**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Patricie Klosse

# Řady

Katedra didaktiky matematiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí bakalářské práce: | RNDr. Jakub Staněk, Ph.D. |
| Studijní program: | Fyzika |
| Studijní obor: | Fyzika zaměřená na vzdělávání |

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ........ dne ............ Podpis autora

Ráda bych poděkovala babičce a dědovi z Tábora za trpělivost při odevzdávání první verze této práce. Také moc děkuji Vikimu Němečkovi za pomoc. Děkuju Mgr. Martinu Marešovi, Ph.D. za korekturu.

Název práce: Řady

Autor: Patricie Klosse

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá součty řad. V první části se nachází historický úvod a poté je uvedena základní teorie řad. Následně je představena Cesarova sumační metoda. V práci jsou také uvedeny ukázky součtů konkrétních řad.

Klíčová slova: Řady Součet řady Cesarův součet

Title: Series

Author: Patricie Klosse

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This bachelor thesis focuses on sums of series. The first part introduces the reader to the historical background and explains the basic theory of series. Then, the Cesaro summation method is introduced. The thesis also contains demonstrations of individual sums of some specific series.

Keywords: Series Sum of the series Cesaro summation

# Obsah

# Úvod

Bakalářská práce se zabývá nekonečnými řadami a jejich součty. Práce je určena pro kohokoliv, kdo si chce řady zopakovat a přečíst si o nich něco nového. Práce je rozdělena do čtyř kapitol.

V první kapitole se nachází shrnutí historie řad. Začíná ve starověku, kde panoval názor, že nekonečně mnoho čísel prostě sečíst nelze. Navzdory tomu se už i tam příklad sečtení řady objevil. Řešení vycházelo z obrázku.

Sčítání řady pomocí geometrické představy hrálo roli i ve středověku. Do objevu infinitezimálního počtu bylo totiž ve většině případů nutné postupovat trikově. Když se v 17. století začala rozvíjet matematická analýza, poznatky o řadách se postupně zformovaly do podoby, ve které je známe dnes.

V druhé kapitole této práce si připomeneme základní teorii týkající se řad. Ve třetí kapitole představíme nezvyklý typ součtu, a to součet Cesarův. Na příkladech bude ukázáno, čím se od klasického součtu liší a v čem je zajímavý.

Poslední čtvrtá kapitola se bude věnovat zejména příkladům. Pomocí řad tam bude odvozena například hodnota Eulerova čísla.

# 1. Historie

Tam, kde není uvedeno jinak, jsou informace převzaty tak, jak je uvádí Edwards (1979).

Již ve starověku bylo známo, že konečnou posloupnost lze sečíst. S nekonečnými řadami[1] to však bylo o něco složitější. Dlouhou dobu se mělo za to, že takové řady jednoduše nelze sečíst. Tento názor plynul z faktu, že kdybychom se pokusili po jednotlivých členech sečíst jakoukoli nekonečnou řadu, nikdy se nedobereme výsledku. Takový přístup k nekonečným řadám však vedl k paradoxům. Velmi známými jsou v tomto ohledu aporie formulované v 5. století př. n. l. Zénonem. Zénonovy paradoxy proti pohybu jsou celkem čtyři, zde budou zmíněny první dva, jak je uvádí G. S. Kirk (2004).

První paradox říká, že pohyb nemůže existovat. Co se pohybuje, musí dojít do poloviny své dráhy, do čtvrtiny, předtím než dojde do poloviny, do osminy dřív než do čtvrtiny atd. Pokud se pohybující chce dostat do cíle, musí projít nekonečně mnoha body v konečném čase. To nelze, takže pohyb nemůže existovat.

Druhý paradox je podobný tomu prvnímu. Paradox tvrdí, že nejrychlejší běžec nemůže nikdy předstihnout ani toho nejpomalejšího tvora. Pronásledující musí nejprve dosáhnout bodu, kde svůj pohyb začínal pronásledovaný. Takže pronásledovaný musí být vždy o něco napřed před pronásledujícím.

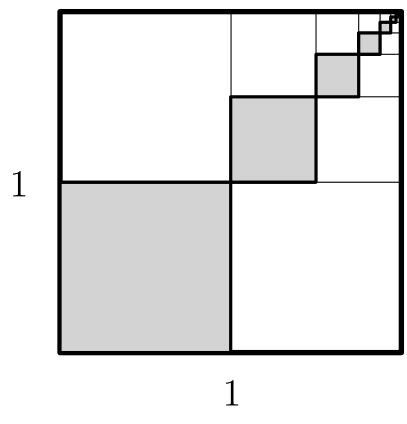
Řešením paradoxů je ukázat, že jimi popsané nekonečné řady lze sečíst a tento součet je konečný.

Jeden z prvních náznaků výpočtu součtu nekonečných řad se objevil už ve starověku. Provedl ho ve 3. století př. n. l. Archimédes. Jednalo se o řadu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^n},$$

kterou využil k výpočtu obsahu plochy pod parabolou. Důkaz byl obrázkový. V jednotkovém čtverci reprezentujeme jednotlivé členy řady jako menší čtverce tak, aby obsah odpovídal jejich hodnotě. Čtverce budeme postupně skládat na diagonálu, jak ilustruje obrázek 1.1.

[1] Co přesně součet nekonečné řady je, jakož i některé další v této kapitole používané pojmy, nadefinujeme v druhé kapitole.




Obrázek 1.1: Archimédův součet řady $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^n}$.

Podíváme-li se na čtverec reprezentující první člen řady, zjistíme, že má u obou stran, které nesousedí s hranicí velkého čtverce, volné místo, kam by bylo možné jej ještě jednou přimalovat. Výsledný obrazec by měl tvar podobný L. Z tohoto obrazce tvoří původní čtverec 1/3. Tento obrazec ve tvaru písmene L budeme nadále ignorovat a podíváme se na zbytek jednotkového čtverce. V něm jsou čtverce velikosti 1/16 a menší. Podíváme se na čtverec 1/16. U jeho obou stran, jež nesousedí s hranicí oblasti, která nás zajímá, taktéž nalezneme volné místo, kam by se tento čtverec mohl ještě vejít. Opět z této oblasti tvoří 1/3.

Podobně budeme pokračovat i nadále. Ukážeme, že každý čtverec má kolem sebe a u sebe oblast, ze které tvoří 1/3. Tyto oblasti postupně pokryjí celý jednotkový čtverec. Čtverce reprezentující posloupnost tedy tvoří 1/3 celku. Archimédes však formálně neposílal sumu do nekonečna. Řekové zastávali názor, že nekonečný počet částí znamená zároveň nekonečnou velikost. Aby svůj názor podpořili, používali argumenty ad absurdum.

Ve středověku se filosofové a matematikové nekonečnými řadami zabývali, zvláště pak zdánlivými paradoxy, které připomínaly Zénónovy apórie. Francouzkému biskupovi a učenci Mikuláši Oresme se ve 14. století podařilo dokázat kritérium na konvergenci geometrické posloupnosti a objevit postup na získání jejího součtu. Také jako první dokázal, že harmonická řada diverguje.

Oresme při důkazu začal tak, že uspořádal členy harmonické posloupnosti následujícím způsobem, jak uvádí Babb (2005):

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Takto uspořádanou žadu pak porovnal s řadou

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Každý člen druhé řady je menší nebo roven jemu odpovídajícímu členu řady harmonické. Druhá řada ale jde přepsat jako

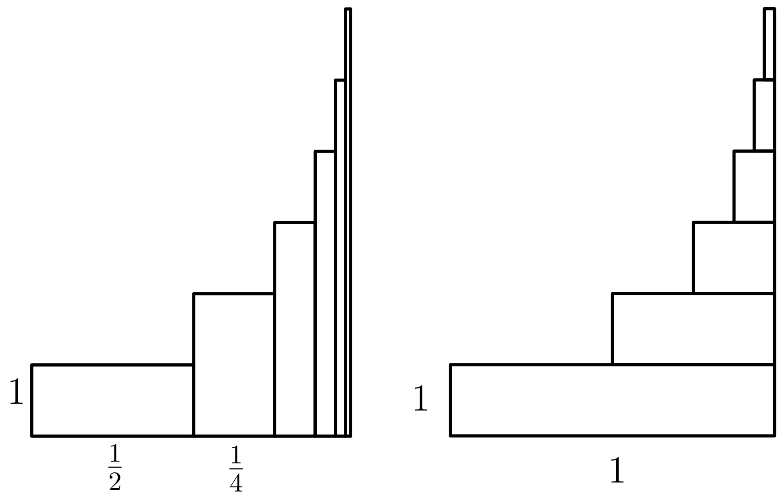
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

čímž dostaneme zjevně divergující řadu. Tedy i harmonická řada musí být divergující.

Oresme také vyřešil vyřešit následující úlohu: Mějme časový interval a bod pohybující se po dobu tohoto časového intervalu. První polovinu intervalu se bod pohybuje rychlostí jedna. Následující čtvrtinu intervalu se pohybuje rychlostí dva. Poté se bod bude osminu intervalu pohybovat rychlostí tři. Tímto způsobem se bude bod po dobu intervalu zrychlovat. Vzniká řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Řešení bylo provedeno graficky, jak uvádí Sunday A. Ajose (1994). Každý člen se zobrazí jako obdélník. Hodnota členu bude reprezentována jeho obsahem. Jedna ze stran obdélníku bude mít délku $1/2^n$, druhá strana bude mít délku n. Obdélníky naskládáme vedle se tak, aby strany s délkami $1/2^n$ tvořily úsečku. Vznikne schodovitý obrazec, jak je ukázáno v levé části obrázku 1.2.




