MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hana Marková

Lineární teorie diferenciálních rovnic se zpožděním

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce, doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D., za vstřícnost, trpělivost, ochotu ke konzultacím a cenné rady a připomínky. Dále mému manželovi za podporu a lásku.

Název práce: Lineární teorie diferenciálních rovnic se zpožděním

Autor: Hana Marková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce se zabývá studiem zpožděných diferenciálních funkcionálních rovnic. Z Banachovy věty o pevném bodě plyne existence jednoznačného řešení, ale už žádná informace o tom, jak vypadá. V práci se zaměřujeme právě na toto vyjádření, kterého docílíme pomocí aplikace Laplaceovy transformace na obě strany rovnice. Tedy řešíme modifikovaný problém, na jehož řešení následně aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci k vyjádření řešení původního problému. Na konci práce ještě formulujeme a dokazujeme nejlepší exponenciální odhad řešení.

Klíčová slova: rovnice se zpožděním, charakteristická rovnice, exponenciální odhady, Laplaceova transformace, fundamentální řešení

Title: Linear theory of delayed differential equations

Author: Hana Marková

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: It the thesis, we study retarded functional differential equations. As a result of the Banach fixed point theorem, it is easy to show that there exists a unique solution to such problems. Alas, this theorem gives us no information on the form of the solution. Therefore, we are particularly interested in expressing it. We achieve that by applying Laplace transform to both sides of the equation, we get a solution to this modified problem and subsequently claim that we can apply the inverse Laplace transform to express the solution of the former problem. At the end of the thesis, we formulate and prove the exponential estimate of the solution.

Keywords: delayed differential equations, characteristic equation, exponential estimates, Laplace transform, fundamental solution

Obsah

Úvod **2**

1 Značení a základní věty **3**
1.1 Značení . . . 3
1.2 Základní věty . . . 4

2 Laplaceova transformace **6**

3 Inverzní Laplaceova transformace **15**

4 Lebesgue-Stieltjesův integrál **22**
4.1 Lebesgue-Stieltjesova míra . . . 22
4.2 Lebesgue-Stieltjesův integrál . . . 24
4.2.1 Vlastnosti . . . 24

5 Řešení lineární diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace **27**

6 Řešení lineární funkcionální diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace **30**
6.1 Existence řešení a jeho odhad . . . 30
6.2 Laplaceova transformace řešení . . . 34
6.2.1 Fundamentální řešení . . . 37
6.2.2 Variace konstant . . . 41
6.2.3 Exponenciální odhad řešení . . . 43
6.2.4 Rozšíření do maticové formy . . . 45

Seznam použité literatury **47**

Úvod

Cílem této práce je studium lineární diferenciální autonomní rovnice se zpožděním, která je zadána pomocí funkcionálu. To jest zkoumáme rovnici s počáteční podmínkou tvaru

$$\begin{aligned} x'(t) &= L(x_t), \quad t > 0 \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \end{aligned}$$

kde L je lineární omezený funkcionál na prostoru spojitých funkcí, u kterého si ukážeme, že lze vyjádřit pomocí Lebesgue-Stieltjesova integrálu. Z Banachovy věty o pevném bodě plyne, že řešení tohoto problému existuje, ale bohužel nám věta nedává žádnou informaci o tom, jak vypadá. My toto řešení nalezneme pomocí Laplaceovy transformace. Dále zformulujeme a dokážeme Větu o varianci konstant a nalezneme co nejlepší exponenciální odhad řešení.

Nyní se podívejme na obsahy jednotlivých kapitol.

V první kapitole zavedeme základní značení a zformulujeme základní věty, které budeme používat napříč prací.

Stěžejním pojmem druhé kapitoly je Laplaceova transformace. Uvedeme a dokážeme její základní vlastnosti, jako například linearitu, holomorfnost a souvislost s Fourierovou transformací.

Ve třetí kapitole si ukážeme, že Laplaceova transformace je prosté zobrazení, tudíž má smysl mluvit o její inverzi. Dokážeme si vzorec pro její výpočet a představíme podmínky na funkci takové, aby ona sama byla Laplaceovou transformací nějaké funkce.

