdrojů těchto neznalostí se bude věnovat kapitola 5.1.
- Během analýzy dat v kapitole 4.1 jsme odhalili zajímavý izolovaný rozpor v datech, který poukazoval na rozdíl mezi informacemi o znalostech obsahu získanými prostřednictvím řešení slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons (viz závěr kapitoly 4.1.3); tomuto tématu se bude věnovat výzkumné šetření v kapitole 5.2.
- Nediagnostické uplatnění obrázků Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů představí studie v kapitole 5.3 zaměřená na možnosti využití prostředí Concept Cartoons pro podnícení diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech.
- Systematická práce s obrázky Concept Cartoons (při přípravě výzkumných šetření i při různých seminářích s budoucími učiteli) nás přirozeně dovedla k potřebě Concept Cartoons přehledně roztřídit a vytvořit metodiku pro jejich využití při sběru dat. Výzkumné šetření vedoucí k ustanovení typologie aritmeticky zaměřených Concept Cartoons a metodiky jejich využití při sběru dat představí kapitola 5.4.

Respondenty prvního šetření byli znovu účastníci experimentálního kurzu, respondenty druhého a třetího šetření byli budoucí učitelé prvního stupně základní školy z jiných studijních skupin. Čtvrté šetření je souhrnné, zpracovává data získaná v časovém rozmezí osmi let a zúčastnili se ho budoucí učitelé prvního nebo druhého stupně základní školy.

Kapitola 5.1: Kvalitativní diagnostika znalostí obsahu v matematice u budoucích učitelů prvního stupně základní školy prostřednictvím Concept Cartoons: jak budoucí učitelé uvažují o zlomcích[43]

Kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu u účastníků experimentálního kurzu aritmetiky provedená v rámci výzkumného šetření v kapitole 4.2 upozornila na neznalosti v oblasti zlomků, konkrétně u tématu změny vyjádřené zlomkem (viz datové úryvky v kapitole 4.2.5). Vysoký podíl respondentů, kteří u obrázku 4.6 (obrázek má název *Stadion*) chybně identifikovali bublinu se správným výsledkem a svou chybu neopravili ani po zodpovězení

[43] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a z vlastního překladu publikace (Samková & Tichá, 2017c) a upraven.

všech šesti doprovodných didaktických otázek v dlouhé verzi sběru dat, vzbudil náš zájem o bližší studium toho, jak tito respondenti uvažují o zlomcích, tedy jaké mají znalosti obsahu v oblasti zlomků. Po skončení experimentálního kurzu jsme se k účastníkům kurzu vrátili a předložili jim ještě jeden Concept Cartoon na téma zlomků.

5.1.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na výzkumnou otázku:

> Jaké způsoby uvažování o zlomcích je možné odhalit u budoucích učitelů prostřednictvím úloh Concept Cartoons?

Výzkumný plán

Účastníky výzkumného šetření bylo 28 účastníků experimentálního kurzu popsaného v kapitole 2.1, kteří se půl roku po skončení experimentálního kurzu zúčastnili jednorázového sběru dat na povinném didaktickém semináři; 26 z těchto 28 respondentů participovalo i na výzkumném šetření z kapitoly 4.2.

V návaznosti na výsledky výzkumného šetření z kapitoly 4.2 jsme vytvořili zcela nový Concept Cartoon na téma zlomků a předložili jsme ho účastníkům šetření. Přestože jsme tímto navazujícím výzkumným šetřením cílili hlavně na znalosti obsahu, sbírali jsme od respondentů písemné odpovědi na všech šest doprovodných didaktických otázek, abychom mohli sledovat jejich uvažování o zlomcích z různých pohledů. Účastníci šetření vypracovávali odpovědi individuálně, stejně jako v předchozím případě.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014). K ilustraci četnosti vybraných jevů jsme využili kvantitativní diagramy.

5.1.2 Sběr a analýza dat[44]

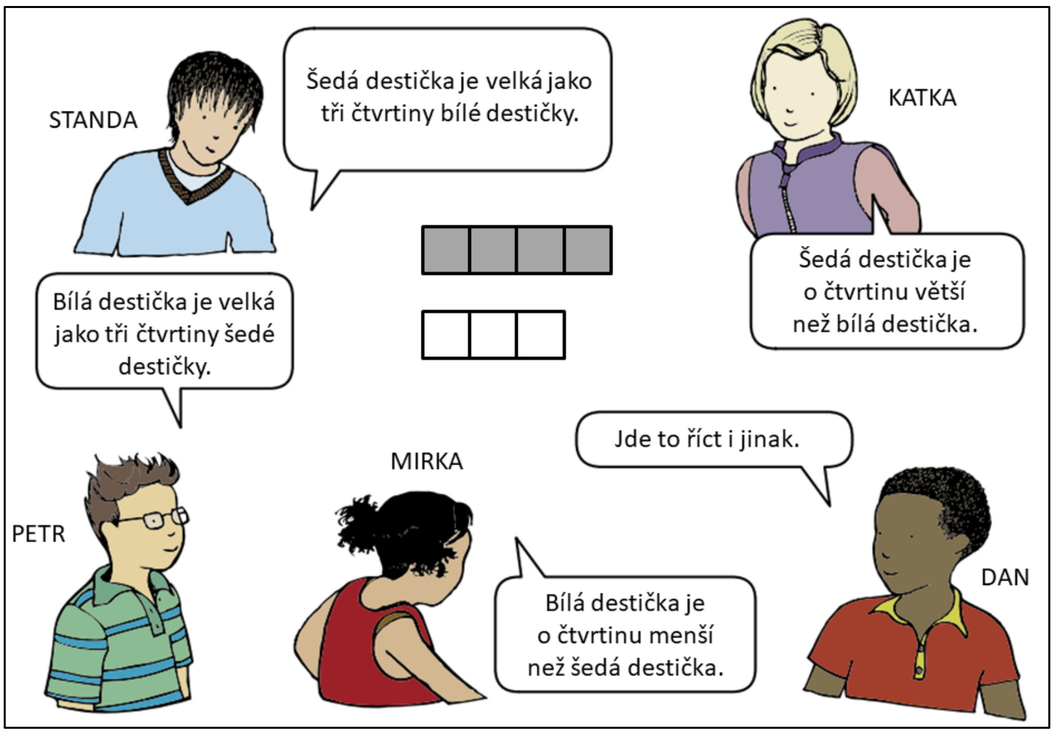
Sběr dat

Pro potřeby výzkumného šetření jsme s kolegyní Marií Tichou vytvořily zcela nový obrázek Concept Cartoon zvaný *Destičky* (obrázek 5.1), který na tematiku zlomků a změny vyjádřené zlomkem pohlíží z trochu jiné perspektivy než obrázek *Stadion* (obrázek 4.6). Zatímco obrázek *Stadion* studuje změnu diskrétní kvantity (počtu diváků), tak *Destičky* studují

[44] Příprava obrázku Concept Cartoon pro sběr dat a analýza dat byly realizovány ve spolupráci s kolegyní Marií Tichou, použita byla technika dvojitého kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014: 42). Výsledky této analýzy byly publikovány formou příspěvku v odborném časopise (Samková & Tichá, 2017c).

změnu spojité kvantity (velikosti destičky). Texty v bublinách obrázku *Stadion* porovnávají postupy řešení a výsledky úlohy o změně vyjádřené zlomkem, kdežto texty v bublinách obrázku *Destičky* porovnávají různá pojetí zlomku:

- dvě bubliny byly vytvořeny na téma změny vyjádřené zlomkem (Katka, Mirka) a pro dvě bubliny byl vybrán jednodušší koncept zlomkem vyjádřeného vztahu části a celku (Standa, Petr);
- v každé dvojici bublin je jedno tvrzení vyjádřeno z pohledu menší destičky (Petr, Mirka) a jedno z pohledu větší destičky (Standa, Katka);
- matematická správnost bublin byla nastavena tak, aby v každé dvojici byla jedna bublina správná (Petr, Mirka) a jedna nesprávná (Standa, Katka).



Obrázek 5.1: Concept Cartoon *Destičky*; šablona dětí s prázdnými bublinami převzata z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 5_9)

Při sběru dat respondenti obdrželi pracovní list s obrázkem *Destičky* a sadou šesti doprovodných otázek dlouhé verze (jako v kapitole 4.2). Odpovědi na otázky vypracovávali samostatně, písemnou formou.

Analýza dat

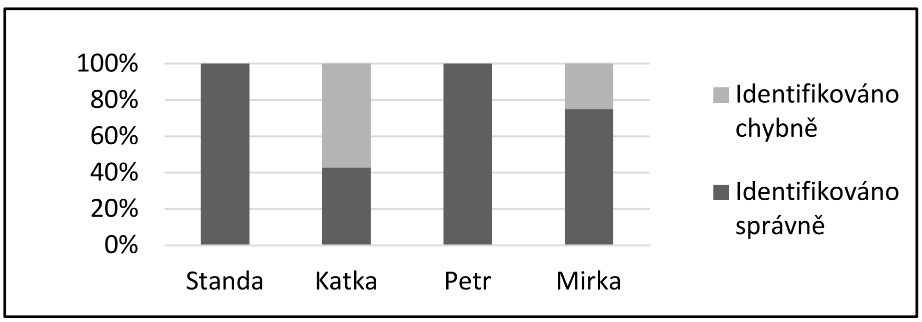
První fáze analýzy dat se soustředila na bubliny, které jednotliví respondenti označili jako správné, a na bubliny, které jednotliví respondenti označili jako nesprávné. Rozhodnutí respondentů o správnosti bublin jsme nejprve zkoumali z pohledu jednotlivých bublin, poté z pohledu jednotlivých respondentů (tj. z pohledu kombinací bublin, které jednotliví respondenti označili za správné).

Druhá fáze analýzy dat se soustředila na různé způsoby uvažování o zlomcích, které se objevily v odpovědích na jednotlivé otázky, tedy v odůvodněních rozhodnutí o správnosti a nesprávnosti jednotlivých bublin, v popisech možných zdrojů chyb, v radách dětem a v návrzích textů do prázdné bubliny.

5.1.3 Výsledky

Správné a nesprávné bubliny jednotlivě

Výsledky analýzy rozhodnutí respondentů o správnosti bublin z pohledu jednotlivých bublin vypadaly zprvu optimisticky: všichni respondenti označili jako správnou Petrovu bublinu a jako nesprávnou Standovu, většina respondentů označila jako správnou Mirčinu bublinu. Pouze rozhodnutí o Katčině bublině naznačovala, že vše nemusí být zcela v pořádku, protože tuto bublinu označila jako nesprávnou jen menšina respondentů (viz graf na obrázku 5.2).

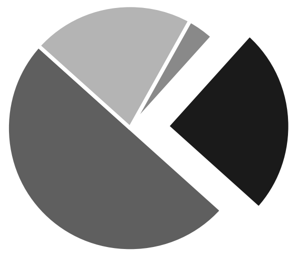


Obrázek 5.2: Relativní podíl správných a chybných identifikací matematické správnosti u jednotlivých bublin (n = 28)

Kombinace správných a nesprávných bublin – změna vyjádřená zlomkem

Bublinám popisujícím změnu vyjádřenou zlomkem jsme se věnovali podrobněji, z pohledu jednotlivých respondentů a jejich kombinací rozhodnutí o Mirčině a Katčině bublině. Výsledky byly z našeho pohledu problematické: polovina respondentů (14 z 28) nesprávně souhlasila zároveň s Mirkou i s Katkou, pouze čtvrtina respondentů (7 z 28) správně souhlasila s Mirkou a nesouhlasila s Katkou (viz graf na obrázku 5.3 – oddělená nejtmavší část).[45]

[45] Úlohu s destičkami jsme zkoušeli i na dvou jiných univerzitách, se 78 budoucími učiteli matematiky pro druhý stupeň základní školy. Závěry analýzy dat z pohledu jednotlivých respondentů a jejich kombinací rozhodnutí o Mirčině a Katčině bublině byly obdobné: správné posouzení Mirčiny i Katčiny bubliny prezentovala na každé z univerzit vždy menšina respondentů (viz Samková & Tichá, 2017c).



Obrázek 5.3: Relativní podíly jednotlivých kombinací reakcí na bubliny se změnou vyjádřenou zlomkem; jediná správná kombinace je oddělena stranou (n = 28)

Různé způsoby uvažování o zlomcích

Podrobná analýza odůvodnění rozhodnutí respondentů o správnosti a nesprávnosti bublin, popisů možných zdrojů chyb, rad dětem a návrhů textů do prázdné bubliny odhalila několik odlišných mylných představ o zlomcích. Většina chybných odůvodnění (hlavně ta, která deklarovala, že Katka i Mirka mají obě pravdu) byla založena na mylné představě, že pro změnu vyjádřenou zlomkem je vztah mezi stavem před změnou a stavem po změně aditivní:

> S16 Mirka má pravdu, Katka také – stejné řešení, akorát jedna použila slovo menší a druhá větší a prohodily destičky.

Tito respondenti si vůbec neuvědomili, že v Mirčině tvrzení je čtvrtina počítaná z jiného celku než v Katčině.

Další skupina respondentů také vůbec neuvažovala o celku v daných tvrzeních, místo toho brali 1/4 jen jako tzv. pojmenované číslo (Tichá & Macháčková, 2006):

> S32 Katka – ano
> šedá = 4/4 bílá = 3/4 šedá je o 1/4 větší jak bílá

> S25 Ano: Katka, Mirka, Petr.
> Vzali celek jako 4/4 a poté porovnávali a srovnávali, uvažovali ve zlomcích a správně.

Poslední skupina respondentů s mylnými názory si sice uvědomovala, že u každého zlomku je třeba vést v patrnosti celek, ze kterého se zlomek počítá, ale nebyli si vědomi toho, že v tvrzeních „o čtvrtinu více než A” a „o čtvrtinu méně než A” je celkem vždy objekt uvedený za částicí „než” (tedy A). Místo toho sami začali nabízet různá formulační vylepšení původních výroků, ze kterých by bylo více patrné, co je celek:

> S30 Katka má pravdu, šedá je o 1/4 z šedé destičky větší, neplatí to, kdyby si myslela o 1/4 z bílé, to už by pravdu neměla.

S19 Katka – šedá deska je o svou 1/4 větší než bílá – stačí jen přesnější zápis
Mirka – bílá deska je o čtvrtinu šedé desky menší

S13 Katka – ano, ale asi bych napsal o svou čtvrtinu
Mirka – ne, není jasné o jakou čtvrtinu → napsal bych o čtvrtinu z šedé destičky

Při následné společné diskusi nad obrázkem Concept Cartoon dokonce někteří respondenti vyjádřili své rozhořčení nad rozborem rozdílu mezi formulacemi v Mirčině a Katčině bublině s tím, že se jedná o „slovíčkaření", které s matematikou nemá nic společného.

Respondenti, kteří správně identifikovali Mirčinu bublinu jako správnou a Katčinu jako nesprávnou, svá rozhodnutí opírali o správné úvahy. Například respondent S33, který náčrtem názorně ukázal, že 1/4 z šedé destičky není stejně velká jako 1/4 z bílé destičky. Nebo respondent S2, který ve svém odůvodnění zdůraznil neaditivní podstatu problému:

S2 Katka – šedá je oproti bílé o 1/3 větší, ale bílá je oproti šedé o 1/4 menší.

5.1.4 Diskuse

Výsledky tohoto výzkumného šetření potvrdily obtížnost tématu zlomek pro budoucí učitele. Jejich mylná přesvědčení o změně vyjádřené zlomkem mají tři různé zdroje:

- přílišnou fixaci znalostí na obor přirozených čísel, konkrétně na vyjádření změny prostřednictvím slovního spojení „o… větší/menší než": při změně vyjádřené přirozeným číslem je vztah mezi stavem před změnou a stavem po změně aditivní (a díky tomu má tvrzení „A je o 4 větší než B" stejný význam jako tvrzení „B je o 4 menší než A"), ale při změně vyjádřené zlomkem tento vztah aditivní není (tvrzení „A je o 1/4 větší než B" nemá stejný význam jako tvrzení „B je o 1/4 menší než A", protože v prvním případě se 1/4 počítá z B, kdežto v druhém z A);
- vnímání zlomku jako čísla bez vztahu k celku (pojmenované číslo);
- neznalost správné terminologie a jejího významu (tj. že v tvrzeních typu „o zlomek větší/menší než" je celek vždy přítomen, i když není explicitně označen, a že se vždy vyskytuje za částicí „než").

Tyto zdroje jsme již nepřímo zmiňovali v kapitole 1.4.3 věnované konceptuálním chybám v uvažování žáků. Podle Radatze (1979) bychom první dva typy chyb zařadili mezi chyby v transferu informací (viz též neodůvodněný transfer z oboru přirozených do oboru racionálních čísel – první neodůvodněný transfer se týká porovnávání velikosti čísel, druhý se týká reprezentací; Van Dooren a kol., 2015). Třetí typ chyb patří mezi chyby sémantické (viz též Kuřina, 1986; Schleppegrell, 2007). Z pohledu kategorizace chyb podle Ryan(ové) a Williamse (2011) jsou všechny tři typy chyb důsledkem nekompletní interpretace vztahů mezi procesy a objekty, jsou tedy chybami souvisejícími s procepty.

Zjištění tohoto výzkumného šetření v mnohém objasnila, proč tak velká část respondentů měla problémy s identifikací správné bubliny při práci s obrázkem *Stadion*, a zároveň lépe objasnila zdroje těchto problémů (tyto zdroje z dat k obrázku *Stadion* nebyly zřejmé). Tato zjištění (a průběh analýzy dat, která k nim vedla) mohou zároveň sloužit jako ilustrace osvětlující možné využití obrázků Concept Cartoons při porovnávání matematických konceptů a jako ilustrace důvodů, proč jsou taková porovnávání cenná při budování matematických znalostí. Rozdíl mezi výsledky analýzy při odděleném zpracování bublin a při zkoumání kombinací bublin je toho jasným důkazem.

Téma zlomky je v kurikulu základní školy na pomezí prvního a druhého stupně: problematika významu zlomku jako takového náleží do kurikula prvního stupně, ale operace se zlomky do kurikula druhého stupně. Úlohy o vztahu části a celku a o změně vyjádřené zlomkem patří do kurikula prvního stupně, budoucí učitelé prvního stupně by je tak měli ovládat. Obtížnost tematiky zlomků pro budoucí učitele ukazují mnohé empirické studie (Cramer & Lesh, 1988; Ma, 1999; Tichá & Hošpesová, 2009; Depaepe a kol., 2015), chybné vnímání konceptu zlomku (budoucím) učitelem se může projevit nejen chybnou reakci na žákovo řešení (jako u obrázků Concept Cartoons), ale i chybným tvořením učebních úloh učitelem (Tichá & Hošpesová, 2009, 2011; srov. Tichá & Macháčková, 2006).

Didakticky zaměřená dlouhá verze sběru dat prostřednictvím Concept Cartoons byla v tomto výzkumném šetření využita k diagnostice „nedidaktických" znalostí obsahu. Mnohá z mylných uvažování o zlomcích byla v datech nalezena v odpovědích na otázky po zdrojích chyb, v radách dětem nebo v návrzích alternativních textů do prázdné bubliny. Při využití krátké verze sběru dat, která obsahuje pouze požadavek na rozhodnutí o (ne)správnosti bublin a jeho odůvodnění, by některé tyto mylné představy nemusely být odhaleny. Výsledky výzkumného šetření tak přispívají k dokreslení obrazu o vzájemné provázanosti znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu a o komplikovanosti jejich vzájemných vztahů (Krauss, Brunner, Kuntner a kol., 2008; Depaepe a kol., 2013, 2015).

Vzhledem k tomu, že předložená studie byla kvalitativního exploračního designu, jsou s ní spojena obvyklá omezení kvalitativního výzkumu: zkoumaný vzorek je relativně malý a výsledky výzkumného šetření platí právě jen pro něj, není možné je nikterak zobecňovat. Vzhledem k výhradně písemné podobě datových materiálů mohla být některá vyjádření respondentů při analýze dat nesprávně interpretována a není možné jednoznačně odlišit případy, kdy respondent neuměl reagovat, od případů, kdy se nesnažil nebo úmyslně nechtěl reagovat.

Kapitola 5.2: Rozdíl v informacích o znalostech obsahu v matematice získaných prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons[46]

Během analýzy dat k výzkumnému šetření z kapitoly 4.1 jsme odhalili zajímavý izolovaný rozpor v datech, který poukazoval na rozdíl mezi informacemi o znalostech obsahu získanými prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons. Jeden z respondentů v rámci kontrolního testu správně vyřešil slovní úlohu o dělení na nestejné části, ale u obrázku Concept Cartoon se stejnou tematikou označil jako správnou bublinu s chybným výsledkem. Při následném rozhovoru s respondentem se ukázalo, že postup řešení slovních úloh o dělení na nestejné části měl naučený zpaměti, bez hlubšího porozumění, a že u obrázku Concept Cartoon nepoznal, že se jedná o stejnou tematiku.[47] Tuto záležitost jsme se rozhodli zkoumat podrobněji. Z obrázků Concept Cartoons využívaných v různých výzkumných šetřeních jsme vybrali ten, který byl pro respondenty nejvíce obtížný – *Stadion* (obrázek 4.6, znovu otištěn jako obrázek 5.4), a naplánovali jsme s ním nové výzkumné šetření s novými respondenty.

5.2.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na výzkumnou otázku:

> Můžeme prostřednictvím Concept Cartoons získat informace o znalostech matematického obsahu, které neodhalily standardní kontrolní písemné testy se slovními úlohami?

Výzkumný plán

Účastníky výzkumného šetření byli všichni studenti druhého ročníku učitelství pro první stupeň základní školy v akademickém roce 2017/18. Tito budoucí učitelé v daném akademickém roce navštěvovali kurz aritmetiky zaměřený mj. na obor racionálních čísel.

Sběr dat se uskutečnil během povinného písemného testu a těsně po něm; část po testu nebyla pro studenty povinná. Kompletní sadu dat odevzdalo 16 z 23 studentů.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014). K ilustraci četnosti vybraných jevů jsme využili kvantitativní diagramy.

