

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Aplikace neeuclidovské geometrie**

Application of non-Euclidean geometry

Eliška Fialová

vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.  
studijní program: Specializace v pedagogice  
studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha, 2021

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Aplikace neeuklidovské geometrie vypracovala pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 19. 4. 2021

Ráda bych poděkovala vedoucímu své bakalářské práce, Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za pomoc, cenné rady a čas, který mi věnoval při tvorbě bakalářské práce. Chtěla bych také poděkovat mé rodině za podporu během studia, a to především rodičům a manželovi.

## Abstrakt

Práce se zabývá aplikacemi neeuklidovské geometrie v jiných oborech než matematika a poukazuje na rozdíly mezi euklidovskou a neeuklidovskou geometrií v nich. Po určení vymezení geometrií, je text rozdělen do tří kapitol. V první kapitole je rozebrána aplikace v geodézii. V první části této kapitoly jsou uvedeny základy sférické geometrie, a pak jsou představeny tři různé mapové projekce. Dále jsou ukázkové příklady pro porovnání výpočtu vzdálenosti na sféře a v rovinné mapě. Druhá část kapitoly se věnuje astronomickému pozorování oblohy. Na závěr jsou představeny úlohy, ve kterých je aplikace ukázána. Ve druhé kapitole jsou vystaveny základy pro teorii relativity. Nejprve jsou odvozeny Lorentzovy transformace, a poté je představena geometrie prostoročasu. Kapitola je zakončena geometrickou interpretací obecné teorie relativity jako teorie gravitace a zakřiveného prostoru. Poslední kapitola je o aplikacích v umění. Jsou zde zmíněni zastupitelé uměleckých směrů a hnutí na přelomu 19. a 20. století, a také M. C. Escher. Celou práci doprovází názorné obrázky, které byly vytvořeny v programu Vectr a Geogebra.

## Klíčová slova

hyperbolická geometrie, eliptická geometrie, prostoročas

### **Abstract**

The work deals with applications of non-Euclidean geometry in fields other than mathematics and points out the differences between Euclidean and non-Euclidean geometry in them. After determining the definition of geometries, the text is divided into three chapters. The first chapter discusses the application in geodesy. In the first part of this chapter, the basics of spherical geometry are presented, and then three different map projections are introduced. After that there are sample examples for comparing the distance calculation on a sphere and in a planar map. The second part of the chapter deals with astronomical observations of the sky. Finally, the tasks in which the application is shown are presented. The second chapter presents the basics for the theory of relativity. First, Lorentz transformations are derived, and then the geometry of spacetime is introduced. The chapter concludes with a geometric interpretation of the general theory of relativity as a theory of gravity and curved space. The last chapter is about applications in art. Representatives of artistic trends and movements at the turn of the 19th and 20th centuries are mentioned here, as well as M. C. Escher. The whole work is accompanied by illustrative images that were created in Vectr and Geogebra.

### **Keywords**

hyperbolic geometry, elliptic geometry, spacetime

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Vymezení geometrií</b>	<b>2</b>
1.1 Absolutní geometrie	2
1.2 Euklidovská geometrie	2
1.3 Neeuklidovská geometrie	2
<b>2 Geodézie</b>	<b>4</b>
2.1 Sférická geometrie	4
2.1.1 Trojúhelníky	5
2.1.2 Řešení sférických trojúhelníků	6
2.2 Tvorba map	7
2.2.1 Mercatorova projekce	8
2.2.2 Galls-Petersova projekce	9
2.2.3 Robinsovona projekce	9
2.3 Vzdálenost dvou míst na mapě	10
2.4 Astronomie a pozorování oblohy	11
2.4.1 Pravoúhlá soustava souřadnic	11
2.4.2 Sférická soustava souřadnic	12
2.4.3 Zeměpisná soustava souřadnice	12
2.4.4 Pozorování oblohy	12
2.4.5 Astronomické souřadnice	13
<b>3 Časoprostor</b>	<b>19</b>
3.1 Minkovského geometrie	19
3.1.1 Skalár a vektor	19
3.1.2 Body a souřadná soustava	20
3.1.3 Galileiho transformace	22
3.1.4 Lorentzovy transformace	23
3.1.5 Geometrie prostoročasu	26
3.2 Einsteinova speciální teorie relativity	29
3.3 Obecná teorie relativity	31
3.3.1 Geometrie jako základ	31
3.3.2 Riemannova eliptická geometrie	31
3.3.3 Teorie gravitace	32
<b>4 Umění</b>	<b>34</b>
4.1 Hyperbolická geometrie	34
4.1.1 Poincarého kruhový model	34
4.1.2 Möbiův pás	36
4.2 Kubismus	37
4.2.1 Pablo Picasso	38
4.3 Futurismus	39
4.3.1 Eadward Muybridge	39
4.4 Surrealismus	39
4.4.1 Salvador Dalí	39

## Úvod

Vznik neeuklidovské geometrie sahá až do starověkého Řecka, kdy Euklides formuloval základy pro geometrii. Z jeho pěti axiomů, které pro geometrii zavedl, nás bude zajímat především ten poslední „o rovnoběžkách“. V těchto místech se odtrhneme od Euklidových Základů a budeme pokračovat směrem, který vyšlapali Bolyai, Lobačevsky a Gauss, směrem do míst, kde může existovat více rovnoběžek procházející jedním bodem k přímce nebo dokonce žádná.

Neeuklidovská geometrie je v porovnání s euklidovskou geometrií novinkou. Byla objevena počátkem 19. století a přinesla tak revoluci do matematiky. Celému objevu předcházela řada nezdarů, neobhájených myšlenek před názory dané doby a jistě dlouhé dny bádání, než se dnes už slavným matematikům podařilo dojít ke správným formulacím.

Neeuklidovská geometrie, má v dnešní době široké pole aplikací. Proto si jako cíl této práce kladu sjednotit aplikace neeuklidovské geometrie do jednoho odborného textu. Čtenář by po přečtení práce měl mít jasnější pohled na využití neeuklidovské geometrie v jiných oborech.

Na začátku této práce je uvedeno vymezení geometrií, které budou zmiňovány. Dále je práce rozdělena na tři části, ve kterých jsou představeny tři různé oblasti aplikace. První aplikace je v oblasti geodézie. Planeta Země, jak už řekl Galileo Galilei, je kulatá. Při výpočtech ve větším měřítku musíme počítat s jejím zakřivením a už se dostáváme mimo rovinnou geometrii. Jak je tedy zjevné, není možné chtít např. měřit vzdálenosti na Zeměkouli pomocí vzorců známých z euklidovské geometrie. Další aplikace sahá do oblasti fyziky. Je to především známá teorie relativity, se kterou přišel Albert Einstein. Tato teorie má své základy postavené na geometrii časoprostoru. Tedy pokud by matematické před Albertem Einsteinem nepřišli s myšlenkou, že jsou i jiné geometrie než euklidovská, nejspíš by teorie relativity nikdy nevznikla. Třetí část je věnována umění. Mnoho umělců na přelomu 19. a 20. století se snažilo dávat do svých děl nové rozměry. Některým z nich, především zastáncům kubismu, futurismu a surrealismu, v tom dopomohly některé typy neeuklidovských geometrií.

# 1 Vymezení geometrií

## 1.1 Absolutní geometrie

Absolutní geometrie je základ pro všechny geometrie. Je to axiomatická výstavba zahrnující první čtyři Eukleidovy postuláty:

1. *Dvěma body lze vždy vést jedinou přímkou.*
2. *Úsečku lze neomezeně prodloužit.*
3. *Z libovolného středu lze libovolným poloměrem sestrojít kružnici.*
4. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

Dále dělíme geometrie podle toho, jaký další postulát k nim přidáme [26, s. 15–47].

## 1.2 Euklidovská geometrie

Přidáním k absolutní geometrii 5. postulátu:

5. *Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší.*

dostáváme euklidovskou geometrii tak, jak ji známe ze základní školy. Těchto 5 postulátů sepsal Eukleidés ve své knize „Základy“. Byl to první pokus o axiomatickou výstavbu geometrie [26, s. 14–15]. V celém textu budeme využívat toho, že ji už známe, a s její pomocí budeme stavět základy dalších geometrií, které už nebudou euklidovské.

## 1.3 Neeuklidovská geometrie

Tato geometrie je spojením absolutní geometrie a postulátu, který nahrazuje Eukleidův pátý o rovnoběžkách. Zde můžeme geometrii rozdělit na hyperbolickou (Lobačevského) a eliptickou (Riemannovu). Pro hyperbolickou geometrii přidáme postulát o více přímkách, které neprotínou přímku  $p$ . Přímky pak mohou být v takovéto geometrii trojího druhu: různoběžky, souběžky a rozběžky, kdy dva poslední pojmy označují dva druhy přímek, které jsme v euklidovské geometrii nazývali rovnoběžkami. Jejich klasifikace je poté rozebrána v příslušných kapitolách [26, s.106–107]. A pro eliptickou geometrii postulát o neexistenci neprotínající přímky.

Riemannova geometrie zahrnuje také sférickou geometrii, což je speciální případ eliptické geometrie, která ve dvou dimenzích splyne s euklidovskou geometrií na kouli. Zatímco v hyperbolické geometrii může jedním bodem procházet více různých přímek, které neprotínou přímku  $p$ , na které bod neleží, ve sférické geometrii se přímky protnou vždy a navíc dvakrát. Protože se přímky protnou dvakrát, neplatí, že by dvěma body byla určena jedna přímka. Vztah mezi eliptickou geometrií v rovině a sférickou geometrií lze popsat tak, že v eliptické rovině jsou protější body na sféře sjednocené [26, s.18–19].

Poslední vymezení je pro Minkowského prostoročas, který je spíše řazen mezi pseudoeklidovské geometrie. Tato geometrie je vystavěn především pomocí



metriky, vektorů, souřadné soustavy a tenzorů. V Minkowského geometrii se vzdálenosti měří pomocí pseudoeuclidovské metriky, jejíž jedna složka je časová vynásobená imaginární konstantou. Podrobnější vlastnosti jsou více rozvinuty v kapitole 3.1.2. Normální euklidovský prostor  $E_3$  je podprostorem v Minkowského prostoru, kde časová složka je nulová [8, s.16–20].

## 2 Geodézie

Představme první aplikace neeuklidovské geometrie, která je v oblasti geodézie. Geodézie je věda o Zemi. Využívá geometrických metod k získání údajů o ní a zabývá se také tvorbou map. Jednou z dalších věcí, kterou se geodézie zabývá je také velikost a tvar Země. Není totiž úplně přesně kulatá, její tvar je velmi nepravidelný. Neustálou rotací je Země pod vlivem odstředivé síly a zplošťuje se na svých pólech, kdežto v okolí rovníku je více nafouklá. Její tvar není dokonale hladký, nachází se na ní pohoří, nížiny a oceány. Mimo to se tvar Země neustále mění v důsledku pohybu litosférických desek. Tento fyzický povrch Země je značně komplikovaný pro různé matematické výpočty, proto budeme její povrch považovat za elipsoid s hladkou plochou.

Geometrie Země je zvláštním případem sférické geometrie. Když měříme vzdálenosti, které loď nebo letadlo urazí mezi libovolnými dvěma místy na Zemi, nepoužíváme přímé vzdálenosti, protože se musíme pohybovat po křivkách Země z jednoho místa na druhé [6].

### 2.1 Sférická geometrie

Sférická geometrie, jak už bylo v předchozí kapitole zmíněno, je speciální případ eliptické geometrie. Jako model sférické geometrie budeme uvažovat kulovou plochu v třírozměrném euklidovském prostoru. Kulová plocha je množina všech bodů stejně vzdálených od jednoho bodu  $O$ , středu kulové plochy. Na této ploše definujeme body jako euklidovské body kulové plochy. Jak již bylo uvedeno v 1.3, ztotožníme-li dva protilehlé body, dostaneme eliptickou geometrii, v níž je přímka určena dvěma body jednoznačně [16].

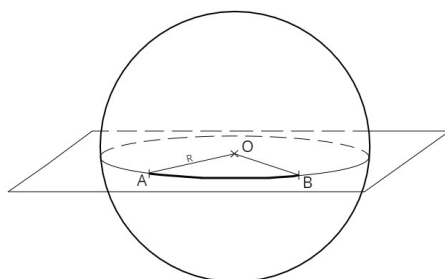
Mějme rovinu, která protíná kouli a prochází jejím středem. Jejich průnikem je kružnice, kterou nazveme hlavní kružnice. Hlavní kružnice má poloměr  $R$  a střed stejný jako koule  $O$ . Na Zeměkouli jsou hlavními kružnicemi poledníky a rovník. Všechny jiné kružnice, které vzniknou jako průnik kulové plochy s rovinou neprocházející středem  $O$ , se nazývají vedlejší kružnice. Přímku na kulové ploše definujeme jako celou hlavní kružnici, která je složená ze dvou polokružnic, uvažujeme-li jen jeden jejich krajní bod, které jsou totožné. Zde je patrný rozdíl mezi sférickou a euklidovskou geometrií, že přímka na sféře je konečná.

Úsečkou  $AB$  na kulové ploše, myšleno jako nejkratší vzdáleností mezi dvěma body, je nejkratší kružnicový oblouk, který prochází body  $A$  a  $B$ . Délku takovéto úsečky určíme pomocí úhlu a definujeme ji jako délku nejkratšího oblouku hlavní kružnice, na které body leží. Určujeme-li délku úsečky  $AB$  na sféře s poloměrem  $R$  a body  $A$ ,  $O$  a  $B$  svírají úhel  $\angle AOB$ , je potom délka úsečky

$$|AB| = |\angle AOB| \cdot \frac{180^\circ}{180} \cdot R$$

viz obrázek 1 [16].

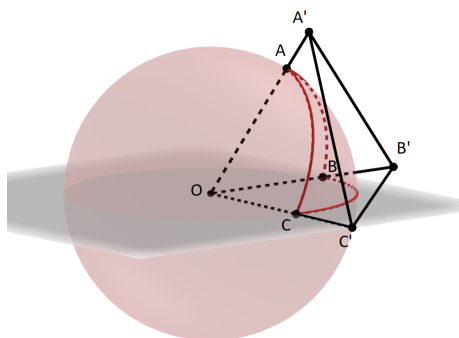
Pro pozorování těles na Zemi potřebujeme zavést soustavu souřadnic. Budeme postupovat od pravoúhlé soustavy souřadnic, která se využívá lokálně v malém měřítku, kde můžeme dané místo považovat za rovinné, až po zeměpisnou soustavu souřadnic, která je vhodná pro popisy těles na Zeměkouli.



Obrázek 1: Úsečka  $AB$  na sféře

### 2.1.1 Trojúhelníky

Nyní se podívejme na to, jak měřit jednotlivé vzdálenosti na sféře. Vzdálenost zavedeme přes sférické trojúhelníky. Pro sestrojení sférického trojúhelníku si pomůžeme trojúhelníkem z rovinné geometrie. Sestrojíme trojhran, který má jeden z vrcholů ve středu kulové plochy  $O$ . Jeho zbylé vrcholy jsou  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$  a leží vně sféry. Průnikem hran  $A'O$ ,  $B'O$  a  $C'O$  trojhranu s kulovou plochou vzniknou tři nové body  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Tyto body jsou vrcholy sférického trojúhelníku. Jeho strany jsou tvořeny třemi oblouky  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Délky stran sférického trojúhelníku jsou velikosti příslušných úhlů:  $|AB| = |\angle AOB|$ ,  $|AC| = |\angle AOC|$ ,  $|BC| = |\angle BOC|$  (obr. 2).