Čtvrtá kapitola pojednává o Lebesgue-Stieltjesově integrálu, který v ní zavedeme. Dokážeme jeho základní vlastnosti, jako je například linearita a věta o substituci. Na konci pak uvedeme větu o reprezentaci lineárního omezeného funkcionálu na spojitých funkcích.

Cílem páte kapitoly je na jednoduchém příkladu lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty ukázat, jak správně použít Laplaceovu transformaci k nalezení řešení.

Stežejní šestá kapitola se zabývá řešením již výše uvedené diferenciální rovnice se zpožděním pomocí Laplaceovy transformace a aparátu vybudovaném v předchozích kapitolách.

1. Značení a základní věty

1.1 Značení

V této části práce zavedeme základní značení, se kterým budeme v následujících kapitolách pracovat.
Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená podmnožina, pak budeme rozumět

- $\mathbb{R}$ množinu reálných čísel,
- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0)$,
- $\mathbb{C}$ množinu komplexních čísel,
- $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $A \subset B$ množinu A jako podmnožinu množiny B,
- $\operatorname{Re} z$ reálnou část čísla $z \in \mathbb{C}$,
- $\operatorname{Im} z$ imaginární část čísla $z \in \mathbb{C}$,
- $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ množinu všech $m \times n$ matic nad tělesem $\mathbb{F}$,
- $L(\Omega)$ standardní Lebesgueův prostor nebo jako prostor integrovatelných funkcí,
- $L^p(\Omega)$ standardní Lebesgueův prostor, kde $p \in [1, \infty]$ nebo jako prostor p - integrovatelných funkcí,
- $L^p_{loc}(\Omega)$ prostor lokálně p - integrovatelných funkcí, kde $p \in [1, \infty]$,
- $L[\Omega, J]$ standardní Lebesgueův prostor nad množinou Ω s obrazem v J,
- $AC[\Omega, J]$ prostor absolutně spojitých funkcí nad množinou Ω s obrazem v J,
- $C([a, b], \mathbb{C}^n)$ prostor spojitých funkcí na $[a, b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}^n$ se supremovou normou $\|\phi\| = \sup_{a\leq\theta\leq b} |\phi(\theta)|$, kde $|\cdot|$ je libovolná vektorová norma v $\mathbb{C}^n$,
- $\mathcal{F}$ Fourierovu tansformaci definovanou pro všechny $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $y \in \mathbb{R}$, předpisem
$$\mathcal{F}(f(t))[y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} f(t)\mathrm{d}t,$$
- $H(\Omega)$ prostor holomorfních funkcí na množině Ω.

1.2 Základní věty

V této části uvedeme několik základních netriviálních vět, které budeme používat v dalších částech práce. Věty uvádíme bez důkazu, leč s odkazem na literaturu, kde lze důkazy nalézt.

Věta 1 (Lebesgueova věta o záměně limity a integrálu)**.** *Nechť* (f_n) *je posloupnost měřitelných komplexních funkcí na měřitelném neprázdném prostoru* (X, μ)*, kde* μ *je nezáporná, takových, že pro každé* $x \in X$ *existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Existuje-li funkce $g \in L^1(X, \mathbb{C})$ *taková, že pro všechna* $x \in X$ *a* $n = 1,2,3,\dots$ *platí, že*

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

Pak je $f \in L^1(X, \mathbb{C})$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Viz Rudin (2003), kapitola 1, věta 1.33.

□

Věta 2 (Cauchyho věta)**.** *Nechť* $f \in H(\Omega)$*, kde* Ω *je libovolná otevřená množina v komplexní rovině. Je-li* Γ *cyklus v* Ω*, pro který je*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma \alpha = 0 \text{ pro všechna } \alpha \notin \Omega,$$

potom platí

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz. Viz Rudin (2003), kapitola 10, věta 10.35.