Obrázek 1.2: Převoditelnost dvou řad

Následně tento obrazec rozdělíme na jiné obdélníky, než ze kterých byl původně poskládán. Nové obdélníky budou mít jednu stranu rovnoběžnou se stranami délek $1/2^n$, budou začínat na každém schodu a povedou vodorovně skrz celý obrazec. Toto rozdělení je znázorněno na obrázku 1.2. Obsahy vzniklých obdélníků budou odpovídat členům řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$, kde první člen bude 1. Obrazce jsou (až na rozdělení) shodné, tedy mají stejný obsah, jim odpovídající řady mají tedy i stejný součet.

Nově vzniklá řada je řada geometrická, měla tedy známý součet, a to 2. Původní řada má tedy také součet 2. Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

lze s pozdějšími poznatky sečíst i snadněji. Tento postup ukážeme ve čtvrté kapitole.

Po období, kdy se zkoumalo, jaký součet mají jednotlivé číselné řady, přichází v 17. století období, v němž se řeší řady, jež jsou závislé na nějaké proměnné.

Ještě před objevením diferenciálního a integrálního počtu odvodil matematik Nikolas Mercator řadu, která po něm byla pojmenována. Jedná se o mocninnou řadu, která vyjadřuje obsah plochy pod hyperbolou $y = 1/(1+x)$ od 0 do daného $x$ pro $x > 0$. Tato řada je

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Součet této řady je roven $\ln(x+1)$.

V 17. století po objevení diferenciálního a integrálního počtu byly řady ve tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sčítány pomocí integrace a derivace člen po členu. Bez důkazu se ale předpokládalo, že je taková operace matematicky korektní. Výsledkem derivace řady $f(x)$ je řada

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

To umožnilo výrazně snazší sečtení Mercatorovy řady, která, jak už bylo výše zmíněno, vyjadřuje obsah plochy pod hyperbolou $y = 1/(1+x)$ od 0 do $x$ pro $x > 0$. Po integraci geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

člen po členu vyjde již známá řada

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + c$$

Součtem geometrické řady

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

je $1/(x+1)$, což je právě derivace $\ln(x+1)$. Řada konverguje pro $|x| < 1$.

Důležitým krokem k uvedení řad závislých na proměnné do praxe byl Newtonův objev binomické řady v roce 1665. Binomická řada má tvar

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

kde $\alpha$ je reálné číslo, $|x| < 1$ a

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \dots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pomocí binomických řad lze například snadno odvodit, jak vypadají řady, jejichž součty jsou ve tvarech $(1-x)^3$ nebo $\sqrt{1-x}$.

Již mnoho století je znám algoritmus, kterým lze vypočítat přibližnou hodnotu odmocniny. Pokud chceme vypočítat odmocninu z $N$, je třeba nějaký první odhad hodnoty odmocniny, označme jej $y_0$. Pak získáme o něco lepší odhad $y_{n+1}$ dosazením do vzorce

$$y_{n+1} = y_n + e_n,$$

kde $e_n$ se spočítá jako

$$e_n = \frac{N - y_n^2}{2y_n}.$$

Newtona napadlo, že řada, které přísluší součet $\sqrt{1-x^2}$, by mohla jít pomocí tohoto algoritmu ověřit. Kvůli tomu, že ještě nebyl znám algoritmus dělení polynomů, si Newton výpočet $e_n$ zjednodušil na

$$\frac{N - y_n^2}{2}.$$

Ze vzorce vyjde polynom, ale jako $e_n$ použijeme vždy jen nejnižší mocninu. Ve svém výpočtu si postupně připisoval pod odmocňovaný polynom různé mezivýsledky podobně jako při písemném dělení. Této řadě nezivýsledků budeme říkat *ocas*.

Jako první odhad $y_0$ si zvolil číslo 1 a napsal ho za rovná se. Začal s výpočtem $e_0$ tak, že svůj odhad umocnil, tedy mu opět vyšla 1, kterou dal na začátek „ocasu,“ na řádek pod původní výraz.

Poté pokračoval s výpočtem $e_0$ podle výše uvedeného vzorce. Číslo 1, které mu již vyšlo, odečetl od výrazu $(1-x^2)$, jejž chtěl odmocňovat. Tím mu vyšel čitatel $e_0 = -x^2$. Napsal ho do „ocasu“ na řádek pod 1. Pro zjištění $e_0$ bylo třeba ještě vydělit číslem 2. Bylo jasné, že $e_0 = -x^2/2$, tedy že první aproximace odmocniny byla $y_1 = 1 - x^2/2$. Aproximaci $y_1$ napsal za rovná se.

Dále spočetl hodnotu $e_1$ opět podle výše uvedeného vzorce. První aproximaci odmocniny $1 - x^2/2$ bylo třeba umocnit a odečíst od odmocňovaného výrazu $(1 - x^2)$. Výsledek $x^4/4$ pak zapsal do nového řádku „ocasu.“ Tím byl známý čitatel $e_1$. $y_2$ se opět spočetlo tak, že se $x^4/4$ vydělilo 2, tím byl zjištěn člen $e_1 = x^4/8$. Třetí zpřesnění odhadu odmocniny je tedy $1 - x^2/2 - x^4/8$.

Podobným způsobem pokračoval Newton ve výpočtu dál. Vyšla přesně řada, jejíž součet je $\sqrt{1-x^2}$ podle binomické věty.

V ukázce dělení níže se v „ocasu“ objevují i další mezivýpočty, postup je však totožný s výše popsaným.

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots} \\
1 & & & & & \\
 & -x^2 & & & & \\
 & -x^2 & +x^4/4 & & & \\
 & & -x^4/4 & & & \\
 & & -x^4/4 & +x^6/8 & +x^8/64 & \\
 & & & -x^6/8 & -x^8/64\dots &
\end{array}
$$

Newton podobným způsobem objevil dělení polynomů. Věděl, že platí

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

A všiml si, že stejný výsledek vyjde, když budeme pracovat s polynomy při dělení podobně, jako pracujeme s delšími čísly.

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{1 : (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots} \\
1 & +x & & & & \\
 & -x & & & & \\
 & -x & -x^2 & & & \\
 & & x^2 & & & \\
 & & x^2 & +x^3 & & \\
 & & & -x^3 & & \\
 & & & -x^3 & -x^4 & \\
 & & & & -x^4\dots &
\end{array}
$$

V oblasti řad má Newton mimo jiné ještě na svědomí metodu inverze řady. Pokud máme řadu vyjadřující nějakou monotónní funkci, lze pomocí metody inverze řady získat funkci k ní inverzní. Tato metoda se nejlépe ukazuje na příkladu.

Mějme řadu vyjadřující plochu pod hyperbolou $y = \frac{1}{1+x}$, tedy

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Řekněme, že hledáme inverzní řadu ve tvaru

$$x = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots$$

Tato řada se má rovnat $x$. Dosadíme tedy za $x$ výše zmíněnou řadu.

$$\begin{aligned} y = &(a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots) - \frac{(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots)^2}{2} \\ &+ \frac{(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots)^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

Po převedení $y$ na druhou stranu dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = &- y + (a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots) - \frac{(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots)^2}{2} \\ &+ \frac{(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots)^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

$a_0$ je konstantní člen, a protože na druhé straně rovnice je nulový konstantní člen, tak $a_0 = 0$. Výsledek dosadíme do rovnice z které vycházíme.

$$0 = -y + (a_1y + a_2y^2 + \dots) - \frac{(a_1y + a_2y^2 + \dots)^2}{2} + \frac{(a_1y + a_2y^2 + \dots)^3}{3} - \dots$$

Abychom zjistili hodnotu $a_1$, dáme dohromady členy, kde je $y$ v první mocnině. Na levé straně je to 0, na pravé $-y + a_1y$.

$$0 = -y + a_1y$$

Po úpravě máme

$$a_1 = 1$$

Výsledek opět dosadíme do rovnice.

$$0 = -y + (y + a_2y^2 + \dots) + \frac{(y + a_2y^2 + \dots)^2}{2} + \frac{(y + a_2y^2 + \dots)^3}{3} - \dots$$

Abychom zjistili $a_2$, dáme dohromady členy s $y$ v druhé mocnině.

$$\begin{aligned} 0 &= a_2y^2 + \frac{y^2}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pokud bychom pokračovali dál tímto způsobem, dostali bychom postupně všechny hodnoty koeficientů v předpisu inverzní řady. Inverzní řada by nám vyšla

$$x(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

V původním Newtonově postupu se místo porovnávání používá dělení polynomů, s tím, že se jako výsledek bere nejnižší mocnina. Zbytek postupu je však stejný.