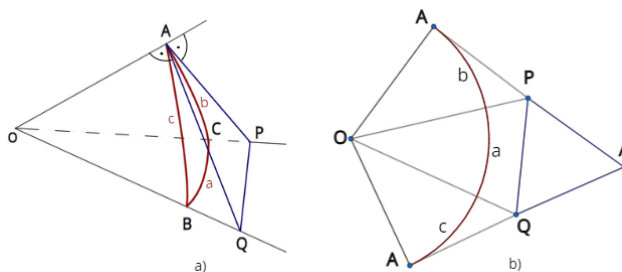


Obrázek 2: Trojúhelník na sféře, který vznikl jako průsečík hran čtyřstěnu  $OA'B'C'$  se sférou

Vnitřní úhly sférického trojúhelníku měříme jako úhly mezi dvěma přímkami (úsečkami), který svírají roviny, na kterých přímky (úsečky) leží nebo také úhel mezi jejich tečnami v bodě průsečíku přímek (úseček). Protože přímky poledníků nesvírají nulový úhel a jsou kolmé na přímkou rovníku, má tento trojúhelník součet vnitřních úhlů větší než  $180^\circ$  [16]. Délky stran v trojúhelníku se měří ve stupních nebo radiánech. Konkrétně se délka strany sférického trojúhelníku rovná velikosti jeho protilehlého úhlu. Na obrázku 2 jsou velikosti stran proti vrcholům  $B$  a  $C$   $90^\circ$ , protože leží naproti úhlům o velikosti  $90^\circ$  [16].

### 2.1.2 Řešení sférických trojúhelníků

Nejužitečnější využití sférických trojúhelníků je výpočet nejkratší trasy, vzdálenosti, mezi dvěma body na sféře. Uvažujme trojúhelník  $ABC$  jako v předchozí kapitole. Řešení sférických trojúhelníků využívá kosinovu větu pro trojúhelníky v rovině  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \sphericalangle c$ , kde  $\cos c$  je goniometrická funkce pro úhel ležící proti straně  $c$ . Pro odvození kosinovy věty pro trojúhelník na sféře promítneme sférický trojúhelník do roviny následujícím způsobem: ke stranám  $c$  a  $b$  vytvoříme tečny  $t_c$  a  $t_b$  v bodě  $A$ . Průsečík tečny  $t_c$  a polopřímky  $OB$  je bod  $Q$  a průsečík tečny  $t_b$  a polopřímky  $OC$  je bod  $P$ . Úhly  $\sphericalangle OAQ$  a  $\sphericalangle OAP$  jsou pravé a úhel  $\sphericalangle PAQ$  je opačný úhel strany  $a$  (obr. 3a). Vytvořili jsme takto čtyřstěn, který rozložíme do sítě (obr. 3b). V této síti můžeme zkoumat čtyři trojúhelníky.



Obrázek 3: Projekce sférického trojúhelníku

a) čtyřstěn  $OAPQ$

b) rozložená síť čtyřstěnu  $OAPQ$  z obrázku a) do roviny

Trojúhelníky  $OAP$  a  $OAQ$  jsou pravoúhlé a z Pythagorovy věty

$$|OP|^2 = |AO|^2 + |AP|^2, \quad |OQ|^2 = |AO|^2 + |AQ|^2.$$

Vztahy upravíme

$$|AO|^2 = |OP|^2 - |AP|^2, \quad |AO|^2 = |OQ|^2 - |AQ|^2.$$

Další dva trojúhelníky  $QAP$  a  $QOP$  jsou obecné rovinné trojúhelníky, takže pomocí kosinovy věty pro rovinné trojúhelníky máme

$$|PQ|^2 = |PO|^2 + |QO|^2 - 2 \cdot |PO| \cdot |QO| \cdot \cos \sphericalangle O$$

$$|PQ|^2 = |AP|^2 + |AQ|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |AQ| \cdot \cos \sphericalangle A,$$

úhel  $\sphericalangle A$  je úhel u vrcholu  $A$ . Odečteme-li tyto dvě rovnice, dostaneme

$$0 = (|PO|^2 - |AP|^2) + (|QO|^2 - |AQ|^2) - (2 \cdot |PO| \cdot |QO| \cdot \cos \sphericalangle O - 2 \cdot |AP| \cdot |AQ| \cdot \cos \sphericalangle A).$$

Dosadíme odvozené vztahy pro  $|AO|^2$ :

$$0 = |AO|^2 + |AO|^2 - 2 \cdot |PO| \cdot |QO| \cdot \cos \sphericalangle O + 2 \cdot |AP| \cdot |AQ| \cdot \cos \sphericalangle A$$

$$2|AO|^2 + 2 \cdot |AP| \cdot |AQ| \cdot \cos \sphericalangle A = 2 \cdot |PO| \cdot |QO| \cdot \cos \sphericalangle O.$$

Vydělíme obě strany  $2 \cdot |PO| \cdot |QO|$  a dále, jelikož z rovinné trigonometrie platí

$$\cos \sphericalangle AOP = \frac{|AO|}{|PO|}, \cos \sphericalangle AOQ = \frac{|AO|}{|OQ|}, \sin \sphericalangle AOP = \frac{|AP|}{|OP|}, \sin \sphericalangle AOQ = \frac{|AQ|}{|OQ|},$$

nahradíme příslušné zlomky goniometrickými funkcemi

$$\cos \sphericalangle O = \cos \sphericalangle AOP \cdot \cos \sphericalangle AOQ + \sin \sphericalangle AOP \cdot \sin \sphericalangle AOQ \cos \sphericalangle A.$$

Nakonec dosadíme za úhly  $\sphericalangle AOP$  a  $\sphericalangle AOQ$  příslušné protilehlé strany  $b$  a  $c$  a dostaneme vzorec pro třetí stranu  $a$  sférického trojúhelníku daného dvěma stranami  $b$  a  $c$  a úhlem  $A$  jimi sevřený:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos \sphericalangle A.$$

Tento vztah nazýváme kosinova věta pro sférické trojúhelníky [4]. Tímto odvozeným vztahem můžeme vypočítat na příklad vzdálenosti dvou různých míst na Zeměkouli. Pro znázornění rozdílu mezi výpočtem vzdálenosti na sféře a výpočtem vzdálenosti v rovině, ukážeme nejprve, jakým způsobem se sférická mapa Země přenáší na rovinnou, a pak porovnáme jednotlivé výpočty, viz kapitola 2.3.

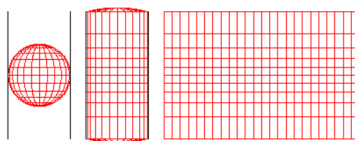
## 2.2 Tvorba map

Při pozorování drah letadel na mapě zjistíme, že jejich dráha není přímkou, je zakřivená. Když letí letadlo například z New Yorku do Londýna, letí přes severní Atlantik kolem Grónska. Ve skutečnosti se letadlo pohybuje po sféře Zeměkoule a nejkratší vzdáleností mezi dvěma body na sféře je část hlavní kružnice. Pro mítnutím hlavní kružnice do rovinné mapy vznikne křivka.

Toto je dokonalým příkladem skutečnosti, že sférická geometrie a euklidovská geometrie se zásadně liší. Když se pokusíme vytvořit rovinnou mapu Země, bude vždy zkreslená, takže přímý let z New Yorku do Londýna se ve skutečnosti na mapě jeví jako zakřivený. Skutečnost, že povrch koule a rovinný povrch jsou geometricky odlišné, je důsledkem Theorema Egregium<sup>1</sup> představené německým matematikem Carlem Gaussem: „*Jestliže rozvineme zakřivenou plochu na jiné ploše, míra zakřivení v každém bodě zůstává stejná.*“ [12] Jinými slovy zakřivení objektu v prostoru můžeme zcela pochopit pouhým měřením na povrchu objektu. Můžeme ukázat, že Země není plochá jednoduchým měřením na jejím povrchu. Ale důležité je, že není možné rozvinout sféru do roviny.

Podívejme se na to pomocí následujícího příkladu, který ukazuje, jakým můžeme přemýšlet o problému vytváření map, pomocí pomeranče. Nejprve vezmeme pomeranč a nakreslíme na něj obrysy kontinentů jako na Zemi. Poté pomeranč opatrně oloupeme a srovnáme do roviny. Bez ohledu na to, jak se budeme snažit kůru narovnat, vždy narušíme některé části „mapy“, kterou jsme na ni nakreslili. Takže se dostáváme k praktickému problému pro kartografy. Jejich úkolem je vykreslit Zemi – sférický objekt – jako rovinný povrch, který bude zkreslený, vzhledem k předchozím úvahám. Proces zobrazování sférického povrchu Země na rovinnou mapu se nazývá projekce a existuje řada různých metod projekce, z nichž každá má své vlastní výhody a nevýhody. Na příklad určité projekce přesně vykreslují příslušné oblasti různých míst na světě, ale zkreslují vzdálenosti mezi místy.

<sup>1</sup>=význačná věta (z lat.)



Obrázek 4: Zleva: Na prvním obrázku je Země jako sférický balón umístěna doprostřed válce. Uprostřed je sférický balón nafouknutý tak, že vyplňuje celý prostor. Nebo můžeme uvažovat paprsky (přímky) vycházející ze středu koule, které promítnou body, kterými projdou na sféře, na válec. Druhý obrázek ukazuje rozloženou válcovou síť [17].

### 2.2.1 Mercatorova projekce

Známa Mercatorova projekce byla nejspíš první projekcí, když se v atlasech před více než stoletím začaly pojmenovávat použité projekce, což je již dnes docela běžná praxe. O projekci byli již v historii zmínky, ale nikdy nebyl jasný přesný princip. Až v roce 1569 Gerhardus Mercator přišel se svou projekcí velké mapy světa s 21 listy v celkové velikosti přibližně 1,3 krát 2 metry. Sám řekl o povaze projekce, že chtěl rozprostřít povrch Zeměkoule do roviny, kde budou místa všude správně umístěna, a to nejen s ohledem na jejich skutečný směr a vzdálenost, jeden od druhého, ale také v souladu s jejich náležitou délkou a šířkou. Dále, aby byl co nejvíce zachován tvar zemí. K tomu bylo zapotřebí nové uspořádání a umístění poledníků, aby se staly rovnoběžnými. Mapy, které dosud vytvořili geografové, byly kvůli zakřivení a ohýbání poledníků nevhodné pro navigaci [33, s. 43–47].

Poledníky v Mercatorově projekci jsou vertikální, rovnoběžné, rovnoměrně rozmístěné čáry, které v pravých úhlech protínají vodorovné horizontální rovnoběžky. Směrem k oběma pólům roste vzdálenost mezi rovnoběžkami.

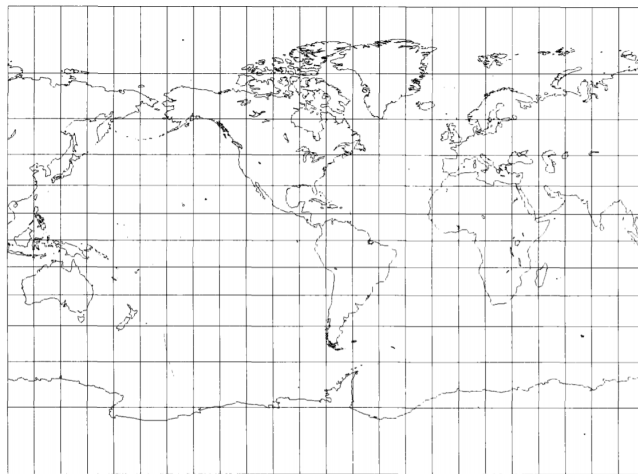
Tato mapová projekce je praktická pro námořní aplikace. Hlavní navigační rys projekce spočívá ve tom, že trasa plavby mezi dvěma body je zobrazena jako přímka, pokud směr nebo azimut lodi zůstává vůči severu konstantní. Tento druh trasy se nazývá loxodroma (loxodromová čára), který je obvykle delší než dráha hlavní kružnice (což je nejkratší možná trasa na sféře). Má stejnou délku jako hlavní kružnice, pouze pokud se pohybuje po rovníku nebo poledníku.

V okolí libovolného bodu na mapě je měřítko konstantní pohybujeme-li se o malé vzdálenosti do různých směrů. Zachovávají se tak úhly a tvary malých objektů. Mercatorova projekce zkresluje velikost větších objektů. Čím více jsou objekty u pólů, tím více jsou zkreslenější. Na příklad projekce Grónska a Antarktidy se jeví mnohem větší, než ve skutečnosti jsou ve srovnání s pevninami blíže k rovníku, jako je střední Afrika. Projekce se provádí pomocí válce, kdy umístíme glóbus Země doprostřed válce. Zemi si představíme jako sférický balón, který se uvnitř válce zvětšuje, až vyplní jeho prostor (obr.4).

Souřadnice na této mapě, jak jsou zavedeny v [33, s. 47], se určí jako  $x = R\varphi$ ,  $y = R \arctan(\sin \psi)$ , kde  $R$  je poloměr Země,  $\varphi$  zeměpisná délka a  $\psi$  zeměpisná šířka. Počátek soustavy je v průsečíku rovníku a nultého poledníku [10] [17] [33, s. 43–47].

### 2.2.2 Galls-Petersova projekce

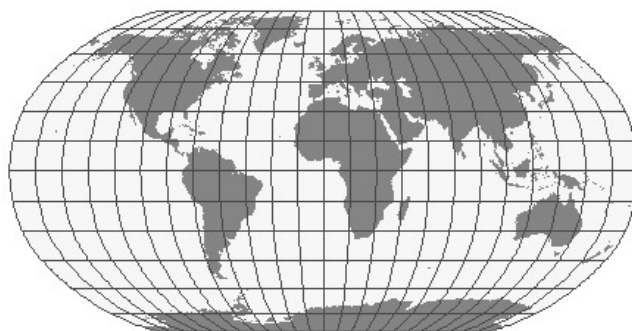
Podívejme se na druhý příklad projekce mapy, Gall-Petersovu projekci. Svět potřeboval mapu, která by se vyhnula určitému zvětšení měřítka Mercatorovy projekce, což vedlo k některým válcovým úpravám, stejně jako k dalším úpravám, které nejsou válcovité. S nejstarší válcovitou projekcí přišel Rev James Gall z Edinburghu kolem roku 1855. Jeho poledníky jsou rovnoměrně rozmístěny jako u Merkatora, ale rovnoběžky jsou rozmístěny ve vzrůstajících intervalech od rovníku. Rovnoběžky zeměpisné šířky jsou promítnuty na válec, který je kolem koule, přičemž perspektivním bodem je bod na rovníku naproti promítanému poledníku. Gallova projekce nezachovává úhly ani velikosti obsahů. Na rozdíl od Merkatora ukazuje Gallova projekce póly jako čáry probíhající přes horní a dolní části mapy. Souřadnice určíme ze vztahů  $x = R\varphi$ ,  $y = R \arctan(\sin 0,8\psi)/0,8$ . Měřítko podél poledníku je  $h = 1/(\cos 0,8\psi)$  a měřítko podél rovnoběžky zeměpisné šířky je  $k = 1/(\cos \psi)$ . Mapa sestavená pomocí této projekce je na obrázku 5 [33, s. 85–87].



Obrázek 5: Galls-Petersova válcová projekce [33, s. 86]

### 2.2.3 Robinsonova projekce

Poslední představovanou projekcí je Robinsonova projekce, která vyobrazuje celý svět. Je první projekcí, kterou si nechala objednat společnost Rand McNally, a která měla zdokonalit dvě předchozí projekce. Tato projekce se liší od ostatních tím, že nebyla sestavena pomocí geometrických vzorců, ale je zadána tabulkou, která ukazuje, jak vysoko nad nebo pod rovníkem se místo nachází. Projekce ale nezachovává poměry ploch a úhly. Poledníky se jemně zakřivují a póly jsou znázorněny jako dlouhé čáry v horní a dolní části mapy. V jejich blízkosti je také největší zkreslení. Tato projekce má především vytvářet zobrazení celého světa a je hojně využívána v atlasech (obr. 6) [21].



Obrázek 6: Robinsonovo válcové zobrazení [2]

### 2.3 Vzdálenost dvou míst na mapě

Jak je v minulých kapitolách zmíněno, není jednoduché převést mapu Zeměkoule na rovinnou mapu. I přesto, že s některými projekcemi máme poměrně přesnou rovinnou mapu, změřené velké vzdálenosti na rovinné mapě neodpovídají skutečnosti. Uvedme příklad, jak spočítat vzdálenost dvou míst v porovnání na sféře a v rovinné mapě.

**Příklad 1** *Vypočítejte nejkratší vzdálenost mezi Prahou a Sydney pomocí sférických vzorců a v rovině.*

Praha se nachází na  $50^{\circ}2'$  rovnoběžce severní šířky a  $14^{\circ}4'$  poledníku východní délky. Sydney se nachází na  $33^{\circ}9'$  rovnoběžce jižní šířky a  $151^{\circ}2'$  východní délky. Vytvoříme trojúhelník na sféře se dvěma vrcholy jako daná města a třetí vrchol je severní pól. Vzdálenost Prahy od severního pólu je  $90^{\circ} - 50^{\circ}02' = 39^{\circ}58'$  a vzdálenost Sydney od severního pólu je  $90^{\circ} + 33^{\circ}9' = 123^{\circ}9'$ . Úhel mezi městy je dán rozdílem jejich poledníků zeměpisné délky  $151^{\circ}2' - 14^{\circ}4' = 136^{\circ}58'$ . K výpočtu vzdálenosti využijeme vzorec pro třetí stranu sférického trojúhelníku daného dvěma stranami  $b$  a  $c$  a úhlem  $A$  jimi sevřený:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos A.$$

$$\cos a = \cos 39^{\circ}58' \cdot \cos 123^{\circ}9' + \sin 39^{\circ}58' \cdot \sin 123^{\circ}9' \cos 136^{\circ}58'.$$

$$\cos a = -0,812$$

$$a = 144,312^{\circ}.$$

Vzdálenost Prahy a Sydney je  $144,312^{\circ}$ . Obvod Země je 40 075 km. Jeden stupeň odpovídá 111,319 km, protože

$$40\,075 : 360 = 111,319$$

a tedy

$$144,312 \cdot 111,319 = 16\,064,67.$$

Praha a Sydney jsou vzdáleny 16 064,67 km.

Intuitivním změřením vzdálenosti stejných míst na rovinné mapě uvidíme



rozdíl. Vezměme na příklad mapu z atlasu <sup>2</sup>, která je zobrazena pomocí Robinsonovy projekce. Vzdálenost Prahy a Sydney je v této mapě 15,2 cm, měřítko mapy je 1 : 100 000 000. Podle Robinsonovy mapové projekce je vzdálenost Prahy a Sydney 15 200 km.

Můžeme si povšimnout poměrně velkého rozdílu obou hodnot. Aby bylo patrnější, jaký je rozdíl mezi měřením vzdáleností na sféře a v rovinné mapě, podívejme se ještě na dvě místa, která si jsou blíže.

**Příklad 2** *Vypočítejte vzdálenost Říma a Istanbulu pomocí sférických vzorců a v rovině.*

Zeměpisné souřadnice Říma jsou  $41^{\circ}54'$  s. š. a  $12^{\circ}27'$  v. d. a pro Istanbul jsou  $40^{\circ}59'$  s. š. a  $29^{\circ}0'$  v. d. Vzdálenost Říma od severního pólu je  $b = 48^{\circ}6'$  a Istanbul je vzdálen  $c = 49^{\circ}1'$ . Úhel mezi městy je  $A = 16^{\circ}33'$ . Pak

$$\cos a = \cos 48^{\circ}6' \cdot \cos 49^{\circ}1' + \sin 48^{\circ}6' \cdot \sin 49^{\circ}1' \cos 16^{\circ}33'.$$

$$a = 12,42^{\circ}.$$

Vzdálenost Říma a Istanbulu je  $a = 12,42^{\circ}$ , převedením na kilometry dostaneme vzdálenost 1 382,67 km.

Změříme-li stejnou vzdálenost i na rovinné mapě a provedeme stejný výpočet jako v předchozím příkladu, dostaneme vzdálenost 1 400 km. Porovnáme-li tuto hodnotu s hodnotou sférickou, vidíme, že jejich rozdíl už není tak značný.

Když se podíváme na výsledky příkladů 1 a 2, můžeme pozorovat, že při měření kratších vzdáleností se rozdíl hodnot zmenšil. Čím větší je měřená vzdálenost, tím je větší odchylka výpočtu. Pokud tedy budeme měřit jen krátké vzdálenosti (relativně vzhledem k měřítku), můžeme se spokojit s klasickým euklidovským měřením v rovinné mapě, např. pomocí Pythagorovy věty. Ve větším měřítku už musíme použít výše uvedené vztahy pro výpočty vzdáleností [22].

## 2.4 Astronomie a pozorování oblohy

Lidi už od pradávna přitahovala noční obloha a především pozorování různých objektů na ní. Pro určení přesné polohy tělesa je ale zapotřebí souřadná soustava. Pro pozorování různých těles na Zemi a kolem Země je nutné zavést různé soustavy souřadnic podle potřeby jejich využití. Souřadnicová soustava musí mít definovanou základní rovinu, počátek ležící na této rovině a směr. Soustavy můžeme dělit na příklad podle zvoleného počátku: topografická (počátek v místě pozorování), geocentrická (počátek ve středu Země), heliocentrická (počátek ve středu Slunce), selenocentrická (počátek ve středu Měsíce) a další [4].

### 2.4.1 Pravoúhlá soustava souřadnic

Pravoúhlá soustava souřadnic je definována hlavní rovinou  $\rho$ , ve které leží počátek  $P$  a osy  $x, y, z$  jsou na sebe kolmé. Poloha tělesa  $T$  je dána třemi souřadnicemi  $(x, y, z)$  [4] [5].

<sup>2</sup>Školní atlas světa. 2. vydání. Praha: Kartografie PRAHA, 2007, s. 26 – 27. ISBN 978-80-7011-925-9.

### 2.4.2 Sférická soustava souřadnic

Pro sférickou soustavu souřadnic, jak je uvedeno v [4], je základní rovina  $\rho$  stejná jako u pravoúhlé soustavy a směrem je kladný směr poloosy  $x$ . Poloha tělesa  $T$  je určena průvodičem  $r$  a úhly  $\varphi$  a  $\psi$

$$x = r \sin \varphi \cos \psi$$

$$y = r \sin \varphi \sin \psi$$

$$z = r \cos \varphi.$$

### 2.4.3 Zeměpisná soustava souřadnice

Zeměpisné souřadnice jsou velmi podobné sférickým souřadnicím s počátkem ve středu Země. Zeměkoulí prochází osa, okolo které se otáčí. Osa protíná Zeměkouli ve dvou bodech v severním a jižním pólu. Soustavu určuje rovina stejná jako u sférické soustavy rovina  $\rho$ . Průsečnice této roviny, na které leží střed Země (počátek soustavy), se sférou představující Zeměkouli, se nazývá zemský rovník. Na zemském rovníku zvolíme bod  $X$ , pomocí kterého budeme vyjadřovat polohu ostatních bodů vyskytujících se na sféře. Libovolný bod  $T$  na sféře je určen souřadnicemi  $(r, \varphi, \lambda)$ , kde  $r$  je poloměr koule,  $\varphi$  úhel mezi bodem  $T$  a jeho obrazem  $T'$  promítnutým na zemský rovník a  $\lambda$  úhel mezi obrazem  $T'$  a zvoleným bodem  $X$ . Souřadnice  $\varphi$  bodu  $T$  se nazývá zeměpisná šířka bodu  $T$  a  $\lambda$  se nazývá zeměpisná délka bodu  $T$ .

Hlavní kružnice, které vznikly jako průsečíky rovin kolmých na rovinu  $\rho$  procházející počátkem  $O$ , nazveme poledníky. Smluvně byl dohodnut základní poledník, který prochází observatoří v Greenwiche, nazývaný jako nultý poledník.

Rovina procházející bodem  $T$  rovnoběžná s rovinou  $\rho$  protíná sféru v kružnici, která není hlavní, ale vedlejší, a nazýváme ji rovnoběžka. Vedlejší kružnice nejsou považovány za přímky. Každá rovnoběžka má jinou délku. Nejdelší rovnoběžkou je rovník a s rostoucí vzdáleností od rovníku délka rovnoběžek klesá. Nejkratší rovnoběžky jsou na pólech [4] [5].

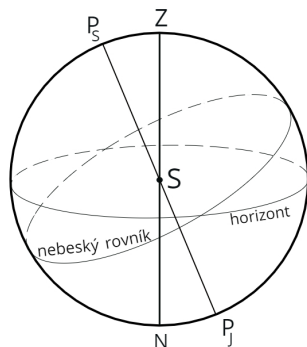
### 2.4.4 Pozorování oblohy

Při pozorování vesmírných těles se nám zdá, že se pohybují na pomyslné kulové ploše. Proto se pro určování jejich polohy využívá sférických souřadnic v různých souřadných soustavách.

**2.4.4.1 Nebeská sféra** Pro určení polohy si na oblohu promítneme ze Země sféru, kterou nazýváme nebeskou, o velikém poloměru. Nebeskou sféru definujeme jako nekonečně vzdálenou sférickou plochu v jejímž středu je střed Země  $S$ , někdy jej ztotožňujeme s pozorovatelem. Pro promítání na nebeskou sféru si musíme určit vlastní poloměr, abychom si ji mohli zobrazit. Pro určování polohy těles na nebeské sféře si musíme umístit na sféru pomyslné křivky a body a měřit jejich vzdálenosti ve stupních, pomocí sférických souřadnic.

Podívejme se na některé významné křivky a body. Povedeme-li středem Země a místem pozorovatele svislou přímku, protne sféru ve dvou bodech. Horní průsečík nazýváme zenit  $Z$  a dolní nadir  $N$ . Zenitu se také říká nadhlavník, protože je přímo nad hlavou pozorovatele a nadiru se říká podnožník ze stejného důvodu. Z průsečíku zemské osy s nebeskou sférou dostaneme severní světový pól

$P_S$  a jižní světový pól  $P_J$ . Dále promítneme zemský rovník jako průsečík rovníkové roviny a nebeské sféry. Nebeský rovník od sebe odděluje dvě polokoule nebeské sféry. Proložená rovina kolmo k přímce zenitu a nadiru procházející místem pozorovatele protne sféru v kružnici, které říkáme horizont nebo obzor. Horizont pŕlí pro pozorovatele nebeskou sféru na dvě poloviny, z nichž jednu mu zakrývá Země, nevidí ji. Všechny významné křivky a body jsou znázorněny na obr. 7.



Obrázek 7: Nebeská sféra

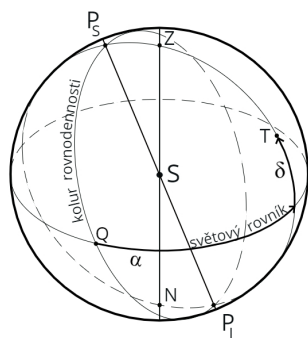
$S$  – střed Země,  $Z$  – zenit,  $N$  – nadir,  $P_S$  – severní světový pól,  $P_J$  – jižní světový pól

#### 2.4.5 Astronomické souřadnice

K určování polohy těles na nebeské sféře můžeme využít astronomické souřadnice, které určují polohu pomocí dvou úhlů podobně jako se ve sférických souřadnicích určuje poloha bodu jako zeměpisná šířka a délka. Podle polohy základní roviny a počátku rozlišujeme několik druhů souřadnic.

**2.4.5.1 Rovníkové souřadnice** Základní rovinou je rovina rovníku procházející středem Země. Souřadnice se udávají ve dvou úhlech deklinace a rektascenze.

Deklinace  $\delta$  je úhlová vzdálenost bodu od rovníkové roviny. Na severní polokouli nabývá hodnot  $0^\circ$  až  $90^\circ$  a na jižní polokouli  $0^\circ$  až  $-90^\circ$ . Další křivkou na nebeské sféře je deklinační kružnice, která je hlavní kružnicí na nebeské sféře, a je kolmá na světový rovník. Můžeme si ji představit jako nebeský poledník. Speciálním případem deklinační kružnice je kolur rovnodennosti, který prochází jarním a podzimním bodem. Jarní, resp. podzimní bod definujeme jako středový průmět Slunce na nebeskou sféru při jarní, resp. podzimní rovnodennosti. Pomocí těchto křivek definujeme rektascenzi  $\alpha$  jako úhel mezi polorovinou deklinační kružnice daného tělesa a polorovinou koluru rovnodennosti (obr.8). Rovníkové souřadnice určují polohu vesmírných těles na nebeské sféře. Pro hvězdy jsou tyto souřadnice neměnné, protože jsou stálé. Pro pohybující se planety je potřeba nejprve určit jejich polohu v ekliptikálních souřadnicích a následně je transformovat do rovníkových souřadnic nebo do obzorníkových souřadnic [4].



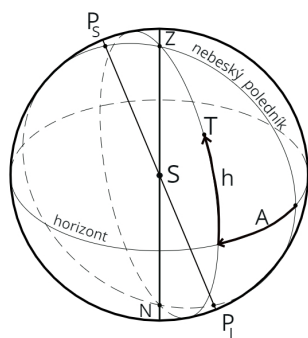
Obrázek 8: Rovníkové souřadnice

$S$  – střed Země,  $Z$  – zenit,  $N$  – nadir,  $P_S$  – severní světový pól,  $P_J$  – jižní světový pól,  $Q$  – jarní bod,  $\delta$  – deklinace,  $\alpha$  – rektascenze

**2.4.5.2 Obzorníkové souřadnice** Základní rovinou obzorníkových souřadnic je rovina obzoru. Souřadnice udávají dva úhly: azimut a výška nad obzorem. S časem se obzorníkové souřadnice  $A$  a  $h$  pozorovaného tělesa  $T$  mění, protože se obloha zdánlivě pohybuje.

Azimut  $A$  je úhel mezi rovinou nebeského poledníku, který vznikl jako průsečík nebeské sféry a roviny kolmé k obzoru procházející místem pozorovatele, zenitem a nadirem, a rovinou výškové kružnice, což je rovina kolmá na obzor procházející místem pozorovatele a sledovaným tělesem. Azimut nabývá hodnot od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ .

Výška nad obzorem  $h$  je úhel svíraný tělesem s rovinou horizontu. Udává se ve stupních a nabývá hodnot v rozmezí  $-90^\circ$  v nadiru až  $90^\circ$  v zenitu (obr.9). Úhel mezi rovinou koluru rovnodennosti a místním poledníkem nazýváme hodinovým úhlem jarního bodu nebo též hvězdný čas  $\theta$ . Je-li hvězdný čas roven  $15^\circ$  neboli jedné hodině ( $4^\circ$  odpovídají jedné minutě), pak je místní hvězdný čas 1 h a vrcholí hvězdy s rektascenzí 1 h.



Obrázek 9: Obzorníkové souřadnice

$S$  – střed Země,  $Z$  – zenit,  $N$  – nadir,  $P_S$  – severní světový pól,  $P_J$  – jižní světový pól,  $h$  – výška nad obzorem,  $A$  – azimut,  $T$  – místo, kde se nachází sledované těleso

**Příklad 3** *Určete, jak dlouho svítí Slunce v den zimního slunovratu, nacházíme-li se v Praze.*

Nejprve musíme určit zeměpisné souřadnice pro Prahu. Praha se nachází na  $50^{\circ}2'$  rovnoběžce severní šířky. Slunce v den zimního slunovratu má deklinaci  $-23^{\circ}27'$ . Slunce se pohybuje po nebeské sféře, a tak určíme jeho dobu na obloze pomocí sférického trojúhelníku. Vrcholy trojúhelníku jsou zenit  $Z$ , severní světový pól  $P_S$  a průmět Slunce na nebeskou sféru  $S$ . Délky stran tohoto trojúhelníku jsou

$$ZS = 90^{\circ} - h, \quad P_S S = 90^{\circ} - \delta, \quad P_S Z = 90^{\circ} - \varphi,$$

$h$  je výška Slunce nad obzorem. Dosadíme délky do kosinovy věty pro sférické trojúhelníky a za úhel  $A$  vezmeme úhel  $t$ , což je hodinový úhel Slunce v okamžiku východu nebo západu

$$\cos(90^{\circ} - h) = \cos(90^{\circ} - \delta) \cos(90^{\circ} - \varphi) + \sin(90^{\circ} - \delta) \sin(90^{\circ} - \varphi) \cos t$$

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

V okamžiku, kdy je Slunce těsně před východem nebo západem je jeho výška nad obzorem  $h = 0$ . Dosazením  $h = 0$  bude  $\sin h = 0$ . Upravíme ještě rovnici, abychom měli výraz pro  $\cos t$  na levé straně

$$\cos t = -\tan \varphi \tan \delta$$

a po dosazení hodnot

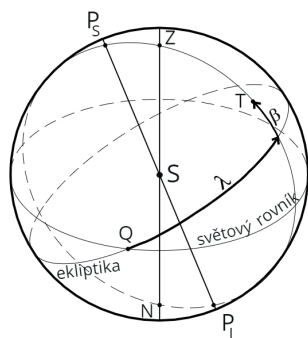
$$\cos t = -\tan(50^{\circ}2') \tan(-23^{\circ}27') = 0,518$$

$$t = 58^{\circ}49'.$$

Jeden stupeň udává čtyři minuty. Pak je  $t$  rovno 3 hodiny 55 minut. Tento čas je ale jen doba dráhy Slunce do poloviny. Celkový čas doby Slunce na obloze v den zimního slunovratu v Praze je 7 hodin 50 minut.

**2.4.5.3 Ekliptikální souřadnice** Ekliptikální souřadnice se používají pro určování polohy těles ve sluneční soustavě. Základní rovinou je rovina ekliptiky a základním bodem je jarní bod  $Q$ . Ekliptika představuje zdánlivou trajektorii Slunce po obloze, je to kružnice tvořená středovým průmětem oběžné dráhy Země kolem Slunce na nebeskou sféru. Ekliptikální souřadnice určují dva úhly: astronomická délka a astronomická šířka.

Astronomická délka je úhel, který svírá rovina procházející jarním a podzimním bodem kolmá na rovinu ekliptiky s rovinou procházející daným tělesem kolmou na rovinu ekliptiky. Astronomická šířka je úhel, který svírá těleso s rovinou ekliptiky (obr.10) [4] [5].



Obrázek 10: Ekliptikální souřadnice

$S$  – střed Země,  $Z$  – zenit,  $N$  – nadir,  $P_S$  – severní světový pól,  $P_J$  – jižní světový pól,  $T$  – místo, kde se nachází sledované těleso,  $\beta$  – astronomická šířka,  $\lambda$  – astronomická délka

**Příklad 4** Určete azimut a výšku nad obzorem Marsu, nazážíme-li se v Praze a v místním hvězdném čase  $\theta = 5,2$  hodin. Ekliptikální souřadnice Marsu jsou  $\beta = 1^\circ 29'$  a  $\lambda = 79^\circ 2'$ .<sup>3</sup>

Praha leží na  $\varphi = 50^\circ 2'$  rovnoběžce severní šířky. Polohu Marsu opět určíme pomocí trojúhelníku  $P_S Z M$ , kde  $M$  je místo, kde se nachází Mars.

$$ZM = 90^\circ - h, \quad P_S M = 90^\circ - \delta, \quad P_S Z = 90^\circ - \varphi$$

dosazením těchto vztahů do kosinovy věty pro sférické trojúhelníky získáme

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

Dále pro řešení tohoto příkladu bude potřeba znát tvar sinovy věty na sféře. Vyjdeme ze vztahu kosinovy věty  $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos A$  a za podmínky, že  $\sin b \neq 0$  a  $\sin c \neq 0$  upravíme vztah

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Vztah umocníme na druhou a od obou stran odečteme 1 a upravíme

$$1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Využijeme vztahu  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  a zároveň vydělíme celý vztah  $\sin^2 a$ , za předpokladu, že  $\sin a \neq 0$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Analogicky odvodíme vztahy pro strany  $b$  a  $c$

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{1 - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

<sup>3</sup>Ekliptikální souřadnice lze nalézt v astronomickém atlase nebo online na webových stránkách Expresní astronomické informace dostupné na <http://www2.sci.muni.cz/lib/info.php>.

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = \frac{1 - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

a jelikož se jejich pravé strany rovnají, můžeme dát do společné rovnosti levé strany rovnic

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$$

a konečnou úpravou dostáváme sinovu větu pro sférické trojúhelníky

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Vrátíme se zpět k trojúhelníku  $MZP_S$ . Při použití sinovy věty pro tento trojúhelník, který má proti straně  $P_S M$  úhel o velikosti  $180^\circ - A$ , a proti straně  $ZM$  úhel  $t$  dostaneme vztah

$$\frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin t}{\sin(90^\circ - h)},$$

po úpravě

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin t.$$

Další vztah, který by se nám hodil je vztah, ve kterém se bude kombinovat sinus i kosinus. Vyjdeme opět z kosinové věty pro sférické trojúhelníky. Dosadíme-li za úhly v goniometrických funkcích  $A = \pi - a$ ,  $a = \pi - \alpha$ ,  $b = \pi - \beta$ ,  $c = \pi - \gamma$  pro každou stranu a úhel a daný vztah upravíme, dostaneme

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma \cos a.$$

Vztah vynásobíme  $\sin b$

$$\cos \alpha \sin b = -\cos \beta \cos \gamma \sin b + \cos \beta \cos \gamma \cos a \sin b$$

a s využitím sinovy a kosinovy věty pro úhel  $\gamma$  upravíme

$$\cos \alpha \sin b = \sin b \cos^2 \beta \cos \alpha - \sin a \cos \beta \sin^2 \beta \cos c + \sin c \sin^2 \beta \cos a.$$

Výraz  $\sin b \cos^2 \beta \cos \alpha$  převedeme na levou stranu, vytkneme

$$\cos \alpha \sin b \cdot (1 - \cos^2 \beta) = \sin^2 \beta (\sin c \cos a - \sin a \cos \beta \cos c)$$

a zkrátíme  $\sin^2 \beta$

$$\cos \alpha \sin b = \sin c \cos a - \sin a \cos \beta \cos c.$$

Vyjdeme-li z tohoto vztahu, sinovy a kosinovy věty a označíme-li úhel mezi rovinou ekliptiky a rovinou světového rovníku  $\epsilon = 23^\circ 26'$  dostaneme vztahy

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda$$

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \lambda$$

$$\sin \alpha \cos \delta = -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda.$$

Do prvního vztahu dosadíme hodnoty ze zadání

$$\sin \delta = \sin 1^\circ 29' \cos 23^\circ 26' + \cos 1^\circ 29' \sin 23^\circ 26' \sin 79^\circ 2'$$

$$\sin \delta = 0,414$$

$$\delta = 24^{\circ}29'.$$

Z druhého vztahu vypočítáme hodnotu pro  $\alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \beta \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$\cos \alpha = 0,209$$

$$\alpha = 77^{\circ}56'.$$

Jelikož  $\alpha \in (0^{\circ}; 360^{\circ})$ , není výsledek jednoznačný a musíme určit, ve kterém kvadrantu výsledek leží. Kontrolu provedeme pomocí třetího vztahu

$$\sin \alpha \cos \delta = -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda$$

$$\sin \alpha = 0,978.$$

Když je kosinus úhlu kladný a stejně tak i sinus, bude velikost úhlu v intervalu  $(0^{\circ}; 90^{\circ})$ . Velikost úhlu  $\alpha$  je  $77^{\circ}56'$ , což odpovídá 5 hodinám a 11 minutám.

Nyní můžeme spočítat hodinový úhel  $t$ :  $t = \theta - \alpha = 0,017$  hodin. Tento čas odpovídá  $0^{\circ}1'$ .

Spočtíme výšku nad obzorem  $h$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$h = 64^{\circ}26'.$$

Nakonec vypočítáme azimut  $A$  ze vztahu

$$\cos h \cos A = \cos \delta \sin t$$

$$A = 0^{\circ}2'.$$

Opět musíme ověřit správnost výsledku. Ze vztahu

$$\cos h \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\cos A = 0,119$$

dostaneme, že kosinus úhlu  $A$  je kladný, stejně jako sinus, výsledek je tedy z prvního kvadrantu a  $A = 0^{\circ}2'$ . Výsledkem celého příkladu tedy je, že pro pozorovatele v Praze se bude Mars nacházet  $64^{\circ}26'$  nad obzorem o azimutu  $0^{\circ}2'$  [4] [5].



## 3 Časoprostor

Další aplikací je teorie relativity. Pořádná teorie v oblasti fyziky se neobejde bez matematického základu. Stejně tak ho potřeboval i Albert Einstein. Dnes je on chápán jako „vynálezce“ časoprostoru, avšak tomu tak není. Již Inkové vnímali „prostor“ a „čas“ jako stejný pojem a vyjadřovali je jedním slovem. Avšak za objevitele časoprostoru považujeme Hermanna Minkowského [19].

### 3.1 Minkovského geometrie

Hermann Minkowski byl německý matematik, který se zabýval geometrickou teorií čísel, matematickou fyzikou a teorií relativity. V letech 1896 až 1902 přednášel v Zürichu, kde mimo jiné vyučoval i samotného Einsteina. Dále působil v Göttingenu, kde se spolu s Davidem Hilbertem věnoval matematickým problémům relativistické fyziky. Společně zavedli pojem čtyřrozměrného časoprostoru, který je vybaven pseudoeukleidovskou metrikou, která umožňuje interpretaci Lorenzových transformací a kinematických jevů speciální teorie relativity. Tato myšlenka, spojit tři dimenze fyzického prostoru s časem do čtyřrozměrného „Minkovského prostoru“, položila v roce 1908 matematické základy speciální teorie relativity Alberta Einsteina. Minkowski bohužel umírá před tím, než Einstein časoprostor přijme jako základ své teorie. Později za to Einstein Minkovského docení, protože právě zakřivením časoprostoru bylo možno elegantně vysvětlit gravitaci. Proto uvádím napřed geometrické základy Minkovského geometrie pro snadnější pochopení samotné Einsteinovi teorie [11] [15] [19].

#### 3.1.1 Skalár a vektor

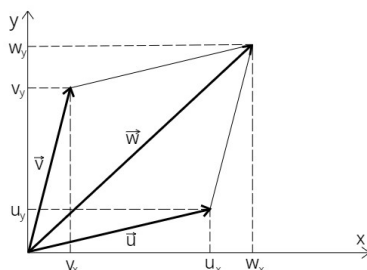
Představme si druhy veličin, které budou pro výstavbu teorie důležité. Začneme dvěma. První z nich je takový, který určuje počet. Nazýváme ho obyčejným číslem nebo skalár. Takovou veličinou je například délka nebo čas. Všechny veličiny, které mají i směr, nazýváme vektory. Příkladem vektoru je rychlost. Pro rychlost nám nestačí znát jen rychlost změny polohy tělesa, ale musíme znát i dráhu, po které se pohybovalo těleso. Chceme-li vědět kam se pohybovalo, musíme určit i směr pohybu.

Vektor představuje trojici čísel  $x, y, z$ . Pro vykonání jednoho kroku z počátku souřadnicové soustavy  $O$  do bodu  $A$  se souřadnicemi  $(x, y, z)$  skutečně potřebujeme tři čísla. Zavedeme pro něj matematický symbol  $\vec{r}$ , který zastupuje tři čísla  $x, y, z$ . Tato čísla, které charakterizují veličinu, nazýváme složkami vektoru ve směrech souřadnicových os systému.

Dále musíme zavést jednotlivé operace s vektory v určitém souřadnicovém systému. Začneme sčítáním vektorů. Nechť vektor  $\vec{u}$  má složky  $(u_x, u_y, u_z)$  a vektor  $\vec{v}$  má složky  $(v_x, v_y, v_z)$ . Součtem těchto dvou vektorů pak rozumíme  $(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$ . Pokud součtem vektorů získáme vektor  $\vec{w}$ , můžeme součet zapsat jako  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ . Ze složek vektoru  $\vec{w}$  plyne komutativita:  $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$  a asociativita:  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ . Pokud zakreslíme vektory do souřadné soustavy pomocí šipek, můžeme součet vektorů znázornit tak, jak je vidět na obrázku 11.

Další operací je násobení skalárem. Vynásobíme-li vektor  $u$  skalárem  $a$ , vznikne nový vektor, který má složky  $(au_x, au_y, au_z)$ . Geometricky jde o prodloužení

nebo zkrácení vektoru, jeho směr zůstává stejný. Je-li  $a$  nulové, dostaneme nulový vektor. Je-li  $a$  záporné, dostaneme vektor s opačným směrem [9, s. 208 – 211].



Obrázek 11: Sčítání vektorů

### 3.1.2 Body a souřadná soustava

Jednotlivé body časoprostoru označujeme jako události. Každou událost, která se odehraje ve světě, můžeme rozdělit na posloupnost jednotlivých elementárních událostí. Každou vzniklou událost (rozpad atomu, pohyb částice, ...) můžeme popsat čtyřmi veličinami. Každá událost nastane na určitém místě (prostorové souřadnice  $x, y, z$ ) a v určitém čase ( $t$ ). Nejpoužívanější souřadnou soustavou je soustava, kterou definujeme:

**Definice 1** *Libovolný bod  $O$  bodového prostoru  $E^3$  prostoru společně s uspořádanou bází  $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  vektorů z vektorového prostoru  $V^3$  tvoří souřadnicový systém  $S$  bodového prostoru  $E^3$ .*

*Přímky  $O + \langle \vec{b}_1 \rangle$ ,  $O + \langle \vec{b}_2 \rangle$ ,  $O + \langle \vec{b}_3 \rangle$  jsou osy souřadnicového systému, nazýváme je  $x, y, z$ .*

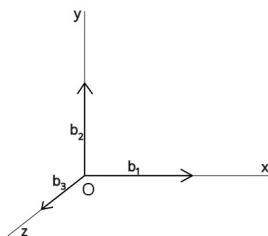
*Je-li báze  $B$  ortogonální, nazýváme odpovídající souřadnicový systém pravoúhlý.*

*Je-li báze  $B$  ortonormální, nazýváme odpovídající souřadnicový systém kartézský.*

*Souřadnice vektoru  $\vec{u} \in V^3$  v tomto souřadnicovém systému definujeme jako souřadnice vektoru  $\vec{u}$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$ .*

*Souřadnice bodu  $A \in E^3$  v tomto souřadnicovém systému definujeme jako souřadnice vektoru  $A - O$*

(obr. 12) [25].



Obrázek 12: Kartézská soustava souřadnic

Počátek, orientaci a měřítko souřadnicových os si můžeme zvolit libovolně. Budeme se pak často setkávat se souřadnicovými systémy, které budou vůči sobě posunuty nebo pootočený. Pak budeme hledat transformační vztahy, které budou převádět body z jedné soustavy do druhé.

Pro vyjádření posunutí soustavy  $S$  od soustavy  $S'$  o vektor  $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  jsou transformační vztahy

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0,$$

a potom

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0,$$

kde  $\vec{r}$  je polohový vektor (průvodič) dané soustavy. Pro vyjádření rotace kolem osy  $z$  o úhel  $\alpha$  jsou transformační vztahy

$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \quad y' = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha, \quad z' = z.$$

Při rotaci se délka polohového vektoru  $\vec{r}'$  nezmění:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Tyto lineární transformace složek můžeme označit různými indexy  $(x_1, x_2, x_3)$  místo  $(x, y, z)$ . Pak lze lineární transformaci vyjádřit jako

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot x_j$$

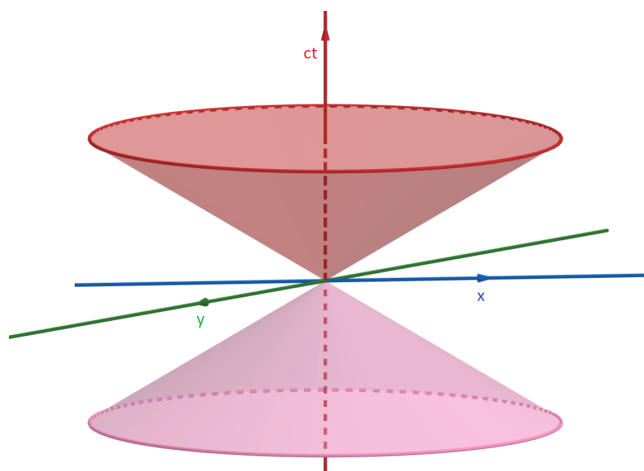
pro  $i = 1, 2, 3$ . Ještě častěji se tento zápis píše bez znaku  $\sum$ . Sumaci provádíme přes index, který je ve výrazu dvakrát. Transformační rovnici zapíšeme takto:  $x'_i = a_{ij} \cdot x_j$ . Tento zápis se nazývá Einsteinova sumační konvence.

