Posudek vedoucího diplomové práce:

Lineární teorie diferenciálních rovnic se zpožděním

AUTOR PRÁCE: HANA MARKOVÁ

Námět a obsah práce. Cílem této práce bylo za prvé korektně a uceleně sepsat základní teorii Laplaceovy transformace a za druhé pak uvedenou látku využít ke kvalitativní analýze řešení lineárních diferenciálních rovnic, zejména rovnic s konečným zpožděním. Téma se v literatuře vyskytuje často, avšak mnohdy nepřesně či neúplně („inženýrský přístup").
Práce je rozdělena do několika kapitol: Laplaceova transformace a její inverze (kapitoly 2 a 3), Lebesgue-Stieltjesův integrál (kapitola 4). Hlavní částí práce jsou pak aplikace na teorii ODR (se zpožděním i bez), kapitoly 5 a 6.

Hodnocení práce. Jedná se o kompilační práci, čerpající z většího množství různých zdrojů. Dle mého názoru se však příliš nepodařilo spojit jednotlivé části do jednoho celku. Některé věci jsou zařazeny zbytečně (např. dlouhý seznam vlastností Lebesgue-Stieltjesova integrálu, navíc bez důkazů, v drtivě většině bez dalšího využití). Některé zdroje sleduje autorka příliš těsně, z čehož mj. vyplývá horší návaznost jednotlivých částí – značení je trochu nekonzistentní, nebo spíše příliš komplikované.
Jinými slovy, přidaná hodnota celku vůči částem je v průměru nízká. – Vlastní přínos autorky je především v doplnění (adaptaci) některých důkazů, či některých příliš stručně podaných důkazů, jinak převzatých z literatury. Nicméně ani toto není zcela bez vady – na více místech najdeme nejasnosti či nesprávná odůvodnění.
Je škoda, že přes poměrně dlouhou dobu řešení působí závěrečná verze práce dojmem, že byla psána jaksi narychlo. Jakoby stále chybí jedno či několikeré důkladné přečtení, které by odstranilo některé zcela zbytečné a čistě formální nedostatky (například chybí znění poslední, dosti důležité Věty 36, není nikde definována konvoluce, je nepořádek v tom, odkud a kam některé funkce jdou), nemluvě o překlepech a typografických chybách.
V pozitivním smyslu lze ocenit samostatnou práci autorky, která si sama dohledávala příslušné zdroje, a skutečně se jí podařilo doplnit některé netriviální mezery v důkazech tam uvedených (například tvrzení o záměně sumy a Laplaceovy transformace).

<u>Některé konkrétní připomínky:</u>

- s. 4 Věta 1 (Lebesgueova) – funkce f a g by asi měly být integrovatelné vůči (míře ?) μ
- s. 4 Věta 2 (Cauchyho) – v této podobě je věta zbytečně obecná (potřebujeme ji pouze pro obdélník), bez vysvětlení pojmů „index" a „cyklus" navíc pro čtenáře málo užitečná
- s. 6 Definice 2 – infimum v definici σ_f není moc šťastně zapsáno
- **<u>s. 6</u> dole:** funkce $f(t)e^{-\sigma_f t}$ obecně není integrovatelná (infimum není vždy prvkem množiny!) Za druhé, integrovatelná funkce obecně není omezená (což se patrně užívá níže v důkazu Věty 9 ... ?)
- s. 7 nahoře: určitě nedefinujeme $\mathcal{L}(f)$ pro funkci jdoucí z $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$
- s. 7 Laplaceova transformace matice je zde definována už podruhé
- s. 8 zdá se, že konvoluce funkcí $f * g$ – což je v práci dosti důležitý objekt – není vůbec definována
- s. 9 odhad $te^{\varepsilon t} \le ce^{\varepsilon t/2}$ nemůže platit pro všechna $t > 0$

<u>s. 10</u> nejsou ověřeny předpoklady Fubiniho věty (měřitelnost, ani spojitost integrandu jak víme nestačí)

<u>s. 12</u> důkaz Věty 9, konkrétně odhad přírůstku pro $t \to +\infty$, se zdá opírat o chybný argument (integrovatelná funkce je omezená, viz výše), není tedy korektní

s. 15 v součinu $p_n\varphi(t)$ by měl být argument buď u obou, či u žádné z funkcí; podobná nekonzistence se objevuje i na dalších místech (např. s. 17, výraz $f \cdot e^{-x}$)

s. 17 není jasně řečeno, v jakém významu se užívá symbol $\mathcal{L}^{-1}$

s. 18 překlepy: "předpokláda", "Laplacevou"

<u>s. 19</u> spojitost funkce $e^{-at}f(t)$: není jasné, proč jsou malé předposlední dva členy, tj. integrály $\int_{-\infty}^{T} |F(a+i\omega)|\,d\omega$ a $\int_{T}^{+\infty} |F(a+i\omega)|\,d\omega$

s. 20 bylo by asi dobré část křivky U přesněji definovat a též odhadnout její délku

s. 21 v první polovině stránky je 2x uvedeno $t > 0$, ač má patrně být $t < 0$

s. 21 v předpokladech věty o inverzní Fourierově transformaci (zřejmě míněna Věta 4 na s. 5) se nehovoří o holomorfnosti, nýbrž o L^1 integrovatelnosti

s. 25 integrace per-partes a věta o substituci pro Lebesgue-Stieltjesův integrál je zde uvedena bez důkazu, třebaže se čtenáři důkaz slibuje (dokonce na dvou místech)

s. 26 předpoklad existence integrálů v této konvergenční Větě 26 asi není nutný, neboť plyne z omezenosti resp. spojitosti automaticky

s. 27 odhad funkce $x(t)$ závisí i na růstu funkce $g(t)$, nestačí tedy výraz $e^{t|A|}$

s. 28 výpočet (5.2) – zde je škoda, že autorka na poslední chvíli přešla pouze ke skalárnímu případu – pak jde totiž o obyčejnou exponenciálu a odvozený vzoreček je triviální (resp. plyne z Věty 8), jinak výpočet platí i pro maticový případ

s. 28 pozor na konflikt značení: dvojí význam u x_0 (počáteční podmínka i mez konvegence)

s. 34 výraz $\phi * e^z$ není srozumitelný ($z \in \mathbb{C}$ coby argument Laplaceovy transformace je zde pevné)

s. 43 u Věty 36 chybí znění (?!)

s. 44 důkaz není moc přehledně zapsaný, čtenář si např. musí domýšlet, že τ je (?) imaginární část z, nebo čemu je rovna funkce $F(a + i\omega)$ v definici $f(t)$. Splnění předpokladů věty 14 (integrovatelnost) by si také zasloužilo podrobnější komentář

Závěr. Práce se dle mého názoru místy klesá až k hranici uznatelnosti. V případě přesvědčivě podané obhajoby, včetně podrobného objasnění připomínek matematického charakteru (vyznačené výše podtržením), bych práci nicméně doporučil uznat jako diplomovou.

V Praze 23.1.2021

D. Pražák

doc. Dalibor Pražák