□

Věta 3 (Grönwallovo lemma)**.** *Nechť* u *a* α *jsou reálné spojité funkce na intervalu* $[a, b]$*,* $\beta \geq 0$ *je integrovatelná funkce na* $[a, b]$ *splňující*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s, \qquad a \leq t \leq b.$$

Pak platí, že

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s, \qquad a \leq t \leq b.$$

Navíc, jestliže je α *neklesající, pak*

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s} \qquad a \leq t \leq b.$$

Důkaz. Viz Hale (1993), kapitola 1, věta 3.1.

□

Věta 4 (Věta o inverzní Fourierově transformaci)**.** *Je-li* $f, \mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, pak platí, že*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f(t))[\omega] e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \text{ pro skoro všechna } t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Viz Rudin (2003), kapitola 9, věta 9.11.

□

Věta 5 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť funkce* f *je* L^1-*integrovatelná na* $\mathbb{R}$*, pak platí, že*

$$\mathcal{F}(f(t))[\omega] \to 0, \text{ jestliže } |\omega| \to +\infty.$$

Důkaz. Viz Rudin (2003), kapitola 9, Věta 9.6.

□

Věta 6 (Banachova věta o pevném bodě)**.** *Nechť* f *je kontrakce na neprázdném úplném metrickém prostoru* X*, pak* f *má právě jeden pevný bod* $\hat{x} \in X$*.*

Důkaz. Viz Rudin (1976).

□

2. Laplaceova transformace

Na začátku této kapitoly zadefinujeme pojem Laplacova transformace, který pro nás bude klíčový v další části této práce. Dále uvedeme a dokážeme její základní vlastnosti, jako například linearitu a souvislost s Fouerierovou transformací. Cílem této části bude zavést potřebný aparát nutný k další práci v následujících kapitolách.

Definice 1 (Laplaceova transformace)**.** *Laplaceova transformace $\mathcal{L}(f)$ funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je funkce*

$$\mathcal{L}(f(t))[z] = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t =: F(z)$$

definovaná pro ty $z \in \mathbb{C}$, pro které integrál existuje jako konvergentní Lebesgueův integrál.

Dále Laplaceovou transformací $\mathcal{L}(A)$ matice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}^+)$ chápeme matici

$$\mathcal{L}(A)[z] = \{\mathcal{L}(a_{ij}(t))[z]\}_{i,j=1}^{n,m}.$$

Definice 2 (Abscisa absolutní konvergence, polorovina absolutní konvergence)**.** *Jako abscisu konvergence funkce $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ chápeme největší spodní mez ze všech čísel c, pro které platí, že funkce $f(t)e^{-ct}$ je konvergentní na intervalu $0 \leq t < \infty$. Značíme jí σ_f. To jest*

$$\sigma_f = \inf_{c\in\mathbb{R}} \left\{ \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-ct}\mathrm{d}t < \infty \right\}$$

Polorovinu $\operatorname{Re} z > \sigma_f$ nazýváme polorovinou konvergence Laplaceovy transformace pro funkci f.

Pro snažší práci s Laplaceovou transformací zaveďme následující značení.

Značení 1. *Označme $L^1_+ := \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ měřitelné, takové, že $\sigma_f \in \mathbb{R}$ $\}$.*

Bývá zvykem funkce z L^1_+ dodefinovat nulou na intervalu $(-\infty, 0]$. I my se tohoto zvyku budeme držet.

Poznámka. Z podmínky $\int_0^\infty |f(t)e^{-zt}|\,\mathrm{d}t < \infty$ pro $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \sigma_f$, kde $\sigma_f \in \mathbb{R}$, vyplývá, že funkce z prostoru L^1_+ jsou lokálně integrovatelné na $[0, \infty)$ následovně: Buď $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \sigma_f$, kde $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, a $0 < T < \infty$ pak platí, že

$$\infty > \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma_f}\mathrm{d}t > \int_0^\infty \left|f(t)e^{-zt}\right| \mathrm{d}t > \int_0^T \left|f(t)e^{-zt}\right| \mathrm{d}t > e^{-xT} \int_0^T |f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Dále platí, že existují konstanty $b, c \in R$ takové, že

$$|f(t)| \leq ce^{\sigma_f}t \qquad \text{pro všechna } t > b.$$

Tedy narozdíl od Fourierovy transformace, kde transformujeme funkce z prostoru L^1(ℝ,ℝ), můžeme u Laplaceovy transformace uvažovat funkce obecnější, respektive funkce s velkým růstem u $+\infty$.