Měřítkem celého časoprostoru je rychlost světla, která je neměnná, nejvyšší možná a pro všechny souřadnicové systémy stejná. Minkowski místo času  $t$  zavedl vzdálenost  $ct$ , která odpovídá vzdálenosti, kterou urazí světlo za dobu  $t$ , aby byl rozměr všech veličin stejný. Označil ji jako čtvrtou souřadnici [27]. V tomto čtyřrozměrném prostoru mezi jeho souřadnicemi platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2.$$

Každou událost lze z matematického hlediska v prostoročase zobrazit jako bod. Na osy čtyřrozměrného prostoru se nanášejí tři prostorové souřadnice a čas. Body se v tomto prostoru nazývají světobody a dráhy bodů se nazývají světočáry. Každý světobod odpovídající částici v prostoročase, která se pohybuje, naznačuje čáru – světočáru. Pro lepší geometrickou představu čtyřrozměrného prostoru se využívá tzv. prostoročasový diagram, kde se jeden či dva prostorové rozměry vynechávají (obr. 13) [36].

Na obrázku 13 vidíme prostoročasový kužel. Abychom mohli tento pojem představit, je potřeba nejprve udělat malý myšlenkový experiment, které mimochodem sám Einstein rád dělal, v inerciální vztažné soustavě. Inerciální vztažnou soustavou rozumíme soustavu souřadnic v prostoru a hodiny sloužící k určování časových intervalů. Každá další soustava, která se k této pohybuje rovnoměrně přímočaře, je také inerciální. Soustavy pohybující se vůči inerciální soustavě s určitým zrychlením inerciální nejsou [36].



Obrázek 13: Prostorčasový diagram

Uvažujeme inerciální vztažnou soustavu pozorovatele  $P$ . Představme si, že z daného místa  $P$  se v jeden okamžik vyše do všech stran paprsek světla

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

kde  $t$  je doba letu signálu,  $c$  rychlost světla. Pravá strana rovnice stanovuje vzdálenost uraženého signálu v prostoru. Tato rovnice je rovnicí kuželové plochy, která má vrchol v počátku  $P$ . Podobně můžeme zavést minulý světelný kužel jako množinu bodů prostoročasu tvořenou světočarami světelných signálů směřujících do bodu  $P$ . Rovnice popisující minulý světelný kužel je tvaru

$$ct = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sjednocení minulého a budoucího světelného kužele nazveme světelným kuželem [24, s. 105–107].

### 3.1.3 Galileiho transformace

Nyní už přejdeme k základům pro vybudování teorie relativity. Nejprve bychom potřebovali znát, jak se transformují souřadnice dvou inerciálních soustav, které se vůči sobě pohybují.

Mějme dvě inerciální vztažné soustavy  $S(x, y, z, t)$  a  $S'(x', y', z', t')$ , které jsou rovnoběžně orientované, a soustava  $S'$  se pohybuje vůči soustavě  $S$  rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$ . Jako časový počátek vezmeme okamžik, kdy počátky  $O$  a  $O'$  splývaly. Tento okamžik označíme jako  $t = t' = 0$ . Časové intervaly a souřadnice polohy budeme v obou soustavách měřit stejnými hodinami a tyčemi (toto budeme i v dalších úvahách předpokládat). Vztahy mezi časy a souřadnicemi soustav  $S$  a  $S'$  budou

$$x = x' + v \cdot t, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Dané vztahy se nazývají Galileiho transformace. Pokud bychom vztahy chtěli vyjádřit obecněji pomocí polohového vektoru  $\vec{r}$ , bude Galileiho transformace ve

tvaru

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v} \cdot t, \quad t = t'.$$

Galileiho transformace plynou z každodenní zkušenosti, vyjadřuje geometrické a kinematické představy. Z Galileiho transformace vyplývá obyčejný aditivní zákon skládání rychlostí: Jestliže se těleso pohybuje rychlostí  $u$  vzhledem k soustavě  $S'$ , pak je jeho rychlost v soustavě  $S$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Neboli obě rychlosti se vektorově sečtou. V klasické mechanice (myšleno Newtonově) neexistuje absolutní rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu.

Galilei pozoroval mechanické děje na plovoucí lodi stálou rychlostí po klidné hladině. Všechny děje probíhali stejně, jako kdyby se loď nehýbala, byla by v klidu. Z daného pozorování došel k názoru, že není možné se mechanickými pokusy přesvědčit, jestli se loď pohybuje rovnoměrně přímočaře, nebo jestli je v klidu. Dnes jej známe jako Galileův princip relativity, který tvrdí, že ve všech inerciálních vztažných soustavách jsou všechny zákony mechaniky stejné. Z toho plyne, že jsou všechny inerciální soustavy rovnocenné. Není možné zjistit, žádným vnitřním mechanickým pokusem, jak rychle se pohybuje daná inerciální soustava. Při formulaci Newtonových zákonů klasické mechaniky se předpokládá, že jsou splněny dva předpoklady:

- a) Absolutní čas – časové intervaly mezi událostmi jsou nezávislé na volbě vztažné soustavy.
- b) Absolutní vzdálenosti mezi polohami bodů – vzdálenosti bodů jsou nezávislé na volbě vztažné soustavy.

Galileiho transformační rovnice tyto předpoklady obsahují. Newton zavedl pojem absolutní prostor, který je ale vzhledem ke klasické mechanice prázdný. Protože vzhledem ke Galileiho principu relativity není možné zjistit, která inerciální vztažná soustava je v absolutním klidu. Není možné pomocí jakéhokoli mechanického pokusu od sebe odlišit dvě inerciální soustavy. Kdyby se lišily některé fyzikální zákony pro vzájemně se pohybující soustavy, bylo by možné určit, které objekty se v prostoru pohybují, a které jsou v klidu [36].

### 3.1.4 Lorentzovy transformace

V této kapitole se věnuji Lorentzovým transformačním rovnicím v souvislosti s konstantou rychlosti světla jako postulátu speciální relativity.

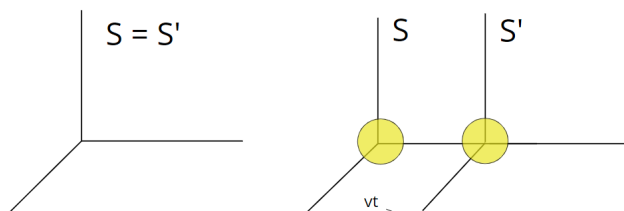
Lorentzovy transformace byly zavedeny, protože při různých experimentech bylo něco v nepořádku s fyzikálními rovnicemi. Na příklad kdybychom se pohybovali autem rychlostí  $v$  a světlo ze světla auta se šířilo rychlostí  $c$ , byla by výsledná rychlost světla měřená z auta  $c - v$ . Tento výsledek plyne z rovnice Galileiho transformace  $x' = x - vt$ , kterou jsme zderivovali podle  $t$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v.$$

Galileiho transformace tedy nebyly dostatečné, nezachovávaly princip relativity.

Než se k samotným Lorentzovým transformačním vztahům dostaneme, ukažme, že rychlost světla pro dvě inerciální vztažné soustavy je stejná, neměnná.

Mějme dvě inerciální vztažné soustavy  $S(x, y, z, t)$  a  $S'(x', y', z', t')$  pohybující se vůči sobě po ose  $x$  konstantní rychlostí  $v$  a předpokládejme, že v čase  $t_0 = t'_0 = 0$  se soustavy překrývají. Necht' je ve stejném okamžiku vyslán světelný záblesk z obou počátků, který se šíří do všech směrů (obr. 14).



Obrázek 14: Soustavy souřadnic v čase  $t = t' = 0$  a v čase  $t$  vzhledem k  $S$  se světelnou koulí

V čase  $t$  v soustavě  $S$ , který odpovídá času  $t'$  v soustavě  $S'$ , získá polohový vektor, spojený se světelným zábleskem, časoprostorové souřadnice  $(x, y, z, t)$ , respektive  $(x', y', z', t')$  v soustavě  $S$ , resp.  $S'$ . V souladu se speciální teorií relativity musí souřadnice polohového vektoru světelného záblesku vyhovovat následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2, \\x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2.\end{aligned}$$

Rovnice popisují vlnovou kuloplochu s poloměrem  $r = c \cdot t$ , resp.  $r' = c \cdot t'$ . Odečtení druhé rovnice od první, souřadnice  $y$  a  $z$  zůstávají nezměněny, vede k základní rovnici konstantní rychlosti světla:

$$x^2 - x'^2 = c^2 t^2 - c^2 t'^2.$$

Světlo v soustavě  $S'$  urazí vzdálenost  $x'$ , která je rovna vzdálenosti  $x$  minus vzdálenost  $vt$ , kterou urazil počátek  $O'$  za dobu  $t$  od soustavy  $S$ , a korigované rychlosti světla  $c$ . Jinými slovy událost v soustavě  $S'$  v čase  $t$  vzhledem k soustavě  $S$  již nastala v čase  $t'$  rovnému  $t$  minus vzdálenost, kterou urazil počátek soustavy  $S'$  v čase  $t$  od počátku soustavy  $S$  korigované rychlosti světla  $c$ . Potom musí  $vx/c^2$  být čas, který potřebuje světelný signál k překonání vzdálenosti počátků obou soustav v čase  $t$  vzhledem k  $S$  neboli

$$\frac{vx}{c^2} = \frac{vt}{c}.$$

Odtud

$$x = ct,$$

analogicky pro čárkované souřadnice

$$x' = ct'.$$

Z těchto dvou vztahů plyne

$$c = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'},$$

tedy rychlost světla je pro obě soustavy stejná. Už tedy víme, že rychlost světla je pro obě inerciální vztažné soustavy neměnná. Podívejme se, jak odvodit Lorentzovy transformace.

Uvažujme dvě soustavy  $S(x, y, z, t)$  a  $S'(x', y', z', t')$  stejné jako v předchozí úvaze. Potom je-li  $y = 0$ , musí být i  $y' = 0$  pro libovolné  $z$  a stejně tak je-li  $z = 0$ , musí být  $z' = 0$  pro libovolné  $y$ . Protože soustavy  $S$  a  $S'$  jsou inerciální, pohybuje-li se těleso v jedné soustavě rovnoměrně přímočaře, pohybuje se rovnoměrně přímočaře i vzhledem k druhé soustavě. Zapišme proto  $y'$  a  $z'$  jako lineární funkce  $y' = ky$  a  $z' = kz$ , kde  $k$  je konstanta, která není závislá na souřadnicích a na čase, protože by jinak různé body a časové okamžiky nebyli rovnocenné. Tudíž může být jen funkcí rychlosti  $v$ . Aby soustavy  $S$  a  $S'$  zůstaly rovnocenné, je  $k = \pm 1$ . Pro zachování identičnosti při transformaci soustavy  $S$  na sebe při  $v = 0$  musí být  $k = 1$ . Proto transformace, kterou hledáme, musí být lineární a tvaru

$$x' = Ax + Bt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = Cx + Dt,$$

kde  $A, B, C, D$  jsou neznámé konstanty. Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

dostaneme

$$x^2 - c^2t^2 = (A^2 - C^2c^2)x^2 + 2(AB - CDc^2)xt + (B^2 - D^2c^2)t^2.$$

Tato rovnost musí být splněna pro všechny body prostoru a v každém čase, z toho důvodu se musí koeficienty u  $x$  a  $t$  rovnat:

$$A^2 - C^2c^2 = 1, \quad AB - CDc^2 = 0, \quad B^2 - D^2c^2 = c^2.$$

Máme tři rovnice pro čtyři neznámé, potřebujeme získat ještě další rovnici pro vyřešení. Čtvrtou rovnici získáme z posunutí počátků soustav vůči sobě. Počátek  $O'$  má v čase  $t$  souřadnice  $(vt, 0, 0)$  vzhledem k soustavě  $S$  a vzhledem k soustavě  $S'$  má souřadnice  $(0, 0, 0)$ . Dosazením do hledaného transformačního vztahu pro  $x$ -ovou souřadnici dostáváme mezi  $A$  a  $B$  vztah  $x' = Ax + Bt = Avt + Bt = 0$ , tedy  $Av + B = 0$ . Řešením soustavy těchto čtyř rovnic je

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad C = \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Označíme

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a dosadíme do transformačních vztahů, kde jsou časoprostorové souřadnice soustav  $S$  a  $S'$  spojené Lorentzovými transformačními rovnicemi:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), & t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x &= \gamma(x' + vt), & t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \\ y' &= y, & z' &= z. \end{aligned}$$

Tyto rovnice lze taktéž zapsat jako

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}},$$

kde  $c$  je rychlost světla v prázdném prostoru (neměnná konstanta),  $u$  a  $u'$  jsou rychlosti pohybu tělesa ve směru osy  $x$  vzhledem k soustavám  $S$  a  $S'$  a  $v$  je rychlost soustavy  $S'$  vůči  $S$ . Z těchto rovnic vyplývá, že  $v$  nemůže být nikdy větší než  $c$  a limita  $u$  a  $u'$  jde k  $c$ . Pokud  $u = c$ , pak také  $u'$  je  $c$  a stejně i naopak [9, s. 277–278] [18, s. 16–19] [36].

### 3.1.5 Geometrie prostoročasu

Teorie relativity a předchozí vztahy ukazují, že vzájemné vztahy mezi změřenými časy a polohami ve dvou různých, vůči sobě se pohybujících, souřadných soustavách nejsou takové, jaké bychom je dle naší intuice předpokládali. Lorentzova transformace mezi souřadnicemi  $S$  a  $S'$ , která se pohybuje rychlostí  $v$  vzhledem k  $S$ , je

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y, \quad z' = z \\t' &= \frac{t - v\frac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

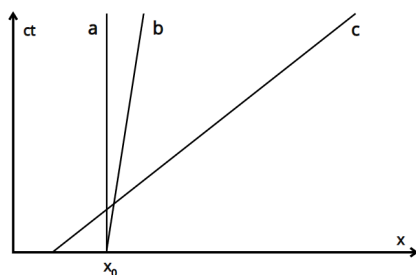
Podívejme se na Lorentzovu transformaci z jiného úhlu. Vyskytuje se zde směs polohy a času. Ze vztahů pro souřadnice polohy a času se dá určit nová souřadnice polohy. Poloha měřená jedním pozorovatelem je z pohledu jiného pozorovatele v měřeních prostoru malá složka času. Můžeme zavést analogii s pozorováním hloubky a šířky předmětu. Pokud se díváme na předmět z jednoho úhlu, rozlišujeme to, co můžeme nazvat „zdánlivou hloubkou“ a „zdánlivou šířkou“. Tyto dvě charakteristiky předmětu jsou zdánlivé, protože když poodstoupíme nebo se na předmět podíváme z jiného úhlu, vidíme jinou hloubku a jinou šířku. Z této analogie můžeme vyslovit myšlenku, že „realita“ předmětu, na který se díváme, je o něco větší než jeho šířka a hloubka, neboť tyto charakteristiky závisí na tom, jak se na předmět díváme. Když se postavíme na nové místo, náš mozek hned přepočítá novou hloubku a šířku. Ale pokud se budeme pohybovat rychlostí blízkou rychlosti světla, náš mozek nestihne souřadnice a čas přepočítat hned. Zatím jsme neměli možnost si vyzkoušet pohybovat se takovou rychlostí jako světlo, abychom si uvědomili, že prostor a čas mají stejnou podstatu.

Pokusme se představit si nový svět a v něm předměty. Čas a prostor jsou v něm smíchané ve stejném smyslu, jako že se můžeme v našem obyčejném světě dívat na předmět v různých směrech. Představme si, že předměty v prostoru, které existují určitý čas, nahradíme v novém světě bodem. Když se pohybujeme různými rychlostmi, vidíme bod z různých úhlů. Tento nový svět, ve kterém se na určitém místě v určitém čase nacházejí body, nazýváme prostoročasem.

Jak znázorníme pohyb bodu v diagramu? Znázorníme pravoúhlo soustavu tak, že horizontální osa je souřadnice  $x$  a vertikální je časová osa  $ct$ . Osy  $y$  a  $z$  jsou ve dvou dalších směrech navzájem na sebe kolmé, a také kolmé na rovinu



papíru. Osy  $y$  a  $z$  se promítnou do počátku. Nepohybující se bod má souřadnici  $x$ . Jak plyne čas, souřadnice  $x$  se nemění, takže čára znázorňující tento bod je rovnoběžná s časovou osou (obr. 15a). Pokud se bod vzdaluje, tak s rostoucím časem vzdálenost  $x$  narůstá (obr. 15b). Tedy bod, který se nerozpadá v prostoročase, se znázorní pomocí přímký. Bod, který by se rozpadal, se znázorní pomocí vidlice, protože se v jednom místě rozpadne na dvě další části, které vychází ze stejného místa. Světlo se šíří v prostoročase rychlostí  $c$ , což zobrazíme přímkou s konstantním sklonem  $45^\circ$ .



Obrázek 15: Dráhy bodů v prostoročase [9]

a – bod v klidu v místě  $x = x_0$

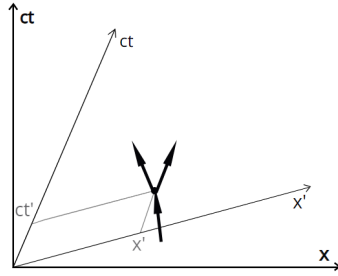
b – bod, který vychází z místa  $x = x_0$  a pohybuje se konstantní rychlostí

c – světlo

Podle této nové představy bychom předpokládali, že pokud se stane nějaká událost, například rozpad částice v určitém bodě prostoročasu  $(x, t)$  na dvě nové částice, které se budou pohybovat po nových drahách, tak by nám stačilo pootočit souřadnicové osy a dostaneme nové  $x$  a  $t$  v novém světě. Tak to ale není. Geometrie prostoročasu není obyčejná reálná geometrie. Musíme určit prostoročasové souřadnice soustavy  $S'$ , která bude soustavou pro novou částici. Nová soustava bude mít souřadnicové osy  $x'$  a  $ct'$ . Osa  $x'$  je dána podmínkou  $t' = 0$  a podle Lorentzových transformací je to přímka  $ct = (v/c) \cdot x$ . Osa  $t'$ , která je dána podmínkou  $x' = 0$ , je přímka  $x = (v/c) \cdot ct$ . Nové osy budou nakloněny od původních o úhel  $\tan \alpha = v/c$ . Úhel sklonu je tím větší, čím je větší rychlost pohybu soustavy  $S'$  vůči soustavě  $S$ . Pokud se rychlost  $v$  bude blížit rychlosti světla, bude se úhel  $\alpha$  blížit  $45^\circ$  a osy  $x'$  a  $ct'$  splynou. Můžeme tedy říct, že přechod z jedné inerciální vztažné soustavy k jiné pomocí Lorentzových transformací geometricky znamená přechod ke kosoúhlé soustavě prostoročasových souřadnic (obr. 16).

Ačkoli geometrie prostoročasu není euklidovská, přeci se jí velmi podobá, až na některé zvláštnosti. Pokud je daný koncept pojetí geometrie správný, měli by existovat funkce času a souřadnic, které jsou nezávislé na souřadnicovém systému. Uvedme na příklad obyčejnou rotaci. Vezmeme dva vhodné body: jeden v počátku soustavy a druhý libovolný. Na začátku budou mít obě soustavy společný počátek a vzdálenost těchto dvou bodů bude v obou systémech stejná. V prostoročase vzdálenost bodů je  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  čili

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$



Obrázek 16: Rozpadající se částice [9]

Tento vztah je něco podobného jako vzdálenost, nazývá se intervalem mezi dvěma prostoročasovými body, pokud jeden z nich leží v počátku. Tento jiný název používáme, protože je to jiná geometrie. Upravme daný vztah, aby neobsahoval  $c$ . Rovnice prostoročasu nám říkají, že prostor a čas jsou ekvivalentní. Čas se stal prostorem a měl by se měřit ve stejných jednotkách. Musíme určit, jaká vzdálenost je jedna sekunda. Je to vzdálenost, kterou urazí světlo za jednu sekundu, tedy  $3 \cdot 10^8$  metrů. Stejně tak i naopak. Metr času je čas, který potřebuje světlo, aby urazilo vzdálenost jednoho metru, tedy  $1/3 \cdot 10^{-8}$  sekund. Upravíme naše rovnice v takovém systému jednotek, kde bude  $c = 1$ . Když měříme prostor a čas ve stejných jednotkách, zjednoduší se rovnice:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

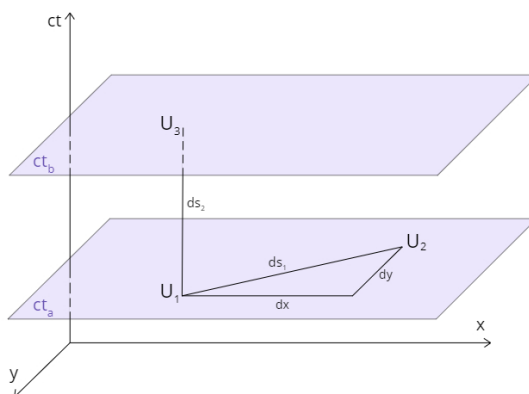
V případě, že bychom potřebovali  $c$  vrátit zpět do rovnic, doplníme ho podle rozměrů (jednotek). Například aby výraz  $\sqrt{1 - v^2}$  byl bezrozměrný, musíme  $v^2$  vydělit  $c^2$ .

Rozdíl mezi intervalem v prostoročase a vzdáleností v obyčejné geometrii je také v tom, že pokud by bod měl jenom prostorové souřadnice a nulovou časovou souřadnici, bude druhá mocnina intervalu záporná a interval bude mít zápornou hodnotu, na rozdíl od vzdálenosti, která je vždy kladná. Označíme-li prostoročasový interval dvou událostí  $s^2$ , pak  $s^2 = -x^2 - y^2 - z^2$ . Odmocnina ze záporného čísla je imaginární číslo. Intervaly mohou být reálné i imaginární. Je-li interval imaginární, řekneme, že mezi dvěma body je prostorupodobný interval. Podobá se více prostoru než času. Dané události se odehrály na různých místech daleko od sebe v prostoru. Naopak, pokud se dva body liší pouze časem, jsou na stejném místě a odehrály se v jinou dobu, je druhá mocnina času kladná. Interval je kladný, nazýváme ho časupodobným intervalem. Vztah pro prostoročasový interval  $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  se podobá známému vztahu pro vzdálenost v euklidovském prostoru  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  a vyjadřuje, jak jsou události od sebe vzdáleny v prostoru a čase. Můžeme říct, že je to taková zobecněná

Pythagorova věta pro pseudoeklidovský prostoročas. Pro lepší reprezentaci zakřivení prostoročasu se využívá diferenciálního tvaru prostorčasového intervalu  $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$  charakterizující dané zakřivení, protože v různých místech jsou odlišná prostorová měřítka a různá rychlost plynutí času.

Pokud bychom chtěli geometricky interpretovat prostoročasový interval, vzpomeneme si na prostoročasový diagram. V něm máme prostoročasový kužel, který znázorňuje hranici možného pohybu v prostoročase. Světločáry znázorňující šíření světla svírají úhel  $45^\circ$  se souřadnicovými osami. Mějme dvě události, které jsou současné, staly se ve stejnou dobu, ale na různých místech. Tyto události leží v rovině kolmé k časové ose. Více než rovina to je nadplocha, která znázorňuje trojrozměrný fyzikální prostor v jednom čase. Taktéž ji můžeme označit jako prostorupodobná nadplocha. Zde je změna času nulová, tedy  $dt = 0$ . Po označení  $(dr)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$  je prostoročasový interval  $(ds)^2 = -(dr)^2$ .

Dvě události, které se staly na dvou různých prostorupodobných nadplochách v různém čase, jsou soumítné. Mezi událostmi proběhl nějaký časový interval  $dt$  a jejich prostorový interval je  $dr = 0$ . Prostoročasový interval dvou soumítných událostí je  $(ds)^2 = c^2(dt)^2$ . Oba typy prostoročasových intervalů jsou na (obr.17) [9, s. 311–315] [30] [36].



Obrázek 17: Prostoročasové intervaly:  $ds_1$  je prostoročasový interval u soudobých událostí  $U_1$  a  $U_2$  v čase  $t_a$ ;  $ds_2$  je prostoročasový interval u soumítných událostí  $U_1$  a  $U_3$  v různých časech  $t_a$  a  $t_b$

### 3.2 Einsteinova speciální teorie relativity

V roce 1879, kdy umírá Maxwell, v Německu se rodí Albert Einstein. Po vystudování gymnázia v Mnichově se dostává do Curychu, kde roku 1900 dokončuje studium a vychází jeho první publikace do *Annalen der Physik*. Pak přichází jeho „zázračný rok“ 1905, ve kterém publikuje několik revolučních článků

a jeden z nich je základem pro speciální teorii relativity [1]. Einstein se na problém relativity pohybu podíval z nového úhlu. Navrhl postavit fyziku na dvou nových principech – principu relativity a principu konstantní rychlosti světla.

Tato teorie se zrodila z marné snahy chápat Maxwellovu elektromagnetickou teorii klasicky „newtonovsky“. Maxwellova teorie by podle klasické mechaniky mohla platit jen v jedné inerciální soustavě. Tuto speciální soustavu bychom považovali za „absolutní vztahnou soustavu“ podle Newtonova pojetí. Taková soustava je reprezentována nehybným světlnosným éterem (médiem). Podle étherové hypotézy je světlo vlnění média.

Speciální teorie relativity především vychází z neúspěšných měření Michelsona a Morleye, kteří chtěli potvrdit existenci éteru pomocí změřením rychlosti Země v letech 1881 až 1904. V experimentu měřili pomocí interferometru rychlost světla ve směru a proti směru pohybu Země. Pokus ukázal, že ve vakuu je rychlost světla v různých inerciálních soustavách stejná. K rozporu mezi mechanikou a elektromagnetismem zaujal Albert Einstein nový postoj. Uvědomil si, a to je také podstatou jeho teorie, že oproti newtonovské fyzice čas ani prostor nejsou absolutní. Naopak rychlost šíření světla je absolutní. Ve všech inerciálních vztahných soustavách naměříme stejnou hodnotu pro rychlost světla  $c = 299\,792\,458$  metrů za sekundu. Na základě těchto úvah zobecnil Einstein Galileiho princip relativity na všechny fyzikální jevy:

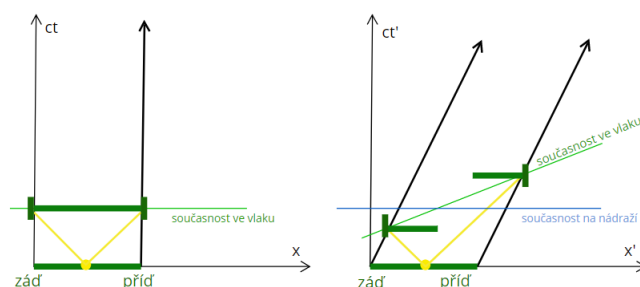
**Theorém 1** *Fyzikální zákony jsou stejné pro všechny inerciální vztahné soustavy.*

Všechny inerciální soustavy jsou rovnocenné. Einsteinův 1. teorém (speciální princip relativity) je tak vyjádřením neexistence absolutní vztahné soustavy. Poznatek o konstantní rychlosti světla ustanovil Einstein jako druhý nezávislý postulát spolu se speciálním principem relativity:

**Theorém 2** *Rychlost světla ve vakuu je stejná ve všech inerciálních soustavách bez ohledu na jakýkoliv pohyb zdroje nebo pozorovatele.*

Jinými slovy druhý postulát speciální teorie relativity říká, že rychlost světla se neskládá s jinou rychlostí. Může se zdát, že daný postulát je v rozporu se selským rozumem a obvyklými představami, které jsou obsaženy v Galileiho transformaci.

Princip konstantní rychlosti světla vede k relativitě současnosti. Představme si vlak, který stojí. Z jeho středu pozorovatel uvnitř vyše signál (světlo), který na obou koncích otevře dveře. Pozorovatel uvnitř i pozorovatel, který stojí na nádraží, vidí otevření dveří ve stejnou chvíli. Pokud se ale vlak pohybuje a provede se stejný pokus s otevřením dveří, bude pozorovatel na nástupišti pozorovat něco jiného než pozorovatel uvnitř. Uvnitř vlaku se nic nezmění. Pro pozorovatele vně vlaku se dveře vpředu otevřou o něco později než dveře vzadu, protože signál, který letěl k přední stejně, dorazil na místo o něco později. Stěna před ním ubíhala. Pozorovatel na nástupišti by z toho vyvodil, že k těmto událostem nedošlo současně (obr. 18) [24, s. 32–34] [36].



Obrázek 18: Vlevo – šíření signálu k otevření dveří z pohledu pozorovatele ve vlaku; vpravo – šíření signálu k otevření dveří z pohledu pozorovatele na nádraží

### 3.3 Obecná teorie relativity

Obecná teorie relativity, kterou Albert Einstein publikoval, je především teorií gravitace. Hmotná tělesa ve vesmíru mají kolem sebe gravitační pole, což věděl už i Isaac Newton. Co je ale nového, a co svou novou teorií Einstein ukázal, je, že tělesa svou gravitací zakřívují kolem sebe prostor, lépe řečeno prostoročas.

#### 3.3.1 Geometrie jako základ

Starověké Řecko považujeme za kolébku západní vědy. Tam byla sestavena logická soustava, Euklidova geometrie, jejíž tvrzení vyplývala jedno z druhého s takovou přesností, že každé dokázané tvrzení bylo těžko zpochybnitelné [31]. O matematickou výstavbu teorie relativity se zasloužili jiní a to Ricci a jeho žák Levi-Civita, Riemann, Christoffel, Minkowski a Poincaré, především výstavbou diferenciální geometrie a tenzorového počtu. Levi-Civita a Ricci publikovali svou práci v *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs* v roce 1917, což ale bylo až 63 let po Riemannově tenzoru a po dokončení samotné obecné relativity. Teorie také užívá Lorentzovy transformace. Einstein jejich úsilí dokončil poznáním, že události v prostoru a čase lze určovat geometricky pomocí čtyřrozměrného Minkowského prostoročasu. Minkowski totiž svůj prostor myšlenkově i matematicky vybudoval v Euklidovské geometrii, v „normálním“ světě, kde rovnoběžky jsou rovnoběžkami, součet úhlů v trojúhelníku je  $180^\circ$  a platí Pythagorova věta. Einstein ale chtěl svojí teorií relativity vysvětlit podstatu gravitace a proto transformoval Minkowského prostoročas do Riemannovy geometrie [19] [32, s.221] [35, s. 266–269].

#### 3.3.2 Riemannova eliptická geometrie

V euklidovské geometrii jedním bodem prochází pouze jedna přímka, která je rovnoběžná s přímkou  $p$ . V této geometrii naopak daným bodem neprochází žádná rovnoběžka s přímkou  $p$ . Riemannova eliptická geometrie je nejčastěji modelována na povrchu koule. Přímkou nazýváme hlavní kružnici na povrchu. Jestliže za přímky nyní považujeme kružnice, nemůžeme nadále říct, že bod  $B$  leží mezi body  $A$  a  $C$  na přímce. Místo toho můžeme říct, které body oddělují ostatní. Leží-li na kružnici po řadě body  $A, B, C, D$ , řekneme, že body  $A$  a  $C$

oddělují body  $B$  a  $D$  a daný vztah mezi body označíme  $(AC|BD)$ . Máme tak první axiom:

**Axiom 1** *Jestliže  $(AC|BD)$ , pak jsou body  $A, B, C, D$  kolineární a různé.*

Stejně tak musíme přeformulovat i další objekty. Úsečka  $AB$  byla definována jako množina všech bodů mezi body  $A$  a  $B$  včetně nich. Zde se ale nemůžeme bavit o bodech mezi, protože to postrádá smysl. Úsečku tedy zadáváme třemi kolineárními body  $A, B, C$  a jsou to všechny body, které nejsou od  $B$  odděleny body  $A$  a  $C$ , včetně  $A, B, C$ .

Axiom 1 má jeden nedostatek a to ten, že podle něj mohou dva body ležet pouze na jedné přímce, což by na příklad pro póly neplatilo. Nabízí se tedy řešení: zavedení antipodálních bodů, jak už bylo naznačeno v 1.3. Antipodální body jsou body získané ztotožněním dvou protilehlých bodů na sféře. Pokaždé, když přecházíme z jednoho do druhého, jsme vlastně zpět v původním bodě. Můžeme tak přeskočit hlavní kružnici průchodem z daného bodu do jeho nyní stejného antipodálního bodu, který býval na druhé straně.

