Patricie Klosse: **Řady**

Posudek oponenta bakalářské práce

Předložená práce je věnována nekonečným řadám, jejich konvergenci a hledání součtů. Kapitola 1 se zabývá historií, kapitola 2 shrnuje základní poznatky o nekonečných řadách, kapitola 3 představuje Cesàrovu sčítací metodu a její varianty, kapitola 4 je tvořena jedním nečíslovaným a pěti číslovanými příklady.

Práce má kompilační charakter, velká část kapitol 2 a 4 je součástí základních kurzů matematické analýzy. Případné čtenáře by mohly zaujmout především kapitoly 1 a 3, ke kterým mám ovšem řadu výhrad (viz dále).

Práce neobsahuje závažné matematické chyby, na dílčí nedostatky upozorňuji dále. V kapitole 1 mám dojem, že autorka zachází poněkud ledabyle s historickými fakty; některá tvrzení jsou nepřesná (viz dále), použité zdroje nejsou dostatečně přesně specifikovány.

Didaktické zpracování je podle mého názoru podprůměrné; základním poznatkům je věnováno zbytečně mnoho místa (dají se najít v každé učebnici matematické analýzy), naproti tomu obtížnější partie (jako např. (C,α) sčítací metoda) jsou naopak příliš stručné a postrádají dostatečnou motivaci. Příklady v kapitole 4 jsou standardní, v literatuře lze najít mnohem zajímavější úlohy. Z práce mám dojem, jako by autorce nezáleželo na tom, zda její text bude někdo číst.

Po stylistické stránce považuji práci za průměrnou, počet překlepů a jiných chyb není zanedbatelný, avšak ještě únosný.

Autorka si mohla dát mnohem více práce s dohledáváním relevantní literatury. Např. velkou část kapitoly 1 lze najít v diplomové práci Václava Ibla *Taylorovy řady elementárních funkcí* obhájené na MFF UK v roce 2009, dalším pěkným zdrojem je text Jiřího Veselého *O některých důležitých řadách* (edice Dějiny matematiky, svazek 4, 1996); oba texty jsou k dispozici na internetu. V angličtině existuje mnoho pěkných knih obsahujících úlohy o nekonečných řadách, které by bylo možné využít.

Dále uvádím kritické připomínky ke konkrétním místům:

- s. 3–4: Na 5. řádku zdola je uvedena řada $\sum_{i=1}^{n} 1/4^n$, ale obrázek 1.1 spíše odpovídá řadě $\sum_{i=1}^{\infty} 1/4^i$. Odkud pochází informace, že Archimédův důkaz byl obrázkový? V citované knize Edwards (1979) jsem žádnou takovou informaci nenašel.
- s. 6: Na řádku 6 se vyskytuje integrační konstanta c. Proč je nulová?
- s. 6, 2. odstavec zdola: Text je nesrozumitelný. Nevím, co znamená „ověřit řadu“. Tvrzení, že v Newtonově době nebyl znám algoritmus pro dělení polynomů, je nepravdivé (je ovšem možné, že Newton jej zpočátku neznal). Text by působil kultivovanějším dojmem, kdyby si autorka odpustila expresívní výraz „ocas“.
- s. 9: Slušelo by se poznamenat, že řady pro sinus a kosinus byly známy v Indii již před Newtonem. Poslední věta na této straně není přesná – Taylor nezkoumal konvergenci svých řad, takže nemohl zjistit, že některé funkce lze napsat jako řady.
- s. 10: Co znamená text „kde n“ v definici geometrické řady?
- s. 11: Připadá mi kuriózní předpokládat, že čtenář nezná vzorec pro součet členů konečné geometrické posloupnosti, ale zná hodnotu $\lim_{n\to\infty} 1/2^n$.
- s. 12: Proč je ve větě 8 napsáno „kde $n \in \mathbb{N}$“? Písmeno n zde značí sčítací index, je tedy zřejmé, že probíhá přirozená čísla. Stejná připomínka se vztahuje k větě 18 na str. 20, kde je napsáno $k \in \mathbb{N}$.
- s. 13: Příklad na využití limitního srovnávacího kritéria je poněkud nešťastný. Dokázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je jednodušší, než důkaz konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- s. 14: Poslední odstavec je nesrozumitelný. Mělo by být uvedeno, že sčítáme řadu typu $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, kde f je jistá reálná funkce. Termín „body na funkci“ je značně vágní. Obrázek 2.1 mi připadá trochu matoucí, podstatu věty 12 lépe vystihují obrázky 2.2 a 2.3.
- s. 15, 2. odstavec: O jaké křivce je řeč?
- s. 16: Termín „relativní konvergence“ mi připadá poněkud nešťastný, i když se v české literatuře občas vyskytuje. Vzhledem k čemu je konvergence relativní? Za vhodnější termín považuji „neabsolutní konvergence“.
- s. 17: Definice Taylorovy řady je chybně, je třeba sčítat od $n = 0$.
- s. 18: Text je zavádějící. Lagrangeův tvar zbytku neříká nic o tom, jak se Taylorova řada podobá aproximované funkci, ale hovoří o Taylorově polynomu. Není pravda, že uvedená řada pro exponenciálu má stejný tvar bez ohledu na střed – jde o řadu se středem 0.
- s. 22: Text na této straně je zmatený. Z posloupnosti průměrů částečných součtů sice vybíráme každý třetí člen, z těchto průměrů však počítáme limitu, nikoliv součet, jak autorka třikrát chybně uvádí (řádky 15, 23, 30).

- s. 23: Skutečnost, že u Cesàrova součtu není možné přerovnávat řadu, je zřejmá z věty 18 a z toho, že neabsolutně konvergentní řady nelze přerovnávat.
- s. 24: Poslední člen na 5. řádku má být 4/7.
- s. 25: Výklad není zcela srozumitelný. Ze skutečnosti, že počáteční členy nějaké posloupnosti jsou 1, 3, 6, 10, 15, ... , ještě neplyne, že obecný člen je $n(n+1)/2$.
- s. 26: Stolzova-Cesàrova věta na s. 26 je vlastně diskrétní verzí l'Hospitalova pravidla; škoda, že to není zmíněno. Proč je věta vůbec uvedena, když není k ničemu použita?
- s. 26: Definice 12 postrádá motivaci – není vůbec vysvětleno, proč se v definici objevují částečné součty řádu α posloupnosti $1, 0, 0, \ldots$. Také není vysvětleno, proč je lze vyjádřit pomocí kombinačních čísel.
- s. 27: Nechápu smysl tohoto obrázku. To, že kombinační čísla lze uspořádat do Pascalova trojúhelníku, snad ví každý čtenář.
- s. 33, Příklad 3: Nechápu, o jakém Taylorově rozvoji je řeč na 6. řádku – stačí rozvoj do geometrické řady. U zmínky o Abelově větě by se hodil odkaz na s. 11, kde je tato věta zformulována.
- s. 34, Příklad 5: Na třetím řádku příkladu má být sčítací index n místo i. Bylo by vhodné připomenout, že mocninné řady lze integrovat člen po členu. Z čeho plyne, že integrační konstanta je nulová? Postup je zbytečně složitý, stačí vzít rovnost $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, zderivovat podle x a vynásobit x.

Práci doporučuji uznat jako bakalářskou. Vzhledem k nepromyšlené koncepci práce a dalším výše uvedeným nedostatkům navrhuji hodnocení *dobře.*

V Praze dne 28. 8. 2020

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK