Posudek vedoucího

Název práce: Řady
Autor: Patricie Klosse

Tato práce se zabývá číselnými řadami a jejich součty. Je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola obsahuje historický úvod. Druhá kapitola obsahuje pouze teoretický úvod, který nejde nad rámec bakalářského studia. Za hlavní těžiště práce tak lze považovat třetí a čtvrtou kapitolu. Ve třetí kapitole autorka seznamuje čtenáře s Cesarovou sčítací metodou a ve čtvrté kapitole se zabývá součty některých řad, což je látka, které je během bakalářského studia věnováno méně pozornosti.

Jelikož se studentka rozhodla vypracovat tuto práci zcela samostatně bez konzultací se mnou coby vedoucím práce, nemohu způsob, jakým text vznikal, hodnotit. Proto také píši níže uvedené hodnocení v podstatě z pozice oponenta.

Historická část je dle mého názoru zajímavá. Bohužel jsou však některé části psané dost nečitelně (zvláště ty, kde jsou vysvětlovány některé matematické postupy, např. str. 7-9).

Teoretický úvod není napsán moc dobře, i když jde o „pouhou" kompilaci základních poznatků o řadách. Za chybu považuji, že zde studentka uvádí teorii, kterou následně nepotřebuje, míchá teorie číselných řad a mocninných řad dohromady a skáče z jednoho tématu na druhé. V neposlední řade zřejmě nevěnovala autorka této části dostatečné množství pozornosti, takže jsou některé části chybné.

Z mého pohledu nejlepší kapitola práce je kapitola zabývající se Cesarovou sumací. Uvedená teorie je dobře motivována a první část této kapitoly je pěkně čitelná. Za slabinu této kapitoly považuji snahu o zavedení obecného Cesarova součtu řádu α, jehož zavedení v této práci je neintuitivní, těžko čitelné a v další části práce vlastně nepotřebné. Pro další účely práce by bohatě stačilo zavést intuitivně Cesarův součet druhého řádu.

Poslední část začíná pěkně zpracovaným známým příkladem, jak lze nekorektním způsobem sečíst řadu 1+2+3+... tak, aby měla součet $-\frac{1}{12}$. Tato část hezky navazuje na předchozí kapitolu a rozhodně ji lze považovat za přínosnou. V další části této kapitoly se ale opět hromadí nepřesnosti či zavádějící formulace, které celkový dojem z této kapitoly kazí.

Práce jako celek obsahuje větší množství překlepů (např. str. 4, ř. 23: žadu $\to$ řadu, str. 4, ř. 30: dvakrát slovo „vyřešil", str. 6, ř. 30: nezivýsledků $\to$

mezivýsledků, str. 14, ř. 16: obshů $\rightarrow$ obsahů atd.) a faktických chyb (viz konkrétní připomínky níže), které rozhodně měly být před odevzdáním opraveny. Za další podstatný nedostatek považuji častou nesrozumitelnost textu, která by se zvláště u práce studenta didaktických oborů vyskytovat neměla. Problémem je i jistá nevyrovnanost textu, kdy jsou některé snadné úpravy rozebírány do zbytečných podrobností, čímž se čitelnost textu snižuje, ale v jiných částech jsou nepoměrně těžší úpravy ponechány bez vysvětlení. Za pozitivum lze označit doplnění textu pěknými ilustrativními obrázky. Celkově na mě však práce působí dojmem pracovní verze, která by před odevzdáním měla být ještě výrazně upravena.

V následující části uvádím hlavní konkrétní připomínky k této práci:

- str. 6, ř. 24-25: Věta „Newtona napadlo, že řada, které přísluší součet $\sqrt{1-x^2}$, by mohla jít pomocí tohoto algoritmu ověřit" by chtěla dovysvětlit. Co znamená "ověřit" řadu? A jak víme, že je jen jedna řada, která má součet $\sqrt{1-x^2}$? To by zde také chtělo doplnit. Následující část textu vnímám jako velmi těžko čitelnou až nesrozumitelnou.

- str. 7, poslední odstavec: Zde je nešikovně míchán pojem „řada" a „funkce".

- str. 8: Příklad na této straně je plný chyb a nepřesností:
  - Studentka pracuje s plochou pod hyperbolou $y = \frac{1}{1+t}$ na intervalu $(0, x)$, což by zde mělo být napsané, navíc studentka používá x jako proměnnou funkce i jako konec intervalu, na kterém plochu pod grafem této funkce uvažuje.
  - Zavedené značení $y = \frac{1}{1+x}$ je velmi neštastné, jelikož studentka dál vlastně pracuje s funkcí $y = \ln(1 + x)$, což ale neuvádí.
  - ř. 5: „Dosadíme tedy za x výše zmíněnou řadu." Zde by bylo třeba uvést, kam dosazujeme, jelikož vztah $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$, do kterého zde dosazujeme, zatím není uveden.
  - ř. 11: Vysvětlení, proč je $a_0 = 0$, je nedostatečné.
  - ř. 22, 24: Před členem $\frac{(...)^2}{2}$ chybí mínus.
  - ř. 28: Uvedená řada je špatně. Proč je zde najednou použita proměnná z?