Všechny přímky jsou v tomto modelu konečné, a navíc všechny přímky kolmé k přímce  $p$  jsou souběžné a protínají se ve společném bodě, který nazýváme pól  $p$ . Eliptický prostor je konečný, protože všechny čáry mají konečnou délku, a neomezený, protože na povrchu koule neexistuje žádná hranice. Ve vesmíru, kde by se paprsky světa pohybovaly po eliptických liniích, bychom si mohli svou hlavu s pomocí dobrého dalekohledu a pár miliardami let (čas čekání, než světlo proletí svou dráhu) prohlédnout zezadu [14].

### 3.3.3 Teorie gravitace

Aby mohla celá teorie vzniknout, musela být dotažena k dokonalosti a vyrovnat se s překážkami. Především byla omezena na inerciální vztažné soustavy a chyběla řádná teorie pro gravitaci. Zatímco přenesení teorie k neinerciálním soustavám je čistě matematické, teorie gravitace nebyla nikdy formulována a musela teprve vzniknout.

Už z Newtonovy mechaniky bylo známo, že předměty v gravitačním poli Země padají se stejným zrychlením, nehledě na to, z jakého materiálu jsou vyrobeny. Zrychlení bylo určeno jen intenzitou gravitačního pole, což plynulo z rovnosti zákona setrvačnosti a gravitačního zákona. Samotnou rovnost i ověřil maďarský fyzik Etvös v 19. století. To, že je zrychlení nezávislé na vlastnostech tělesa, plyne dle Newtonovy mechaniky z toho, že setrvačné síly jsou zdánlivé a v inerciálních vztažných soustavách je nulové zrychlení částic, na které tyto síly nepůsobí. Avšak v neinerciálních soustavách je nezávislost zrychlení tělesa vlastností pohybu, protože zrychlení je první derivací rychlosti. Podíváme-li se na daný problém v prostoročase, budou trajektorie těles v inerciální soustavě znázorněny jako přímky, ať už budou z jakéhokoli materiálu. V neinerciální soustavě bude pohyb tělesa složitější, ale pro pozorovatele se bude jevit, jako kdyby těleso bylo pod vlivem silového působení, i když je to pouze geometrický popis pohybu.

Můžeme si to představit na příkladu kosmické lodi, která startuje ze Země na její oběžnou dráhu. Po tom, co odstartuje, vidí kosmonauti všechny pohyby se stejným zrychlením, jako se sami pohybují vůči Zemi. Ve chvíli, kdy se dostanou na oběžnou dráhu, budou ve stavu beztíže a pouze pod vlivem zemské gravitace, a budou si připadat jako v inerciální soustavě. Za prostor v okolí kosmické

lodi můžeme vzít plochý Minkowského prostoročas, tak jak byl představen ve speciální teorii relativity. Okolí Země pak bude vlivem hmotnosti Zeměkoule zakřivený Minkowského prostoročas. Čím více je těleso hmotné, tím více se prostor zakříví, proto okolo kosmické lodi bude spíše plochý na rozdíl od okolí Země. Pohyby těles, které prostor nezakřívují, nebo aspoň nezřetelně zakřívují, budou po geodetických čarách. Hmotná tělesa nám tedy řeknou, jak prostoročas vypadá a prostoročas určí, jak se má v něm těleso pohybovat.

Souvislost mezi zakřivením trojrozměrného prostoru a čtyřrozměrného prostoročasu nám může nastínit myšlenky Einsteinovy teorie gravitace. Jestliže můžeme oblasti na povrchu Země znázornit do euklidovské roviny s minimálním zkreslením, můžeme i v teorii gravitace zavést geodetickou soustavu souřadnic, ve které se nachází lokální extrém, lokálně u události. Geodetické čáry (světočáry volně padajících částic v prostoročase) jsou spojeny s gravitačními silami. A tyto síly v lokálně geodetické soustavě vymizí. V tomto lokálním přiblížení nevymizí veličiny ukazující, že je zakřivená samotná geometrie a ne soustava souřadnic. Zakřivení na zemském povrchu je zjevné na tom, že se hlavní kružnice protínají a křivost prostoročasu se projevuje tím, že volně puštěné částice začnou měnit svoje vzdálenosti. Toto jsou tedy souvislosti mezi gravitací a geometrií a tuto teorii začal Einstein nazývat obecnou teorií relativity [24, s.169–174].

## 4 Umění

Další aplikace je v oblasti umění. V umění v počátcích 20. století ztrácí tradiční euklidovská vzdálenost svůj význam. Vzdálené objekty se znázorňují blízko, zatímco blízké body se v malovaném plátně oddělují. Realita se neuchopuje dohromady. Stejně jako v kaleidoskopu, se člověk snaží rozpoznat různé barevné části, tak i tak by měl vnímat realitu z umění. Poselství z děl je závislé na pozorovateli a realitu si každý pozorovatel představuje podle svého relativního pohledu. Tradiční perspektiva už neexistuje, takže umělec již není povinen reprezentovat realitu z jediného centrálního pohledu.

V této kapitole představíme různé umělce, kteří se zaměřili na neeuklidovskou geometrii a přenášeli ji do svých děl. Především půjde o zastánce hnutí a uměleckých směrů, které vznikaly na přelomu 19. a 20. století. Jako první, ale ukážeme umělce a výtvořky, které nějakým způsobem pracovali s hyperbolickou geometrií.

### 4.1 Hyperbolická geometrie

Hyperbolická geometrie je typ geometrie, ve kterém neplatí Euklidův 5. postulát. Spíše byl úplně vyhozen a nahradil ho postulát, který je jeho pravým opakem:

**Postulát 5 (Lobačevského)** *Bodem, který neleží na přímce, prochází více než jedna rovnoběžka k té přímce.*

Na tomto a ostatních 4 Euklidových postulátech stojí základy hyperbolické geometrie.

#### 4.1.1 Poincarého kruhový model

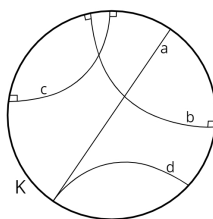
Hyperbolická geometrie je v tomto modelu zobrazena do vnitřku kružnice  $K$ . Body na kružnici jsou body v nekonečnu a body vně kružnice  $K$  jsou body mimo rovinu.

Přímky v tomto modelu jsou buď průměrem kružnice, nebo části (euklidovských) kružnic, které jsou na  $K$  kolmé. Jejich konce leží na kružnici  $K$ , leží v nekonečnu. Vzájemná poloha přímek je zde trojího druhu. Přímky mohou být různoběžné, protnou se v jednom bodě uvnitř kružnice  $K$ , souběžné, protnou se v nekonečnu (v krajních bodech na kružnici  $K$ ), nebo rozběžné, nikdy se neprotnou (obr.19).

Nyní připodobníme Poincarého kruhový model komplexní rovině, protože pomocí komplexních čísel získáme jakýsi formalismus pro zavedení vzdálenosti v tomto modelu. Vzdálenost musí být invariantní vůči komplexnímu sružení. Střed kružnice  $K$  zvolíme jako počátek. Přímka  $o$  procházející počátkem rozdělí prostor modelu na dvě části. V horní polovině zvolíme body  $z_1$  a  $z_2$ , pak v dolní polovině modelu budou jejich komplexně sružené obrazy získané jako (euklidovské) zrcadlení přes přímku  $o$ .

Vydeme z euklidovské metriky pro vzdálenost  $d(z_1, z_2)$ , která má tyto vlastnosti: symetrie, totožnost, trojúhelníková nerovnost a aditivnost. Dále chceme, aby funkce vzdálenosti v hyperbolické geometrii  $d(z_1, z_2)$  měla další vlastnosti: pro všechna  $z_1$  a  $z_2$  uvnitř  $K$





Obrázek 19: Přímky v Poincarého kruhovém modelu – přímky  $a$  a  $b$  jsou různoběžné,  $a$  a  $d$  jsou souběžné a  $a$  a  $c$  jsou rozběžné

$$d(z_1, z_2) = d(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

a

$$d(z_1, z_2) = d(M(z_1), M(z_2)),$$

kde  $M$  jsou přímé hyperbolické transformace v  $K$ . Tyto vlastnosti tvrdí, že hyperbolické transformace v  $K$  nemění vzdálenosti mezi body, protože hyperbolická transformace je buď přímá transformace  $K$  na sebe, nebo je složenou funkcí, která z první vlastnosti zachovává vzdálenost. Tyto další vlastnosti nám umožňují provádět několik užitečných pozorování. Za prvé, přímá hyperbolická transformace

$$M : z \mapsto \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

převádí  $z_1$  do 0 a  $z_2$  do  $(z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)$  a z druhé uvedené vlastnosti vyplývá

$$d(z_1, z_2) = d\left(0, \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|\right).$$

Musí tedy existovat funkce, která má uvedené vlastnosti včetně úvodních z euklidovské metriky. Vyhovující funkcí je  $\tanh^{-1}$  [3, s. 367–369]. Pak budeme definovat vzdálenost bodů  $z_1$  a  $z_2$  v modelu jako

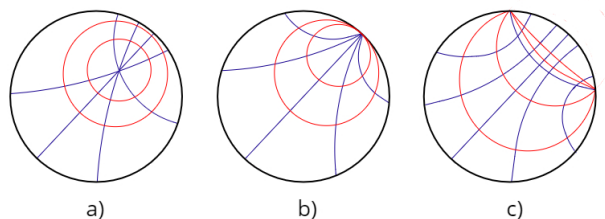
$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left( \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right).$$

Pokud bychom chtěli měřit vzdálenost bodu  $z$  od počátku bude

$$d(0, z) = \tanh^{-1} |z|.$$

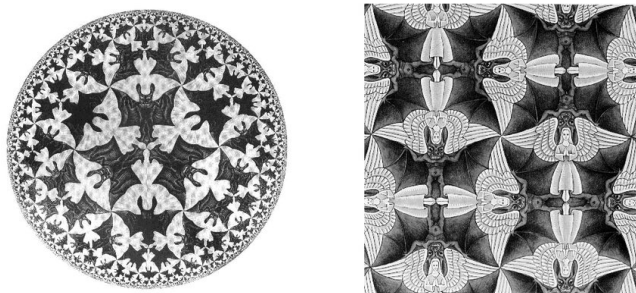
Cykly (kružnice v hyperbolické geometrii) jsou definovány podobně jako v euklidovské geometrii: body, které jsou hyperbolicky stejně vzdáleny od pevného bodu. Cykly jsou v Poincarého kruhovém modelu reprezentovány jako euklidovské kružnice (příp. jejich část), jen jejich střed leží jinde než jak ho známe euklidovskými. Cykl určený svazkem přímek a bodem  $S$  je množina bodů s následujícími vlastnostmi: Do dané množiny patří bod  $S$  a patří-li do ní bod  $P$  na přímce  $p$  ze svazku, pak do ní patří každý bod  $Q$ , který leží na některé přímce  $q$  ze svazku. Je-li cykl určený svazkem různoběžek, je cykl kružnicí, která má střed ve středu svazku [26, s. 136–137].

V případě svazku souběžek, leží střed cyklu na kružnici  $K$ . Můžeme jej považovat za limitní případ kružnice, jejíž poloměr se zvětšuje. Cykly pro svazek rozběžek jsou reprezentovány oblouky, které protínají  $K$  v koncových bodech přímky, na kterou je svazek rozběžek kolmý, a kterou je i svazek rozběžek definován. Všechny tři typy cyklů náležející svazkům přímek jsou na obrázku 20 [3, s. 343–377].



Obrázek 20: Cykly – a) svazek různoběžek; b) svazek souběžek; c) svazek rozběžek

**4.1.1.1 Maurits Cornelis Escher** Maurits Cornelis Escher byl nizozemský malíř, který jako první vymaloval Poincarého kruhový model. Především se zabýval tesalací<sup>4</sup> v euklidovské rovině. Byl vždy fascinován nekonečnem, a když viděl tesalaci hyperbolické roviny pravidelnými hyperbolickými šestiúhelníky, inspiroval se a hledal způsob, jak nekonečno znázornit na omezené ploše kruhu. Intenzivně studoval hyperbolické tesalace až nakonec vytvořil sérii svých grafik s názvem Circle limits (obr. 21) [20].



Obrázek 21: Andělé a netopýři – vlevo v hyperbolické rovině, vpravo v euklidovské<sup>5</sup>

#### 4.1.2 Möbiův pás

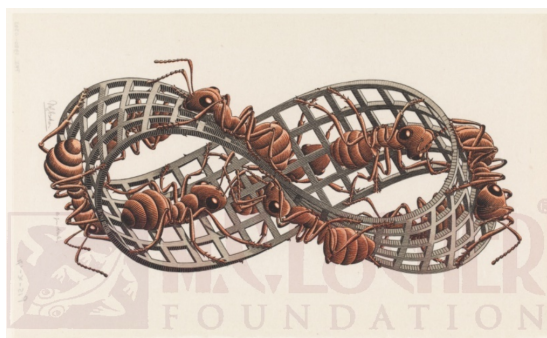
Jedním z dalších zakřivených prostorů je Möbiův pás. Vezměme do rukou pruh papíru a jeden jeho konec otočme o  $180^\circ$ . Oba konce slepme. Kde je teď rub a líc? Kolik má páska stran? Zřejmě je na obě otázky těžké odpovědět. Tato

<sup>4</sup>zaplnění prostoru mozaikou jednoho útvaru, nebo také dláždění roviny

<sup>5</sup>M.C. Escher Circle Limit IV (Heaven and Hell), 1960, Woodcut Printed from Two Blocks.  
© 2021 The M.C. Escher Company-Holland. Všechna práva vyhrazen. [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)

pozoruhodně složená páska nese název Möbiova.

V roce 1858 dva matematici, Augustus Ferdinand Möbius a Johann Benedict Listing, nezávisle na sobě objevili Möbioův pás a s tím i skutečnost, že se jedná o jednostranný povrch. Möbiovy proužky vstoupily do naší kultury mnoha způsoby. Na příklad vypadají jako umělecké předměty. Zabývali se jím i umělci jako Maurits Escher (obr.22) nebo se také vyskytují v literatuře, v povídkách „No-Sided Professor“, „A. Botts and the Moebius Strip“ a „Subway Named Moebius“ shromážděné Cliftonem Fadimanem v jeho *Fantasia Mathematica*. Také řada patentů v průmyslu zakládá svou myšlenku na Möbiově pásku: magnetofon s oboustranou páskou, který běží dvojnásobně dlouho, dopravní pás navržený tak, aby se rovnoměrně opotřebovávaly obě strany či samočistící filtrační pás pro stroje na suché čištění. Nedávný zájem o Möbiovy pásy a další kroucené proužky přichází i z oblastí chemie a molekulární biologie. Je to částečně proto, že molekula DNA často připomíná pás se sudým počtem půl otoček s jednostranným povrchem [13, s. 146–147].



Obrázek 22: Möbiova páska (Červení mravenci)<sup>6</sup>

Nejjednodušším geometrickým modelem pro Möbiusův pás je plocha daná normálním vektorem, který při průchodu uzavřenou cestou provede půl otáčky. Avšak běžný pás vyrobený z papíru nemusí být takovýmto modelem dobře popsán. Generovaný povrch nemusí být rozvinutelný, to znamená, že nemusí zachovávat všechny vnitřní vzdálenosti při rozvinutí do roviny. Proto jen rozvineme proužek do roviny a při takovéto deformaci se jeho metrické vlastnosti nezmění. Pravidelná křivka v trojrozměrném prostoru je zcela určena jejím zakřivením a zkroucením jako funkcí délky oblouku. Dostatečnou podmínkou pro rozvinutí pásku je, že zakřivení plochy zmizí. Tato vlastnost se pak využívá ke konstrukci analytických příkladů rozvinutelných Möbiových pásků [13, s. 146–147] [34].