Poznámka. Dosud jsme si definovali Laplacovu transformaci jen pro funkce jdoucí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Můžeme ale transformovat i funkce jdoucí z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^m$.

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pak jí můžeme zapsat jako $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ a definovat Laplaceovu transformaci funkce f jako

$$\mathcal{L}(f)[z] = \int_0^\infty \operatorname{Re} f(t) e^{-zt} \mathrm{d}t + i \int_0^\infty \operatorname{Im} f(t) e^{-zt} \mathrm{d}t$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které oba integrály existují jako konvergentní Lebesgueovy integrály.

Dále Laplaceovu transformaci matice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ budeme definovat jako

$$\mathcal{L}(A)[z] = \{\mathcal{L}(a_{ij}(t))[z]\}_{i,j=1}^{n,m},$$

kde opět

$$\mathcal{L}(a_{ij}(t))[z] = \int_0^\infty \operatorname{Re} a_{ij}(t) e^{-zt} \mathrm{d}t + i \int_0^\infty \operatorname{Im} a_{ij}(t) e^{-zt} \mathrm{d}t.$$

Lemma 7 (Souvislost s Fourierovou transformací)**.** *Buď $f \in L^1_+$ a $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, taková, že $\operatorname{Re} z > \sigma_f$. Pak pro všechna taková z platí*

$$\mathcal{L}(f(t))[z] = \mathcal{F}(e^{-xt} f(t))[y].$$

Důkaz. Pouhým rozepsáním dostaneme, že

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t))[z] &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} e^{-iyt} f(t) \mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{=} \mathcal{F}(e^{-xt} f(t))[y],\end{aligned}$$

přičemž v (1) využijeme faktu, že funkce f je na intervalu $(-\infty, 0]$ dodefinována nulou.

□

V následující větě shrneme základní vlastnosti Laplaceovy transformace.

Věta 8 (Vlastnosti Laplaceovy transformace)**.** *Nechť $f, g \in L^1_+$, pak platí následující tvrzení*

1. $\mathcal{L}((f+g)(t))[z] = \mathcal{L}(f(t))[z] + \mathcal{L}(g(t))[z]$, $\operatorname{Re} z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$,
2. *Pro všechna $a \in \mathbb{R}, a > 0$, platí, že $f(at) \in L^1_+$ a*

$$\mathcal{L}(af(t))[z] = a^{-1} \mathcal{L}(f(t))[a^{-1}z], \operatorname{Re} z > a\sigma_f,$$

3. *Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ je $e^{at} f(t) \in L^1_+$ a*

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))[z] = \mathcal{L}(f(t))[z - a], \operatorname{Re} z > a + \sigma_f,$$

4. $\mathcal{L}(f(t))[z]$ *je holomorfní funkce na množině* $\{\operatorname{Re} z > \sigma_f\}$ *a*

$$(\mathcal{L}(f(t))[z])' = \mathcal{L}((-t) f(t))[z],$$

obecněji,

$$\mathcal{L}(f(t))[z])^{(k)} = \mathcal{L}((-t)^k f(t))[z], \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

5. *$\mathcal{L}(f(t))[z] \to 0$ pro $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$ a $\mathrm{Im}\, z$ pevná,*
   $\mathcal{L}(f(t))[z] \to 0$ pro $|\mathrm{Im}(z)| \to +\infty$ a $\mathrm{Re}\, z$ pevná,

6. *Platí, že $f * g(t) \in L^1_+$, přičemž $\sigma_{f*g} \leq \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ a*
$$\mathcal{L}\left(f * g(t)\right)[z] = \mathcal{L}(f(t))[z]\mathcal{L}(g(t))[z], \mathrm{Re}\, z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\},$$

7. *Funkce Φ zadaná předpisem $\Phi(t) := \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ splňuje, že $\Phi \in L^1_+$ a*
$$\mathcal{L}\left(\Phi(t)\right)[z] = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))[z], \mathrm{Re}\, z > \max\{\sigma_f, 1\},$$

8. *Pro všechna $T \in \mathbb{R}$ platí, že*
$$\mathcal{L}(f(t-T))[z] = e^{-zT}\mathcal{L}(f(t))[z], \mathrm{Re}\, z > \sigma_f.$$

Důkaz.