[46] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a z vlastního překladu publikace (Samková, 2018a) a upraven.

[47] Tuto záležitost podrobně popisuje publikace (Samková & Tichá, 2015).

5.2.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat

Sběr dat byl svázán s písemným testem na téma zlomky, v rámci kterého respondenti řešili několik početních úloh a čtyři slovní úlohy různé obtížnosti (viz tabulka 5.1). Jako budoucí učitelé na prvním stupni základní školy měli za úkol řešit slovní úlohy jen využitím aparátu kurikula matematiky pro první stupeň základní školy, tedy bez neznámých a rovnic. V tomto šetření se zaměříme hlavně na úlohu 3 z tabulky 5.1 (úloha je podbarvena), která se týká změny vyjádřené zlomkem.

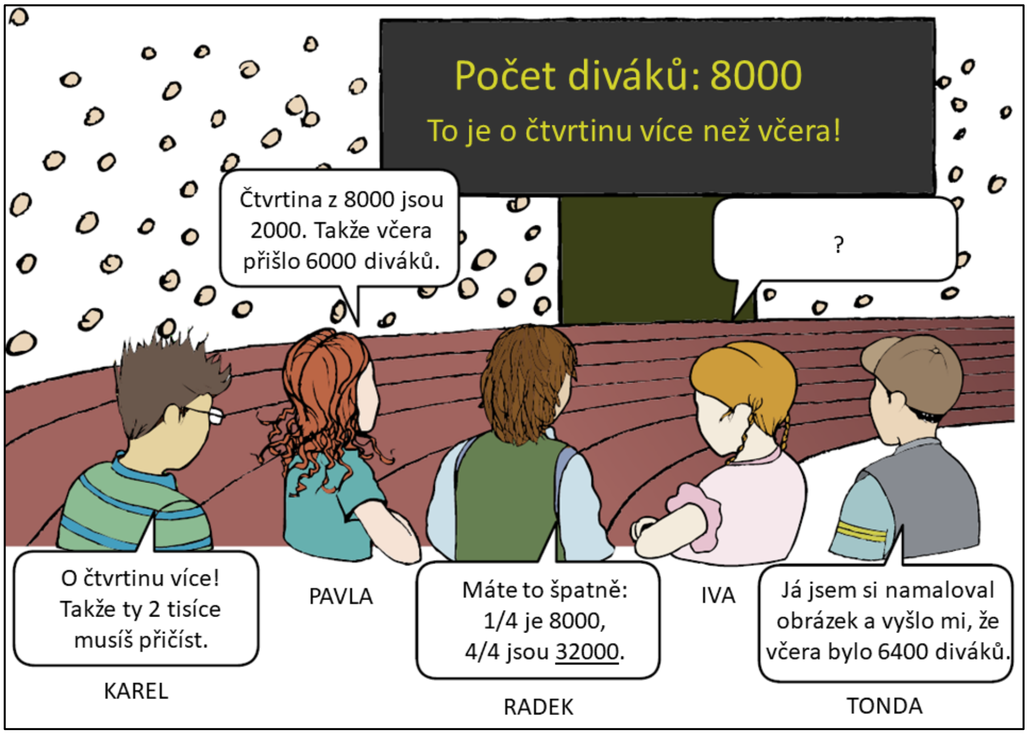
Tabulka 5.1: Zadání slovních úloh z písemného testu

Úloha 1	V naší třídě je 16 dívek, což jsou 4/7 všech žáků ve třídě. Kolik je v naší třídě chlapců?
Úloha 2	Zelinář přijel na dva dny na trh. V pondělí prodal 3/8 přivezených brambor, v úterý 4/5 ze zbytku. Kolik brambor neprodal? Kolik kg brambor přivezl zelinář na trh, pokud v úterý prodal 200 kg?
Úloha 3	Obchodník snížil cenu knihy o čtvrtinu na 60 Kč. Kolik Kč stála kniha před zlevněním?
Úloha 4	Chovatel má 1/3 bílých králíků, ostatní šedivé. Dnes dá 3 šedivé králíky sousedovi a dostane za ně 3 bílé. Po této výměně stoupne podíl bílých králíků na 4/9. Kolik králíků má chovatel?

Ihned po odevzdání vypracovaných testů respondenti dostali složku se dvěma obrázky Concept Cartoons v krátké verzi (tj. s otázkami „Které děti na obrázku mají pravdu?”, „Které nemají?” a „Proč?”). Druhým ze zadaných Concept Cartoons byl obrázek *Stadion* (obrázek 5.4). Respondenti výzkumného šetření tak v časovém rozmezí necelé půl hodiny řešili dvě velice podobné úlohy založené na změně vyjádřené zlomkem, z nichž jedna byla ve formě slovní úlohy a druhá ve formě Concept Cartoons.

Analýza dat

Analýza dat získaných prostřednictvím písemného testu se soustředila na různé postupy řešení, kterými respondenti slovní úlohu o slevě knihy řešili. Analýza dat získaných prostřednictvím úlohy Concept Cartoon se soustředila na bubliny, které respondenti označili jako správné, a na postupy, kterými respondenti svá rozhodnutí o správnosti odůvodňovali. V dalším kroku jsme pro jednotlivé respondenty porovnávali postupy řešení použité při řešení slovní úlohy a postupy řešení použité v odůvodněních k úloze Concept Cartoon.



Obrázek 5.4: Concept Cartoon *Stadion*; šablona obrázku se stadionem, prázdnou cedulí, dětmi a prázdnými bublinami převzata z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 2_16)

5.2.3 Výsledky

Postupy řešení použité u slovní úlohy

Respondenti při řešení slovní úlohy použili celkem čtyři různé postupy, z nichž jeden byl správný (viz tabulka 5.2; správný postup je podbarven). Devět z 16 respondentů vyřešilo úlohu správně.

Tabulka 5.2: Přehled výsledků a postupů řešení, které k jejich dosažení respondenti použili při řešení slovní úlohy; čísla v hranatých závorkách udávají četnosti jednotlivých výsledků

80 Kč **[9]**	**75 Kč** **[4]**	**240 Kč** **[2]**	**300 Kč** **[1]**
60 ... 3/4 60 : 3 = 20 ... 1/4 4 · 20 = **80** ... 4/4	60 : 4 = 15 ... 1/4 60 + 15 = **75**	1/4 = 60 4/4 = 60 · 4 = **240**	60 · 4 = 240 240 + 60 = **300**
	teď ... 4/4 ... 60 předtím ... 5/4 60 : 4 = 15 15 · 5 = **75**	1/4 z 60 = = 60 · 4 : 1 = **240**	

Nesprávné postupy u výsledku 75 Kč byly založeny na chybné identifikaci celku pro zlomek 1/4, konkrétně na úvaze, že tímto celkem je číslo uvedené v zadání úlohy. Na stejné mylné úvaze je založen obsah Pavliny bubliny v obrázku *Stadion*.

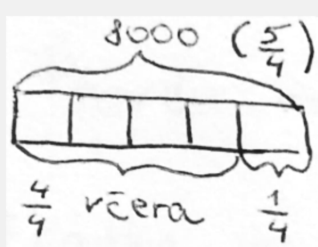
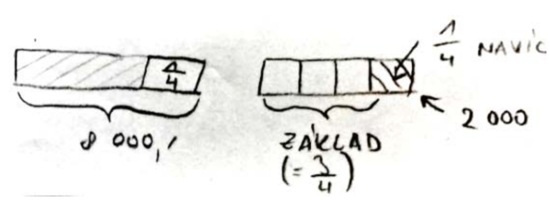
Nesprávné postupy u výsledku 240 Kč jsou založené na chybné identifikaci čísla uvedeného v zadání úlohy jako velikosti části z celku odpovídající zlomku 1/4. To mohlo být způsobeno například nepozorností při čtení zadání úlohy („zlevnil o čtvrtinu” vs. „zlevnil na čtvrtinu”). Na stejné mylné identifikaci je založen obsah Radkovy bubliny v obrázku *Stadion*.

Identifikace příčiny nesprávného postupu vedoucího k výsledku 300 Kč je bez dalších dat obtížná, ale o náhodnou triviální chybu zřejmě nepůjde, protože postup je založen na několika různých dílčích chybách. Tento postup neodpovídá žádné bublině z obrázku *Stadion*.

Rozhodnutí a jejich odůvodnění použitá u úlohy Concept Cartoon

Při rozhodování o správnosti bublin byli respondenti poměrně úspěšní: 9 z 16 jich souhlasilo s Tondou, zbylých 7 souhlasilo s Pavlou. Tabulka 5.3 uvádí ukázky odůvodnění, které vybraní respondenti pro svá rozhodnutí poskytli; správná odůvodnění jsou podbarvena. Některá odůvodnění správnosti Pavliny bubliny obsahují závažná pochybení, například odůvodnění uvedené v tabulce 5.3 vpravo dole má u ilustračního obrázku vepsaný text „základ (= 3/4)”.

Tabulka 5.3: Ukázky odůvodnění, která souhlasila s Tondou (vlevo), s Pavlou (vpravo)

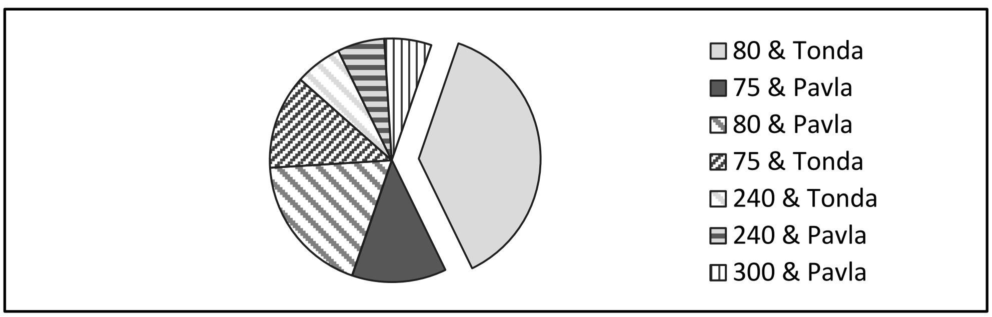
Dobře má jen Tonda. Jen on poznal, že 8000 je o čtvrtinu více než celek. Celek je 4/4, o čtvrtinu více je 5/4. 8000 ... 5/4 8000 : 5 = 1600 ... 1/4 8000 – 1600 = **6400**	Pavla má pravdu celkem ... 8000 včera ... o čtvrtinu méně než 8000 : 4 = 2000 8000 – 2000 = **6000**
8000 : 5 = 1600 1600 · 4 = **6400** 	Tonda: Kde je obrázek? Špatná odpověď! Obrázek by měl vypadat takto:  8000 : 4 = 2000 přišlo navíc 2000 · 3 = **6000** včera

Z hlediska jednotlivých respondentů

Z hlediska reakcí jednotlivých respondentů na slovní úlohu a na Concept Cartoon bylo možné respondenty rozdělit do dvou skupin podle toho, jaký postup použili při řešení úlohy a jaký postup použili při odůvodnění správnosti bublin:

- *odpovídající si postupy*, pokud oba použité postupy byly správné, nebo pokud oba použité postupy byly chybné a založené na stejném typu mylné úvahy; sem patří dvojice tvořená odpovědí 80 Kč na slovní úlohu a výběrem Tondovy bubliny jako správné, nebo dvojice tvořená odpovědí 75 Kč a výběrem Pavliny bubliny;
- *neodpovídající si postupy* – pokud jeden z použitých postupů byl správný a jeden chybný, nebo pokud oba byly chybné, ale založené na různých mylných úvahách; sem patří například dvojice tvořená odpovědí 75 Kč a výběrem Tondovy bubliny, dvojice tvořená odpovědí 80 Kč a výběrem Pavliny bubliny, nebo dvojice tvořená odpovědí 240 Kč a výběrem Pavliny bubliny.

Graf na obrázku 5.5 uvádí relativní poměry jednotlivých kombinací postupů. Neodpovídající si postupy se vyskytovaly u 8 z 16 respondentů[48]. Pouze 6 z 16 respondentů poskytlo správnou odpověď u slovní úlohy i u úlohy Concept Cartoon (mezi nimi byli oba autoři odůvodnění správnosti uvedených v tabulce 5.3 vlevo).



Obrázek 5.5: Relativní podíly jednotlivých kombinací reakcí na slovní úlohu a na úlohu Concept Cartoon; dvě odpovídající si kombinace jsou vystínované, zbylé neodpovídající si kombinace jsou vyšrafované; jediná správná kombinace je oddělena stranou (n = 16)

Kombinaci tvořenou odpovědí 80 Kč a výběrem Pavliny bubliny nabídli 3 respondenti, mezi nimi byl i respondent z tabulky 5.3 vpravo dole. Tito respondenti tedy správně vyřešili slovní úlohu, ale chybně identifikovali bublinu na obrázku Concept Cartoon (podobně tomu bylo

[48] Stejné dvě úlohy (slovní úlohu se slevou knihy a Concept Cartoon *Stadion*) jsme zadali i skupině 44 respondentů z jiné univerzity, tentokrát bez požadavku na použití aparátu prvostupňové matematiky při řešení slovní úlohy. Závěry analýzy dat byly s touto skupinou ještě výraznější: neodpovídající si postupy se vyskytovaly u téměř tří čtvrtin respondentů, reakce tvořená odpovědí 80 Kč a výběrem Pavliny bubliny se objevila u téměř poloviny respondentů, správnou odpověď na obě úlohy poskytla pouze čtvrtina respondentů (viz Samková, 2018a).

v onom izolovaném případě z kapitoly 4.1, na základě kterého jsme stávající výzkumné šetření zrealizovali). Po prostudování všech dat z písemného testu, v rámci kterého sběr dat probíhal, se ukázalo, že tito tři respondenti všichni správně vyřešili nejen slovní úlohu se slevou knihy, která je založena na změně vyjádřené zlomkem, ale i slovní úlohu na vztah jednoho celku a jeho dvou komplementárních částí (úloha 1 z tabulky 5.1) a slovní úlohu na vztah dvou různých celků a jejich částí, kde jeden z celků je částí celku druhého (úloha 2 z tabulky 5.1).

5.2.4 Diskuse

Předložená studie poskytla pozitivní odpověď na výzkumnou otázku *Můžeme prostřednictvím Concept Cartoons získat informace o znalostech matematického obsahu, které neodhalily standardní kontrolní písemné testy se slovními úlohami?* Na základě jejích výsledků je možné konstatovat, že na rozdíl od slovních úloh v písemných testech mohou Concept Cartoons pomoci odhalit respondenty, kteří sice úspěšně řeší slovní úlohy běžné obtížnosti, ale mají nedostatky ve znalostech matematického obsahu, ze kterého tyto slovní úlohy vycházejí. V našem konkrétním případě se ukázalo, že někteří respondenti správně vyřešili slovní úlohy s jedním nebo více zlomky vyjadřujícími vztah části a celku a slovní úlohu se změnou vyjádřenou zlomkem, ale při odpovědích na otázky k úloze Concept Cartoons o změně vyjádřené zlomkem nebyli schopni správně identifikovat celek v situaci dané kontextem úlohy a ve svých vysvětleních prezentovali nedostatky v chápání významu celku jako takového.

Tento nesoulad v informacích získaných prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons má pravděpodobně dvě hlavní příčiny. První příčinou může být skutečnost, že obrázky Concept Cartoons nabízejí k posouzení několik různých alternativních názorů na řešenou situaci, a tak nutí respondenty k úvahám a vyjádřením nad rámec „oblíbených” nebo „bezpečných” postupů řešení naučených během přípravy na písemný test. Byly-li takové postupy naučeny pouze povrchně, procedurálně, bez hlubšího konceptuálního porozumění, řešitel nemusí při jejich realizaci náležitě projít všechny klíčové dílčí kroky (např. identifikaci celku v daném kontextu), a není pak schopen tyto klíčové dílčí kroky rozpoznat v postupech alternativních. Druhá příčina souvisí s tím, že při práci s Concept Cartoons jsou respondenti požádáni, aby odůvodnili svá rozhodnutí o (ne)správnosti jednotlivých alternativních názorů v bublinách, ale při řešení slovních úloh v písemných testech se od řešitelů žádná odůvodnění použitých postupů řešení obvykle nevyžadují. S obrázky Concept Cartoons tak respondenti odhalují své uvažování nad rámec běžného řešení úloh. Ve výzkumném šetření v kapitole 5.1 se dokonce ukázalo, že některé mylné představy se nemusí objevit ani v odůvodněních, ale až v popisech možných zdrojů chyb, radách dětem nebo v návrzích textů do prázdné bubliny.

Obě výše uvedené příčiny souvisejí s chápáním úloh Concept Cartoons jako prostředí pro porovnávání různých strategií, v druhém případě navíc pro porovnávání s odůvodněním (kapitoly 1.4.1 a 1.6.3). Výsledky tohoto šetření nepřímo potvrzují úzký vztah takových prostředí k rozvoji konceptuálních znalostí (Durkin a kol., 2017) a k analogickému kódování (tedy k hledání podobností, které nejsou jen povrchní; Gentner a kol., 2003) a ilustrují případy, kdy při učení k rozvoji konceptuálních znalostí ani k analogickému kódování nedochází.

Výsledky výzkumného šetření také nepřímo potvrzují nutnost přistupovat ke slovním úlohám ve výuce rozmanitě, ne jen prostřednictvím předvádění, procvičování a hodnocení typových řešení typových úloh. Prostředí Concept Cartoons pravděpodobně dokázalo u některých respondentů nabourat stereotyp naučeného povrchního přístupu ke slovním úlohám a díky tomu byly odhaleny neznalosti v oblasti zlomků, které slovní úlohy zadané standardně v rámci kontrolního testu odhalit nedokázaly. Jak na základě dosavadního výzkumu doporučují Verschaffel, Depaepe(ová) a Van Dooren (2014), při výuce slovních úloh je mj. vhodné využívat skupinovou práci žáků a společnou diskusi různých postupů, které žáci použili nebo by mohli použít k řešení úlohy. Prostředí Concept Cartoons takovou diskusi dokáže simulovat, ukazuje se tedy býti vhodným doplňujícím přístupem k výuce slovních úloh.

Vzhledem k tomu, že respondenti výzkumného šetření byli budoucí učitelé, nabývá nutnost vyjadřování nad rámec „oblíbených" nebo „bezpečných" postupů řešení větší důležitosti. Ve své budoucí pedagogické praxi budou tito respondenti v pozici učitele často nuceni reagovat na rozličné alternativní postupy řešení svých žáků a některé žákovské postupy se přirozeně budou lišit od učitelových „oblíbených" i „bezpečných" postupů řešení. Zde se projevuje význam obrázků Concept Cartoons jako dílčí reprezentace školní praxe (Grossman a kol., 2009) zaměřené na výukové situace z hlediska reakce učitele na rozličné názory žáků (viz kapitola 1.5). Jak ilustruje tato studie, i Concept Cartoon s krátkou verzí doprovodných otázek „Které děti na obrázku mají pravdu?", „Které nemají?", „Proč?" je schopen reprezentovat výukovou situaci a odhalit, kdy budoucí učitel není připraven adekvátně reagovat na alternativní postupy řešení svých budoucích žáků, tedy kdy nemá vybudované profesní vidění související s komentováním žákových promluv (kategorie *pupil commentary;* Vondrová & Žalská, 2015).

Z pohledu samotných úloh a postupů, které respondenti používali při řešení slovní úlohy a při odůvodňování odpovědí k úloze Concept Cartoon, lze konstatovat, že obě úlohy byly založeny na stejném modelu změny vyjádřené zlomkem, že obě úlohy měly v zadání uvedeny jedno přirozené číslo (vyjadřující stav po změně) a jeden zlomek (vyjadřující velikost změny), že všechny chyby respondentů se v oboru případech objevily hned v prvním kroku postupu[49] při identifikaci významu čísel uvedených v zadání a že nejčastější chyba spočívala v chybném rozhodnutí, že přirozené číslo uvedené v zadání úlohy je celkem pro zadaný zlomek. V tomto smyslu byl přístup řešitelů k oběma úlohám analogický. Ale při sledování použitých postupů z pohledu jednotlivých respondentů se ukázaly velké rozdíly mezi oběma úlohami. Polovina z respondentů prezentovala dva postupy řešení, které si navzájem neodpovídaly: jeden byl správný a jeden nesprávný, nebo oba byly nesprávné, ale založené na odlišných mylných úvahách (na identifikaci přirozeného čísla v zadání jako celku vs. na identifikaci přirozeného čísla v zadání jako části odpovídající uvedenému zlomku).

Kromě výše uvedených důvodů spočívajících v odlišné formě práce se slovní úlohou a s úlohou Concept Cartoon (vlastní řešení vs. posuzování cizích řešení s odůvodňováním) by mohl mít na nesoulad v postupech prezentovaných jednotlivými respondenty vliv rozdílný situační kontext obou úloh (Novotná & Vondrová, 2017) a také fakt, že námi zvolené úlohy se liší v typu změny vyjádřené zlomkem, na které jsou založeny: u slovní úlohy uvádí přirozené číslo v zadání úlohy stav po zmenšení (slevě), u úlohy Concept Cartoon stav po zvětšení (analogie zdražení). Ale vzhledem k tomu, že *všechny* chyby řešitelů spočívaly v chybné identifikaci přirozeného čísla v zadání jako celku nebo v chybné identifikaci přirozeného čísla v zadání jako části odpovídající uvedenému zlomku, tedy v tom, že *změna* jako taková vůbec nebyla do identifikace čísel v zadání zanesena, je možné konstatovat, že v našem případě typ změny neměl na volbu postupu řešení vliv.