Newton také přišel na to, jak vypadají řady vyjadřující goniometrické funkce. Jako první odvodil funkci sinus. Věděl, že obsah oblasti $SPQR$ na obrázku 1.3 níže je

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \dots$$

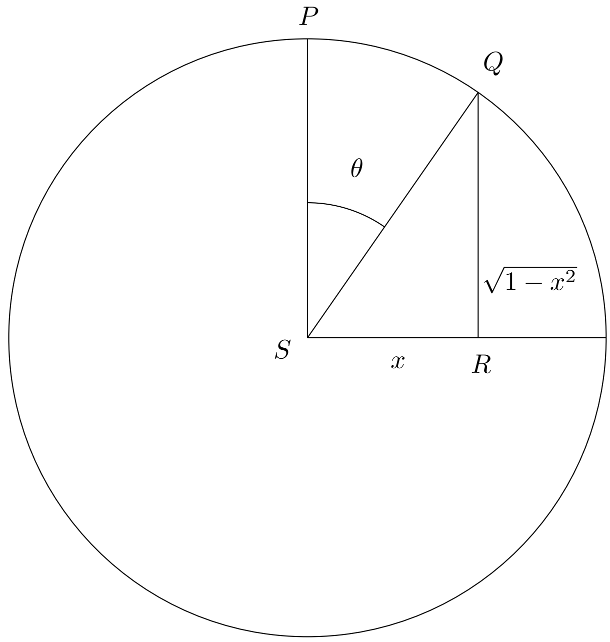
Obsah oblasti $PSQ$ se rovná rozdílu řady výše a $\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}$.

Nyní pokud bychom znali obsah dané kruhové výseče a chtěli zjistit pouze úhel, můžeme využít toho, že v jednotkové kružnici odpovídá úhel délce oblouku. A pro získání obvodu stačí obsah vynásobit dvěma. Je možné tedy napsat

$$\theta = 2(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \dots) - x\sqrt{1+x^2},$$
$$\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

Víme, že $x = \sin\theta$ . Pro získání sinu stačí tedy provést inverzi řady. Vyjde:

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots$$




Obrázek 1.3: Obrazec $SPQR$ v jednotkové kružnici

Jakmile byla odvozena řada pro sinus, snadno se odvodila řada pro cosinus jako

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \dots$$

Obecnější teorii týkající se řad závislých na nějaké proměnné publikoval Brook Taylor v roce 1715. Zjistil, že některé funkce $f(x)$ lze napsat jako řady, které mají tvar

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

# 2. Teoretický úvod

V této kapitole shrneme známé věty týkající se řad, z nichž některé se nám budou hodit v dalších částech práce. Nejprve je však nutné nadefinovat, co pojmem řada rozumíme.

**Definice 1.** *Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá* nekonečná řada*. Číslo $a_k$ nazýváme $k$-tým* členem řady*.*

Tato definice však nic neříká o tom, co je to součet řady. Asi nejpřirozenějším způsobem, jak řadu sečíst, je postupně sčítat její členy. Sečteme tedy prvních $n$ členů a jejich součet označíme jako $s_n$. Číslo $s_n$ nazveme částečným součtem.

Abychom se přiblížili o krok blíž k výsledku, k částečnému součtu $s_n$ přičteme člen $a_{n+1}$. Tím dostaneme další číslo, které označíme $s_{n+1}$. K novému číslu přičteme $a_{n+2}$ a dostaneme tak $s_{n+2}$. Takto vytvoříme novou posloupnost, posloupnost částečných součtů, $s_1, s_2, s_3, \dots$ Součet řady potom bude roven limitě posloupnosti $\{s_n\}$. Formálně tedy:

**Definice 2.** *Mějme řadu*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

*Pro všechna přirozená čísla $n$ nazýváme číslo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $n$-tým částečným součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ rozumíme limitu posloupnosti $\{s_n\}$, pokud existuje.*

- *Je-li součtem řady reálné číslo, potom říkáme, že řada konverguje.*
- *Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n$ nevlastní, řada diverguje.*
- *Neexistuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n$, řada osciluje.*

Pro součty řad platí následující, jak i s důkazem uvádí Kopáček (1998):

**Věta 1.** *Nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ a řada konverhuje.*

*Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $c \in \mathbb{R}$. Potom $c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ a součet existuje.*

V předchozí kapitole jsme uvedli příklad jedné významné řady, řady geometrické. Geometrická řada je definována následovně:

**Definice 3** (Geometrická řada)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$,kde $n$ a $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se nazývá* geometrická řada.

Ukážeme, jak lze odvodit vzorec pro součet geometrické řady. Začneme nejprve s jedním konkrétním příkladem, řadou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

V tomto případě platí $a = 1/2$ a $q = 1/2$. $n$-tý částečný součet této řady je roven

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Když tuto hodnotu vynásobíme 1/2 a odečteme od původní hodnoty, dostaneme

$$\begin{aligned}
S_n - \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}}, \\
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}) - \frac{1}{2^{n-1}}, \\
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}, \\
S_n &= 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Abychom zjistili, k čemu řada konverguje, musíme spočítat limitu posloupnosti částečných součtů pro $n$ jdoucí do nekonečna.

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2}^n = 1.$$

Posloupnost částečných součtů konverguje, proto konverguje i řada. Tento postup bychom mohli zobecnit. Zjistili bychom, že geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Geometrická řada je příkladem řady mocninné. Mocninné řady jsou nekonečné řady, které jsou definovány následovně:

**Definice 4.** Mocninná řada *je nekonečná řada ve tvaru:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

*kde $c$ je konstanta, $a_n$ je koeficient $n$-tého členu a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.*

Pro mocninou řadu platí věta, kterou uvádí Kopáček (1998).

**Věta 2.** *Pro mocninou řadu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ existuje $R \in (0,\infty)$ takové, že pokud je $|(x-c)| < R$ tak mocninná řada konverguje absolutně a pokud je $|(x-c)| > R$ tak mocninná řada diverguje.*

**Definice 5.** *Číslo $R$ z předchozí věty se nazývá* poloměr konvergence.

U mocninych řad navíc platí následující věta, kterou uvádí Kopáček (2007):

**Věta 3** (Abelova věta)**.** *Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je mocninná řada s reálnými koeficienty $a_n$ a poloměrem konvergence $R = 1$. Předpokladejme, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $f(x)$ je spojitá zleva v $x = 1$.*

Ověřovat u každé jednotlivé řady konvergenci z definice tak, jak jsme to právě ukázali u geometrické, by bylo náročné. Proto existují kritéria, která nám umožňují poznat, zda řada konverguje nebo nekonverguje o něco jednodušeji. První z takových vět, která pomáhá rychle zjistit, jestli řada vůbec může konvergovat, je nutná podmínka konvergence, kterou uvádí Kopáček (1998).

**Věta 4** (Nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, potom je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Pokud řada, u které se snažíme určit, jestli konverguje, nesplňuje $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, tak rovnou víme, že není konvergentní. Neznamená to však, že každá řada, která podmínku splňuje, je konvergentní. Tato věta platí, protože člen posloupnosti $a_k$ můžeme vyjádřit jako rozdíl částečných součtů $s_{k+1}$ a $s_k$. Vzhledem k tomu, že limita částečných součtů $s_{k+1}$ a $s_k$ musí být stejná, tak rozdíl $s_{k+1} - s_k$ musí být v limitě 0. Z toho vyplývá, že $\lim_{k\to\infty} a_k$ musí být také 0.

Užitečná je i následující věta. Umožňuje identifikovat řady, které si jsou velmi podobné, a tím si zjednodušit práci.

**Věta 5.** *Pokud pro dvě řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ platí, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $\forall k > k_0$ je $a_k = b_k$, potom $a_k$ konverguje právě tehdy, když $b_k$ konverguje.*

Větu uvádí například Kopáček (1998). Věta slovy říká, že pokud budeme mít dvě řady, které jsou od nějakého indexu dál stejné, budou se z hlediska konvergence chovat stejně. Nebo jinak, chceme-li zjišťovat konvergenci, můžeme prvních několik členů beztrestně vynechat.

Nejprve uvedeme kritéria pro řady, jichž členy jsou nezáporné. Definice řad s nezápornými členy je následující:

**Definice 6.** *Řadou s nezápornými členy rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ takovou, že $\forall k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \geq 0$.*

Oproti řadám s obecnými členy platí následující věta, kterou uvádí například Kopáček (1998):

**Věta 6.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, potom součet této řady vždy existuje.*

Důkaz vychází z toho, že částečné součty tvoří monotónní posloupnost, u které víme, že má vždy limitu.

Další kritérium, které zde uvedeme, jež se vztahuje na řady s nezápornými členy, bude kritérium srovnávací. K jeho využití musíme už o některých řadách vědět, jestli konvergují, nebo divergují. Pokud to ale víme, tak může být srovnávací kritérium velmi užitečné.

**Věta 7** (Srovnávací kriterium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí, že $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom*

- *pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a*
- *pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Porovnáním dvou řad se zabývá i následující věta, jejíž důkaz vychází z věty předchozí:

**Věta 8** (Limitní srovnávací kriterium)**.** *Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řada, kde $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$.*

*Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \in (0,\infty)$, potom obě řady konvergují, nebo obě řady divergují.*

K využití věty není třeba, aby mezi porovnávanými řadami platila určitá nerovnost, jenom se v limitě musí chovat podobně. Srovnávací kritérium i limitní srovnávací kritérium uvádí Kopáček (1998). Příkladem může být dvojice řad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$. Fakt, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konverguje, budeme považovat za známý. Bude nás zajímat, zda konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$. Pokud použijeme srovnávací kritérium, vyjde výraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = 1.$$

$1 \in (0,\infty)$, tedy je jasné, že obě řady konvergují. Řadě $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ se říká teleskopická řada.

Dalším kritériem je kritérium odmocninové, jež uvádí třeba Kopáček (1998).