## 4.2 Kubismus

V uměleckém hnutí kubismus na přelomu 19. a 20. století se projevuje snaha promítnout čtvrtou dimenzi i do umění. Pojmenování kubismus formuluje ve své knize „*Shadows of reality*“ Tony Robbin. Podle něj by se hnutí mělo jmenovat hyperkubismus, protože se v kubistické tvorbě často objevují odkazy na hyperkrychle od Espritu Jouffretta. Pravdou však je, že první pojmenování vzešlo od

<sup>6</sup>M.C. Escher, *Möbius Strip II (Red Ants)*, 1963, Woodcut Printed from Three Blocks © 2021 The M.C. Escher Company-Holland. Všechna práva vyhrazena. [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)

kritika Louise Vauxcella, který označil Picassovo dílo jako krychlové bizarnosti. Robbin dále tvrdí, že naše vlastní pravda může být pouze částí smysluplnější čtyřrozměrné reality. Samotný koncept projekce má pro něj nesmírný význam a dává přednost projekci ze čtyř dimenzí do tří dimenzí a poté obvykle do dvou, aby se věci dostaly do roviny. Čtvrté dimenze pak inspirovaly samotného Pabla Picassa. Jeho díla by ale nemohla vzniknout bez geniálního matematika Mauricia Princeta, který odvodil celou geometrii kubismu [28].

Nové objevy ve vědě, především Einsteinovy objevy, se staly novými možnostmi pro umělce. Snaží se dostat do svých děl čtvrtý rozměr, který by je obohatil. Ve většině děl je čtvrtá dimenze zobrazena jako přechod, jak uvidíme u významného zástupce kubismu Pabla Picassa.

#### 4.2.1 Pablo Picasso

Jak již bylo zmíněno, Picasso byl inspirován vědeckými spisy od Princeta, a také jej do značné míry ovlivnily díla Esprita Jouffretta. Celé své období začíná výrokem „*Umění je lež*“ a otevírá tím svou kubistickou tvorbou. Jeho prvním kubistickým dílem jsou Avignonské slečny (obr.23). Dílo je provázáno přechodem zleva doprava, od reality až po znetvoření lidské osoby. Je také ztvárněním vícepohledovosti na pět prostitutek především pomocí geometrických tvarů. Vícepohledovost je to, jak umělci přemýšleli o čtvrté dimenzi, jak je představena v teorii relativity, a na základě toho ilustrovali svá díla. Jde o zobrazení jednoho předmětu z několika úhlů pohledu naráz. Z takových pohledů, které by v reálném světě nebyly vidět. Picasso tak zničil perspektivu a namaloval kousky reality z různých úhlů nebo v různých rovinách, které si později v mysli divák vybaví [37].



Obrázek 23: Avignonské slečny<sup>7</sup>

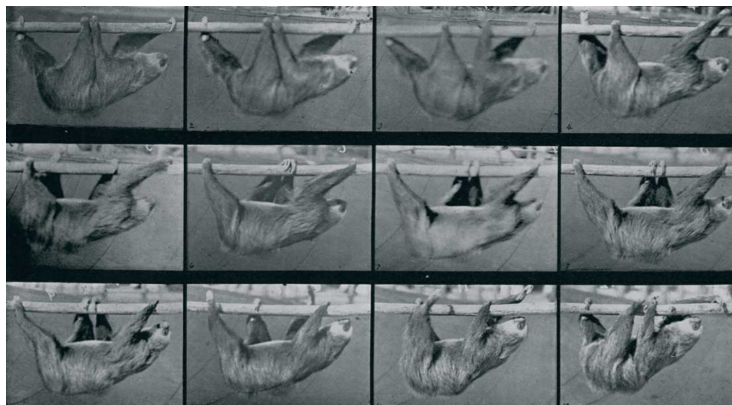
<sup>7</sup>Pablo Picasso, Les Demoiselles d'Avignon, 1907 © 2021 Estate of Pablo Picasso / Artists Rights Society (ARS), New York

### 4.3 Futurismus

Futurismus na rozdíl od kubismu, který rozděloval objekty do geometrických částí, je víc spojený a více kontinuální. V tomto uměleckém směru jde především o oslavu pohybu. Proto v jednotlivých dílech bývá tenká hranice mezi smysly. Začínají se tvořit experimenty s fotografií, přichází počátky filmů, zkrátka jde o propojení obrazu a pohybu, který by dodával další dimenzi. Jako zástupce futuristů zde ukazují Eadwarda Muybridge, který se věnoval obrazům z fotografií.

#### 4.3.1 Eadward Muybridge

Eadward Muybridge prováděl experimenty s fotografiemi, kde se snažil zachytit čtvrtý rozměr – pohyb. Jde tak o další pokusy ztvárnění prostoročasu do dvourozměrného obrazu. Jeho díla jsou složena ze série fotografií buď člověka nebo zvířete, které jdou časově za sebou. Na obraze jsou zachyceny jednotlivé okamžiky pohybu, které když se za sebe poskládají vznikne dojem, že se živá bytost na obraze pohybuje (obr.24) [23].



Obrázek 24: Lenochoď<sup>8</sup>

### 4.4 Surrealismus

Surrealismus se vyznačoval především optickou iluzí, dvojitými obrazy a světem snů s podvědomím, které spojujeme se Freudovou psychoanalýzou. Surrealismus byl také ovlivněn moderní fyzikou, která se vyvinula v předchozích deseti letech. V tomto období tvořil svá díla Salvador Dalí, pro něhož se fyzika stala klíčovým prvkem malby a psaní ve třicátých letech.

#### 4.4.1 Salvador Dalí

Surrealisté ponořili Dalího do světa fyziky. Nová realita navržená nedávnou teorií relativity Alberta Einsteina, po níž následovala teorie kvantové fyziky, na něj zvláště působila. Nová věda ukazovala svět, ve kterém se mohou částice nacházet na dvou místech současně, nebo ve kterém je identita objektů zformována

<sup>8</sup>Eadward Muybridge, One stride, nearly completed. Walking horizontally by suspension. The Sloth, Copyright 1887 [23, s. 79]

při samotném pozorování. Těmto pojmům je těžké porozumět, ale hodí se pro představivost. Nápady z nové reality byly tak podnětné, že se často opakovaly v tématech surrealistické tvorby, a tedy i jejích experimentálních výtvorů.

Podle Gavina Parkinsona: „*Dalího fascinovala teorie relativity, protože nabízel myšlenku, že realitu nelze redukovat na jediný tok.*“ Ve svém díle „*Searching for the Fourth Dimension*“ (obr.25) ukazuje Dalí dvě poloviny dvanáctistěnu a veliké rozteklé kapesní hodinky. Tento výjev má znázorňovat Einsteinovu teorii časoprostoru. Dále jsou v obraze dva lidé Aristoteles a Platon. K Platonovi se váže samotný dvanáctistěn již zmíněný, protože dvanáctistěn je jedním z plátónských těles a má svůj ekvivalent ve čtvrtém rozměru. Jak vidíme není možné chápat Dalího díla bez jeho očividného zájmu o vědu [29].



Obrázek 25: Hledání čtvrté dimenze<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Salvador Dalí, *Searching for the Fourth Dimension*, 1979 [7].

## Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo ukázat aplikace neeuklidovské geometrie v různých oborech. Snahou bylo shromáždit je do jednoho odborného textu, jak už bylo zmíněno v úvodu.

V textu jsou zmíněny tři oblasti možných aplikací, ve kterých je zapotřebí uvědomit si, že nežijeme pouze v rovinném prostoru, a že ho můžeme vnímat z nadhledu. Buď to se díváme z vesmíru na naši kulatou planetu, nebo nalézáme čtvrtý časový rozměr, anebo projektujeme čtvrtý rozměr do námi viditelného prostoru v umění.

V kapitole o geodézii je ukázána aplikace sférické geometrie na měření vzdáleností na Zeměkouli a její obloze. U měření vzdáleností jsou uvedeny vlastní příklady znázorňující rozdíly ve výpočtech sférické a rovinné geometrie. Výsledek, který vzešel z porovnání výpočtů vzdáleností, ukazuje, že pokud chceme měřit přesné vzdálenosti na naší Zeměkouli, musíme počítat s jejím zakřivením a počítat je pomocí sférických vzorů. Pokud nás ale zajímají malé rozměry v poměru velikosti Zeměkoule, můžeme se spokojit s klasickým měřením. V části o astronomii jsou pak ukázány výpočty pomocí astronomických souřadnic, které nejsou nikterak jednoduché nebo intuitivní a je potřeba u nich znát veškeré pojmy týkající se daného tématu, které byly nejprve představeny.

Druhá aplikace představující teorii relativity je v práci vystavěna na geometrii prostoročasu – čtyřrozměrný Minkowského prostoročas – bez zavedení tenzorů. Text je tak zaměřen výhradně na geometrickou interpretaci. Obecná teorie relativity představuje, jak je prostor, ve kterém pobýváme, zakřivený vlivem hmotností těles. Zakřivení tohoto prostoročasu je tak příčinou i zakřivení času, což znamená nejednotné plynutí času v různých místech vesmíru. Ku příkladu satelity létající kolem Země, které řídí hodiny v našich elektronických zařízeních, musí počítat se změnou času, která je mezi námi a jimi. Působí na ně menší gravitace, jsou v jiném místě zakřivení prostoročasu a tím pádem jim plyne i jinak čas a ten se musí korigovat.

Poslední kapitola věnovaná umění v neeuklidovské geometrii představuje různé umělce, kteří se zajímali o vědu, zaznamenali objev nové geometrie a hned na něj reagovali.

Aplikací neeuklidovské geometrie je celá řada a v této práci nejsou uvedeny zdaleka všechny. Jsou zmíněny především ty, které lze elementárně geometricky popsat. Práce tak může být využita jako doplňující text k výuce neeuklidovské geometrie, neboť nabízí její reálné aplikace, které si může čtenář představit. Také může být chápána jako motivace k samotnému studiu neeuklidovské geometrie, jelikož její aplikace zasahují do každodenního života každého z nás.

## Seznam literatury

- [1] Albert Einstein. *Encyclopedia Britannica* [online]. Chicago, IL, United States [cit. 2020-11-28]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/biography/Albert-Einstein>.
- [2] BARANOVÁ, Magdaléna. Robinsonovo zobrazení. *Matematická kartografie*. [online]. Plzeň: Fakulta aplikovaných věd, 2004 [cit. 2021-04-14]. Dostupné z: [http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni\\_texty/index\\_soubory/hlavni\\_soubory/galerie\\_soubory/index3\\_im8.html](http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/galerie_soubory/index3_im8.html).
- [3] BRANNAN, David, Matthew ESPLEN a Jeremy GRAY. *Geometry*. 2. vydání: Cambridge University Press, 2012. ISBN 978-1-107-64783-1.
- [4] BRÁZDIL, Rudolf. *Úvod do studia planety Země*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 68–106.
- [5] BRENNER, Martin. *Interaktivní mapa hvězdné oblohy jako dynamické webové stránky*. Liberec, 2009. Bakalářská práce. Technická univerzita v Liberci. Vedoucí práce Ing. Petr Kretschmer.
- [6] ČERNOTA, Pavel, Hana STAŇKOVÁ, Rostislav DANDOŠ, Petr JADVIŠČOK, Jiří POSPÍŠIL a Jakub KOSTELECKÝ *Geodézie 1*. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2019. ISBN 978-80-248-4261-5.
- [7] DESCHARNES, Robert a Gilles NÉRET. *Salvador Dali: 1904–1989*. Köln: Benedikt Taschen Verlag GmbH&Co., 1989, s. 207. ISBN 3-8228-0298-0.
- [8] DVOŘÁK, Dalibor. *Speciální teorie relativity*. Ostrava, 2012. Ostravská univerzita v Ostravě.
- [9] FEYNMANN, Richard, Robert LEIGHTON a Matthew SANDS. *Feynmanovy přednášky z fyziky 1*. 2 vyd. Bratislava: Alfa, 1986. ISBN 63-009-85.
- [10] FLETCHER, Steven. *Semi-Lagrangian Advection Methods and Their Applications in Geoscience*. Colorado: Elsevier, 2020, s. 381-469. ISBN 978-0-12-817222-3
- [11] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech*. [4. soubor] Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1985. ISBN 80-7015-012-2.
- [12] GAUSS, Carl Friedrich. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Vol. 1. Typis Dieterichianis, 1828.
- [13] GAY, David. *Explorations in topology: Map coloring, surfaces, and knots*. Oxford: Academic Press is an imprint of Elsevier, 2007, s. 146–147. ISBN 978-0-12-370858-8.
- [14] GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidean and non-euclidean geometries: Development and History*. 3. New York: W. H. Freeman and Company, 1993. ISBN 0-7167-2446-4.
- [15] Hermann Minkowski. *Encyclopedia Britannica* [online]. Chicago, IL, United States [cit. 2020-11-28]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/biography/Hermann-Minkowski>.



- [16] HLOŽEK, Martin. *Sférická geometrie*. Plzeň, 2005. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Vedoucí práce Světlana Tomiczková.
- [17] ISRAEL, Robert. *Mercator's Projection* [online]. Vancouver, Canada, 2003 [cit. 2021-02-14]. Dostupné z: <https://www.math.ubc.ca/israel/m103/mercator/mercator.html>. University of British Columbia.
- [18] KASSIR, Radwan. *On Lorentz transformation and special relativity: Critical mathematical analyses and findings*. Physics Essays. 27. 16-25. DOI 10.4006/0836-1398-27.1.16.
- [19] KOŠUMBERSKÝ, Tomáš. *Teorie času: teorie nerelativity : Galileo Galilei, Isaac Newton, Hermann Minkowski*. Praha: Zdravotnický vzdělávací institut, 2016. ISBN 978-80-906471-0-7.
- [20] KŮRKA, Petr. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie: Hyperbolická geometrie v díle M. C. Eschera*. Vol. 59 (2014), No. 4, 293 – 301. ISSN 0032-2423.
- [21] LPBUKER, C. *A computational approach to the Robinson projection*. Survey Review. Istanbul: Istanbul Technical University, 2005, 38(297), 204–217.
- [22] MCKINNEY, Scott. Non-Euclidean Geometry and Map-Making *Science4All* [online]. [cit. 2021-02-13]. Dostupné z: <https://www.science4all.org/article/non-euclidean-geometry-and-map-making/>.
- [23] MUYBRIDGE, Eadweard. *Animals in motion*. 3. vydání. London: Chapman and Hall, 1907.
- [24] NOVOTNÝ, Jan, JURMANOVÁ, Jana, GERŠL, Jan a SVOBODOVÁ, Marta. *Základy teorie relativity*. 1 vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006. Elportál.
- [25] OLŠÁK, Petr. *Úvod do algebry, zejména lineární*. FEL ČVUT, Praha 2007.
- [26] PAVLÍČEK, Jan. *Základy neeuclidovské geometrie Lobačevského*. Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953.
- [27] Prostorocas. *Techmania Science Center: Eduportál* [online]. Praha: Techmania Science Center [cit. 2020-12-01]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/teorie-relativity/prostorocas>.
- [28] ROBBIN, Tony. *Shadows of reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought*. New Haven: Yale University Press, 2006. ISBN 978-0-300-11039-5.
- [29] RUIZ, Carme. *Salvador Dalí and science, beyond mere curiosity*. Pasaje a la Ciencia. Centre for Dalinian Studies, 2010, (13).
- [30] SCHOLTZ, Elmír; SCHOLTZ, Martin. *Speciální teorie relativity a prostorocas (2. část)*. Rozhledy matematicko-fyzikální, vol. 89 (2014), issue 3.
- [31] SEELIG, Carl. *Albert Einstein — Eine dokumentarische Biographie*. Zurich, Stuttgart, Wien 1954.

- [32] SEMERÁK, Oldřich. *Albert Einstein a století obecné relativity*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 60 (2015), č. 3
- [33] SNYDER, John P. *Map projections used by the U.S. Geological Survey*. 2 vydání. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1982. DOI 10.3133/b1532
- [34] STAROSTIN, Eugene a Gert van der HEIJDEN. *The shape of a Möbius strip*. Nature Materials. 2007. 6(8). DOI: 10.1038/nmat1929.
- [35] ŠOLCOVÁ, Alena; KŘÍŽEK, Michal. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie: Čas plyne, jméno zůstává: Albert Einstein*. [online]. [cit. 2021-02-10]. Vol. 43 (1998), No. 4, 265–277. Dostupné z: <http://dml.cz/dmlcz/139743>.
- [36] ULTMANN, Vojtěch. *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu*. Praha, 1986. Dostupné z: <http://astronuklfyzika.cz/GravitCerneDiry.htm>.
- [37] WALTHER, Igno. *Pablo Picasso: 1881-1973 :génius století*. Praha: Slovart, 2005. ISBN 80-7209-744-X.