Výzkumné šetření o rozdílu mezi informacemi získanými prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons je v této práci posledním týkajícím se úloh se změnou vyjádřenou zlomkem (předcházela výzkumná šetření v kapitole 4.2 a kapitole 5.1), poskytneme tedy závěrečné shrnutí celé záležitosti. Téma zlomky bývá pro budoucí učitele prvního stupně základní školy tématem obtížným (Cramer & Lesh, 1988; Tichá & Hošpesová, 2009; Depaepe a kol., 2015). Změna vyjádřená zlomkem patří ke konceptuálně nejobtížnějším partiím tohoto tématu (Tichá & Macháčková, 2006), ale splňuje vymezení obsahu daného kurikulem matematiky pro první stupeň základní školy. Změna vyjádřená zlomkem je konceptuální propedeutikou změny vyjádřené v procentech, která je součástí kurikula matematiky pro druhý stupeň základní školy, a úlohy se změnou vyjádřenou v procentech jsou hojně zastoupeny v učebnicích pro druhý stupeň základní školy. O to překvapivější je fakt, že v učebnicích pro první stupeň základní školy se úlohy se změnou

[49] Čtyři etapy řešení slovní úlohy podle Fridmana (1977): analýza úlohy, hledání plánu řešení, uskutečňování nalezeného plánu, kontrola a posouzení celé činnosti při řešení slovní úlohy (cit. dle Novotné, 2000: 20). V tomto smyslu respondenti chybně provedli analýzu úlohy.
Ve smyslu Komana a Tiché (1998) došlo k chybnému uchopení situace dané slovní úlohou, konkrétně k chybě při hledání a objevování vzájemných vztahů mezi jevy klíčovými pro vyřešení úlohy.

vyjádřenou zlomkem vyskytují jen sporadicky, obvykle v procvičovací nebo v opakovací části (ale ne ve výkladové); až výjimky se jedná o úlohy, ve kterých je znám stav před změnou, typ změny (zvětšení, zmenšení) a zlomek a úkolem je určit stav po změně[50]. Změna vyjádřená zlomkem nebývá explicitně zmiňována ani v souhrnných českých didaktických publikacích zahrnujících výuku tématu zlomků na prvním stupni základní školy (Hruša a kol., 1962; Divíšek, 1989; Hejný, 2014), přestože změna vyjádřená zlomkem vyhovuje interpretaci zlomku jako operátoru, tedy jako souboru instrukcí, který z daného přirozeného čísla vytvoří jiné přirozené číslo[51]. Také zahraniční souhrnné publikace o zlomcích a výzkumná šetření zaměřená na znalosti obsahu v oblasti zlomků se obvykle zaměřují na statický vztah části a celku, statický vztah více částí a více celků a na operace se zlomky, ale změnu vyjádřenou zlomkem vůbec nezkoumají (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Cramer & Lesh, 1988; Lamon,

[50] Například řada učebnic *Matematika a její aplikace* nakladatelství PRODOS (Molnár & Mikulenková, 2018b apod.) úlohy se změnou vyjádřenou zlomkem neobsahuje vůbec. Řada učebnic *Svět čísel a tvarů* nakladatelství Prometheus má pro 5. ročník v učebnici a ve sbírce příkladů po jedné úloze, ve které je znám stav před změnou, typ změny a zlomek a úkolem je určit stav po změně („Děti jezdily na kolečkových bruslích kolem hřiště. Honzík ujel 45 kol, Katka o 2/9 kol méně než Honzík a Radek o 1/5 kol více než Katka. Kolik kol ujel Radek?", Divíšek a kol., 2004: 92). Řada učebnic *Matematika se Čtyřlístkem* nakladatelství Fraus má šest podobných slovních úloh v učebnici pro 4. ročník (Pěchoučková a kol., 2014b: 64, 72) a dvě v pracovním sešitě (Pěchoučková a kol., 2014a: 30). Pracovní sešit obsahuje také několik početních úloh („Vypočítej. O 1/3 větší než 6 je číslo… " s nápovědou „1/3 z 6 jsou… ", dtto: 30). Řada učebnic *Matematika* nakladatelství Fraus má čtyři slovní úlohy se změnou vyjádřenou zlomkem v učebnici pro 4. třídu a jednu v učebnici pro 5. třídu. U dvou z těchto úloh je znám stav po změně, typ změny a zlomek a úkolem je určit stav před změnou (např. „V únoru snížili cenu zimního zboží o polovinu. V dubnu snížili podruhé, opět o polovinu…. Kolik korun stály v lednu rukavice, když jejich cena v květnu byla 60 Kč?", Hejný, Jirotková & Bomerová, 2010: 33). U jedné z úloh není stav před změnou ani po změně konkretizován („Cena zimního oblečení byla v lednu snížena o třetinu a tato nová cena byla v únoru opět snížena o třetinu. Alfons tvrdí, že v březnu je oblečení o víc než polovinu levnější, než bylo o Vánocích. Je to pravda?", dtto: 56). Řada učebnic *Matematika* nakladatelství ALTER má osm slovních úloh se změnou vyjádřenou zlomkem v učebnicích pro 5. ročník (např. Justová, 2019: 51). Poslední díl učebnice pro 5. ročník pak na předposlední straně obsahuje i sadu čtyř úloh, ve kterých je znám stav po změně, typ změny a zlomek a úkolem je určit stav před změnou („Přidám-li k číslu A jeho polovinu, dostanu 36. A =… „, dtto: 61), a dvě úlohy obsahující změnu vyjádřenou zlomkem ve složitější struktuře („Přičteš-li k jednomu číslu jeho polovinu, dostaneš druhé číslo. Jejich součet je 150. Najdi tato čísla.", dtto: 61). Starší řada učebnic *Matematika* vydaná Matematickým ústavem AV ČR obsahuje v učebnici pro 5. ročník šest úloh, ve kterých je znám stav před změnou, typ změny a zlomek a úkolem je určit stav po změně. Dvě z těchto úloh upozorňují na neaditivní vztah mezi stavem před změnou a stavem po změně („Do konce března stálo vajíčko 3 Kč, od 1. dubna už jen 2 Kč. Která z děvčat má pravdu? [dívka vlevo] Dnes je 31. března. Dnes vajíčka nekoupím, zítra budou o třetinu levnější. [dívka vpravo] Dobře, že kupuji vajíčka až dnes 1. dubna. Včera byla o polovinu dražší.", Koman, Kuřina & Tichá, 1997: 106; „Cena paprik byla na začátku sezony 72 Kč, uprostřed sezony klesla o 1/2, ale na konci sezony zase stoupla o 1/2 nové ceny. Zapište do sešitu: začátek sezony… Kč, střed sezony… Kč, konec sezony… Kč. Opakujte výpočet s tím, že zlomek 1/2 postupně nahradíte zlomky 1/3, 1/4 a 1/6", dtto: 124). Jedna z úloh upozorňuje na odlišný význam vyjádření „změna o" a "změna na" („Dva obchodníci, pan Krátký a pan Hrubeš, prodávali stejný druh bot, oba za stejnou cenu. Oba chtěli toto zboží vyprodat. Pan Krátký se rozhodl snížit cenu o 2/5. Pan Hrubeš snížil cenu na 2/5 původní ceny. Ke kterému z nich byste šli zlevněné boty koupit? Původně prodávali oba za 500 Kč. O kolik korun snížil cenu pan Krátký a o kolik pan Hrubeš?", dtto: 52).

[51] „Chápeme-li zlomek jako operátor, pak to znamená, že se na něj díváme jako na jakýsi „matematický stroj" (soubor instrukcí), který z daného přirozeného čísla vytvoří jiné přirozené číslo." (Divíšek, 1989: 70)

1999; Ma, 1999; Tirosh, 2000; Steffe & Olive, 2010; Ryan & Williams, 2011; Depaepe a kol., 2015). Nejasně vymezený je i přístup ke změně vyjádřené zlomkem nahlížený z perspektivy typologie slovních úloh: odborné publikace o slovních úlohách často pro úlohy se dvěma čísly v zadání rozlišují pouze situace, kdy jsou zadaná čísla svázána aditivní vazbou, a situace, kdy jsou svázána vazbou multiplikativní. Vůbec tak neuvažují možnost, že by v zadání úlohy byla uvedena dvě čísla, jejichž vztah je kombinací aditivní a multiplikativní vazby jako v případě změny vyjádřené zlomkem[52].

Výsledky výzkumných šetření o změně vyjádřené zlomkem, které jsou prezentované v této práci (kapitoly 4.2.5. 5.1, 5.2), potvrzují obtížnost tohoto tématu pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, objasňují možné zdroje a povahu mylných přesvědčení respondentů o změně vyjádřené zlomkem (např. přesvědčení, že se vztah mezi stavem před změnou a vztahem po změně je aditivní, neuvědomění si, že při řešení slovní úlohy se zlomky je nutno identifikovat celek, přesvědčení sémantického charakteru) a ukazují, že písemná řešení slovních úloh a úloh Concept Cartoons založených na změně vyjádřené zlomkem mohou být vhodným diagnostickým nástrojem i pro zkoumání mylných přesvědčení respondentů o statickém vztahu celku a části (např. vnímání zlomku jako čísla bez vztahu k celku).

Vzhledem k tomu, že předložená studie byla kvalitativního exploračního designu, jsou s ní spojena obvyklá omezení kvalitativního výzkumu: zkoumaný vzorek je relativně malý a výsledky výzkumného šetření platí právě jen pro něj, není možné je nikterak zobecňovat. Vzhledem k výhradně písemné podobě datových materiálů mohla být některá vyjádření respondentů při analýze dat nesprávně interpretována a není možné jednoznačně odlišit případy, kdy respondent neuměl reagovat, od případů, kdy se nesnažil nebo úmyslně nechtěl reagovat. Nicméně výzkumná data ke slovní úloze byla získána z povinného kontrolního písemného testu, čímž u nich byla výrazně snížena pravděpodobnost výskytu případů, kdy se respondent nesnaží nebo úmyslně nechce reagovat.

[52] Například Divíšek (1989) rozděluje slovní úlohy na jednoduché („Slovní úlohu považujeme za jednoduchou, jestliže k jejímu řešení postačí použít jen jeden početní výkon"; ibid: 126) a složené („Za složenou slovní úlohu obvykle považujeme takovou úlohu, k jejímuž řešení žák potřebuje použít aspoň dva početní výkony."; ibid: 137), aby pak v metodických poznámkách ke složeným úlohám konstatoval, že „U jednoduché slovní úlohy stačí dva dané údaje spojit vhodnou početní operací. Zde však máme údaje minimálně tři." (ibid: 139). Nepočítá tak s možností, že v zadání úlohy budou dva údaje a přesto se nebude jednat o úlohu jednoduchou – tak, jako je tomu u úloh se změnou vyjádřenou zlomkem.
Podobně Vondrová (2019) ve svém teoretickém úvodu o slovních úlohách odkazuje na Rendla (1997) a jeho vymezení triády („Triáda je tušením či vědomím souvislosti čísel. Vztah dvou čísel vyjádřený třetím konstituuje triádu – tři čísla, která nějak patří dohromady."; Rendl, 1997: 193), aby vzápětí konstatovala, že „Triády jsou tedy trojice, které jsou provázány aditivní či multiplikativní vazbou." (Vondrová, 2019: 60). Opět se nepočítá s možností, že vazba mezi čísly v triádě není aditivní ani multiplikativní.

Kapitola 5.3: Concept Cartoons jako prostředek pro podnícení diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech[53]

V této kapitole si představíme možnosti využití práce s Concept Cartoons k podnícení diskuse o oborově didaktických tématech. Takový způsob využití jsme vyzkoušeli s budoucími učiteli prvního stupně základní školy na výběrovém kurzu k matematické předmětové praxi. Účastníci kurzu studovali druhý semestr čtvrtého roku svého pětiletého magisterského studia, absolvovali již všechny čistě náslechové praxe a většinu průběžných výstupových praxí organizovaných fakultou v rámci studia. O výběrový kurz si sami požádali, aby se mohli podrobněji věnovat záležitostem souvisejícím s matematickou praxí. K vyprovokování diskuse u této skupiny respondentů jsme využili nejprve sadu Concept Cartoons s krátkou verzí doprovodných otázek, později i sadu s dlouhou verzí.

5.3.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na dvě výzkumné otázky:

- O1 Je možné prostředí Concept Cartoons využít pro podnícení diskuse budoucích učitelů o didaktických tématech v matematice?
- O2 Jak takové využití prostředí Concept Cartoons reflektují účastníci diskuse?

Výzkumný plán

Výzkumného šetření se zúčastnilo 19 budoucích učitelů prvního stupně základní školy, studentů čtvrtého ročníku pětiletého magisterského studia se splněnými všemi náslechovými praxemi a většinou průběžných výstupových praxí. Kompletní sadu dat odevzdalo 12 z nich.

Výzkumné šetření proběhlo formou experimentu v pěti po sobě jdoucích týdnech, každý týden se uskutečnil dvouhodinový seminář. V prvním a třetím týdnu došlo ke sběru dat od účastníků semináře prostřednictvím obrázků Concept Cartoons, ve druhém a čtvrtém týdnu se s oporou o tyto datové materiály uskutečnila diskuse, v pátém týdnu účastníci písemně reflektovali průběh experimentu a použití obrázků Concept Cartoons. Autorka této práce semináře vedla a po celou dobu si průběžně pořizovala terénní poznámky.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování (Švaříček, Šeďová a kol., 2014).

[53] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a z vlastního překladu publikace (Samková, 2019d) a upraven.

5.3.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat – Concept Cartoons v krátké verzi

Na prvním semináři jsme respondentům předložili deset obrázků Concept Cartoons se sadou tří doprovodných otázek („Které děti na obrázku mají pravdu?", „Které nemají?" a „Proč?"). Jednotlivé obrázky se zaměřovaly na různá témata z kurikula matematiky pro první stupeň základní školy (obsah trojúhelníku ve čtvercové síti, propedeutika objemu kvádru, operace s přirozenými čísly, propedeutika rovnic a nerovnic, porovnávání desetinných čísel, rozdíl celých čísel, určení zlomku z čísla, dělení na nestejné části). Aritmetické obrázky byly společné s výzkumným šetřením z kapitoly 4.1. Na vypracování odpovědí měli respondenti k dispozici celý seminář, tedy 90 minut; většina z nich využila celý vymezený čas.

Analýza dat jako podklad pro první diskusi

Písemné odpovědi na otázky jsme od respondentů vybrali a kvalitativně zanalyzovali. Soustředili jsme se na projevy znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu. Ke každému obrázku Concept Cartoon vznikl strukturovaný seznam všech relevantních kódů od všech respondentů.

Na druhý seminář (o týden později) jsme vypracované odpovědi na otázky přinesli respondentům zpět a zahájili volnou diskusi nad jednotlivými obrázky. Diskusi moderovala autorka této práce, ale příliš do ní nezasahovala. V diskusi průběžně uplatňovala poznatky z analýzy dat tak, aby zazněly a byly diskutovány názory všech respondentů, i těch, kteří do diskuse sami aktivně nezasahovali.

Sběr dat – Concept Cartoons v dlouhé verzi

Na třetím semináři jsme respondentům předložili čtyři obrázky Concept Cartoons se sadou šesti doprovodných otázek upravených podle poznatků výzkumného šetření z kapitoly 4.2 (viz tabulka 5.4). Výběr konkrétních obrázků byl částečně ovlivněn průběhem první diskuse. Na vypracování odpovědí měli respondenti k dispozici celý seminář, tedy 90 minut, ale odevzdávali již po 60–80 minutách.

Tabulka 5.4: Nové pokyny k obrázkům Concept Cartoons v dlouhé verzi

1) Napište, s kterým názorem nejvíce souhlasíte, tj. který je Vám nejbližší.
2) Napište, s kterým názorem rozhodně nesouhlasíte.
3) Rozhodněte, které názory jsou správné a které chybné. Své rozhodnutí zdůvodněte.
4) U chybných názorů se pokuste odhalit, proč vznikly.
5) Poraďte dětem, které udělaly chybu, jak tuto chybu napravit.
6) Vymyslete dva texty, které by mohly být v bublině s otazníkem – jeden správný a jeden chybný.

Analýza dat jako podklad pro druhou diskusi

Analýza dat, příprava podkladů pro diskusi a způsob moderování diskuse byly provedeny stejně jako u první diskuse.

Sběr dat – reflexe

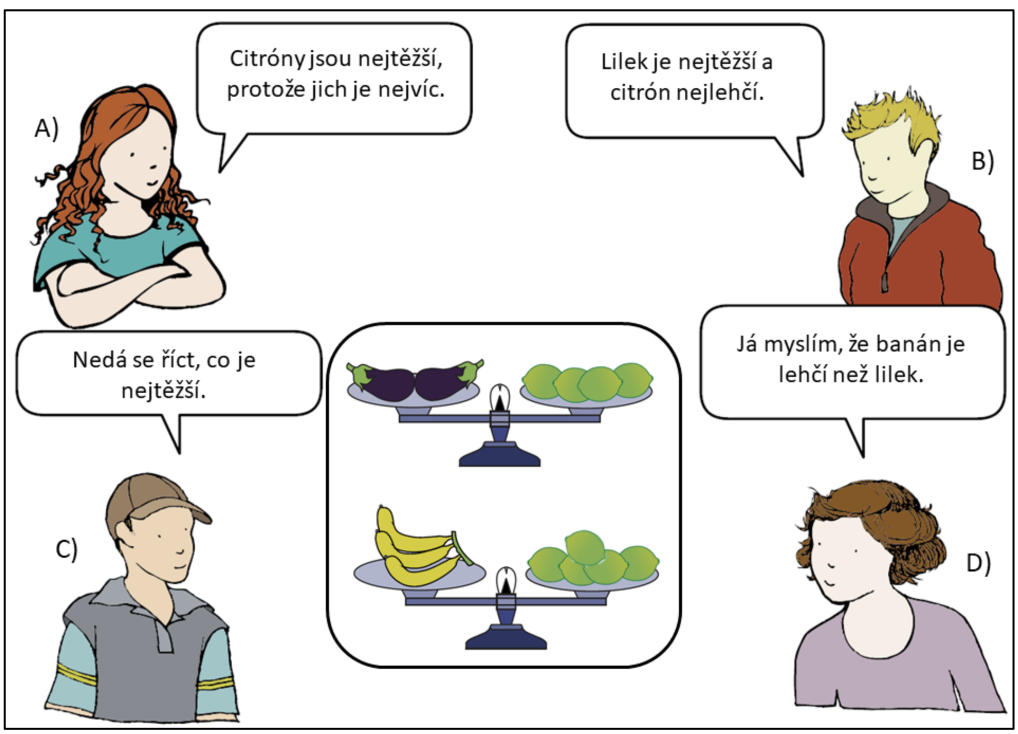
Na posledním pátém semináři byli respondenti požádáni, aby vypracovali písemné reflexe dosavadního průběhu kurzu, tedy aby reflektovali svou práci s obrázky Concept Cartoons a zrealizované diskuse.

5.3.3 Výsledky[54]

Diskuse nad krátkou verzí Concept Cartoons

Během diskuse byly obrázky probírány jeden po druhém. Účastníci kurzu k diskusi využili celý seminář, tedy 90 minut.

Mezi nejvíce diskutované patřil Concept Cartoon založený na prakticky založené matematické úloze, která umožňuje více různých interpretací zadání, viz obrázek 5.6.



Obrázek 5.6: Concept Cartoon *Lilek*; šablona dětí s prázdnými bublinami převzata z elektronické publikace (Dabell a kol., 2008: č. 2_10)

[54] Záležitosti zde uvedené podrobněji představuje publikace (Samková, 2020b: kapitola 5.4).

Bubliny B a D na obrázku 5.6 vychází z obvyklejší interpretace, která porovnává váhu jednoho citrónu, jednoho banánu a jednoho lilku (podstatná jména „citrón”, „banán”, „lilek” jsou v těchto bublinách uvedena v jednotném čísle). Bublina A může být založena na alternativní interpretaci zadání, která sleduje váhu všech citrónů na obrázku a porovnává ji s váhou všech zobrazených banánů a všech zobrazených lilků (podstatné jméno „citrón” je v této bublině uvedeno v množném čísle) – v takovém případě je váha zobrazených citrónů rovna dvojnásobku váhy zobrazených banánů a dvojnásobku váhy zobrazených lilků.

Rozbor odevzdaných odpovědí na doprovodné otázky ukázal, že většina účastníků kurzu alternativní interpretaci neobjevila. Během diskuse účastníci u tohoto obrázku Concept Cartoon dlouze debatovali o úlohách s více možnými interpretacemi zadání, ptali se na příklady dalších takových úloh, začali sami podobné úlohy vytvářet, navzájem si poskytovali zpětnou vazbu, jestli vytvořené úlohy jsou správně sestavené a jestli skutečně mají více různých interpretací zadání, zajímali se o výskyt podobných úloh v učebnicích. Bez jakékoliv pobídky ze strany moderátorky diskuse sami začali diskutovat o tom, jak se připravovat na výuku, pokud do ní budou chtít podobné úlohy začleňovat, a jak často by takové úlohy měli začleňovat.

Podobně bouřlivou diskusi vyvolal i Concept Cartoon založený na prakticky založené matematické úloze s více správnými postupy řešení. Cílem matematizované části úlohy bylo určit 3/4 z 12 a v bublinách byly uvedeny celkem tři různé správné postupy, jak toho dosáhnout. Dva z těchto postupů jsou v českém vzdělávacím prostředí běžné (jsou založeny na chápání 3/4 jako $3 \cdot 1/4$, resp. 3/4 jako celku bez 1/4), ale třetí se zde vyskytuje velmi málo (je založený na chápání 3/4 jako 1/4 z 3 celků[55]). Většina účastníků kurzu třetí postup neznala a tento fakt vedl k dlouhé diskusi o různých interpretacích pojmu zlomek, které se v českém vzdělávacím prostředí využívají, o různých grafických znázorněních zlomků, o různých typech prakticky založených úloh, které se pomocí zlomků řeší. Účastníci sami nabízeli příklady různých interpretací a různých grafických znázornění, vytvářeli prakticky založené slovní úlohy a poskytovali si navzájem zpětnou vazbu. V písemných odpovědích na doprovodné otázky se mnoho účastníků kurzu k bublině s neobvyklým postupem vyjadřovalo v tom smyslu, že „výsledek je v pořádku, ale nerozumím postupu”, takže diskuse nad tímto obrázkem nakonec vedla k velice důležité debatě o tom, jak podobné názory žáků hodnotit, jestli správnost výsledku je dostatečným důvodem k označení nerozpoznaného postupu jako správného, jak k takovým postupům přistupovat při hodnocení písemných prací. Pro následující týden si účastníci vyžádali pokračování v diskusi o prakticky založených úlohách o zlomcích.