**Věta 9** (Odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

- *Jestliže existuje $q \in (0,1)$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, řada konverguje.*
- *Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
- *Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Odmocninové kritérium rozhoduje konvergenci u řad s nezápornými členy, u nichž $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ nebo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Nerozhodnuté zůstávají řady, kde $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odmocninové kritérium se obvykle používá u řad obsahujících $n$-té mocniny. Příkladem může být řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Po aplikaci odmocninového kritéria vychází:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Abychom zjistili, zda původní řada konverguje, je třeba výsledek ještě porovnat s číslem 1:

$$\frac{1}{2} < 1.$$

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/2^n$ konverguje.

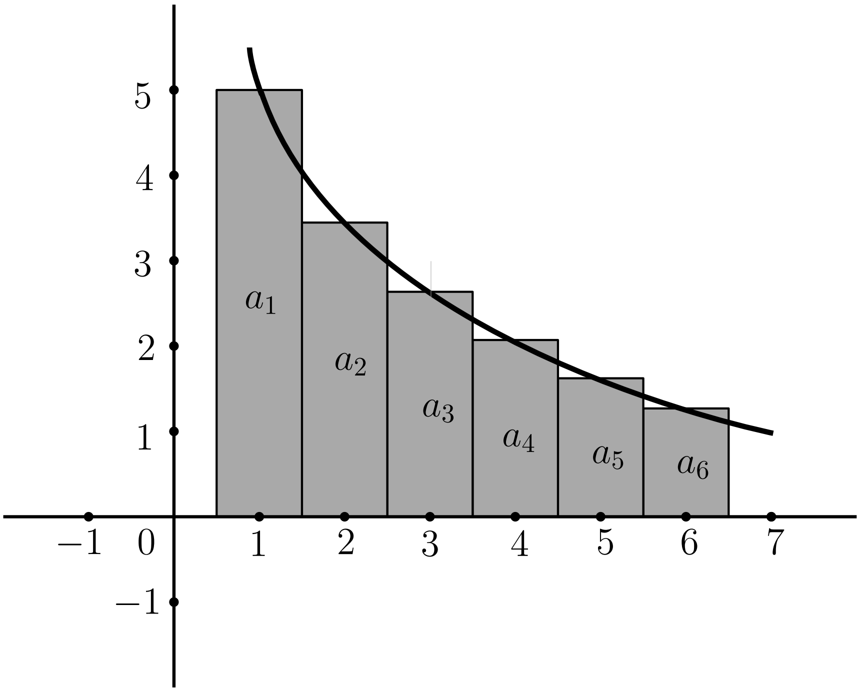
**Věta 10** (Podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy, kde $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n > 0$.*

- *Existuje-li $q \in (0,1)$ takové, že $a_{n+1}/a_n \leq q$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
- *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
- *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Nerozhodnuté zůstávají řady, u kterých je $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. U těch však může pomoci Raabeovo kritérium.

**Věta 11** (Raabeovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

- *Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
- *Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*




Obrázek 2.1: Grafické znázornění integrálního kriteria

Raabeovo kritérium je silnější než kritérium podílové, ale pracnější na použití. Příkladem může být řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Nejprve si ukážeme použití podílového kritéria.

Podle podílového kritéria bychom měli zjistit, čemu se rovná $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Podílové kritérium nám tedy nepomůže. Dále vyzkoušíme Raabeovo kritérium.

U Raabeova kriteria zjišťujeme, čemu se rovná výraz $\lim_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1)$. Po dosazení nám vyjde

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left( \frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right).$$

V dalším kroku roznásobíme závorku $(n+1)^2$ a odečteme 1 od zlomku.

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{n^2+2n+1}{n^2} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{2n+1}{n^2} = 2$$

Protože $2 > 1$, řada konverguje.

Pro zavedení dalšího kritéria pro řady s nezápornými členy si jako první ukážeme grafickou představu. Jednotlivé členy řady zobrazíme jako body na funkci, která je uvedená v sumě. Sečtení řady pak znamená sečtení obshů sloupečků o šířce jedna a výšce rovné odpovídajícímu členu. Popisovaná situace je vidět na obrázku 2.1. Jednotlivé členy jsou označeny jako $a_n$.

Bylo by možné očekávat, že pokud je plocha pod grafem funkce konečná, je konečný i součet řady znázorněný obdélníky.

Nemuselo by tomu tak být vždy. Kdybychom měli například řadu

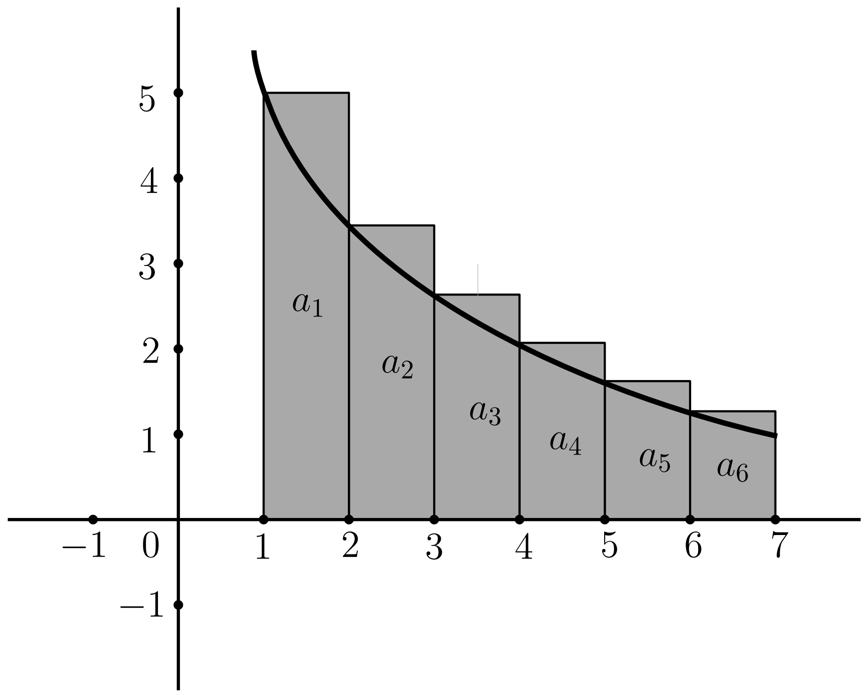
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin\left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) + 1 \right),$$

jednotlivé členy budou vždy nuly, ale plocha pod křivkou jde k nekonečnu. Tomuto a podobným případům lze snadno zabránit, když po funkci, se kterou pracujeme, budeme navíc požadovat, aby byla nezáporná a nerostoucí.

Integrální kritérium, které uvádí Kopáček (1998), zní následovně:

**Věta 12** (Integrální kritérium)**.** *Nechť $f : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R}$ je funkce nezáporná a nerostoucí. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.*

Implikace oběma směry lze lehce znázornit obrázkem. Tvrzení, že konvergence řady implikuje konvergenci integrálu, je znázorněno na obrázku 2.2. Značení je stejné jako na obrázku 2.1. Opačný směr, tedy že konvergence integrálu implikuje konvergenci řady, je znázorněn na obrázku 2.3. Značení je stejné jako na obrázcích 2.1 a 2.2.

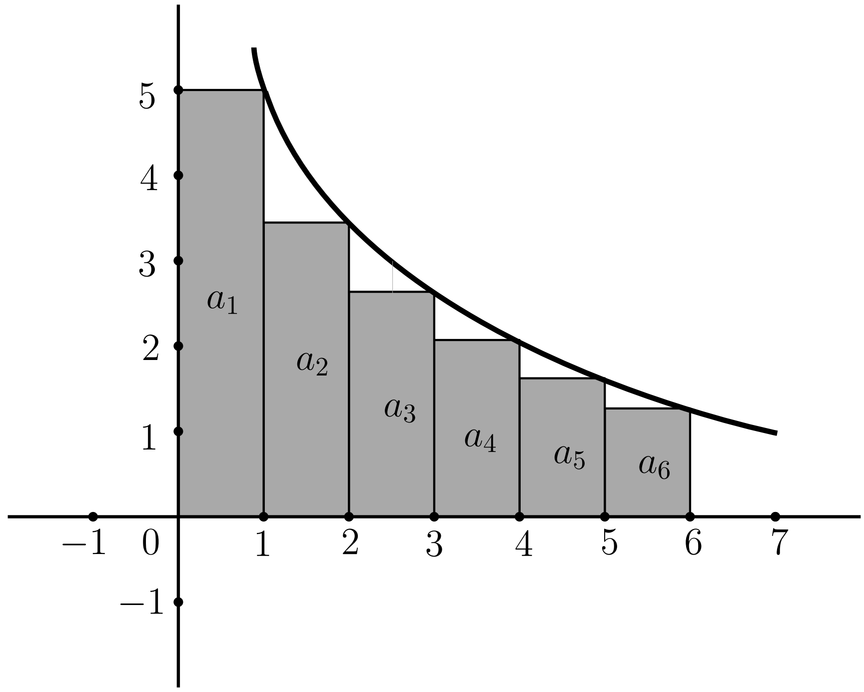



Obrázek 2.2: Konvergence řady implikuje konvergenci integrálu

Další věty se budou týkat řad s kladnými i zápornýmii členy. Následující zde uvedená věta se týká spojitosti mezi řadami s nezápornými členy a řadami se členy obecnými.