- str. 9, ř. 7, 11: Pod odmocninou má být $1 - x^2$, nikoliv $1 + x^2$.

- str. 9, ř. 8-9: „Nyní, pokud bychom znali obsah dané kruhové výseče a chtěli zjistit pouze úhel, můžeme využít toho, že v jednotkové kružnici odpovídá úhel délce oblouku". Ze znalosti obsahu dané výseče a znalosti obsahu jednotkového kruhu lze určit příslušný úhel přímo. Jít na to přes obvod je zbytečné. Navíc je následující uvedená rovnost špatně.

- str. 9, ř. 11-12: Není zde uvedeno, jak jsme z rovnosti $\theta = 2(x - \frac{1}{6}x^3...) - x\sqrt{1+x^2}$ dostali rovnost $\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + ...$

- str. 10, ř. 8: s_n nazýváme n-tým částečným součtem.

- str. 10, def. 2: Oscilující řada je také divergentní, to z této definice není patrné.

- str. 11, def. 4: Bylo by vhodné uvést, jakou konstantu c uvažujeme (zda reálnou, nebo komplexní), totéž platí u koeficientu a_n.

- str. 11, věta 2: Tato formulace věty je špatně.

- str. 11: Hned po větách 2 a 3, které se zabývají mocninnými řadami, je následující formulace, která se týká číselných řad: „Ověřovat u každé jednotlivé řady...". Takové přeskakování mezi tématy je špatně.

- str. 12, ř. 3-4: Věta „Tato věta platí, protože..." by měla být v textu zařazena hned za větu 4, jinak si čtenář nemusí být jistý, co je „touto větou" myšleno.

- str. 14, ř. 15-16: Formulace „Jednotlivé členy řady zobrazíme jako body na funkci, která je uvedená v sumě" je velmi nepřesná a pro neznalého čtenáře neuchopitelná.

- str. 15, věta 12: Tato věta je v uvedené knize, z níž je zde čerpáno, formulována obecněji.

- str. 16, ř. 2: Co se myslí „podobnou" konvergencí?

- str. 17, ř. 1-5: Zavádějící formulace. K určení, zda uvedená řada konverguje či diverguje, není třeba přehazovat členy. Neznalý čtenář by mohl nabýt dojmu, že to bez přehození členů určit nelze.

- str. 17, ř. 23: Použitý pojem „polynomiální řada" není zaveden, zato je zaveden pojem „mocninná řada", který by zde měl být použit.

- str. 17, ř. 26-29: Opět zavádějící formulace. Bylo by vhodné si bod, ve kterém chceme funkci aproximovat pomocí řady, nějak označit a dále v textu toto značení použít. Chceme-li například aproximovat funkci f v okolí bodu a, tak nám určitě nestačí, aby řada procházela nějakým bodem, kterým prochází i daná funkce, ale chceme, aby řada „procházela" bodem $[a, f(a)]$. Pak už bude čtenáři jasné, že jako první aproximaci můžeme vzít konstantu $f(a)$ a ne nějakou libovolnou konstantu.

- str. 17: Definice 9 je špatně.

- str. 18, ř. 2: Když je zde použitý pojem „Lagrangeův tvar zbytku", bylo by dobré říct, co tím myslíme, tedy že to je R_n definované dále.

- str. 18, ř. 8: Formulace „Tato řada je bez ohledu na střed rovna..." je přinejmenším zavádějící. Zde se jedná o řadu se středem $a = 0$.

- str. 19, ř. 30: Formulace „Tím máme čitatele limity" je nevhodná. Co je to čitatel limity? I když je jasné, co tím autorka myslí, chtělo by to napsat přesněji.

- str. 20, věta 18: Zde je uvažován i nevlastní Cesarův součet, i když v definici 10 uvažujeme jen reálný Cesarův součet. To je třeba sjednotit.

- str. 22-23: Příklad Cesarova součtu řady $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + ...$ je hezky zvolen, ale je nadbytečné věnovat tak podrobnému řešení více než stránku textu. Výrazně složitějším záležitostem je v textu věnováno neúměrně méně prostoru.

- str. 22, ř. 11: U věty „Teď spočteme limitu posloupnosti" není zcela jasné, jakou posloupnost má autorka na mysli.

- str. 22, ř. 13: Formulace „Posloupnost,... zní:" není nejvhodnější. Navíc na dalším řádku není uvedena posloupnost, nýbrž řada.

- str. 26, ř. 20: Formulace „S využitím této věty je možné zavést i vyšší řády Cesarova součtu" je zavádějící. K zavedení zmíněná věta zapotřebí není. Navíc při zavedení Cesarova součtu vyššího řádu obdobným způsobem, jak byl zaveden Cesarův součet, bychom si k důkazu zmíněné vlastnosti (tedy rovnosti součtů za předpokladu jejich existence) vystačili s větou 18, kterou autorka v textu již dokázala.

- str. 26, ř. 23-24: „Posloupnost jmenovatelů bude vždy nějaká posloupnost částečných součtů posloupnosti $1, 0, 0, ...$" je opět zavádějící a nepřesná. Neznalý čtenář by mohl mít problém pochopit, co tím autorka myslela.

- str. 29, ř. 15: Věta „Pokud budeme používat Cesarův součet, uvidíme, že součty S_1 a S_2 vyšly správně" je špatně, součet S_2 pomocí Cesarova součtu nezískáme.

- str. 30, př. 1: Proč zde zdlouhavě určujeme Taylorovu řadu funkce $f(x) = e^x$, když tuto řadu používáme už na straně 18? Pokud chceme v práci mít odvození této řady, nestálo by za to ho udělat již na straně 18, kde by vzhledem k probírané teorii mělo i větší smysl?

- str. 30, ř. 22-23: Formulace „Pro $x = 0$ jde limita z $R_n(x)$ pro n jdoucí do nekonečna k nule. Tedy pro x rovné 0 je funkce rovna řadě." je zavádějící. Jelikož jsme rozvinuli řady v počátku, je hodnota funkce v počátku rovna součtu příslušné Taylorovy řady bez ohledu na chování Taylorova zbytku.

- str. 31: ř. 1-3: Postup ukazující, proč je funkční hodnota rovna součtu příslušné Taylorovy řady na celém reálném oboru, je špatně.

- str. 31, ř. 13: Zde by mělo být e^η, ne $(e^\eta)^{(n+1)}$. Tento druhý výraz by čtenář mohl upravit na $e^{(n+1)\eta}$, i když autorka chce pracovat s $(n+1)$. derivací funkce e^x.

- str. 31, ř. 16: Pokud chce mít autorka v práci vysvětlení nerovnosti $\frac{(e^\eta)^{(n+1)}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, má ho umístit do textu hned za tuto nerovnost a ne až za další. Takto to vypadá, že se uvedené vysvětlení týká nerovnosti $\frac{3}{10!} < 10^{-6}$.

- str. 31, př. 2: Bylo by dobré připomenout, že Taylorovu řadu funkce $f(x) = \ln(x+1)$ jsme použili už na straně 8. Popřípadě na straně 8 zmínit, že si tvar této řady později odvodíme. V n-té derivaci funkce f je chyba.

- str. 32, ř. 6: Formulace „Teď bychom měli zjistit, pro které (jestli pro nějaké) x rovnost platí" je zavádějící. Rovnost platí vždy alespoň pro $x = a$.

- str. 32, ř. 7: Zde je potřeba uvést, ve kterém intervalu leží bod η, aby dávaly další úpravy smysl.

- str. 32, ř. 17: Proč zde uvádíme zbytek ve tvaru $R_n = \frac{(\ln(1+\eta))^{(n+1)}}{(n+1)!}$, ze kterého znova odvozujeme tvar, který máme uveden již o deset řádků výše?

- str. 32, ř. 22: Slovo „třeba" zde není na místě, pokud jsme se již dříve rozhodli sečíst deset členů příslušné řady.

- str. 33, ř. 6: Zde jsme nepoužívali Taylorův rozvoj, jak je v textu uvedené, ale znalost součtu geometrické řady, tedy $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Bylo by dobré připomenout, že tento vzoreček platí pro $|q| < 1$, tedy v našem případě pro $|x| < 1$.

- str. 33, ř. 10: Zde používáme znalost, že mocninnou řadu můžeme derivovat a integrovat člen po členu (uvnitř kruhu konvergence). Tato věta ale není uvedena ve druhé kapitole, což by měla být.

- str. 33, ř. 12-18: Tuto část by bylo dobré podrobněji vysvětlit. Autorka se odvolává na větu, kterou ani neuvádí a bez jejíž znalosti nelze prezentovanému postupu porozumět.

- str. 33, ř. 28: Autorka zde hovoří o použití linearity řad, aniž by vysvětlila, co tím přesně myslí.

- str. 35, ř. 4-5: Jak výše uvedené úpravy souvisí s poloměrem konvergence bez vyložení příslušné části teorie, nevíme.

Závěr: Jak bylo zmíněno již v první části posudku, práce kvůli velkému množství chyb a nepřesností působí dojmem polotovaru. I když je ve třetí a čtvrté kapitole vidět, že studentka psaní této práce věnovala nemalé množství času, výsledná forma není dle mého názoru dostatečná, a proto ji nedoporučuji k obhajobě.

RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
V Praze, dne 30.8.2020