[55] V německé didaktice je tento model hojně využíván (Krauthausen & Scherer, 2002).

Diskuse nad dlouhou verzí Concept Cartoons

Na základě průběhu první diskuse byly pro druhý sběr dat vybrány dva na sebe navazující obrázky Concept Cartoons založené na prakticky založených úlohách se zlomky (obrázky *Stadion* a *Destičky* z výzkumných šetření v kapitole 4.2 a kapitole 5.1). K nim byly přidány dva na sebe navazující obrázky týkající se pamětného počítání s dvojcifernými čísly (pamětného sčítání a pamětného násobení mimo obor násobilky; prvním z nich byl obrázek *Honza* z výzkumného šetření v kapitole 4.2). Diskuse nad odpověďmi na otázky k obrázkům opět trvala celých 90 minut.

Zajímavá debata se rozproudila kolem obrázků k pamětnému sčítání a pamětnému násobení. Oba tyto obrázky obsahují bublinu s tvůrčím postupem s chybou v posledním kroku postupu (na obrázku *Honza* patří tato bublina Honzovi, viz rozbor obrázku v kapitole 4.2.4). První z obrázků navíc obsahuje i bublinu s postupem, který by mohl indikovat hluboké neporozumění operaci sčítání a vůbec číslu jako kvantitě (tato bublina patří Terce, viz rozbor obrázku *Honza* v kapitole 4.2.4). U obrázku vztahujícího se pamětnému sčítání nebylo pro většinu respondentů obtížné tvůrčí postup odhalit a Honzovi poradit, jak svou chybu napravit. Ale u obrázku vztahujícího se k pamětnému násobení mimo obor násobilky se odhalení podstaty podobně koncipovaného Bářina tvůrčího postupu s chybou v posledním kroku nepodařilo žádnému z respondentů. Ve svých písemných reakcích na bublinu s tímto postupem[56] respondenti vesměs poznamenávali, že Bářin názor je nesprávný nebo že mu nerozumí, ale dále záležitost neřešili.

Během diskuse přišla nejprve řada na obrázek se sčítáním a na Honzovu bublinu s tvůrčím postupem s chybou v posledním kroku postupu. Rozpoutala se diskuse o tom, jak podobné názory žáků hodnotit, jestli nesprávnost výsledku je dostatečným důvodem k odmítnutí celého postupu, jak k takovým postupům přistupovat při hodině a jak při hodnocení písemných prací. Poté se debatovalo o Terčině bublině. Někteří účastníci kurzu správně poznali, že její postup by mohl být projevem dyskalkulie, a tak se diskuse stočila k práci s dětmi s poruchami učení. Účastníci diskuse si poté na některý z dalších seminářů vyžádali téma základních poruch učení a jejich vztahu k výuce matematiky na prvním stupni základní školy.

Následovala diskuse k obrázku s násobením a Bářinou bublinou s tvůrčím postupem s chybou v posledním kroku. Protože podstatu Bářiny chyby v písemných odpovědích nikdo neodhalil, poukázala moderátorka diskuse na to, že Bářina chyba je Honzově chybě v mnohém podobná, tedy že začátek výpočtu je správně. Chvíli to trvalo, ale nakonec se respondenti společnými

[56] Tvůrčí postup je založený na úvaze, že výsledek násobení číslem 25 je možné snáze určit jako výsledek násobení číslem 100 a dělení číslem 4, a že číslo 26 je jen o 1 větší než 25. Tudíž že výpočet $12 \cdot 26$ je možné realizovat jako $1200 : 4 + 12$. Bářina chyba spočívá v tom, že k $1200 : 4$ nepřičetla číslo 12, ale číslo 26. V Bářině bublině je uveden pouze výpočet $1200 : 4 + 26$ bez jakéhokoliv bližšího vysvětlení.

silami dopracovali k opravenému znění Bářina postupu. Následující diskuse pak adresovala tematiku tvůrčích postupů a s tím související práci s talentovanými dětmi. Respondenti debatovali o tom, jak zareagovat, když oni sami žákovu postupu nerozumí, jestli v takových případech mají žáky směrovat ke standardním postupům, nebo je nechat experimentovat, jaké úlohy takovým žákům mají zadávat a jak k nim při výuce přistupovat. Nakonec přišla řada i na téma přípravy žáků na matematické soutěže a na přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia. Jako jedna z možností práce s talentovanými dětmi byla zmíněna i možnost využít ve výuce obrázky Concept Cartoons, které mají různě obtížné bubliny. Nejvíce obtížná bublina takovým žákům nabízí prostor pro diferencovanou práci v hodině.

Reflexe diskusí nad obrázky Concept Cartoons

V reflexích sepsaných na konci experimentu 8 (z 12) účastníků zmínilo záležitosti související s otevřeným přístupem. Hlavně se jednalo o možnost sledování různých postupů řešení (jevy z kategorie H v kapitole 4.1) a posuzování různých postupů řešení učitelem (kategorie J v kapitole 4.1):

C15 Začala jsem nahlížet na příklad a jeho řešení z více úhlů, lze jeden příklad řešit více zajímavějšími způsoby.

C17 Přineslo mi to poznání i jiných řešení, které jsem třeba neznala, nebo nebyly pro mne známé.

C7 Líbí se mi, že se nad daným typem příkladu musíme více zamyslet, protože existuje více správných postupů, které nás hned nemusí napadnout.

C2 Myslím, že bylo dobré si ty obrázky projít a uvažovat nad tím, jak různé děti mohou i jinak přemýšlet.

C13 Určitě hezký příklad toho, že ne všechny děti přemýšlí stejně a k řešení úlohy vede více řešení.

C11 Co oceňuji je možnost více správných odpovědí – žáci tak mohou sdílet své postupy s ostatními.

C17 Zjistila jsem, že pro učitele to musí být složité, pokud má každé dítě jiný úhel pohledu, vysvětlit jim každý názor, aby ho pochopily.

C7 Učí nás nahlížet na příklad z více úhlů. Někdy je složité poznat, co tím ten žák chtěl říct, takže je důležité se hodně ptát.

Další záležitosti zmiňované v reflexích se týkaly práce s chybou a hodnocení výkonů žáka:

C11 Myslím, že je pro nás dobré si vyzkoušet opravit chyby žáků, které se zaměřují na jejich postup.
Co mi to přineslo nového: To, že nestačí jen opravit (špatně x dobře), ale zaměřit se na chybu jako na něco, s čím se dá dál pracovat – pomoct dětem odhalit druh chyby, který dělají.

C18 Budu si více dávat pozor na samotný postup a nejenom na samotný výsledek.

C2 Dá se na nich vysvětlit i to, že není důležitý jen výsledek, ale i postup.

Někteří respondenti se věnovali metodice práce s obrázky Concept Cartoons jako takové:

C6 Trvá mi, než si uvědomím, jak obrázek vnímat,… k tomu mi pak spíše pomohla debata o úlohách, více jsem se byla s ostatními schopna podívat do hloubky.

C11 Forma, kterou nám to bylo předáno, byla podle mého názoru funkční. První hodinu jsme si to zkusili sami a druhou hodinu jsme si to společně zhodnotili – komentovali problémová místa.

5.3.4 Diskuse

Předložená studie poskytla jednoznačně pozitivní odpověď na otázku *Je možné prostředí Concept Cartoons využít pro podnícení diskuse budoucích učitelů o didaktických tématech v matematice?* Na základě jejích výsledků je možné konstatovat, že k takovému účelu je možné využít jak krátkou, tak dlouhou verzi Concept Cartoons. Nám se konkrétně osvědčila kombinace krátké a dlouhé verze, kdy krátká verze byla realizována v dvoutýdenním předstihu před dlouhou verzí, a tak do zadání dlouhé verze mohly být zakomponovány poznatky z diskuse ke krátké verzi. Didakticky zaměřené otázky, které se objevily v diskusích iniciovaných vypracováním úloh Concept Cartoons, se vztahují k záležitostem, jež bývají často učiteli popisovány jako problematické (Biton, Hershkovitz, Hoch, Ben-David & Fellus, 2017): Mám hodnotit metody nebo výsledky?, Jak se vypořádat s chybějícími popisy myšlenkových procesů žáků?, Co dělat, když nerozumím myšlenkám, které žáka dovedly k řešení?, Jak mám hodnotit řešení, které není kompletní? Takovým otázkám předcházela diskuse iniciovaná otevřeností úloh Concept Cartoons (existencí více správných interpretací zadání úlohy, které účastníci diskuse sami neodhalili; existencí správných postupů řešení, které účastníci diskuse neznali) a diskuse iniciovaná úlohami Concept Cartoons s postupy řešení o více krocích, které v bublinách obsahovaly postup s chybou v posledním kroku (včetně tvůrčího postupu, který účastníci diskuse neznali).

V odpovědi na otázku *Jak takové využití prostředí Concept Cartoons reflektují účastníci diskuse?* je možné rozlišit tři různé okruhy záležitostí, na které naši respondenti v reflexích poukazovali: záležitosti související s otevřeným přístupem (možnost seznamování se s různými žákovskými postupy řešení, obtížnost posuzování různých žákovských postupů učitelem), záležitosti týkající se práce s chybou (a s tím souvisejícího hodnocení výkonů žáka, který udělal chybu) a záležitosti týkající se metodiky práce s obrázky Concept Cartoons.

Poznatky tohoto šetření ilustrují jednu z výhod práce s dílčími reprezentacemi školní praxe zmiňovanou již v úvodu kapitoly 1.5: možnost soustředit se na vybrané jevy související se školní praxí (zde konkrétně na didakticko-matematické jevy). Během náslechové a výstupové matematické předmětové praxe, kterou účastníci výzkumného šetření navštěvovali v semestru před výzkumným šetřením, bývalo často obtížné nasměrovat jejich pozornost na didakticko-matematické jevy. Místo toho měli tendenci svou pozornost zaměřovat na identitu žáků, metody výuky a způsob řízení třídy učitelem (podobně jako ve výzkumných šetřeních zmiňovaných Stehlíkovou, 2010). Pokud tito budoucí učitelé zaznamenali nějaké didakticko-matematické jevy, často k nim poskytovali pouze pedagogicky nebo psychologicky podložená vysvětlení. Při práci v prostředí Concept Cartoons tyto tendence vymizely: budoucí učitelé se zaměřili na didakticko-matematické jevy a poskytovali k nim vysvětlení opírající se o poznatky z didaktiky matematiky.

Výzkum modelů profesní přípravy budoucích učitelů obvykle zmiňuje tři zásadní složky obsahově zaměřené profesní přípravy učitelů (Kuntze, 2014): teoretický rozvoj didaktických znalostí obsahu (např. seznamování budoucích učitelů s častými mylnými představami žáků, s možnými formami výkladu konkrétních témat), propojení teorie s praxí (např. sledování výuky, vrstevnické mikrovyučování) a reflexe praxe (např. analýza záznamů výuky, analýza učebních úloh). Diskuse budoucích učitelů vyvolaná prací v prostředí Concept Cartoons adresovala všechny tři tyto složky: prostřednictvím bublin se budoucí učitelé seznamovali s různými správnými i mylnými představami žáků, sledovali virtuální reakce několika žáků na konkrétní situace související s učivem a analyzovali – žákovské reakce, učební úlohy (ze kterých obrázky Concept Cartoons vycházely) i podobu a možné důsledky různých reakcí učitele v daných situacích.

V této studii obrázky Concept Cartoons prokázaly, že kladnou roli při podněcování diskuse mohou mít nejen v případě žáků a obsahově zaměřené diskuse v rámci výuky na základní škole (Keogh & Naylor, 1999; Naylor & Keogh, 2013), ale i v případě budoucích učitelů a didakticky zaměřené diskuse v rámci profesní přípravy učitelů.

Jak ilustrují výsledky tohoto výzkumného šetření, studium obrázkových reprezentací výukových situací vhodně vytvořených učitelem nebo didaktikem se pro budoucí učitele může stát prostředkem pro získání dostatečné zásoby podnětů pro budoucí rozhodování při vlastní výuce. Podobnou funkci může mít i studium didaktických kazuistik vytvořených metodou 3A (Janík a kol., 2016; Slavík, Janík, Najvar & Knecht, 2017), ovšem ty pro budoucí či začínající učitele mohou být ke studiu příliš obtížné. Studium obrázkových reprezentací, jako jsou Concept Cartoons, tak může tvořit přirozený předstupeň ke studiu didaktických kazuistik.

Vzhledem k tomu, že předložená studie byla kvalitativního exploračního designu, jsou s ní spojena obvyklá omezení kvalitativního výzkumu: zkoumaný vzorek je relativně malý a výsledky výzkumného šetření platí právě jen pro něj, není možné je nikterak zobecňovat.

Kapitola 5.4: Typologie aritmetických Concept Cartoons a metodika jejich využití při sběru dat[57]

Systematická práce s obrázky Concept Cartoons (při přípravě výzkumných šetření i při různých seminářích s budoucími učiteli) nás přirozeně dovedla k potřebě matematické Concept Cartoons přehledně roztřídit. Typologie, kterou představí tato kapitola, vznikla na základě dlouhodobé studie s kvalitativním exploračním designem, která se uskutečnila v letech 2012 až 2019. Během tohoto období se uskutečnilo mnoho menších i větších výzkumných šetření, ve kterých Concept Cartoons figurovaly jako nástroj pro sběr dat nebo jako výuková pomůcka. Některá z těchto šetření představily předcházející kapitoly této práce. Výzkumná data ze všech těchto výzkumných šetření se stala výzkumnými daty, ze kterých typologie Concept Cartoons vzešla. Protože se téměř všechna dílčí výzkumná šetření vztahovala výhradně k výuce aritmetiky, je typologie platná pro obrázky Concept Cartoons s aritmetickou tematikou. Jednotlivé položky typologie (klíčová hlediska a s nimi související kvalitativní kategorie) jsou uspořádány chronologicky podle jejich významu pro tvorbu nových Concept Cartoons, takže souhrnný přehled typologie je zároveň možné využít jako osnovu při tvorbě nových aritmetických obrázků Concept Cartoons.

Systematická práce s obrázky Concept Cartoons také přirozeně vyústila v požadavek ustanovit ucelenou metodiku pro sběr dat uskutečňovaný prostřednictvím Concept Cartoons. Do kontextu typologického šetření tak byla umístěna ještě výzkumná otázka na toto téma.

5.4.1 Metodologie výzkumného šetření

Výzkumná otázka

Tato empirická studie hledá odpověď na tři výzkumné otázky:

- F1 Jaká hlediska jsou klíčová pro výběr a tvorbu úloh Concept Cartoons za účelem jejich využití při výuce aritmetiky a v profesní přípravě budoucích učitelů pro výuku aritmetiky?
- F2 Jaké pořadí hledisek klíčových pro výběr a tvorbu úloh Concept Cartoons je vhodné pro tvorbu nových Concept Cartoons?
- F3 Jaká metodika je vhodná pro využití prostředí Concept Cartoons za účelem diagnostiky nebo rozvoje (didaktických) znalostí obsahu v aritmetice u budoucích učitelů?

[57] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a upraven.

Výzkumný plán

Výzkumné šetření mělo 319 účastníků – budoucích učitelů pro první stupeň základní školy nebo budoucích učitelů matematiky pro druhý stupeň základní školy. Od nich jsme různými metodami získávali písemné reakce na obrázky Concept Cartoons. K těmto písemným záznamům jsme přidali vlastní terénní poznámky z tvorby Concept Cartoons a z výuky, při které jsme je využívali. Analýza dat směřovala k nalezení strukturovaného seznamu hledisek a kategorií, podle kterých by bylo možné obrázky Concept Cartoons vhodně třídit i tvořit.

Vzhledem k povaze výzkumné otázky jsme vycházeli z kvalitativního výzkumného designu exploračního typu. Data jsme zpracovávali s využitím otevřeného kódování a konstantní komparace (Švaříček, Šeďová a kol., 2014).

5.4.2 Sběr a analýza dat

Sběr dat

Od účastníků výzkumného šetření jsme při různých příležitostech různými metodami sběru sbírali písemné záznamy odpovědí na různé sady doprovodných otázek k obrázkům Concept Cartoons; pro výzkumné šetření relevantní byly obrázky s aritmetickou tematikou. Do datového souboru byly také přidány naše vlastní terénní poznámky ze seminářů, na kterých byly aritmetické Concept Cartoons využity k diagnostice nebo k výuce, vlastní terénní poznámky k výběru a tvorbě obrázků aritmetických Concept Cartoons určených pro výuku nebo pro diagnostiku a vlastní terénní poznámky k organizaci sběru dat prostřednictvím Concept Cartoons. K dispozici tak byly poznámky týkající se

- osmi originálních[58] aritmeticky zaměřených úloh Concept Cartoons, s přidruženými písemnými daty (písemnými záznamy jejich řešení, které vypracovali účastníci studie);
- sto dvaceti originálních úloh (tj. zbytku originální matematické sady Dabell a kol., 2008), bez přidružených písemných dat – tyto úlohy sloužily pro ilustraci vybraných jevů nebo jako inspirace pro tvorbu nových úloh;
- šestnácti aritmeticky zaměřených úloh, které jsme zcela nově vytvořili, s přidruženými písemnými daty;
- třinácti aritmeticky zaměřených úloh, které jsme zcela nově vytvořili, bez přidružených písemných dat – tyto úlohy sloužily pro ilustraci vybraných jevů.

Analýza dat k F1 a F2

Při analýze dat pro výzkumné otázky související s typologií jsme pro jednotlivé úlohy sledovali objem a kvalitu dat v písemných záznamech odpovědí k jednotlivým obrázkům

[58] originální ve smyslu pocházející z originální matematické sady (Dabell a kol., 2008)

Concept Cartoons, vztahy mezi obrázky Concept Cartoons a matematickým obsahem jejich písemných záznamů, to vše z pohledu jednotlivých účastníků i skupin účastníků. Podrobná analýza dat poukázala na důležitost rozlišování *objektivních* a *subjektivních* hledisek třídění, nabídla objektivní hlediska jako ta, která jsou lépe uchopitelná a lépe se strukturují, a identifikovala dva základní faktory pro objektivní hlediska: *úloha v pozadí obrázku* a *obsah bublin*.

Jako *objektivní* je vnímáno hledisko, které úlohy třídí bez ohledu na aktuální znalosti žáků. Jako *subjektivní* je vnímáno hledisko, jež úlohy třídí s ohledem na aktuální znalosti žáků (tj. pro různé žáky a různá období školní docházky může být jeden a ten samý Concept Cartoon zařazen do různých kategorií). *Úlohou v pozadí obrázku* je myšleno pozadí obrázku jako takové a případná část textu v bublině vlevo nahoře, která přibližuje, o čem by měly děti v ostatních bublinách diskutovat.

Pro každé identifikované objektivní klíčové hledisko byla na základě dat vytvořena kostra jemu příslušných kategorií. Všem výsledným kvalitativním kategoriím byly přiděleny typové zkratky. V kapitole 5.4.5 bude uveden strukturovaný souhrn všech relevantních kategorií.

Analýza dat k F3

Při analýze dat pro výzkumnou otázku související s metodikou jsme pro jednotlivé sady doprovodných otázek sledovali objem a kvalitu dat v písemných záznamech odpovědí k jednotlivým doprovodným otázkám. Také jsme pro různé podoby obrázků Concept Cartoons a různé sady doprovodných otázek sledovali vztah mezi objemem a kvalitou dat a údaji o praktických záležitostech souvisejících s organizací sběru dat zaznamenanými v terénních poznámkách (např. čas potřebný na vypracování odpovědí, dotazy či požadavky respondentů během sběru dat, dodržování pokynů respondenty aj.).

5.4.3 Výsledky – hlediska a kategorie pro třídění podle úlohy v pozadí

Na základě provedené analýzy dat byla identifikována dvě objektivní hlediska pro třídění podle úlohy v pozadí obrázku Concept Cartoons: *oblast matematiky* a *otevřenost úlohy*.

Oblast matematiky

Hledisko *oblast matematiky* bývá časté v typologiích slovních úloh (Novotná, 2000), kde obvykle rozlišuje zkoumané úlohy podle konkrétních oblastí čisté matematiky (do kterých se slovní úloha transformuje) a podle konkrétních oblastí aplikované matematiky (do kterých je zasazen kontext slovní úlohy). Pro úlohy v pozadí obrázků Concept Cartoons se jako klíčové nejprve projevilo rozlišení na úlohy zasazené zcela do kontextu čisté matematiky a na úlohy aplikační (prakticky založené). Podrobnější studium aritmeticky zaměřených obrázků Concept Cartoons podle konkrétních oblastí pak u čistě matematických úloh vedlo k rozlišení na úlohy početní (založené na početním příkladu) a úlohy výrokové (založené na výroku, tvrzení o nějaké aritmetické situaci). Při porovnání s typologií úloh, kterou zavedl Pólya (1945, česky 2016: 133), patří matematické úlohy početní k úlohám určovacím (úlohou je něco najít), kdežto matematické úlohy výrokové patří k úlohám důkazovým (úlohou je něco dokázat).

U úloh aplikačních se rozdělení podle konkrétních oblastí aplikované matematiky ukázalo jako bezpředmětné, ale jako důležitá se ukázala míra závislosti úlohy na vnějších informacích. Toto nové hledisko vedlo k rozlišení aplikačních úloh na úlohy bez vnějšího vlivu (při jejich řešení se využívají pouze praktické informace uvedené v zadání úlohy a znalosti školské matematiky) a na úlohy s vnějším vlivem (při jejich řešení se využívají i poznatky mimo školskou matematiku, které nejsou uvedené v zadání úlohy, např. sportovní pravidla, technické parametry známého přístroje).