**Věta 13.** *Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, potom je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Takže pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ s nezápornými členy, potom konverguje i řada s obecnými členy, která vznikla z řady původní přidáním mínusů




Obrázek 2.3: Konvergence integrálu implikuje konvergenci řady

k některým členům. Pro některé řady tedy lze využít i kritéria vztahující se k řadám s nezápornými členy. Pro podobnou konvergenci takovýchto řad zavedeme pojem absolutní konvergence.

**Definice 7** (Absolutní konvergence a relativní konvergence)**.** *Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* absolutně konvergentní*, jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*.*

*Pokud řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, ale řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverguje, říkáme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* relativně*.*

Z definice je vidět, že každá konvergující řada s nezápornými členy konverguje absolutně. Relativně mohou konvergovat jen řady, které nejsou zároveň řadami s nezápornými členy.

**Věta 14** (Leibnizovo kritérium konvergence)**.** *Buď* $\{a_n\}$ *monotonní posloupnost a* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}a_n$ *konverguje.*

Abychom tuto větu mohli použít, musí se u jednotlivých členů střídat znaménka a posloupnost členů bez těchto znamének musí být monotónní a splňovat nutnou podmínku konvergence. Příkladem takové řady může být řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}.$$

**Věta 15** (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel a* $\{b_n\}$ *je monotónní posloupnost.*

- *Pokud je posloupnost* $\{b_n\}$ *omezená a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$*.*
- *Pokud je posloupnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *omezená a navíc* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*, potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

U některých řad by mohlo být lákavé změnit pořadí jednotlivých členů. Například pokud bychom měli řadu

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \dots,$$

rádi bychom všechny členy na sudých pozicích posunuli o jeden člen dopředu. Pak už bychom byli schopni určit konvergenci. Tím, jestli a kdy podobné úpravy můžeme udělat, se zabývá následující úsek práce.

**Definice 8** (Přerovnání)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je bijekce. Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *nazveme* přerovnáním *řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Přerovnáním se zabývají další dvě věty, které uvádí Kopáček (1998). Pro přerovnání řad, které konvergují absolutně, platí následující věta:

**Věta 16.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je bijekce. Potom absolutně konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *a má stejný součet jako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řady, které konvergují relativně, bohužel livovolně přerovnávat nemůžeme, naopak pro ně platí následující věta:

**Věta 17.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relativně. Potom pro každé* $s \in \mathbb{R}$ *existuje přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$*, takové, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = s$*, a zároveň existují taková přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *diverguje a také taková přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *osciluje.*

Relativně konvergentní řada tedy má různé součty podle toho, jak ji přerovnáme. Je relativní vzhledem k přerovnání. Řada konvergující absolutně má stejný součet bez ohledu na přerovnání.

Zajímavým případem řady je řada Taylorova. Pro práci s funkcemi by se nám mohlo hodit, kdybychom mohli funkci v určitém bodě nahradit polynomiální řadou tak, aby byla na okolí tohoto bodu původní funkci co nejpodobnější. Jak něco takového udělat?

Pokud má být řada funkci co nejpodobnější, měla by procházet nějakým bodem, kterým prochází i daná funkce. Jako první aproximaci tedy můžeme vzít konstantu. Bod, v jehož okolí funkci aproximujeme, bude později nazýván středem.

Jestli má být řada funkci co nejpodobnější, měla by mít ve výše zmíněném bodě stejný sklon, tedy stejnou první derivaci v daném bodě. Tím je určený druhý člen řady, jenž obsahuje první mocninu proměnné. Podobně by měla i stejně „zatáčet" v daném bodě, tedy by měly mít řada i funkce stejnou druhou derivaci v daném bodě. Tato podmínka určuje třetí člen řady, který obsahuje proměnnou v druhé mocnině. Podobným způsobem se postupuje dál.

Pokud budeme mít konečně mnoho členů, budeme výraz nazývat Taylorovým polynomem, a pokud nekonečně mnoho, bude se výraz nazývat Taylorova řada.

Jak uvádí Kopáček (1998), Taylorova řada je definovaná následujícím způsobem:

**Definice 9** (Taylorova řada)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$ *a* $f$ *je funkce, která má v bodě* $a$ *derivace všech řádů. Potom řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

*nazveme Taylorovou řadou funkce* $f$ *o středu* $a$.

Při takovéto aproximaci navíc lze zjistit jak moc se řada skutečně podobá aproximované funkci pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, kde $a < x$ a zároveň $f$ je reálná funkce, která má na uzavřeném intervalu $\langle a, x\rangle$ v každém bodě vlastních alespoň $(n+1)$ derivací. Potom existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že: $f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{(n+1)}$, kde $T_n(x)$ je prvních $n$ členů Taylorovy řady. Výraz $f(x) - T_n(x)$ se označuje jako $R_n(x)$.

Příkladem Taylorovy řady je například řada funkce $e^x$. Tato řada je bez ohledu na střed rovna

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

# 3. Cesarova sčítací metoda

Ve druhé kapitole jsme si ukázali standardní způsob, jak definovat součet řady. Spočíval v tom, že jsme z členů řady vytvořili částečné součty a limita těchto částečných součtů byl výsledný součet řady. V této kapitole zavedeme součty řad ještě jiným způsobem. Informace k této kapitole byly čerpány z Hardy (1949).

Pokud bychom měli například řadu

$$1, -1, 1, -1, 1, -1 + \dots,$$

podle definice součtu řady nám vyjde, že řada nemá součet. Částečné součty jsou

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

Limity sudých a lichých členů jsou různé, proto posloupnost částečných součtů nemá limitu, a ani původní řada nemá součet. Mohli bychom tedy chtít změnit definici součtu řady tak, aby výše uvedená řada součet měla a aby byl někde mezi 0 a 1. Toho by se dalo docílit třeba postupným průměrováním částečných součtů. Vezmeme si tedy posoupnoost, jejíž $n$-tý člen je průměrem prvních $n$ částečných součtů:

$$\frac{1}{1}, \frac{1+0}{2}, \frac{1+0+1}{3}, \frac{1+0+1+0}{4}, \dots$$

Z této posloupnosti spočteme limitu v nekonečnu. Jinými slovy nadefinujeme součet následovně:

**Definice 10.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada a nechť*

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

*je její $k$-tý částečný součet. Potom řekneme, že řadu* $\sum_{n=1}^{k} a_n$ *je možné* cesarovsky sečíst *právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} = A,$$

*kde $A \in \mathbb{R}$. Číslo $A$ nazveme* Cesarovým součtem *řady.*

Použití této definice demonstrujeme na příkladu uvedeném výše. Dosazením do definice zjistíme, že Cesarův součet řady je roven

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}.$$

Spočteme posloupnost částečných součtů posloupnosti částečných součtů, abychom získali čitatele. Ta vypadá jako

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots$$

Tím máme čitatel limity. Posloupnost jmenovatelů bude

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

Rozdělíme si posloupnost

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \dots$$

na sudé a liché členy. Pokud budou mít stejnou limitu, znamená to, že i celá posloupnost má tutéž limitu. To plyne jednoduše z definice limity posloupnosti.

$n$-tý člen posloupnosti lichých členů bude

$$\frac{n}{2n-1}$$

a jejich limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

$n$-tý člen posloupnosti sudých členů bude

$$\frac{n}{2n},$$

limita pro sudé členy posloupnosti je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Obě posloupnosti mají stejnou limitu. Cesarův součet existuje a je roven 1/2. Tento výsledek odpovídá intuici, že součet řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, pokud existuje, by měl být mezi 1 a 0.

Bylo by pěkné, kdyby všechny řady, které lze sečíst standardně, šly sečíst i cesarovsky, a to se stejným součtem. Toto přání nyní zformulujeme jako větu a dokážeme ji.

**Věta 18.** *Nechť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných čísel $s_k$ mající limitu a nechť $L \in \mathbb{R}^*$ je limita této posloupnosti. Potom posloupnost, jejíž členy jsou $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$, má také limitu a tato limita je rovna $L$.*

*Důkaz.* Pro $L \in \mathbb{R}$: Víme, že $s_n \to L$, takže $\forall \varepsilon > 0\, \exists \hat{n}_0\, \forall n > \hat{n}_0 : |s_k - L| < \varepsilon/2$. Mějme $\varepsilon > 0$, potom $\exists \hat{n}_0 \forall n > \hat{n}_0 : |s_k - L| < \varepsilon/2$.

Označme $K = \sum_{k=1}^{\hat{n}_0} |s_k - L|$, pak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - L\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k - L)\right| &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\hat{n}_0}(s_k - L)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=\hat{n}_0+1}^{n}(s_k - L)\right| \le \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\hat{n}_0}|s_k - L| + \frac{1}{n}\sum_{k=\hat{n}_0+1}^{n}|s_k - L| \le \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\hat{n}_0}|s_k - L| + \frac{n-\hat{n}_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \le \\
&\le \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Chceme, aby $\frac{K}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, aby byl celý výraz pod $\varepsilon$. To bude platit, když bude $n > \frac{2K}{\varepsilon}$. Volme tedy $n_0 > \max\{\frac{2K}{\varepsilon}, \hat{n}_0\}$. Potom $\frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Výraz $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_n \to L$.

Zbývá vyšetřit případ, kdy limita L je nevlastní, BÚNO $+\infty$: Víme, že $s_n \to \infty$, takže $\forall D > 0\, \exists \hat{n}_0\, \forall n > \hat{n}_0 : s_n > 2D$.

Mějme $D$, potom $\exists \hat{n}_0 \in \mathbb{N} \forall n > \hat{n}_0 : s_n > 2D$.

Označme $K = \sum_{k=1}^{\hat{n}_0}(s_k - D)$, pak

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - D &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\hat{n}_0}(s_k - D) + \frac{1}{n}\sum_{k=\hat{n}_0+1}^{n}(s_k - D) \geq \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\hat{n}_0}(s_k - D) + \frac{n-\hat{n}_0}{n}D = \frac{K + (n-\hat{n}_0)D}{n}.\end{aligned}$$

Chceme, aby výraz $\frac{K+(n-\hat{n}_0)D}{n}$ byl větší než 0. To bude platit, pokud $n \geq -\frac{K}{D} + \hat{n}_0$.

Volme $n_0 = \max\{\hat{n}_0, -\frac{K}{D} + \hat{n}_0\}$.

□

Dále ověříme, zda se Cesarův součet při sčítání a násobení konstantou chová stejně jako standardní součet.

**Věta 19.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má Cesarův součet a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ má součet a tento součet je roven $\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .*

*Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají Cesarův součet, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ má Cesarův součet a tento součet je roven $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

*Důkaz.* V tomto důkazu použijeme větu o aritmetice limit.

První tvrzení předchozí věty:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n &= \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{k}\alpha a_n}{m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}\alpha s_k}{m} = \\ &= \lim_{m\to\infty}\alpha\frac{\sum_{k=1}^{m}s_k}{m} = \alpha\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}s_k}{m} = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n\end{aligned}$$

V důkazu druhého tvrzení předchozí věty si částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ označíme $z_n$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{k}(a_n + b_n)}{m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}(s_k + z_k)}{m} = \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}s_k}{m} + \frac{\sum_{k=1}^{m}z_k}{m}\right) = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}s_k}{m} + \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}z_k}{m} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\end{aligned}$$

□

Cesarův součet má oproti klasickému i některé odlišné vlastnosti. Pokud k posloupnosti přidáme nuly, můžeme tím změnit součet. Příkladem může být řada

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \dots$$

Částečné součty řady jsou

$$1,1,0,1,1,0,1,1,0,\dots$$

Pokud chceme získat čitatele výrazu $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_n/n$, musíme z částečných součtů opět zkonstruovat částečné součty.

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \dots$$

Jmenovatelé budou opět rovni

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

Teď spočteme limitu posloupnosti. Nejprve posloupnost rozdělíme na posloupnosti tři. Rozdělovat budeme podle zbytku indexu po dělení třemi.

Posloupnost, do které vybíráme členy z původní posloupnosti tak, že pokud vezmeme pořadí daného členu a vydělíme ho třemi, vyjde zbytek jedna, zní:

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{7}{10} + \dots$$

V čitateli jsou lichá čísla a ve jmenovateli čísla, která po vydělení třemi dávají zbytek jedna.

Hledaný předpis je

$$\frac{2n-1}{3n-2}$$

a limita ze členů daných předpisem výše:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3}.$$

Členy, jejichž pořadí dává zbytek dva po dělení třemi, jsou:

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{5} + \frac{6}{8} + \frac{8}{11} + \dots$$

V čitateli jsou sudá čísla, ve jmenovateli čísla, která po dělení třemi dávají zbytek dva. Hledaný předpis pro členy této vybrané podposloupnosti je

$$\frac{2n}{3n-1}$$

a jeho limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Členy, jejichž pořadí je dělitelné třemi, jsou:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{6} + \frac{6}{9} + \frac{8}{12} + \dots$$

V čitateli jsou sudá čísla, ve jmenovateli čísla dělitelná třemi.

Předpis pro vybranou podposloupnost je

$$\frac{2n}{3n}.$$

Limita ze členů daných přepisem výše je rovna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Každá z vybraných podposloupností, které dohromady obsahují všechny členy posloupnosti původní, má limitu 2/3. Proto má řada Cesarův součet 2/3. Vzhledem k tomu, že tatáž řada bez nul měla součet 1/2 a po přidání nul má součet 2/3, je vidět, že není možné nuly libovolně odebírat a přidávat.

U Cesarova součtu také není možné libovolně přidávat závorky, a to ani u řad, které cesarovský součet mají. Vezměme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Do ní přidáme závorky tak, abychom dostali

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

Po uzávorkování vyjde řada, která má jako členy samé nuly. Posloupnost částečných součtů bude také obsahovat samé nuly. Klasický součet posloupnosti, která obsahuje pouze nuly, je roven nule. I Cesarův součet tedy musí být nula. Už dříve jsme ale ověřili, že Cesarův součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ je 1/2.

U Cesarova součtu není možné libovolně přerovnávat členy, a to ani u řad, které cesarovský součet mají. To budeme demonstrovat na řadě

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Když využijeme linearitu, platí jistě

$$-A = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}.$$

Pravá strana je zároveň přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Vzhledem k tomu, že $A$ je nenulové, $A \neq -A$ a přerovnání řady tedy nemá stejný součet jako řada samotná.

Co kdybychom chtěli sečíst řadu

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots?$$

Pokud aplikujeme klasický součet, hledáme limitu posloupnosti částečných součtů. Posloupnost částečných součtů je

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4 \dots$$

Liché členy jdou do $+\infty$ sudé členy jdou do $-\infty$. Limita neexistuje. Klasickým součtem tuto řadu sečíst nemůžeme. Pokusíme se ji tedy sečíst cesarovsky. Vytvoříme si tedy částečné součty z částečných součtů, abychom získali čitatele výrazu $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} s_n}{n}$. Ti jsou popořadě rovni

$$1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$$

Teď si rozdělíme posloupnost na sudé a liché členy. Posloupnost sudých čelnů bude

$$\frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{6}, \dots$$

Je vidět, že posloupnost sudých členů jde k nule. Posloupnost lichých členů je

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots,$$

a předpis pro liché členy posloupnosti tedy je

$$\frac{n}{2n-1},$$

a limita těchto členů je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Limity podposloupností se nerovnají, tedy Cesarův součet neexistuje. Nám by se ale líbilo, kdyby šel Cesarův součet dál zobecnit tak, aby i takováhle řada šla sečíst. Takové zobecnění skutečně existuje. Předtím, než si ho představíme, je ale nutné zavést nové značení.

**Definice 11.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada. Potom položíme* $A_n^{-1} = a_n$*, a dále pro všechna* $\alpha \in \mathbb{N}_0$ *nadefinujeme*

$$A_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1}.$$

*Číslu* $A_n^{\alpha}$ *budeme říkat* $n$-tý částčný součet řádu $\alpha$.

Všimneme si, že členy $A_n^0$ jsou vlastně standardní částečné součty a $A_n^1$ jsou částečné součty částečných součtů, se kterými jsme se setkali již v definici Cesarova součtu. To znamená, že máme-li řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, je její standardní součet roven $\lim_{n\to\infty} A_n^0$ a cesarovský $\lim_{n\to\infty} A_n^1/n$.

V nadcházející části budeme pracovat s řadou, pro jejíž $n$-tý člen platí $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

V Cesarově součtu jsme vycházeli z toho, že jsme vzali členy posloupnosti částečných součtů a nějakým způsobem jsme je zprůměrovali. Co kdybychom je ale zprůměrovali trochu jiným způsobem?

Vezměme posloupnost částečných součtů z částečných součtů, tedy posloupnost se členy $A_n^1$. Ta je rovna $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ Znovu ji vysčítejme. Dostaneme posloupnost členů $A_n^2$, tedy

$$1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, \dots$$

V tuto chvíli jsme tedy členy posloupnosti sčítali již potřetí. Poprvé to bylo na klasický součet, podruhé na cesarovský a potřetí teď.

Teď je třeba zjistit, jak vypadá posloupnost, pomocí které bude možné posloupnost $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ průměrovat. Aritmetický průměr počítáme pomocí zlomku, v jehož čitateli je hodnota součtu průměrovaných členů a ve jmenovateli jejich počet.

My tedy chceme zjistit, kolik členů z posloupnosti částečných součtů $\{A^0\}_{n=1}^{\infty}$, v tomto případě $1, -1, 2, -2, 3, -3 + \dots$, se sečetlo na daný člen posloupnosti $\{A^2\}_{n=1}^{\infty}$. Proto rozebereme, jak jsme došli k hodnotám jednotlivých členů posloupnosti $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$, tedy $1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, \dots$

1. člen: $1 = \quad 1.$

U prvního členu jsme použili 1 člen posloupnosti částečných součtů řady.

2. člen: $1 = \quad 1 \qquad +1-1.$

U druhého členu jsme použili 3 členy posloupnosti částečných součtů řady.

3. člen: $3 = \quad 1 \qquad +1-1 \qquad +1-1+2.$

U třetího členu jsme použili 6 členů posloupnosti částečných součtů řady.

4. člen: $3 = \quad 1 \qquad +1-1 \qquad +1-1+2 \qquad +1-1+2-2.$

U čtvrtého členu jsme použili 10 členů posloupnosti částečných součtů řady.

5. člen: $6 = \quad 1 \qquad +1-1 \qquad +1-1+2 \qquad +1-1+2-2 \qquad +1-1+2-2+3$

U pátého členu jsme použili 15 členů posloupnosti částečných součtů řady.

Vznikla nám tedy nová posloupnost členů, které bychom měli mít ve jmenovateli, jestliže chceme průměrovat:

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

To znamená, že náš zobecněný Cesarův součet řady $\sum a_n$ bude roven limitě posloupnosti

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{10} + \frac{6}{15} \ldots$$

Abychom mohli spočítat limitu, musíme znát vyjádření jmenovatele. Posloupnost $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ je zároveň posloupnost částečných součtů řady

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Tu lze vyjádřit jako

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Čitatel tvoří ta samá posloupnost jako jmenovatel, jen se každý člen dvakrát opakuje:

$$1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, \ldots$$

Pro počítání limity rozdělíme posloupnost na sudé a liché členy.

Předpis pro čitatele lichých členů známe, zní

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

U jmenovatele pracujeme se stejnou řadou jako u čitatele, ale chceme z ní jen každý lichý člen: $1, 6, 15, \ldots$. Předpis pro jmenovatel zní

$$\frac{(2n-1)((2n-1)+1)}{2}.$$

Předpis pro liché členy je tedy

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(2n-1)((2n-1)+1)}{2}}.$$

Limita bude

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(2n-1)((2n-1)+1)}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Pro sudé členy bude výpočet podobný jako pro liché, jen ve jmenovateli chceme mít sudé členy posloupnosti $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$, tedy $3, 10, 21, \ldots$. Takže do čitatele napíšeme místo $(2n-1)$ jen $2n$. Předpis pro sudé členy bude

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}},$$

a jeho limita v nekonečnu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Pokud pokud je tedy zobecněný cesarovský součet tak, jak jsme ho použili, korektní, je hodnota součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rovna $\frac{1}{4}$. Pro korektnost budeme požadovat, aby se hodnota zobecněného Cesarova součtu rovnala hodnotě Cesarova součtu, je-li tato hodnota definována. Proto představíme následující větu, a naznačíme myšlenku jejího důkazu:

**Věta 20** (Stolzova-Cesarova)**.** *Nechť* $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti a nechť* $\forall b_n > 0$ *a* $lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

*Jestliže* $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$*,* $L \in \mathbb{R}^*$ *potom i* $lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} = L$*.*

Důkaz lze provést tak, že spočteme horní a dolní odhad čitatele pomocí předpokladu věty, a dál bude postup obdobný, jako v důkazu první věty této kapitoly. Detailně ho popisuje například Cesàro (1888).

S využitím této věty je možné zavést i vyšší řády Cesarova součtu. Ty zavedeme tak, že spočteme částečné součty příslušného řádu a vydělíme je posloupností, která udává, kolik členů včetně násobnosti je obsaženo v příslušném částečném součtu. Posloupnost jmenovatelů bude vždy nějaká posloupnost částečných součtů posloupnosti $1, 0, 0, 0, 0, \ldots$ Cesarův součet obecného řádu tedy můžeme zavést následovně:

**Definice 12.** *Nechť* $\sum_n = 1^{\infty} a_n$ *je řada a* $\alpha$ *reálné číslo, potom*

*Potom* Cesarův součet $\alpha$-tého řádu*, kde* $\alpha \in \mathbb{N}_0$ *definujeme jako:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^{\alpha}}{E_n^{\alpha}},$$

*kde* $E_n^{\alpha}$ *je n-tý částečný součet* $\alpha$*-tého řádu posloupnosti* 1,0,0,0,0,0, …

Protože se s částečnými součty řady $1, 0, 0, 0, 0, \ldots$ špatně dělají limity, pokud neznáme předpis, je dobré si všimnout, že tytéž posloupnosti se nacházejí v Pascalově trojúhelníku, jako je naznačeno na obrázku 3.1. Šipky ukazují směr sčítání.

Členy posloupností $E^{\alpha}$ jsou kombinační čísla ve tvaru

$$\binom{n+\alpha-1}{n-1,}$$

což už lze pro pevné $\alpha$ snadno převést na polynomiální tvar.

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ | $n=7$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nultý řád | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| První řád | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | |
| Druhý řád | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... | | |
| Třetí řád | 1 | 4 | 10 | 20 | ... | | | |
| Čtvrtý řád | 1 | 5 | 15 | ... | | | | |
| Pátý řád | 1 | 6 | ... | | | | | |
| Šestý řád | 1 | ... | | | | | | |
| ... | ... | | | | | | | |

Obrázek 3.1: Jmenovatel u Cesarova součtu

# 4. Součty řad

V této kapitole se spočteme součty některých konkrétních řad. Nejprve zde ale rozebereme jeden trik, který se mimo jiné objevuje i různě na internetu. Tento trik má ukazovat, že součet přirozených čísel je $-1/12$. Postup má být následující:

Jako první vezměme posloupnost, jejíž součet si označíme $S_1$:

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

a přičteme ji k sobě samé:

$$\begin{aligned} S_1 = 1 &- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} 2S_1 &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \dots \\ S_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Teď vezměme posloupnost, jejíž součet bude $S_2$:

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

a přičteme ji samu k sobě.

$$\begin{aligned} S_2 = 1 &- 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ &1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \end{aligned}$$

Vyjde, že:

$$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

O pravé straně víme, že má součet $1/2$. Po úpravě

$$\begin{aligned} 2S_2 &= \frac{1}{2}, \\ S_2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nakonec vezměme posloupnost

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Od ní odečteme posloupnost $S_2$.

$$\begin{aligned} S - S_2 = &1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \\ &-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots \end{aligned}$$

Vyjde nám

$$
\begin{aligned}
S - S_2 &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots \\
S - S_2 &= 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots)
\end{aligned}
$$

Zjistili jsme, že

$$S - S_2 = 4S,$$

po úpravě:

$$3S = -S_2.$$

Když dosadíme za $S_2$:

$$
\begin{aligned}
3S &= -\frac{1}{4}, \\
S &= -\frac{1}{12},
\end{aligned}
$$

vyjde nám, že součet přirozených čísel je $-1/12$. Otázkou je, kde je chyba.

U klasického součtu můžeme měnit pořadí členů a přidávat závorky pouze u absolutně konvergentních řad. Řada $1-1+1-1+1-1+\dots$ však nekonverguje. Pokud budeme používat Cesarův součet, uvidíme, že součty $S_1$ a $S_2$ vyšly správně, ačkoli postup, kterým jsme řady sčítali, rozhodně není univerzálně funkční. Obě dvě použité řady jsou rozebrány v předchozí kapitole.

Poté od sebe odčítáme dvě řady. Díky linearitě je taková úprava v pořádku. Ke konci postupu však odebíráme z řady nekonečně mnoho nul, což, jak jsme si ukázali v předchozí kapitole, může změnit výsledek. Na závěr od obou stran odčítáme nekonečno, což není ekvivalentní úprava. Proč je tato úprava problematická si ukážeme na příkladu.

Vezměme řadu $1+1+1+1+1+1+\dots$ a její součet označme $x$. Když přidáme na obě strany rovnosti nulu, vyjde nám

$$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = 0 + x.$$

Díky linearitě můžeme odečíst od původní řady řadu upravenou, a dostaneme

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = x - x$$

z čehož po úpravě dostáváme

$$1 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že nám vyšel zjevně neplatný výraz, musí být alespoň jedna z úprav nekorektní.

Přesto však není hodnota $-1/12$ jako součet přirozených čísel zcela nesmyslná. Pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

kde $s \in \mathbb{C}$, platí, že číslo $-1/12$ je hodnota jejího analytického rozšíření v bodě $-1$, jak uvádí Stopple (2003).

V následujícím textu se podíváme na několik řad, u kterých součet opravdu vyjde.

**Příklad 1.** Jako první se podíváme na Taylorovu řadu v bodě $x$ se středem 0 pro $e^x$.

Taylorova řada v bodě $x$ se středem $a$ vypadá obecně, jak už jsme viděli, jako

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

Musíme tedy zjistit derivace $f(a)$:

$f(x) = e^x$, po dosazení $f(a) = e^a$,
$f'(x) = e^x$, po dosazení $f'(a) = e^a$,
$f''(x) = e^x$, po dosazení $f''(a) = e^a$,
$f'''(x) = e^x$, po dosazení $f'''(a) = e^a$,
...

Taylorova řada v bodě $x$ se středem $a$ pro $e^x$ zní tedy

$$e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \dots,$$

po dosazení $a = 0$ dostáváme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Teď zbývá zjistit, jestli rovnost výše platí, popřípadě pro která $x$ platí. Lagrangeův tvar zbytku je roven

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},$$

kde $\xi \in \langle a, x\rangle$ (nebo $\xi \in \langle x,a\rangle$, pokud $x < a$).