Podle hlediska *oblast matematiky* je tak možné úlohy v pozadí aritmeticky zaměřených obrázků Concept Cartoons rozdělit do čtyř disjunktních kategorií:

- čistě matematická úloha početní (typ MP);
- čistě matematická úloha výroková (typ MV);
- aplikační úloha bez vnějšího vlivu (typ Ab);
- aplikační úloha s vnějším vlivem (typ As).

Otevřenost úlohy

Hledisko *otevřenost úlohy* využívá k roztřídění úloh v pozadí kritéria otevřenosti úlohy ve smyslu otevřeného přístupu (kapitola 1.2), tedy otevřené zadání (více možných interpretací zadání, více možností uchopení úlohy), otevřený postup řešení (existence více správných postupů řešení), otevřený výsledek (více správných výsledků, více možných interpretací jednoho výsledku) a otevřenou další cestu (možnost vytvoření nové úlohy drobnými změnami zadání, položením dodatečných otázek).

Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.2, každá matematická úloha má otevřenou cestu, a tak toto kritérium do typologie nezahrneme. Ostatní kritéria nejsou splněna automaticky, a tak podle hlediska *otevřenost úlohy* můžeme pro úlohy v pozadí Concept Cartoons ustanovit čtyři kategorie:

- úlohy, které nemají otevřené zadání, postup řešení, ani výsledek (typ OX);
- úlohy s otevřeným zadáním (typ OZ);
- úlohy s otevřeným postupem řešení (typ OP);
- úlohy s otevřeným výsledkem (typ OV).

Během analýzy dat se jako důležitá ukázala ještě jedna kategorie, která úzce souvisí s otevřeností úlohy v pozadí a zároveň je velice důležitá pro tvorbu obsahu bublin. Touto pátou kategorií z hlediska otevřenosti je kategorie:

- úlohy s postupy řešení o více krocích (typ OK).

Kategorie k otevřenosti úlohy nejsou disjunktní, jeden obrázek Concept Cartoon může náležet do více kategorií najednou.

5.4.4 Výsledky – hlediska a kategorie pro třídění podle obsahu bublin

Nedílnou součástí každé úlohy Concept Cartoons jsou rozhovorové bubliny. Na základě provedené analýzy dat byla identifikována tři objektivní hlediska pro třídění podle obsahu bublin: *matematická správnost bubliny*, *typ matematické informace uvedené v bublině* a *polyvalence bublin*. První dvě hlediska třídí jednotlivé bubliny; na jednom obrázku Concept Cartoons se mohou vyskytovat bubliny náležející do různých kategorií. Třetí hledisko třídí celé obrázky Concept Cartoons.

Matematická správnost bublin

Jak již bylo zmíněno v teoretickém úvodu (kapitola 1.6), jednotlivé bubliny na obrázcích Concept Cartoons mohou být matematicky správné, matematicky nesprávné, případně jejich správnost může být nejasná či podmíněná. Podle hlediska *matematická správnost bubliny* je tak možné bubliny rozdělit do tří disjunktních kategorií:

- bubliny, u kterých je správnost a nesprávnost podmíněná (typ SP);
- bubliny, u kterých je správnost a nesprávnost nejasná (typ SX);
- bubliny, u kterých je správnost a nesprávnost jednoznačná (typ SJ).

Podmíněnost správnosti (typ SP) znamená, že správnost a nesprávnost bubliny závisí na dodatečných podmínkách, které nejsou na obrázku Concept Cartoon nikde uvedené. Nejasná správnost (typ SX) bývá způsobena nepřesností nebo neúplností informací uvedených v dané bublině.

Typ matematické informace uvedené v bublinách

Kromě matematické správnosti se pro bubliny jako klíčové projevilo rozdělení, které je na správnosti zcela nezávislé, a to rozdělení podle typu matematické informace uvedené v bublinách. Analýza dat k tomuto hledisku upozornila na výrazné odlišnosti objevující se u bublin z obrázků Concept Cartoons, které mají v pozadí úlohy čistě matematického výrokového typu (typ MV). V rozdělení podle typu matematické informace uvedené v bublinách tak bubliny reagující na úlohy typu MV mají své vlastní kategorie.

U úloh Concept Cartoons, které mají v pozadí čistě matematické početní úlohy nebo aplikační úlohy (typy MP, Ab, As), je typ matematické informace určen tou částí procesu řešení úlohy, která je v bublinách uvedena. Bubliny je pak podle hlediska *typ matematické informace uvedené v bublině* možné rozdělit do čtyř disjunktních kategorií:

- bubliny jen s výsledky (typ BV);
- bubliny jen s postupy řešení (typ BP);
- bubliny s postupy řešení a výsledky (typ BPV);
- bubliny s komentáři – k řešitelnosti úlohy, k počtu řešení apod. (typ BK).

U úloh Concept Cartoons, které mají v pozadí čistě matematické výrokové úlohy (typ MV), je typ matematické informace určen typem výroku (tvrzení), jenž je v bublinách uveden. Bubliny je pak možné podle hlediska *typ matematické informace uvedené v bublině* rozdělit do tří disjunktních kategorií:

- bubliny s tvrzením o jednom konkrétním případu (typ BTK);
- bubliny s tvrzením obecným (typ BTO);
- bubliny s tvrzením existenčním (typ BTE).

Polyvalence bublin

Jako poslední budeme zkoumat hledisko *polyvalence bublin*, tedy relativní obtížnosti rozhodnutí o správnosti postupů, výsledků nebo výroků, jež jsou v bublinách uvedeny. Nepřímo toto hledisko souvisí s polyvalentními úlohami (kapitola 1.2). Jsou-li v rámci jednoho obrázku Concept Cartoon aspoň dvě bubliny, u nichž je rozhodnutí o správnosti výrazně různě obtížné, řekneme, že sada bublin náležející k danému obrázku je polyvalentní.

Aby toto hledisko bylo objektivní (tj. nezávislé na znalostech konkrétního žáka nebo budoucího učitele, který s obrázkem pracuje), musíme se omezit pouze na takové obrázky Concept Cartoons, u kterých bez znalostí potřebných pro rozhodnutí o správnosti méně obtížné bubliny nedokážeme rozhodnout o správnosti více obtížné bubliny. Tedy na obrázky, u kterých je více obtížná bublina obsahovou nadstavbou bubliny méně obtížné.

V dělení podle obsahu bublin hledisko *polyvalence bublin* generuje jedinou kategorii:

- polyvalentní sada bublin (typ PSB),

která se na rozdíl od všech ostatních kategorií třídění podle obsahu bublin nepřiřazuje jednotlivým bublinám, ale celému obrázku Concept Cartoon.

5.4.5 Výsledky – strukturovaný soupis relevantních hledisek a kategorií

Souhrnný strukturovaný přehled všech objektivních klíčových hledisek a relevantních kategorií pro třídění aritmeticky zaměřených obrázků Concept Cartoons uvádí tabulka 5.5.

Publikace (Samková, 2020b: kapitola 2) nabízí ke každé kategorii ilustrační příklady různých obrázků Concept Cartoons, které do dané kategorie spadají. Celkem je v publikaci takto představeno 12 obrázků z originální sady (Dabell a kol., 2008) a 20 obrázků nově vytvořených. Ke každému ilustračnímu obrázku je zpracována kompletní typologie.

Tabulka 5.5: Strukturovaný přehled hledisek a kategorií a jejich typových zkratek

Třídění podle úlohy v pozadí obrázku

hledisko *oblast matematiky*

- čistě matematická úloha početní (typ MP);
- čistě matematická úloha výroková (typ MV);
- aplikační úloha bez vnějšího vlivu (typ Ab);
- aplikační úloha s vnějším vlivem (typ As);

hledisko *otevřenost úlohy*

- úlohy, které nemají otevřené zadání, postup řešení, ani výsledek (typ OX);
- úlohy s otevřeným zadáním (typ OZ);
- úlohy s otevřeným postupem řešení (typ OP);
- úlohy s otevřeným výsledkem (typ OV);
- úlohy s postupy řešení o více krocích (typ OK).

Třídění podle obsahu bublin

hledisko *matematická správnost bubliny*

- bubliny, u kterých je správnost a nesprávnost podmíněná (typ SP);
- bubliny, i kterých je správnost a nesprávnost nejasná (typ SX);
- bubliny, u kterých je správnost a nesprávnost jednoznačná (typ SJ);

hledisko *typ matematické informace uvedené v bublině*

pro typy MP, Ab, As:

- bubliny jen s výsledky (typ BV);
- bubliny jen s postupy řešení (typ BP);
- bubliny s postupy řešení a výsledky (typ BPV);
- bubliny s komentáři – k řešitelnosti úlohy, k počtu řešení apod. (typ BK);

pro typ MV:

- bubliny s tvrzením o jednom konkrétním případu (typ BTK);
- bubliny s tvrzením obecným (typ BTO);
- bubliny s tvrzením existenčním (typ BTE);

hledisko *polyvalence bublin*

- polyvalentní sada bublin (typ PSB).

5.4.6 Výsledky – postup tvoření aritmetických Concept Cartoons

Vzhledem k povaze druhé výzkumné otázky byly během analýzy dat jednotlivé položky typologie (klíčová hlediska a s nimi související kvalitativní kategorie) uspořádány chronologicky podle jejich významu pro tvorbu nových Concept Cartoons, takže souhrnný přehled typologie z kapitoly 5.4.5 je zároveň možné využít jako osnovu při tvoření nových aritmeticky založených Concept Cartoons.

Prvním krokem procesu tvorby je vždy rozhodnutí o oblasti matematiky, kterou chceme úlohou Concept Cartoons zkoumat. Podle zvoleného typu následuje výběr vhodného početního příkladu, tvrzení nebo aplikačního problému (slovní úlohy), jež úlohu v pozadí bude tvořit. Z hlediska typologie se pro tento účel zpravidla nejlépe hodí příklady, tvrzení a úlohy, které jsou otevřené (s otevřeným zadáním, otevřeným postupem řešení nebo otevřeným výsledkem – typy OZ, OP, OV) nebo mají postupy o více krocích (typ OK). Pokud však máme v úmyslu prostřednictvím obrázku Concept Cartoon ověřovat, zda žáci ovládají základní jednoduché postupy či správně rozumí základním pojmům, jsou vhodnou volbou i úlohy s postupem o jednom kroku a úlohy typu OX. Vybírat můžeme z učebnic a pracovních sešitů, z vlastních učebních nebo testových úloh, z odborné literatury zaměřené na matematické učební úlohy nebo na porozumění žáka matematickém učivu apod. U úloh aplikačních navíc zjistíme, jestli k vyřešení vybrané úlohy jsou potřebné nějaké vnější informace (tj. informace, které nejsou součástí běžného matematického učiva). Pokud ano, tak se musíme rozhodnout, jestli je umístíme do zadání úlohy (tím vznikne úloha typu Ab), nebo jestli jejich nalezení bude úkolem pro žáky (úloha typu As).

Jakmile máme vhodnou úlohu v pozadí vybranou, můžeme přistoupit k dalšímu kroku: rozhodnutí, jak bude vypadat pozadí obrázku, jaká část zadání úlohy bude jeho součástí, jestli do pozadí obrázku umístíme nějaké cedule nebo nápisy. Zbytek zadání úlohy pak musíme vhodně naformulovat do levé horní bubliny. Vždy je třeba dbát na jednoduchý jazyk a maximální stručnost a přehlednost. Někdy se v této fázi tvorby ukáže, že zvolená úloha není pro formu Concept Cartoons vhodná, že její obrázková a stručná textová podoba není dostatečně srozumitelná. Pak je třeba se vrátit na začátek procesu a vybrat úlohu jinou.

Zvolené obrázkové pozadí výtvarně zpracujeme a přejdeme k tvoření obsahu bublin. Je-li to naším záměrem, uděláme z jedné bubliny bublinu prázdnou, a pak opět postupujeme chronologicky podle typologie. Rozhodneme se, jestli matematická (ne)správnost bublin má být jednoznačná, nejasná nebo podmíněná a jestli všechny bubliny na obrázku budou z tohoto pohledu stejného charakteru. U podmíněné správnosti určíme relevantní podmínky, u nejasné správnosti míru a charakter nejasnosti. U jednoznačné správnosti ustanovíme počet bublin, které budou matematicky správné, a počet bublin, které budou matematicky nesprávné. Pokud si s počty nejsme jistí nebo pro nás nejsou směrodatné, můžeme tento krok přeskočit. Rozhodneme se také, jaký typ matematické informace bude uveden v bublinách: pro početní a aplikační úlohy to mohou být jen výsledky, jen postupy řešení, postupy řešení s výsledky, nebo komentáře (typy BV, BP, BPV, BK), pro výrokové úlohy to mohou být tvrzení o konkrétním případu, obecná tvrzení a existenční tvrzení (typy BTK, BTO, BTE).

A nyní vybereme konkrétní obsah jednotlivých bublin. Při výběru můžeme vycházet z vlastních zkušeností z výuky (v roli učitele, v roli hospitujícího), ze zkušeností kolegů, ze zajímavých výsledků pedagogického výzkumu týkajících se správných nebo chybných strategií žákovských řešení či povahy žákovských představ (viz kapitola 1.4.3). Obsahy bublin můžeme také vytvořit jen na základě systematického didaktického rozboru vybrané úlohy v pozadí: postup řešení úlohy rozebereme na dílčí kroky a v nich uměle vytváříme chyby bez ohledu na to, jak moc jsou takové chyby obvyklé ve školní praxi. Chceme-li vytvořit polyvalentní sadu bublin (typ PSB), zjistíme, jestli mezi dostupnými alternativami do bublin jsou aspoň dvě se společnými potřebnými znalostmi, ale s rozdílnou obtížností. Opět dbáme na jednoduchý jazyk a maximální stručnost a přehlednost textů. Zkontrolujeme, zda jsou bubliny v souladu s úlohou v pozadí a zda jsou dostatečně srozumitelné. V ideálním případě předložíme hotový Concept Cartoon nezávislé osobě (kolegovi, vybranému žákovi nebo skupině žáků) ke zkušebnímu vyřešení.

5.4.7 Výsledky – metodika využití prostředí Concept Cartoons při sběru dat[59]

Na základě analýzy dat ke třetí výzkumné otázce vznikla tzv. *krátká verze* a tzv. *dlouhá verze* sběru dat v prostředí Concept Cartoons. Tyto verze se v mnohém shodují a v mnohém doplňují, jejich popis tedy bude společný. V obou případech probíhá sběr dat individuálně, každý respondent obdrží složku s několika úlohami Concept Cartoons a k nim písemně odpovídá na sadu doprovodných otázek.

Příprava celého procesu začíná výběrem souboru úloh Concept Cartoons, které chceme při sběru dat využít, a vytvořením složky pro každého respondenta. Každou vybranou úlohu Concept Cartoons vytiskneme na horní třetinu listu A4. Potom na další list formátu A4 nahoru vytiskneme sadu doprovodných otázek určených pro příslušnou verzi (tabulka 5.6 vlevo uvádí sadu otázek pro krátkou verzi, vpravo sadu otázek pro dlouhou verzi), nepotištěnou část tohoto listu odstřihnout. Nakonec listy s úlohami Concept Cartoons seřadíme, navrch přidáme list s doprovodnými otázkami a sešijeme.

Během sběru dat jsou respondenti vyzváni využít nepotištěnou část listů s obrázky a případně i jejich druhou stranu na podrobné písemné vyjádření k jednotlivým otázkám. Pracují individuálně, ideálně během dvouhodinového semináře. Konkrétní časová dotace záleží na obtížnosti úloh v pozadí: u krátké verze se zpravidla pohybuje mezi 5 a 15 minutami na jeden Concept Cartoon, u dlouhé verze mezi 20 a 40 minutami. Osvědčilo se předkládání obrázků v sadách po čtyřech až pěti u krátké verze a v sadách po dvou u dlouhé verze. Pro krátkou verzi je také možné využít sady o deseti obrázcích s nižší obtížností úloh v pozadí.

[59] Text v této kapitole byl převzat z publikace (Samková, 2020b) a upraven.

Tabulka 5.6: Sada doprovodných otázek pro verzi krátkou (vlevo) a dlouhou (vpravo)

Které děti na obrázku mají pravdu? Které nemají? Proč?	1) Napište, s kterým názorem nejvíce souhlasíte, tj. který je Vám nejbližší. 2) Napište, s kterým názorem rozhodně nesouhlasíte. 3) Rozhodněte, které názory jsou správné a které chybné. Své rozhodnutí zdůvodněte. 4) U chybných názorů se pokuste odhalit, proč vznikly. 5) Poraďte dětem, které udělaly chybu, jak tuto chybu napravit. 6) Vymyslete dva texty, které by mohly být v bublině s otazníkem – jeden správný a jeden chybný.

Nevyplatí se spěchat ani předem oznamovat čas vymezený na vypracování odpovědí – takový přístup by mohl vést ke snížení množství a kvality získaných dat. Obzvláště v případě, kdy respondenti s úlohami Concept Cartoons pracují poprvé, je třeba jim poskytnout dostatek času, aby se mohli s formou Concept Cartoons a s úlohami dostatečně seznámit a uvědomit si všechny aspekty, na které ve svých odpovědích mohou reagovat.

Pro lepší odezvu a orientaci v datech je nutné jednotlivé děti na obrázku přehledně rozlišit: pro krátkou verzi stačí opatřit je identifikačními písmeny A, B,… (jako na obrázku 4.1), pro dlouhou verzi jsou nutné jmenovky (jako na obrázku 3.1). Se jmenovkami bývají reakce respondentů více autentické, umožňuje jim to dítě přímo oslovit jménem – projeví se to hlavně u odpovědí na pátou otázku.

Pro dlouhou verzi je kvůli šesté otázce potřeba mít na obrázku prázdnou bublinu (jako na obrázku 3.1). U krátké verze se prázdná bublina nevyužije, a tak je možné ji nahradit bublinou s textem (jako na obrázku 4.1).

V ideálním případě by u dlouhé verze měli respondenti na otázky odpovídat popořadě, důležité je to hlavně u prvních dvou otázek, které mají jiný charakter než otázka třetí: první dvě otázky nevyžadují žádné odůvodnění, ale u otázky třetí je odůvodnění vyžadováno. Dodržení tohoto pravidla je možné zajistit změnou barvy pera po zodpovězení druhé otázky.

5.4.8 Závěr

Na obrázcích založené reprezentace výukových situací, mezi které obrázky Concept Cartoons patří, se v českém vzdělávacím prostředí ve větší míře objevily teprve nedávno. V této kapitole představená typologie aritmeticky zaměřených Concept Cartoons (kapitola 5.4.5) vznikla zprvu jako opora pro naši vlastní systematickou výzkumnou a vzdělávací činnost využívající prostředí Concept Cartoons. Její možné využití však přesahuje naše vlastní potřeby. Typologie může sloužit například jako opora pro systematickou výzkumnou nebo vzdělávací činnost kolegům z jiných fakult, které profesně připravují učitele matematiky, jako opora pro občasnou nebo systematickou vzdělávací činnost učitelům matematiky v praxi, jako myšlenkový základ pro typologii geometricky založených Concept Cartoons nebo pro typologii Concept Cartoons v dalších školních předmětech.

Oblastí profesní přípravy budoucích učitelů, kterou jsme ve vztahu ke Concept Cartoons zatím příliš neprobádali, ale bude možné v ní typologii využít, je oblast týkající se tvoření Concept Cartoons budoucími učiteli. Dosavadní naše výzkumné sondy (např. Samková, 2019e) se potýkaly s přílišnou roztříštěností dat, čemuž by vhodné využití typologie mělo zabránit.

Typologie aritmetických Concept Cartoons je podrobně rozpracována v odborné publikaci (Samková, 2020b), kde je v souvislosti s typologií uvedeno a podrobně analyzováno 32 obrázků Concept Cartoons náležejících k různým kombinacím kategorií, jež typologii tvoří.

Dalším výsledkem s praktickým dopadem je ucelená metodika pro sběr dat v prostředí Concept Cartoons (kapitola 5.4.7), kterou je možné využít například pro sběr dat za účelem diagnostiky (didaktických) znalostí obsahu (ukázky takového využití představily kapitoly 4.2, 4.3, 5.1, 5.2) nebo pro podnícení diskuse o oborově didaktických tématech (kapitola 5.3).

Metodika má dvě verze, ta kratší byla odvozena od originální metodiky Keogh(ové) a kol. (1999; viz kapitola 1.6.2) a je více zaměřena na znalosti obsahu, delší verze byla vytvořena na základě vymezení didaktických znalostí obsahu podle Kleickmanna a kol. (2013; kapitola 1.3.3), a je tedy více zaměřena na tento typ znalostí.

KAPITOLA 6: Přehled centrálních nálezů a relevantních publikací

V této závěrečné kapitole shrneme centrální nálezy a uvedeme přehled souvisejících výzkumných šetření a odborných publikací, na jejichž přípravě a realizaci se autorka habilitační práce podílela. V případě spoluautorství budou specifikovány jednotlivé autorské podíly.

Centrální nálezy práce se vztahují ke třem vzdělávacím tématům: k metodice výuky, konkrétně k možnostem využití otevřeného přístupu jako teoretického rámce pro přípravu a realizaci badatelsky orientované výuky matematiky (kapitola 6.1); k výsledkům výuky, konkrétně k možnému vlivu systematické realizace otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy (kapitola 6.2) a k nástrojům výuky, konkrétně ke vzdělávací pomůcce Concept Cartoons, k její typologii a tvorbě a k různým možnostem jejího využití v profesní přípravě učitelů prvního stupně základní školy (kapitola 6.3). Výzkumné poznatky vztahující se k metodice výuky jsou nezávislé na stupni a typu vzdělávání, stejně tak jako poznatky k nástrojům výuky související s typologií a tvorbou Concept Cartoons.

Odhlédneme-li od propojení s badatelsky orientovanou výukou, lze na základě zjištění této práce chápat otevřený přístup jako metodu výuky, jež umožňuje systematickou realizaci sekvenčního i simultánního představování a porovnávání různých konceptů a strategií, a prostředí Concept Cartoons jako jeden z nástrojů, který takovou realizaci dokáže zprostředkovat. Tento poznatek je souhrnným centrálním nálezem (kapitola 6.4) vztahujícím se současně k metodice, výsledkům i nástrojům výuky.

Kapitola 6.1: Otevřený přístup jako teoretický rámec pro přípravu a realizaci badatelsky orientované výuky matematiky

Badatelsky orientovaná výuka byla pro tuto práci odrazovým můstkem a nakonec jím i zůstala. Jedním z prvotních cílů práce bylo připravit a zrealizovat experimentální dvousemestrální badatelsky orientovaný povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy. Pro přípravu a realizaci tohoto kurzu a pro systematickou práci s úlohami podněcujícími bádání se jako vhodnější a lépe uchopitelný koncept ukázal otevřený přístup.

6.1.1 Vztah otevřeného přístupu a badatelsky orientované výuky

Spojovacím článkem mezi badatelsky orientovanou výukou a otevřeným přístupem se stal Deweyův (1938) přístup k badatelsky orientované výuce, který bádání vymezuje prostřednictvím situací a jejich transformací. V souladu s tímto vymezením by úloha určená pro badatelsky orientovanou výuku měla obsahovat něco neurčitého, co je řešitelem vnímáno jako podnětné nebo zajímavé. V práci jsme ukázali, že jednu z možností, jak neurčité úlohy vybírat, zkoumat a vytvářet, nabízí v kontextu matematického vzdělávání otevřený přístup (Becker & Shimada, 1997; Pehkonen, 1997; Nohda, 2000).

Původní myšlenku otevřeného přístupu podle Beckera a Shimady (1997), která se týkala pouze prakticky založených matematických úloh, a jeho modifikaci provedenou Nohdou (2000) jsme dále rozpracovali, aby více přiléhala procesu řešení matematické úlohy, a zobecnili ji tak, aby byla platná i pro úlohy, které nejsou prakticky založené. Námi vytvořené nové vymezení tak za *otevřenou* považuje každou úlohu, která má otevřené zadání (existuje více způsobů, jak zadání interpretovat), otevřený postup řešení (existuje více způsobů, jak úlohu řešit), otevřený výsledek (existuje více řešení úlohy nebo více interpretací jednoho řešení) nebo otevřenou další cestu (existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou). Rozpracovali jsme také Hellmigovo (2010) vymezení *polyvalentních* úloh (úloh s více řešeními různé obtížnosti) a obohatili ho o úlohy s jedním řešením, ke kterému vedou různě obtížné postupy řešení. Pro nová vymezení otevřených a polyvalentních úloh jsme nabídli podrobné ilustrační příklady.

Přehled odborných publikací, které zkoumají vymezení konceptu badatelsky orientované výuky matematiky, konceptu otevřeného přístupu a vztah obou konceptů, uvádí tabulka 6.1. V této práci se vymezení a vztahu obou konceptů věnují kapitoly 1.1 a 1.2.

Tabulka 6.1: Relevantní odborné publikace k vymezení obou konceptů a k jejich vztahu

publikace	**autorský podíl**	**jazyk a obsah publikace**
(Samková, 2011)	100 %	[CZ] úvodní příspěvek o vymezení badatelsky orientované výuky matematiky;
(Samková, 2015)	100 %	[CZ] vymezení bádání, mezipředmětové souvislosti;
(Samková, Hošpesová, Roubíček & Tichá, 2015)	50 %	[CZ] vymezení bádání, historické souvislosti, mezipředmětové souvislosti, související didaktické rámce, schéma badatelského procesu, typologie badatelských úloh;
(Samková, 2018c), teoretický úvod	100 %	[CZ] vymezení otevřeného přístupu a jeho vztahu k badatelsky orientované výuce;
(Samková, 2019c)	100 %	[CZ] nové vymezení polyvalentních úloh;

6.1.2 Příprava a realizace badatelsky orientované výuky matematiky vycházející z konceptu otevřeného přístupu

Pro realizaci badatelsky orientovaného experimentálního kurzu aritmetiky bylo zvoleno tzv. nasměrované bádání, při kterém učitel formuluje otázky a žáci sami navrhují postup řešení, realizují ho a diskutují výsledky. Důvodem pro výběr nasměrovaného bádání byly závěry studií (Hattie, 2009; Minner a kol., 2010; Bruder & Prescott, 2013; Jiang & McComas, 2015), které indikují, že tato úroveň bádání mívá největší pozitivní vliv na znalosti žáků. Podle Deweyova vymezení bádání pak bylo učivo kurzu rozděleno na část pro bádání známou a část pro bádání neznámou. Část pro bádání známá vytvořila náplň přednášek; patřila do ní nezbytná vymezení pojmů a důkazy důležitých tvrzení, jejichž dokazování formou objevování by pro účastníky kurzu bylo příliš obtížné. Zbylé učivo (část pro bádání neznámá) bylo určeno k objevování na seminářích.

Badatelské aktivity na seminářích byly realizovány prostřednictvím řešení otevřených úloh, jejichž otevřenost se během kurzu postupně zvyšovala: od úloh, které měly otevřený pouze postup řešení, k úlohám s různými kombinacemi více typů otevřenosti. Průběžně se zvyšovala i obtížnost úloh: od slovních úloh pro první stupeň základní školy až k čistě matematickým úlohám vyžadujícím hledání vlastností matematických objektů a jejich zobecňování. U každé úlohy byli účastníci kurzu vyzýváni k hledání různých postupů řešení (samostatně nebo v malých skupinkách) a k jejich představování. Účastníci všechny nalezené postupy zaznamenávali na tabuli, diskutovali a obhajovali je, hledali mezi nimi souvislosti.

Přehled odborných publikací, které popisují přípravu a realizaci experimentálního kurzu, uvádí tabulka 6.2. V této práci se podobě experimentálního kurzu podrobně věnuje kapitola 2.1.

Tabulka 6.2: Relevantní odborné publikace k přípravě a realizaci experimentálního kurzu

publikace	autorský podíl	jazyk a obsah publikace
(Samková, 2016a)	100 %	[CZ] příprava a realizace experimentálního kurzu;
(Samková, 2017a)	100 %	[EN] příprava a realizace experimentálního kurzu;

Kapitola 6.2: Vliv systematické realizace otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy

Souběžně s celým experimentálním kurzem aritmetiky probíhalo kvalitativní výzkumné šetření zaměřené na možný vliv kurzu na způsob, jakým jeho účastníci řeší matematické úlohy. Způsoby řešení úloh byly zkoumány z perspektivy otevřeného přístupu. Za tímto účelem účastníci kurzu průběžně odevzdávali svá písemná řešení slovních úloh a úloh Concept Cartoons; na závěr kurzu písemně reflektovali celý průběh kurzu. Podle výsledků kvalitativního výzkumného šetření založeného na těchto datech je možné konstatovat, že většina účastníků kurzu změnila během kurzu své způsoby řešení úloh směrem k otevřenému přístupu: akceptují více zápisů jednoho řešení nebo u úloh s více řešeními (výsledky) sami hledají více než jedno řešení, někteří i systematicky.

Z pohledu celé skupiny účastníků byly v datech nalezeny zajímavé vztahy z pohledu rozmanitosti a obvyklosti použitých správných postupů řešení otevřených slovních úloh. U každé slovní úlohy se v datech objevilo několik různých správných postupů řešení, u úlohy s nejvyšší obtížností dokonce každý z úspěšných řešitelů použil jiný postup. Dále se ukázalo, že slovní úlohy s více správnými postupy řešení je možné rozdělit do dvou skupin: úlohy, u kterých jsou různé správné postupy rovnoměrně rozloženy mezi respondenty (*běžné* postupy), a úlohy, u kterých jeden postup výrazně převažuje nad ostatními (*většinový* postup vs. *menšinové* postupy). Až na pár výjimek pak bylo možné účastníky kurzu rozdělit na *příznivce většinových postupů* a na *příznivce menšinových postupů*, přičemž obě skupiny příznivců byly přibližně stejně velké. Mezi úspěšnými řešiteli úlohy s nejvyšší obtížností bylo stejné zastoupení příznivců většinových postupů a příznivců menšinových postupů. Ve skupině příznivců menšinových postupů došlo k výraznějšímu zlepšení v otevřeném přístupu než ve skupině příznivců většinových postupů. Důvodem tohoto zlepšení mohla být skutečnost, kterou někteří příznivci menšinových postupů zmínili ve své reflexi na konci kurzu: ocenili možnost seznamovat se s více různými postupy řešení jednotlivých slovních úloh a vybírat si mezi nimi postupy, které jim osobně nejvíce vyhovují. Ve skupině příznivců většinových postupů nebylo zlepšení v otevřeném přístupu tak výrazné, ale v reflexích někteří tito účastníci oceňovali možnost seznamovat se i s jinými než jejich vlastními postupy řešení a zmiňovali tyto záležitosti i ve vztahu ke své budoucí praxi (tj. ve vztahu k možné rozmanitosti žákovských postupů, se kterými se ve své budoucí praxi budou setkávat).

Navazující výzkumné šetření s dalšími skupinami respondentů (Samková, 2020a) naznačilo, že systematická realizace otevřeného přístupu by mohla zvyšovat podíl příznivců menšinových postupů mezi řešiteli matematických úloh, ale přesná identifikace faktorů ovlivňujících tento podíl musí být předmětem dalšího šetření.

Přehled odborných publikací, které zkoumají možný vliv systematického uplatňování otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy, uvádí tabulka 6.3 (tabulka zahrnuje i publikaci, jež na tuto problematiku pohlíží obecněji, z pohledu badatelsky orientované výuky). V této práci se možnému vlivu systematického uplatňování otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy podrobně věnuje kapitola 4.1.

Tabulka 6.3: Relevantní odborné publikace k možnému vlivu systematického uplatňování otevřeného přístupu na budoucí učitele prvního stupně základní školy

publikace	**autorský podíl**	**jazyk a obsah publikace**
(Samková, Hošpesová & Tichá, 2016)	70 %	[CZ] empirická studie o možném vlivu systematické realizace badatelsky orientované výuky matematiky a badatelsky orientované výuky didaktiky matematiky na budoucí učitele prvního stupně základní školy (na jejich znalosti, postoje, podobu pedagogické praxe);
(Samková & Tichá, 2016b)	85 %	[EN] empirická studie o možném vlivu systematické realizace badatelsky orientované výuky matematiky na způsob argumentace budoucích učitelů prvního stupně základní školy;
(Samková & Tichá, 2016d)	50 %	[EN] empirická studie o možném vlivu občasné realizace badatelsky orientované výuky matematiky na způsob argumentace budoucích učitelů prvního stupně základní školy;
(Samková & Tichá, 2016a)	80 %	[EN] empirická studie o možném vlivu systematické realizace badatelsky orientované výuky matematiky na míru uplatňování otevřeného přístupu budoucími učiteli prvního stupně základní školy; přípravná studie pro (Samková & Tichá, 2016c);
(Samková & Tichá, 2016c)	85 %	[EN] empirická studie o možném vlivu systematické realizace badatelsky orientované výuky matematiky na míru uplatňování otevřeného přístupu budoucími učiteli prvního stupně základní školy a na otevřenost úloh Concept Cartoons jimi vytvořených; přípravná studie pro (Samková, 2018c);

(Samková, 2018c)	100 %	[CZ] empirická studie o možném vlivu systematického uplatňování otevřeného přístupu na způsob, jakým budoucí učitelé prvního stupně základní školy řeší aritmetické úlohy;
(Samková, 2019b)	100 %	[EN] empirická studie o rozmanitosti a obvyklosti postupů používaných budoucími učiteli prvního stupně základní školy při řešení otevřených slovních úloh; přípravná studie pro (Samková, 2020a);
(Samková, 2020a)	100 %	[EN] empirická studie o rozmanitosti a obvyklosti postupů používaných budoucími učiteli prvního stupně základní školy při řešení otevřených slovních úloh, různé skupiny respondentů, vztah k formativnímu hodnocení;

Kapitola 6.3: Možnosti využití prostředí Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů

Pro výzkumné šetření zkoumající vliv experimentálního kurzu na znalosti jeho účastníků bylo jako jeden z nástrojů pro sběr písemných dat vybráno prostředí Concept Cartoons. Hledali jsme totiž nástroj, který by přednostně sledoval ty záležitosti související s badatelsky orientovanou výukou (resp. s otevřeným přístupem), které běžné testy nesledují (uvědomění si možnosti existence více interpretací zadání úlohy, více postupů řešení, více řešení, více zápisů a interpretací těchto řešení aj.) a to, co jsme v té době věděli o prostředí Concept Cartoons, bylo s touto představou v souladu. Výsledky výzkumných šetření realizovaných v období před, během a po experimentálním kurzu široký potenciál prostředí Concept Cartoons pro využití v profesní přípravě učitelů potvrdily; kromě diagnostického potenciálu v oblasti znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu se prokázal i vzdělávací potenciál v oblasti rozvoje didaktických znalostí obsahu.

Myšlenka využít Concept Cartoons jako nástroj pro sběr dat ve výzkumných šetřeních o znalostech budoucích učitelů byla zcela nová a pro takový účel neexistovala metodika, a tak je tato metodika jedním z centrálních nálezů práce. Metodika pro sběr dat v prostředí Concept Cartoons má dvě verze (*krátká verze*, *dlouhá verze*), volba konkrétní verze se odvíjí od účelu sběru dat. Pro kvalitativní diagnostiku znalostí obsahu je možné využít krátké i dlouhé verze sběru dat, přičemž krátká verze umožňuje spíše povrchní diagnostiku (je možné ji využít například k odhalení kritických míst), kdežto dlouhá verze umožňuje zkoumání do hloubky (je možné ji využít na podrobné zkoumání zdrojů neporozumění). Pro kvalitativní diagnostiku didaktických znalostí obsahu v matematice je určena dlouhá verze sběru dat, která umožňuje zkoumání všech tří dimenzí didaktických znalostí obsahu podle Kleickmanna a kol. (2013), tedy znalostí žákova porozumění, znalostí úloh a znalostí obsahu pro vyučování.

Obě verze sběru dat je také možné kombinovat a provést smíšenou diagnostiku znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu. Při této metodě jsou odpovědím na krátkou verzi doprovodných otázek přímo přidělovány body, kdežto na základě odpovědí na dlouhou verzi jsou nejprve prostřednictvím kvalitativní analýzy dat určeny dvě reprezentativní úlohy (úloha s nižší obtížností, úloha s vyšší obtížností) a bodovány jsou pak kvalitativně zpracované odpovědi k těmto reprezentativním úlohám. Na základě bodů jsou jednotlivým respondentům přiděleny krátké kategorie (vztahující se ke znalostem obsahu) a dlouhé kategorie a dlouhé schéma (vztahující se k didaktickým znalostem obsahu). Konkrétní podoba dlouhého schématu a příslušná kombinace krátké a dlouhé kategorie pak vytvářejí přehlednou charakteristiku znalostí vybraného respondenta v rámci sledované skupiny.

Kombinace obou verzí sběru dat se také osvědčila při podněcování diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech, tedy jako nástroj pro rozvoj didaktických znalostí obsahu.

Kromě metodiky pro použití prostředí Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů vznikla v rámci práce také typologie aritmetických úloh Concept Cartoons, která umožňuje lepší orientaci při výběru a tvorbě Concept Cartoons pro rozličné diagnostické nebo výukové účely. Typologie je založena na objektivních hlediscích oblast matematiky, otevřenost úlohy, matematická správnost bublin, typ matematické informace uvedené v bublinách a polyvalence bublin, která jsou nezávislá na aktuálních znalostech respondentů. Jednotlivé položky typologie jsou uspořádány chronologicky tak, aby se daly využít jako osnova při tvorbě nových Concept Cartoons.

Přehled odborných publikací, které souvisejí s využitím prostředí Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů, uvádí tabulka 6.4. V této práci jsou uvedeny empirické studie využívající Concept Cartoons jako nástroj pro diagnostiku znalostí obsahu (kapitoly 4.1, 4.3, 5.1, 5.2) nebo didaktických znalostí obsahu (kapitoly 3.1, 4.2, 4.3) a jako nástroj pro podnícení diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech (kapitola 5.3). Některé z těchto studií přitom přímo zkoumají vhodné parametry prostředí Concept Cartoons pro diagnostické účely (kapitoly 3.1, 4.2, 4.3) nebo vlastnosti, kterými se prostředí Concept Cartoons liší od jiných nástrojů pro sběr dat při diagnostice znalostí obsahu (kapitola 5.2). Typologie Concept Cartoons, metodika pro jejich tvorbu a metodika pro sběr dat jejich prostřednictvím jsou odvozeny a uvedeny v kapitole 5.4.

Tabulka 6.4: Relevantní odborné publikace s empirickými studiemi k tématu využití prostředí Concept Cartoons v profesní přípravě učitelů prvního stupně základní školy

publikace	autorský podíl	jazyk a obsah publikace
(Samková & Tichá, 2015)	50 %	[EN] kvalitativní diagnostika znalostí obsahu, konkrétně procesu uchopování situací;
(Samková & Hošpesová, 2015)	50 %	[EN] kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu, procedurálních a konceptuálních znalostí, různé skupiny respondentů; součást přípravné studie pro (Samková, 2016b);
(Samková, 2016b)	100 %	[CZ] přehled využití Concept Cartoons ve výuce na základní škole, mezipředmětové souvislosti; metodika využití Concept Cartoons pro diagnostiku didaktických znalostí obsahu; kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů před kurzem didaktiky matematiky;
(Samková, 2017b)	100 %	[EN] metodika využití Concept Cartoons pro diagnostiku didaktických znalostí obsahu; součást přípravné studie pro (Samková, 2016b);
(Samková & Tichá, 2017b)	80 %	[EN] kvalitativní diagnostika znalostí obsahu, konkrétně procesu zobecňování;
(Samková & Tichá, 2017a)	80 %	[EN] kvalitativní diagnostika znalostí obsahu, konkrétně znalostí v oblasti zlomků, u budoucích učitelů prvního stupně základní školy; přípravná studie pro (Samková & Tichá, 2017c);
(Samková & Tichá, 2017c)	85 %	[EN] kvalitativní diagnostika znalostí obsahu, konkrétně znalostí v oblasti zlomků, u různých skupin respondentů;
(Samková, 2018d)	100 %	[EN] rozdíl v informacích o znalostech obsahu získaných prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons; přípravná studie pro (Samková, 2018a);

(Samková, 2018a)	100 %	[EN] rozdíl v informacích o znalostech obsahu získaných prostřednictvím slovních úloh a prostřednictvím Concept Cartoons, různé skupiny respondentů;
(Samková, 2018b)	100 %	[EN] Concept Cartoons jako dílčí reprezentace školní praxe zaměřená na různá uvažování žáků v konkrétní výukové situaci a reakci učitele na ně; kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů před kurzem didaktiky matematiky;
(Samková, 2019a)	100 %	[EN] metodika pro smíšenou diagnostiku znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu;
(Samková, 2019d)	100 %	[EN] podněcování diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech a tématech souvisejících s praxí, možný obsah takové diskuse, vztah k formativnímu hodnocení;
(Samková, 2019e)	100 %	[EN] otevřenost a polyvalence úloh Concept Cartoons vytvořených budoucími učiteli;
(Samková, 2020b)	100 %	[CZ] souhrnná monografie o metodě Concept Cartoons: teoretický rámec, historické a mezipředmětové souvislosti, typologie, návod na tvorbu nových Concept Cartoons, metodika pro využití v profesní přípravě učitelů, stručný přehled realizovaných výzkumných šetření, podrobné rozbory 32 ilustračních Concept Cartoons;
(Samková, 2020c)	100 %	[EN] kvalitativní diagnostika znalostí obsahu, konkrétně argumentace při ověřování obecných tvrzení;
(Samková, 2020d)	100 %	[EN] kvalitativní diagnostika didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů před a po kurzu didaktiky matematiky;

Kapitola 6.4: Otevřený přístup a prostředí Concept Cartoons jako rámce pro realizaci porovnávání konceptů a strategií

Aktivity odvíjející se od otevřeného přístupu byly v experimentálním kurzu realizovány na seminářích prostřednictvím řešení otevřených úloh, které byly zadávány v podobě slovních úloh, aplikačních úloh nebo úloh, jež vyžadovaly hledání vlastností matematických objektů a jejich zobecňování. Pro každou takovou úlohu účastníci kurzu samostatně nebo v malých skupinkách hledali různé postupy řešení, všechny nalezené postupy zaznamenávali na tabuli (bez ohledu na jejich správnost), diskutovali a obhajovali je, hledali mezi nimi souvislosti. Účastníci kurzu tak opakovaně zažívali proces sekvenčního i simultánního představování a porovnávání různých strategií a konceptů, správných i nesprávných, s důrazem na hledání shod, tedy proces, který podle mnoha studií (Gentner a kol., 2003; Richland & McDonough, 2010; Durkin a kol., 2017; Loibl & Leuders, 2018, 2019; aj.) má potenciál podporovat rozvoj analogického uvažování a rozvoj konceptuálního porozumění. Díky tomu, že na tabuli byly zapisovány všechny objevené postupy bez ohledu na jejich správnost, měli případní nesprávní řešitelé možnost porovnávat svůj vlastní nesprávný postup s postupy správnými, a tak byla větší pravděpodobnost, že postřehnou rozdíly mezi postupy a budou je reflektovat (Smith a kol., 1993). V tomto smyslu lze chápat otevřený přístup jako metodu výuky, jež prostřednictvím řešení úloh umožňuje systematickou realizaci sekvenčního i simultánního představování a porovnávání různých konceptů a strategií a přispívá tak k rozvoji analogického uvažování a konceptuálního porozumění.

Alternativním prostředím, které takovou realizaci dokáže zprostředkovat, se ukázalo být prostředí Concept Cartoons. Při práci s Concept Cartoons jsou porovnávány koncepty nebo strategie zmiňované v bublinách a jelikož jsou všechny porovnávané bubliny umístěny na jednom společném obrázku, tak je tím automaticky zaručena simultánnost procesu porovnávání a viditelnost porovnávaných alternativ po celou dobu tohoto procesu. Taková simultánnost a viditelnost pak umožňují dosažení lepšího konceptuálního porozumění a větší procedurální flexibility (Richland & McConough, 2010; Alfieri a kol., 2013; Durkin a kol., 2017), zvláště v případě, kdy jednotlivé Concept Cartoons nabízejí k posouzení kombinaci několika správných a několika nesprávných bublin a jsou opatřené doprovodnou otázkou explicitně vyzývající k porovnávání obsahu bublin (Loibl & Leuders, 2018, 2019) a k interpretaci nalezených shod a rozdílů (Gentner a kol., 2003).

Vzhledem k tomu, že účastníky experimentálního kurzu byli budoucí učitelé, prezentování různých postupů řešení na tabuli a jejich porovnávání měly význam nejen pro rozvoj znalostí obsahu, ale i didaktických znalostí obsahu, což účastníci kurzu zmínili v reflexích na konci kurzu: ocenili možnost seznamovat se s více různými postupy řešení jednotlivých slovních úloh a vybírat si mezi nimi postupy, které jim osobně nejvíce vyhovují, a také možnost seznamovat se s jinými než vlastními postupy řešení a pohlížet na ně ve vztahu ke své budoucí praxi (tj. ve vztahu k možné rozmanitosti žákovských postupů, se kterými se ve své budoucí praxi budou setkávat).

Záležitosti vztahující se k porovnávání konceptů a strategií se průběžně prolínají celým obsahem této práce, ať již z pohledu teoretického (kapitoly 1.4.2, 1.6.3), nebo empirického: prostřednictvím datových úryvků z procesu porovnávání zprostředkovaného obrázky Concept Cartoons (kapitoly 3.1, 4.2, 5.1), prostřednictvím datových úryvků z písemných reflexí procesu porovnávání zprostředkovaného řešením otevřených úloh na seminářích experimentálního kurzu (kapitola 4.1), prostřednictvím popisu obsahu didakticky zaměřených diskusí nad obrázky Concept Cartoons a jejich písemných reflexí (kapitola 5.3). Konkrétní podoba porovnávání konceptů a strategií prostřednictvím Concept Cartoons také nepřímo souvisí s typologií úloh Concept Cartoons a metodikou jejich tvorby (kapitola 5.4).

Závěr

Tato habilitační práce je výsledkem desetileté pedagogické a výzkumné činnosti realizované na fakultě zajišťující profesní přípravu učitelů. Původ práce je možné datovat do roku 2011, kdy se autorka práce v rámci mezinárodního výzkumného projektu Fibonacci seznámila s konceptem badatelsky orientované výuky přírodovědných předmětů a matematiky a s výukovou pomůckou Concept Cartoons, kterou Stuart Naylor a Brenda Keogh(ová) na jedné z projektových konferencí představili jako nástroj pro podporu diskuse žáků při výuce přírodovědných předmětů na základní škole. Vzhledem k vlastním bohatým zkušenostem s čistou i aplikovanou matematikou, jejichž je badatelsky orientovaná výuka propedeutikou, začala autorka uvažovat o tom, jestli by bylo možné badatelsky orientovanou výuku uplatnit v profesní přípravě učitelů. Centrem zájmu se stal obsahově zaměřený dvousemestrální povinný kurz aritmetiky pro budoucí učitele prvního stupně základní školy, který autorka každoročně vedla. Během následující tříleté teoretické a praktické přípravy se ukázalo, že vhodným konceptem pro systematický pohled na badatelsky orientovanou výuku aritmetiky by mohl být otevřený přístup. V akademickém roce 2014/15 pak došlo k realizaci badatelsky orientované varianty kurzu vystavěné na otevřeném přístupu a otevřených úlohách, během které se zároveň uskutečnilo výzkumné šetření sledující vliv kurzu na jeho účastníky. Prostředí Concept Cartoons sloužilo jako jeden z nástrojů pro sběr dat o znalostech obsahu a o neformálních základech didaktických znalostí obsahu u účastníků kurzu. V šesti letech bezprostředně následujících po kurzu pak byly otevřené úlohy a prostředí Concept Cartoons využívány v různých dalších výzkumných a vzdělávacích kontextech, mimo jiné pro vyvolání diskuse budoucích učitelů o oborově didaktických tématech. Zkoumáním prošly také vlastnosti Concept Cartoons z hlediska diagnostiky různých typů znalostí budoucích učitelů, byla ustanovena metodika pro taková diagnostická využití a vznikla typologie aritmetických Concept Cartoons.

Během celého období bylo nakonec realizováno osm na sebe navazujících empirických studií exploračního charakteru, sedm z nich kvalitativního designu a jedna designu smíšeného s důrazem na kvalitativní složku. V souvislosti s těmito empirickými studiemi bylo publikováno celkem 30 relevantních publikací[60], z nich 9 v českém jazyce a 21 v jazyce anglickém. V databázi WOS je indexováno 12 z těchto publikací, se 7 citacemi v databázi. V databázi SCOPUS je indexováno 7 publikací (z toho 4 zároveň ve WOS), se 2 citacemi. Dalších 16 citací je z WOS nebo SCOPUS na publikace, které nejsou v databázi, a 40 citací je zcela mimo databáze.[61]

[60] jejich seznam uvádějí tabulky 6.1 až 6.4

[61] v celém odstavci jsou počty citací bez autocitací; stav k 31. 8. 2020

Vzhledem k exploračnímu charakteru výzkumného šetření, ze kterého habilitační práce vychází, byly některé průběžně se vynořující otázky řešeny obratem v rámci navazujících dílčích studií, které se pak staly součástí výzkumného šetření. Jiné otázky zůstaly otevřené. Výzvou pro budoucí výzkumné studie tak zůstává například vliv systematické realizace otevřeného přístupu na různé typy znalostí žáků a budoucích učitelů, uplatňování otevřeného přístupu v jiných školních předmětech (v jejich výuce, v profesní přípravě učitelů), vliv práce s Concept Cartoons na rozvoj různých typů didaktických znalostí obsahu, kvantitativní využití diagnostických Concept Cartoons, vliv podoby Concept Cartoons (grafického zpracování obrázku, formulace obsahu bublin nebo pořadí bublin) na reakce žáků a budoucích učitelů, tvorba nových Concept Cartoons na základě autentických žákovských řešení úloh, využití Concept Cartoons v geometrii a v jiných školních předmětech (v jejich výuce, v profesní přípravě učitelů).

Autorka práce se v současné době věnuje možnostem uplatňování otevřeného přístupu a Concept Cartoons v distančním vzdělávání budoucích učitelů a učitelů – spolupracuje na tvorbě dvou různých virtuálních vzdělávacích prostředí: (i) oborově didaktického Moodle kurzu určeného pro budoucí učitele, který bude založený výhradně na obrázkových reprezentacích matematické školní praxe, jako jsou Concept Cartoons a Viněty podle Friesen(ové); (ii) komplexního multimediálního prostředí určeného pro distanční podporu učitelů při implementaci formativního hodnocení a badatelsky orientované výuky v matematice a přírodovědných předmětech, které bude založeno na videozáznamech doplněných o různé textové a obrázkové reprezentace školní praxe (přepisy rozhovorů, záznamy žákovských řešení úloh, Concept Cartoons).

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Literatura

Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: a meta-analytic review. *Educational Psychologist, 48*(2), 87–113.

Alibali, M. W. & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: who, when, how, and why. *Learning and Instruction, 37*, 56–61.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*, 797–810.

Ashlock, R. B. (2002). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*. Upper Saddle River: Merrill Prentice Hall.

Ashlock, R. B. (2010). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student learn*. Boston: Allyn & Bacon.

Atasoy, S. & Ergin, S. (2017). The effect of concept cartoon-embedded worksheets on grade 9 students' conceptual understanding of Newton's Laws of Motion. *Research in Science & Technological Education, 35*(1), 58–73.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.) *Handbook of research on teaching* (433–456). New York: Macmillan.

Bana, J., Farrell, B. & McIntosh, A. (1995). Error patterns in mental computation in years 3-9. In B. Atweh, & S. Flavel (Eds.), *Galtha: Conference Proceedings of the 18th Annual Conference of MERGA* (51–56). Darwin: MERGA.

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *Open-ended approach*. Reston: NCTM.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983) Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (91–125). New York: Academic Press.

Bertrand, Y. (1998). *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha: Portál.

Biton, Y., Hershkovitz, S., Hoch, M., Ben-David, B. & Fellus, O. (2017). Assessment issues that trouble mathematics teachers. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.) *Proceedings of SEMT '17* (63–71). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2018). *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 3. díl.* Praha: ALTER.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K. & Davenport, J. L. (2017). Evidence for cognitive science sprinciples that impact learning in mathematics. In D. C. Geary a kol. (Eds.) *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (297–325). London: Academic Press.

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Education, 45*, 811–822.

Bruner, J. S. (1965). *Vzdělávací proces*. Praha: SPN.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in mathematics*. Translation from French: M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland & V. Warfield. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2012). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice*. Z francouzštiny přeložili J. Novotná, J. Bureš & L. Růžičková. Praha: Karolinum.

Buchbinder, O. & Cook, A. (2018). Examining the mathematical knowledge for teaching of proving in scenarios written by pre-service teachers. In O. Buchbinder & S. Kuntze (Eds.) *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice* (131–154). Cham: Springer.

Buchbinder, O. & Kuntze, S. (Eds.) (2018). *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice.* Cham: Springer.

Bulková, K. & Čeretková, S. (2017) Creativity as assessed attribute in mathematical open ended problem solving. In *Proceedings of EDULEARN17 Conference* (583–590). Barcelona: IATED.

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (2015). *Matematika – Didaktický test MAMZD15C0T04*. [on-line, cit. 2020-06-22] Dostupné z http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-podzim.pdf

Chin, C., & Teou, L. Y. (2009). Using concept cartoons in formative assessment: scaffolding students' argumentation. *International Journal of Science Education, 31*(10), 1307–1332.

Çil, E. & Çepni, S. (2016). The effectiveness of conceptual change texts and concept clipboards in learning the nature of science. *Research in Science & Technological Education, 34*(1), 43–68.

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. *Review of Research in Education, 16*, 3–56.

Cramer, K. & Lesh, R. (1988). Rational number knowledge of preservice elementary education teachers. In *Proceedings of PME 88* (425–431). DeKalb: PME.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research.* Thousand Oaks: SAGE.

Činčera, J. (2014). Význam nezávislých expertních center pro šíření badatelsky orientované výuky v České republice. *Scientia in educatione, 5*(1), 74–81.

Dabell, J., Keogh, B. & Naylor, S. (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education (CD-ROM).* Sandbach: Millgate House Education.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: a comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 47*, 82–92.

Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, J., Kleickmann, T., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 197–216.

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12–25.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.

Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

Divíšek J., Hošpesová, A. & Kuřina, F. (1999). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 4. ročník*. Praha: Prometheus.

Divíšek, J., Hošpesová, A., Jedličková, M., Kuřina, F. & Nechvátalová, J. (2004). *Svět čísel a tvarů. Sbírka úloh z matematiky pro 5. ročník základní školy*. Praha: Prometheus.

Dorier, J. - L., & Maass, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (300–304). Dordrecht: Springer.

Dostál, J. (2015). *Badatelsky orientovaná výuka: kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách*. Olomouc: UPOL.

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22*, 206–214.

Durkin, K., Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education, 49*, 585–597.

Eisenkraft, A. (2003). Expanding the 5E model. *The Science Teacher, 70*(6), 56–59.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fridman, L. M. (1977). *Logiko-psychologičeskij analiz školnych učebnych zadač*. Moskva: Pedagogika.

Friesen, M. (2017). *Teachers' competence of analysing the use of multiple representations in mathematics classroom situations and its assessment in a vignette-based test*. Dizertační práce. Ludwigsburg: Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

Friesen, M. & Kuntze, S. (2016). Teacher students analyse texts, comics and video-based classroom vignettes regarding the use of representations – Does format matter? In C. Csíkos a kol. (Eds.) *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)* (259–266). Szeged: PME.

Friesen, M. & Kuntze, S. (2018). Competence assessment with representations of practice in text, comic and video format. In O. Buchbinder & S. Kuntze (Eds.) *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice* (113–130). Cham: Springer.

Fronek, J. (1999). *Anglicko-český, česko-anglický slovník*. Praha: LEDA.

Fujii, T. (2014). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (453–455). Dordrecht: Springer.

Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In A. Ortony & S. Vosniadou (Eds.) *Similarity and analogical reasoning* (199–241). New York: Cambridge University Press.

Gentner, D., Loewenstein, J. & Thompson, L. (2003). Learning and transfer: a general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology, 95*(2), 393–408.

Gentner, D. & Smith, L. (2012). Analogical reasoning. In V. S. Ramachandran (Ed.) *Encyclopedia of Human Behavior* (130–136). Oxford: Elsevier.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 115–141.

Groensteen, T. (2005). *Stavba komiksu*. Brno: Host.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: a cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055–2100.

Guo, J. & Pang, M. F. (2011). Learning a mathematical concept from comparing examples: the importance of variation and prior knowledge. *Eur J Psychol Educ, 26*, 495–525.

Hansen, A. (Ed.) (2011). *Children' errors in mathematics. Understanding common misconceptions in primary schools*. London: SAGE.

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. In G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.) *Children's Mathematics. New Directions for Child Development* (55–70). San Francisco: Jossey-Bass.

Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 metaanalyses relating to achievement*. London: Routledge.

Hejnová, E. (2014). Úlohy s bublinou aneb jak lze rozvíjet myšlení a učení žáků. In *19. ročník veletrhu nápadů učitelů fyziky* (50–54). Cheb: Západočeská univerzita v Plzni.

Hejnová, E. (2016a). Bublinové úlohy z optiky s náměty na jednoduché pokusy. In T. Miléř & J. Válek (Eds.) *21. ročník veletrhu nápadů učitelů fyziky* (61–66). Brno: Masarykova univerzita.

Hejnová, E. (2016b) Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. *Matematika-fyzika-informatika, 25*(2), 102–115.

Hejnová, E (2017). Představy mladších žáků o gravitačním působení. *Matematika-fyzika-informatika, 26*(3), 202–215 a *26*(4), 298–304.

Hejnová, E. & Hejna, D. (2018). Miskoncepce žáků o atomech v kontextu představ starověkých myslitelů o stavbě hmoty. *Scientia in educatione*, *9*(2), 22–43.

Hejný, M. (2004). Chyba jako prvek edukační strategie učitele. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, sv. 1* (63–80). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Jirotková, D. & Bomerová, E. (2010). *Matematika 4, učebnice pro základní školy*. Plzeň: Fraus.

Hejný, M. & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Hejný, M. & Stehlíková, N. (1999). Zkoumání číselných představ dítěte a žáka. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *44*(2), 148–167.

Hellmig, L. (2010). Effective ‘blended’ professional development for teachers of mathematics: design and evaluation of the "UPOLA"-program. In *Proceedings of CERME 6* (1694–1703). Lyon, France: INRP.

Herbst, P., Aaron, W. & Erickson, A. (2013). *How preservice teachers respond to representations of practice: A comparison of animations and video*. Příspěvek přednesený na konferenci AERA, San Francisco, USA.

Herbst, P. & Kosko, K. W. (2013). Using representations of practice to elicit mathematics teachers' tacit knowledge of practice: a comparison of responses to animations and videos. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(6), 515–537.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (371–404). Charlotte: Information Age Publishing.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*, 371–406.

Hošpesová, A. (2003). *Procesuální a pojmové myšlení ve vytváření aditivní poznatkové struktury*. Habilitační práce. Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta.

Hošpesová, A. (2016). Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni základního vzdělávání. *Orbis Scholae*, *10*(2), 117–130.

Hošpesová, A., Divíšek J. & Kuřina, F. (2000). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 5. ročník*. Praha: Prometheus.

Hošpesová, A. & Tichá, M. (2017). Problem posing in prospective primary school teachers' education: case of Concept Cartoons. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.) *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '17. Proceedings* (491–493). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hruša, K., Foltin, M., Gulová, M., Kittler, J., Konrád, J., Kořínek, M., Lečko, I., Macháček, V., Mencl, J., Skalický, V., Tupý, K., Zelina, L., Zemek, B. & Žilinková, J. (1962). *Metodika počtů pro pedagogické instituty, II. část*. Praha: SPN.

Hruša, K. & Vyšín, J. (1964). *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole*. Praha: SPN.

Janík, T. (2004). Význam Shulmanovy teorie pedagogických znalostí pro oborové didaktiky a pro vzdělávání učitelů. *Pedagogika, 54*(3), 243–250.

Janík, T., Brebera, P., Bromme, R., Brückmannová, M., Dobrý, L., Dvořák, D., Dvořáková, M., Hanušová, S., Hošpesová, A., Kostková, K., Lajdová, A., Lukavský, J., Píšová, M., Psotta, R., Slavík, J. & Tichá, M. (2008). *Metodologické problémy výzkumu didaktických znalostí obsahu*. Brno: Paido.

Janík, T., Brebera, P., Dobrý, L., Kansanen, P., Píšová, M., Najvar, P., Seebauerová, R., Slavík, J., Švec, V. & Trna, J. (2007). *Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu?* Brno: Paido.

Janík, T., Černá, M., Dvořáková, M., Hošpesová, A., Janíková, M., Kattmann, U., Knecht, P., Najvar, P., Mazáčová, N., Lukášová, H., Slavík, J., Stehlíková, N., Švec, V., & Tichá, M. (2009). *Možnosti rozvíjení didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů.* Brno: Paido.

Janík, T., Černá, M., Najvar, P., Samková, L., Rokos, L. & Petr, J. (2020, v tisku) Video v učitelském vzdělávání: přístupy a výzvy. *Pedagogická orientace, 30*(1).

Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacky, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N. & Zlatníček, P. (2016). *Kvalita (ve) vzdělávání*. Brno: Masarykova univerzita.

Janoušková, S., Novák, J. & Maršák, J. (2008). Trendy ve výuce přírodovědných oborů z evropského pohledu. *Acta Facultatis Paedagiogicae Universitatis Trnaviensis, Ser. D, Supplementum 2*(12), 129–132.

Jao, L. (2017). Shifting pre-service teachers' beliefs about mathematics teaching: the contextual situation of a mathematics methods course. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15,* 895–914.

Jiang, F. & McComas, W. F. (2015). The effect of inquiry teaching on student science achievement and attitudes: evidence from propensity score analysis of PISA data. *International Journal of Science Education, 37*(3), 554–576.

Jones, A., Evans, D. & Storey, P. (2015). *Financial Skills Concept Cartoons*. Sandbach: Millgate House Publishers.

Justová, J. (2019). *Matematika pro 5. ročník ZŠ, 3. díl*. Praha: ALTER.

Kadroon, T. & Inprasitha, M. (2012). Professional development of mathematics teachers with lesson study and open approach: the process for changing teachers values about teaching mathematics. *Psychology, 4*(2), 101–105.

Kalhous, Z., Obst, O., Dvořák, D., Dvořáková, M., Chráska, M., Grecmanová, H., Kurelová, M., Procházka, M., Prokešová, L., Tomanová, D., Václavík, V., Veverková, H. & Vyskočilová, E. (2009). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Kallery, M. (2015). Science in early years education: introducing floating and sinking as a property of matter. *International Journal of Early Years Education, 23*(1), 31–53.

Keogh, B. & Naylor, S. (1993). Learning in science: another way in. *Primary Science Review, 26*, 22–23.

Keogh, B. & Naylor, S. (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science Education, 21*(4), 431–446.

Keogh, B., Naylor, S., Boo, M. & Feasey, R. (1999). *The use of concept cartoons as an auditing tool in initial teacher training.* Příspěvek přednesený na konferenci ESERA, Kiel, Německo.

Keogh, B., Naylor, S., Hankey, E. & Williams, J. (2012). *Concept Cartoons talking sports and fitness*. Sandbach: Millgate House Education.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. & Baumert, J. (2013). Teachers' content and pedagogical content knowledge: the role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education, 64,* 90–106.

Koman, M., Kuřina, F. & Tichá, M. (1997). *Matematika pro 5. ročník základní školy, učebnice*. Praha: Matematický ústav AV ČR.

Koman, M. & Tichá, M. (1997). Jak v matematice zvládají žáci zkoumání situací z praxe. *Matematika – fyzika – informatika, 7*(1), 2–12.

Koman, M. & Tichá, M. (1998). On travelling together and sharing expenses (examples of investigation of situations). *Teaching Mathematics and its Applications, 17*(3), 117–122.

Kotovsky, L. & Gentner, D. (1996). Comparison and categorization in the development of relational similarity. *Child Development, 67*(6), 2797–2822.

Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education, 40,* 873–892.

Krauss, S. & Brunner, M. (2008). Professionelles Reagieren auf Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrkräfte. In E. Vásárhelyi (Ed.) *Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13. 3. bis 18. 3. 2007 in Budapest* (400–403). Münster: WTM-Verlag.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrandt, M. & Jordan, A. (2008) Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716–725.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2002). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Spektrum.

Kubínová, M. (2002). *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Kuntze, S. (2014). Models of preservice mathematics teacher education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (457–460). Dordrecht: Springer.

Kurtz, K. J., Boukrina, O. & Gentner, D. (2013). Comparison promotes learning and transfer of relational categories. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 39*(4), 1303–1310.

Kurtz, K. J., Miao, C. - H. & Gentner, D. (2001). Learning by analogical bootstrapping. *Journal of Learning Sciences, 10*(4), 417–446.

Kuřina, F. (1976). *Problémové vyučování v geometrii*. Praha: SPN.

Kuřina, F. (1986). O jazycích školské matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 31*(5), 277–281.

Kuřina, F. (2005). Geometrie a geometrické vzdělávání. In S. Olivík (Ed.), *Sborník příspěvků 25. Konference o geometrii a počítačové grafice* (15–22). Praha: JČMF.