Pro $x = 0$ jde limita z $R_n(x)$ pro $n$ jdoucí do nekonečna k nule. Tedy pro $x$ rovné 0 je funkce rovna řadě. Využijeme toho, že posloupnost jde k nule právě tehdy, když jde i její absolutní hodnota k nule. Pro $x < 0$ po dosazení dostáváme

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}.$$

Tato úprava je korektní, protože víme, že $\frac{e^\xi}{(n+1)!}$ je kladné. Také víme, že $e^\xi$ je nejvýše jedna. Můžeme tedy psát

$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \to 0$$

Pro $x > 0$ po dosazení dostaneme

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right|.$$

Víme, že $e^\xi$ je konstanta, tak ji označíme jako $c$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}\right| \to 0$$

Takže funkce je rovna Taylorově řadě pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Pokud bychom chtěli přibližně spočítat, kolik je $e$, dosadili bychom za $x$ číslo jedna. Číslo jedna je reálné číslo, takže Taylorův polynom opravdu aproximuje funkci v jeho okolí. Vezměme třeba prvních devět členů řady:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

a za $x$ dosaďme číslo 1:

$$e \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Musíme ještě odhadnout zbytek. Víme, že $\xi$ je mezi číslem nula a jedna. Proto číslo $e^\xi$ shora odhadneme jako 3. Tuto velmi přibližnou informaci víme už předem. Hodnota zbytku je tedy

$$R_n(1) = \frac{(e^\xi)^{(n+1)}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

v našem případě po dosazení

$$R_9(1) = \frac{3}{10!} < 10^{-6}.$$

Uvedená nerovnost platí proto, že $\xi$ je menší než 1, tedy $e^\xi \leq e < 3$. To, že exponenciálu n+1 krát zderivujeme, nerovnost nezmění. Další číslice není blízko přechodu přes desítku, výsledek je tedy přesný na pět desetinných míst. Jeho hodnota je

$$e \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!},$$

$$e \doteq 2{,}718282 \pm 0{,}000001.$$

Číslo bylo zaokrouhleno na šest desetinných míst.

**Příklad 2.** Další funkcí, pro kterou zde budeme odvozovat Taylorovu řadu, je funkce $\ln(x+1)$.

Musíme opět zjistit derivace $f(a)$:
$f(x) = \ln(x+1)$ po dosazení $f(a) = \ln(a+1)$,
$f'(x) = 1/(x+1)$ po dosazení $f'(a) = 1/(a+1)$,
$f''(x) = -1/(x+1)^2$ po dosazení $f''(a) = -1/(a+1)^2$,
$f'''(x) = 2!/(x+1)^3$ po dosazení $f'''(a) = 2!/(a+1)^3$,
$f''''(x) = -3!/(x+1)^4$ po dosazení $f'''(a) = -3!/(a+1)^3$,
$f^{(n)}(x) = ((-1)^{n+1} \cdot (n-1)!)/(1+a)^n$
...
Taylorova řada v bodě $x$ se středem $a$ tedy je:

$$\ln(a+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{(1+a)^n \cdot n!} \cdot (x-a)^n$$

Po úpravě:

$$\ln(a+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot}{(1+a)^n \cdot n} \cdot (x-a)^n$$

Pro střed v nule:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Teď bychom měli zjistit, pro která (jestli vůbec pro nějaká) $x$ rovnosti platí.

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |1+\xi|^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x}{|1+\xi|^{n+1}}$$

Výraz jde k nule, když $|x| \, / \, |1+\xi| \leq 1$. Tedy po úpravě dostáváme

$$x \leq |1+\xi| \,,$$

$$x \in (-1, 1\rangle.$$

Co kdybychom chtěli spočítat třeba $\ln 2$? $x = 1$ je to součástí námi nalezeného intervalu, tedy můžeme počítat přibližnou hodnotu výrazu.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Sečtením nekonečné řady bychom získali přesné číslo. To ale v praxi nelze provést, proto bude stačit nějaký odhad. Zkusíme sečíst třeba deset členů. Jak už víme, zbytek pro $\ln(x+1)$ vypadá jako

$$R_n = \frac{(\ln(1+\xi))^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Víme, jak vypadá $n$-tá derivace. Můžeme spočíst $(n+1)$-ní derivaci, která je rovna

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{(1+x)^{n+1}},$$

$$R_n(1) = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!},$$

$$R_n(1) = \frac{(-1)^{n+2}}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)}.$$

Dosadíme za $n$ třeba číslo deset.

$$R_{10}(1) < \frac{1}{1}^{11} \cdot \frac{1}{11} \leq 0{,}1$$

Je vidět, že máme zaručeno jen velmi pomalé přibližování k danému bodu.

Po sečtení první deseti členů řady nám vyjde přibližně číslo 0,6, tedy

$$\ln 2 = 0{,}6 \pm 0{,}1$$

**Příklad 3.** Pomocí Taylorovy řady lze zjistit i přibližnou hodnotu čísla $\pi$. Abychom zjistili hodnotu $\pi$, budeme potřebovat řadu pro $\operatorname{arctg} x$. Budeme postupovat následovně:

Víme, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nyní použijeme zmíněný Taylorův rozvoj a rozvineme

$$\frac{1}{1+x^2}$$

do řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Pro $|x| < 1$ integrací dostaneme

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Pro $x = \pm 1$ řada konverguje, takže podle Abelovy věty, kterou uvádí Kopáček (2007), a věty o spojitosti limitní funkce, kterou také uvádí Kopáček (2007), rovnice funguje i pro $x = 1$.

Víme, že $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$.

Z toho vyplývá, že

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$
$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

**Příklad 4.** Dalším příkladem bude řada, kterou jsme již zmínili v první kapitole. Budeme hledat součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Nejprve zjistíme, zda řada konverguje. Použijeme podílové kritérium. Aby řada konvergovala, musí být výraz

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

menší než jedna. Po dosazení dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

což znamená, že řada konverguje.

Součet řady si označíme $S$. V postupu budeme využívat linearitu řad. Mějme tedy

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$

Řadu rozdělíme na řady dvě, a dostaneme řady

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\dots.$$

Vidíme, že druhá z řad se nápadně podobá původní řadě. Aby jí nebyla jen podobná, ale byla jí přímo rovna, stačí vytknout 1/2.

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\dots\right)$$

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$, můžeme tedy přepsat výše uvedenou rovnost na

$$S=1+\frac{S}{2}.$$

Také víme, že $S$ je nějaké reálné číslo, takže $S/2$ odečteme od obou obou stran rovnice. Tím dostáváme

$$\frac{S}{2}=1$$
$$S=2$$

Příklad lze vyřešit i jiným způsobem.

**Příklad 5.** Nejprve ukážeme, jak bude vypadat součet pro obecnější řadu. 1/2 nahradíme proměnou $x$. Tím dostaneme řadu

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty} nx^n.$$

Pro názornost si prvních pár členů řady vypíšeme. Dostaneme

$$S(x)=x+2x^2+3x^3+\dots$$

Celou rovnost si vydělíme $x$. O $x$ víme, že bude v našem případě 1/2, takže vydělení je ekvivalentní úprava. Tím získáme rovnost

$$\frac{S(x)}{x}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots$$

Tuto rovnost zintegrujeme, čímž obdržíme

$$\int\frac{S(x)}{x}dx=x+x^2+x^3+\dots$$

Řadu na pravé straně už umíme sečíst jako

$$\int\frac{S(x)}{x}dx=\frac{x}{1-x}.$$

A teď už stačí když se dostaneme zpátky k $S(x)$. Nejprve zderivujeme obě strany rovnosti a poté je roznásobíme $x$. Dostáváme

$$\frac{S(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Na závěr dosadíme 1/2, a vyjde nám

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

Ještě musíme ověřit poloměr konvergence, abychom věděli, zda výše uvedené úpravy můžeme dělat.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = |x|$$

Pro konvergenci řady stačí, aby platilo

$$|x| < 1.$$

Poloměr konvergence je 1. Pro 1/2 je tedy náš postup korektní.

# Závěr

Tato bakalářská práce se věnovala řadám a jejich součtům. První kapitola se zabývala historií řad. Bylo v ní například ukázáno, jak se v daných dobách řešily některé součty. Druhá kapitola obsahovala základní teorii řad. Ve třetí kapitole byla zavedena Cesarova sčítací metoda. První byl zaveden Cesarův součet prvního řádu a poté řádů přirozených. Na příkladech byly ukázány některé vlastnosti, ve kterých je Cesarův součet odlišný od klasického součtu. Poslední kapitola začíná na první pohled logickým postupem, jak dojít k tomu, že součet přirozených čísel je $-1/12$. V textu dále bylo vysvětleno, že tento postup je chybný a proč tomu tak je. Dále bylo uvedeno několik tématických příkladů, mimo jiných ty, ve kterých lze pomocí řad získat přibližné hodnoty některých známých konstant.

# Seznam použité literatury


BABB, J. (2005). Mathematical concepts and proofs from nicole oresme: Using the history of calculus to teach mathematics. *Science and Education*, **14**, 449–450.

CESÀRO, E. (1888). Sur la convergence des séries. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, **7**, 49–59.

EDWARDS, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer. ISBN 3540904360.

G. S. KIRK, J. E. RAVEN, M. S. (2004). *Předsókratovští filosofové*. Oikoymenh. ISBN 80-7298-110-2.

HARDY, G. (1949). *Divergent Series*. Oxford at the clarendon press.

KOPÁČEK, J. (1998). *Matematická analýza pro fyziky II*. Matfyzpress. ISBN 80-85863-26-X.

KOPÁČEK, J. (2007). *Matematická analýza pro fyziky III*. Matfyzpress. ISBN 80-85863-38-3.

STOPPLE, J. (2003). *A primer of analytic number theory: from Pythagoras to Riemann*. Cambridge University Press. ISBN 0521012538.

SUNDAY A. AJOSE, R. B. N. (1994). Proof without words: Geometric series formula. *Mathematics Magazine*, **67**(3), 230.

# Seznam obrázků