Kuřina, F. (2011). Tři pokusy řešit neřešitelné. *Pedagogika, 61*(1), 5–12.

Kuřina, F. (2012). Didaktické znalosti obsahu a matematické vzdělávání učitelů. *Pedagogická orientace, 22*(2), 162–180.

Kusumaningrum, I. A., Ashadi & Indriyanti, N. Y. (2018). Concept cartoons for diagnosing student's misconceptions in the topic of buffers. *Journal of Physics Conference Series, 1022*, UNSP 012036.

Lachner, A., Weinhuber, M. & Nückles, M. (2019). To teach or not to teach the conceptual structure of mathematics? Teachers undervalue the potential of Principle-Oriented explanations. *Contemporary Educational Psychology, 58*, 175–185.

Lajoie, C. (2018). Learning to act in-the-moment: prospective elementary teachers' role-playing on numbers. In G. J. Stylianides & K. Hino (Eds.) *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (231–243). Cham: Springer.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Mahwah: LEA.

Lederman, N. G., Abd-El-Khalick, F., Bell, R. L. & Schwartz, R. E. (2002). Views of nature of science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of nature of science. *Journal of Research in Science Teaching, 39*(6), 497–521.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: the meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 203–223.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 73–90.

Lewis, A. & Smith, D. (1993). Defining higher order thinking. *Theory into Practice, 32*(3), 131–137.

Lim-Teo, S. K., Chua, K. G., Cheang, W. K. & Yeo, J. K. (2007). The development of diploma in education student teachers' mathematics pedagogical content knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 237–261.

Loibl, K. & Leuders, T. (2018). Errors during exploration and consolidation – the effectiveness of productive failure as sequentially guided discovery learning. *J Math Didakt, 39*, 69–96.

Loibl, K. & Leuders, T. (2019). How to make failure productive: fostering learning from errors through elaboration prompts. *Learning and Instruction, 62*, 1–10.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah: Erlbaum.

Mareš, J. & Gavora, P. (1999). *Anglicko-český pedagogický slovník*. Praha: Portál.

McCloud, S. (2008). *Jak rozumět komiksu*. Brno: BB/art.

Minárechová, M. (2014). Využitie metódy concept cartoons© pri modifikácii žiackych predstáv o prírodných javoch. *PEDAGOGIKA.SK, 5*(2), 137–159.

Minárechová, M. (2017). Využitie metódy concept cartoons© na hodinách prírodovedy z pohľadu učiteľov prvého stupňa ZŠ. *Scientia in educatione, 8*(1), 18–31.

Minner, D. D., Levy, A. J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction – what is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching, 47*, 474–496.

Molnár, J. & Mikulenková, H. (2018a). *Matematika a její aplikace pro 5. ročník, 1. díl.* Olomouc: PRODOS.

Molnár, J. & Mikulenková, H. (2018b). *Matematika a její aplikace pro 5. ročník, 3. díl*. Olomouc: PRODOS.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3–14.

National Research Council (1996). *National science education standards.* Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council (2000). *Inquiry and the national science education standards.* Washington, DC: National Academy Press.

Naylor, S. & Keogh, B. (2000). *Science Concept Cartoons*. Sandbach: Millgate House.

Naylor, S. & Keogh, B. (2010). *Concept Cartoons in Science Education, 2nd Edition (CD-ROM)*. Sandbach: Millgate House Education.

Naylor, S. & Keogh, B. (2013). Concept Cartoons: what have we learnt? *Journal of Turkish Science Education, 10*(1), 3–11.

Naylor, S., Keogh, B. & Downing, B. (2007). Argumentation and primary science. *Research in Science Education, 37*, 17–39.

Naylor, S., Moules, J. & Horlock, J. (2014). *Science Concept Cartoons – Set 2*. Sandbach: Millgate House Education.

Naylor, B. & Naylor, S. (2000a). *Bungee jumpers and other science questions*. London: Hodder & Stoughton.

Naylor, B. & Naylor, S. (2000b). *Science Questions – Stories and Concept Cartoons for KS1 (Key Stage 1) – Electronic Download.* London: Hodder & Stoughton.

Naylor, B. & Naylor, S. (2000c). *Seesaw and other science questions*. London: Hodder & Stoughton.

Naylor, B. & Naylor, S. (2000d). *Upside down seeds and other science questions*. London: Hodder & Stoughton.

Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of PME 24 (Vol. 1)* (39–53). Hiroshima: Hiroshima University.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Pedagogická fakulta UK.

Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H. & Krátká, M. (2006). *Příprava a analýza didaktických situací*. Praha: JČMF.

Novotná, J. & Vondrová, N. (2017). Pupils' strategies for missing value proportional problems. In M. Houška a kol. (Eds.) *Proceedings of the 14th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2017* (279–286). Praha: CULS.

Oliver, M., McConney, A. & Woods-McConney, A. (2019). The efficacy of inquiry-based instruction in science: a comparative analysis of six countries using PISA 2015. *Research in Science Education*, advanced online publication.

Ormanci, U. & Sasmaz-Oren, F. (2011). Assessment of concept cartoons: an exemplary study on scoring. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 15*, 3582–3589.

Ozdemir, E., Coramik, M. & Urek, H. (2020). Determination of conceptual understanding levels related to optics concepts: the case of opticianry. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 8*(1), 53–64.

Pankow, L., Kaiser, G., Busse, A., König, J., Blömeke, S., Hoth, J. & Döhrmann, M. (2016). Early career teachers’ ability to focus on typical students errors in relation to the complexity of mathematical topic. *ZDM, 48*(1–2), 55–67.

Pankow, L., Kaiser, G., König, J. & Blömeke, S. (2018). Perception of student errors under time limitation: are teachers faster than mathematicians or students? *ZDM, 50*, 631–642.

Papáček, M. (2010). Badatelsky orientované přírodovědné vyučování – cesta pro bilogocké vzdělávání generací Y, Z a alfa? *Scientia in educatione, 1*(1), 33–49.

Pehkonen, E. (Ed.) (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinki: University of Helsinki.

Pehkonen, E. (2017). Finnish elementary teachers’ conceptions on problem solving in mathematics teaching. *La matematica e la sua Didattica, 25*(1), 13–27.

Pekel, F. O. (2019). Effectiveness of of argumentation-based concept cartoons on teaching global warming, ozone layer depletion, and acid rains. *Journal of Enviromental Protection and Ecology, 20*(2), 945–953.

Petráčková, V., Kraus, J., Buchtelová, R., Confortiová, H., Červená, V., Hovorková, M., Churavý, M., Kraus, J., Kroupová, L., Ludvíková, M., Machač, J., Mejstřík, V., Poštolková, B., Roudný, M., Schmiedtová, V., Šroufková, M & Ungermann, V. (2001). *Akademický slovník cizích slov*. Praha: Academia.

Pěchoučková, Š., Kozlová, M., Rakoušová, A. & Kašparová, M. (2014a). *Matematika 4 se Čtyřlístkem, pracovní sešit 2*. Plzeň: Fraus.

Pěchoučková, Š., Kozlová, M., Rakoušová, A. & Kašparová, M. (2014b). *Matematika 4 se Čtyřlístkem, učebnice*. Plzeň: Fraus.

Pilous, D. (2014). *Vybrané pohledy na žákovskou chybu ve výuce matematiky*. Dizertační práce. Praha: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (2016). *Jak to řešit?* Praha: MatfyzPress.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers’ learning and knowledge for teaching. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (275–296). New York: Routledge.

Průcha, J., Walterová, E. & Mareš, J. (2009). *Pedagogický slovník*. Praha: Portál.

Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., Ponte, J. P., Ní Shúilleabháin, A. & Takahashi, A. (Eds.) (2018) *Mathematics lesson study around the world: theoretical and methodological issues.* Cham: Springer.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163–172.

Radvanová, S., Čížková, V. & Martinková, P. (2018) Mění se pohled učitelů na badatelsky orientovanou výuku? *Scientia in educatione, 9*(1), 81–103.

Radvanová, S., Čížková, V. & Martinková, P. (2019) Hodnocení badatelského přístupu v biologii z pohledu učitelů a žáků gymnázií. *Scientia in educatione, 10*(1), 51–67.

Rendl., M. (1997). Vývoj počítání v první třídě. In *Zpráva projektu GA ČR 406/94/1417 Žák v měnících se podmínkách současné školy* (171–228).

Rendl, M. & Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace, 24*(1), 22–57.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E. & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.

Reyes-Roncancio, J. D., Romero-Osma, G. P. & Bustos-Velazco, E. H. (2019). Teaching physics through contextualised concept cartoons. *Revista Científica, 36*(3), 323–337.

Richland, L. E. & McDonough, I. M. (2010). Learning by analogy: discriminating between potential analogs. *Contemporary Educational Psychology, 35*, 28–43.

Richland, L. E. & Simms, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Wiley Interdiscip. Rev. Cogn. Sci. 6*, 177–192. DOI: 10.1002/wcs.1336

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561–574.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 529–544.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 836–852.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82*(3), 436–455.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Scientific education now: a renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussels: European Commission.

Rokos, L. & Lišková, J. (2019) Kvalita vrstevnické zpětné vazby při badatelské úloze z biologie člověka v hodinách přírodopisu. *Pedagogická orientace, 29*(1), 43–72.

Roubíček, F. (2017). Assessing a teacher's competence for implementation of inquiry based mathematics education from a discussion of open geometrical situations. In D. Szarková a kol. (Eds.) *Proceedings, 16th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2017* (1321–1331). Bratislava: Vydavatel'stvo Spektrum STU.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255–281.

Rowland, T., Thwaites, A. & Jared, L. (2016). *Analysing secondary mathematics teaching with the knowledge quartet*. Příspěvek přednesený na mezinárodní konferenci ICME-13, Hamburg, Německo.

Rowland, T., Turner, F. & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM Mathematics Education, 46*, 317–328.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: SAGE.

Ryan, J. & Williams, J. (2011*). Children's mathematics 4-15. Learning from errors and misconceptions*. Berkshire: Open University Press.

Řídká, E. a kol. (2015, září). *Současný stav maturit z matematiky.* Příspěvek na LXIV. Akademickém Fóru Odborné skupiny Organizace výzkumu České fyzikální společnosti JČMF, Praha.

Samková, L. (2011). Badatelsky orientované vyučování matematiky. In R. Hašek (Ed.) *Sborník 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* (336–341). České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Samková, L. (2015). Badatelsky orientované vyučování. In V. Šimandl (Ed.) *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* (11–20). České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Samková, L. (2016a). Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In M. Uhlířová (Ed.) *EME 2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech* (9–14). Olomouc: Pedagogická fakulta UPOL.

Samková, L. (2016b). Didaktické znalosti obsahu budoucích učitelů 1. stupně základní školy před studiem didaktiky matematiky. *Scientia in educatione*, *7*(2), 71–99.

Samková, L. (2017a). Planning and conducting inquiry based mathematics course for future primary school teachers. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.) *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '17. Proceedings* (354–364), Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Samková, L. (2017b). Using Concept Cartoons to investigate future teachers' knowledge – new findings and results. In S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari & M. Ribeiro (Eds.) *Proceedings of the Third ERME Topic Conference on Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development (ETC3, October 5 to 7, 2016)* (207–216). Berlin, Germany: Humboldt-Universität zu Berlin.

Samková, L. (2018a). Assessing future teachers' knowledge on fractions: written tests vs Concept Cartoons. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 11*(3), 45–52.

Samková, L. (2018b). Concept Cartoons as a representation of practice. In O. Buchbinder & S. Kuntze (Eds.) *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice* (71–93). Cham: Springer.

Samková, L. (2018c). Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. *Studia Paedagogica, 23*(3), 49–67.

Samková, L. (2018d). Written tests vs Concept Cartoons: the case of future teachers and fractions. In J. Fejfar et al. (Eds.) *Proceedings of the 15th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2018* (314–321). Praha: Czech University of Life Sciences.

Samková, L. (2019a). Investigating subject matter knowledge and pedagogical content knowledge in mathematics with the Concept Cartoons method. *Scientia in educatione, 10*(2), 62–79.

Samková, L. (2019b). Majority and minority correct procedures for solving mathematical word problems. In J. Fejfar et al. (Eds.) *Proceedings of the 16th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2019* (243–250). Praha: Czech University of Life Sciences.

Samková, L. (2019c). Polyvalentní úlohy v matematice. *Učitel matematiky, 27*(4), 244–251.

Samková, L. (2019d). Preparing future teachers for formative assessment: the case of Concept Cartoons. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.) *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '19. Proceedings* (372–382), Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Samková, L. (2019e). Using Concept Cartoons in future primary school teacher training: the case of problem posing and open approach. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.) *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6–10, 2019)* (3481–3488). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Samková, L. (2020a). Investigating the variety and usualness of correct solution procedures of mathematical word problems. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 13*(1), 10–26.

Samková, L. (2020b). *Metoda Concept Cartoons*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta.

Samková, L. (2020c). Observing how future primary school teachers reason about general statements. In J. Fejfar & M. Flégl (Eds.) *Proceedings of the 17th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2020* (263–271), Praha: Czech University of Life Sciences.

Samková, L. (2020d). Using Concept Cartoons to investigate future primary school teachers' pedagogical content knowledge on addition. *Quadrante, 29*(1), 36–51.

Samková, L. & Hošpesová, A. (2015). Using Concept Cartoons to investigate future teachers' knowledge. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.) *Proceedings of CERME 9* (3241–3247). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F. & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione, 6*(1), 91–122.

Samková, L., Hošpesová, A., Tichá, M. (2016). Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika, 66*(5), 549–569.

Samková, L. & Tichá, M. (2015). Investigating future primary teachers' grasping of situations related to unequal partition word problems. In C. Sabena & B. Di Paola (Eds.) *Proceedings CIEAEM 67* (295–303). Palermo, Italy: G.R.I.M.

Samková, L. & Tichá, M. (2016a). Developing open approach to mathematics in future primary school teachers. In M. Flégl et al. (Eds.) *Proceedings of the 13th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2016* (494–501). Praha: Czech University of Life Sciences.

Samková, L. & Tichá, M. (2016b). Developing views of proof of future primary school teachers. In L'. Balko et al. (Eds.) *Proceedings, 15th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2016* (987–998), Bratislava: STU.

Samková, L. & Tichá, M. (2016c). On the way to develop open approach to mathematics in future primary school teachers. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 9*(2), 37–44.

Samková, L. & Tichá, M. (2016d). On the way to improve primary teachers' professionalism: the case of inquiry and Concept Cartoons. In B. Maj-Tatsis et al. (Eds.) *Inquiry based mathematical education* (58–67). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Samková, L. & Tichá, M. (2017a). Observing how future primary school teachers reason about fractions. In M. Houška et al. (Eds.) *Proceedings of the 14th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2017* (363–371). Praha: Czech University of Life Sciences.

Samková, L. & Tichá, M. (2017b). Observing how future primary school teachers reason and generalize: the case of number triangles and Concept Cartoons. In D. Szarková et al. (Eds.) *Proceedings, 16th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2017* (1354–1368). Bratislava: STU.

Samková, L. & Tichá, M. (2017c). On the way to observe how future primary school teachers reason about fractions. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 10*(4), 93–100.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: a research review. *Reading & Writing Quarterly: Overcoming Learning Difficulties*, *23*(2), 139–159.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (334–370). New York: Macmillan.

Shaughnessy, M. & Boerst, T. (2018). Designing simulations to learn about pre-service teachers' capabilities with eliciting and interpreting student thinking. In G. J. Stylianides & K. Hino (Eds.) *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (125–140). Cham: Springer.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge nad teaching. Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Simpson, A. & Vondrová, N. (2019) Developing pre-service teachers' professional vision with video interventions: a divergent replication. *Journal of Education for Teaching, 45*(5), 567–584.

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penquin Books.

Slavík, J., Janík, T., Najvar, P. & Knecht, P. (2017). *Transdisciplinární didaktika*. Brno: Masarykova univerzita.

Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., Švecová, Z. & Minaříková, E. (2011). Kurikulární reforma na gymnáziích: od virtuálních hospitací k videostudiím. In T. Janík, P. Knecht & S. Šebestová (Eds.) *Smíšený design v pedagogickém výzkumu* (31–38). Brno: Masarykova univerzita.

Smith, J. P., diSessa, A. A. & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of Learning Sciences, 3*(2), 115–163.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (157–223). Charlotte: Information Age Publishing.

Spitzer, S. M., Phelps, C. M., Beyers, J. E. R., Johnson, D. Y. & Sieminski, E. M. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 67–87.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411.

Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 132–135.

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(4), 408–426.

Stará, Š. (2019). *Virtuální třída pomůže studentům naučit se učit*. [on-line, cit. 2020-01-24] Dostupné z: http://info.zcu.cz/clanek.jsp?id=2156

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Stehlíková, N. (Ed.). (2007). *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Stehlíková, N. (2010). Interpretace některých didakticko-matematických jevů u studentů učitelství a u učitelů matematiky. *Pedagogika, 60*(3–4), 108–118.

Sucháček, P. (2016). Implementace prvků dialogického vyučování v rámci mikrovyučování u studentů učitelství přírodovědných předmětů. *Studia Paedagogica, 21*(3), 81–106.

Sullivan, P., Warren, E. & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 2–17.

Svatoš, T. (1997). Od mikrovyučování k mikrovýstupové praxi. *Pedagogická orientace, 4*, 24–28.

Swan, M., Pead, D., Doorman, M., & Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education, 45*, 945–957.

Švaříček, R., Šeďová, K., Janík, T., Kaščák, O., Miková, M., Nedbálková, K., Novotný, P., Sedláček, M. & Zounek, J. (2014). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Praha: Portál.

Tashakkori, A. & Teddlie, C. (Eds.). (2010). *Handbook of mixed methods in social & behavioral research.* Thousand Oaks: SAGE.

Temel, S. & Sen, S. (2019). Comprehension levels of prospective teachers related to the heat and temperature concepts. *AIP Conference Proceedings, 2178*, 030066.

Tichá, M. (2013). Modernizace vyučování matematice v letech 1965–1985. *Orbis scholae, 7*(1), 119–130.

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2009). Rozvíjení didaktických znalostí obsahu matematického vzdělávání v přípravě učitelů 1. stupně. In T. Janík a kol., *Možnosti rozvíjení didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů* (119–128). Brno: Paido.

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2011). Gramotnost učitele matematiky a tvoření úloh. In A. Hošpesová a kol., *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (39–56). České Budějovice: Jihočeská univerzita v českých Budějovicích.

Tichá, M. & Macháčková, J. (2006). *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*. Praha: JČMF.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5–25.

Trnová, E., Janko, T., Trna, J. & Pešková, K. (2016). Typy vzdělávacích komiksů a analýza jejich edukačního potenciálu pro přírodovědnou výuku. *Scientia in educatione, 7*(1), 49–64.

Turner, J., Smith, C., Keogh, B. & Naylor, S. (2013). *English Concept Cartoons.* Sandbach: Millgate House Publishers.

Turnuklu, E. B. & Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: pre-service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*, 1–13.

Vácha, Z. & Ditrich, T. (2016). Efektivita badatelsky orientovaného vyučování na primárním stupni základních škol v přírodovědném vzdělávání s využitím školních zahrad. *Scientia in educatione, 7(*1), 65–79.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 323–330.

van der Berg, E. (2013). Didaktická znalost obsahu v laboratorní výuce: Od práce s přístroji k práci s myšlenkami. *Scientia in educatione, 4*(2), 74–92.

van den Berg, E. (2014). Learning to investigate with concept cartoons. In V. Koudelková & L. Dvořák (Eds.) *Dílny Heuréky 2013* (7–13). Praha: Nakladatelství P3K.

van der Berg, E. & Kruit, P. (2017). Investigating with Concept Cartoons: practical suggestions for using concept cartoons to start student investigations in elementary school and beyond. *Scientia in educatione, 8*(Special Issue), 129–138.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. & Verschaffel, L. (2015) Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1–4.

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244–276.

VanLehn, K. (1982). Bugs are not enough: empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(2), 3–71.

Verschaffel, L., Depaepe, F. & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (641–645). Dordrecht: Springer.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), 335–359.

Vinner, S. (2014). Concept development in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (91–96). Dordrecht: Springer.

Vlčková, K. & Lojdová, K. (2016). Když čísla a slova spolupracují: smíšený design v ukázkách z výzkumu moci ve školní třídě. *Pedagogická orientace, 26*(3), 482–511.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N., Cachová, J., Coufalová J. & Krátká, M. (2016). „Lesson study” v českých podmínkách: jak učitelé vnímali svou účast a jaký vliv měla na jejich všímání si didakticko-matematických jevů. *Pedagogika, 66*(4), 427–442.

Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A. & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N. & Žalská, J. (2012). Do student teachers attend to mathematics specific phenomena when observing mathematics teaching on video? *Orbis Scholae, 6*(2), 85–101.

Vondrová, N. & Žalská, J. (2015). Ability to notice mathematics specific phenomena: What exactly do student teachers attend to? *Orbis Scholae, 9*(2), 77–101.

Vyšín, J. (1972). *Tři kapitoly o problémovém vyučování matematice*. Praha: SPN.

Vyšín, J. (1976). Genetická metoda ve vyučování matematice. *Matematika a fyzika ve škole, 6*, 582–593.

Vyšín, J. (1979). O základním výzkumu a práci Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice. *Matematika a fyzika ve škole, 10*, 104–112.

Webel, C., Conner, K. & Zhao, W. (2018). Simulations as a tool for practicing questioning. In O. Buchbinder & S. Kuntze (Eds.) *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice* (95–112). Cham: Springer.

Wittmann, E. Ch. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Stuttgart: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 1–20.

Yankovskaya, A., Dementyev, Y. & Yamshanov, A. (2015). Application of learning and testing intelligent system with cognitive component based on mixed diagnostics tests. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 206*, 254–261.

Zazkis, R. & Zazkis, D. (2014) Script writing in the mathematics classroom: imaginary conversations on the structure of numbers. *Research in Mathematics Education, 16*(1), 54–70.