1. Nechť $\mathrm{Re}\, z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Pouhým rozepsáním dostaneme, že
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left((f+g)(t)\right)[z] &= \int_0^\infty \left(f(t) + g(t)\right) e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-zt}dt \\ &= \mathcal{L}(f(t))[z] + \mathcal{L}(g(t))[z],\end{aligned}$$
přičemž jsme využili linearity Lebesgueova integrálu a faktu, že oba integrály ve druhém řádku díky volbě z absolutně konvergují.

2. Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, substitucí $at = t_1$ dostáváme, že
$$\int_0^\infty \left|f(at)e^{-zt}\right| dt = a^{-1}\int_0^\infty \left|f(t_1)e^{-\frac{z}{a}t_1}\right| dt_1 < \infty$$
pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $\mathrm{Re}\, \frac{z}{a} = \frac{1}{a}\mathrm{Re}\, z > \sigma_f$. Tedy dostáváme, že $f(at) \in L^1_+$.
Dále platí
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(at)\right)[z] &= \int_0^\infty f(at)e^{-zt}\mathrm{d}t \\ &= a^{-1}\int_0^\infty f(t_1)e^{-\frac{z}{a}t_1}\mathrm{d}t_1 \\ &= a^{-1}\mathcal{L}(f(t))[za^{-1}]\end{aligned}$$
pro každé $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\mathrm{Re}\, z > a\sigma_f$.

3. Nechť $a \in \mathbb{R}$, pak platí
$$\int_0^\infty \left|f(t)e^{-zt+at}\right| dt = \int_0^\infty \left|f(t)e^{-(z-a)t}\right| dt < \infty$$
pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $\mathrm{Re}(z-a) = \mathrm{Re}\, z - a > \sigma_f$. Tedy dostáváme, že $f(t)e^{at} \in L^1_+$.
Dále platí
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)[z] &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt+at}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-t(z-a)}\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}(f(t))[z-a]\end{aligned}$$

4. Nechť je $z \in \mathbb{C}$ splňující $\mathrm{Re}(z) > \sigma_f$, dále nalezneme $\varepsilon > 0$ tak malé, že : $\mathrm{Re}(z) + \frac{\varepsilon}{2} > \sigma_f$. Pak platí, že

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \int_0^\infty \frac{f(t)e^{-t(z+h)} - f(t)e^{-zt}}{h}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-ht}-1}{h}e^{-zt}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dále víme, že

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{1}{h}(e^{-ht}-1) = -t.$$

Nyní výraz v limitě odhadneme pro každé $|h| \leq \varepsilon$ následovně

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-ht}-1}{h}\right| &= \left|\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(ht)^k}{k!}\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(|ht|)^k}{k!} \\ &\leq t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon\,|t|)^k}{k!} \\ &\leq te^{\varepsilon t} \\ &\leq c(\varepsilon)e^{\frac{\varepsilon}{2}t},\end{aligned}$$

kde $c(\varepsilon)$ je konstanta závislá na daném ε.
Tedy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|f(t)\frac{e^{-ht}-1}{h}e^{-zt}\right|\mathrm{d}t &\leq \int_0^\infty \left|f(t)e^{-zt}\right|\left|c(\varepsilon)e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right|\mathrm{d}t \\ &= |c(\varepsilon)|\int_0^\infty \left|f(t)e^{-t\left(z-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right|\mathrm{d}t < \infty,\end{aligned}$$

pričemž poslední nerovnost plyne z volby ε, a tedy máme integrovatelnou majorantu pro použití Lebesgueovy věty o záměně integrálu a limity, kterou nyní použijeme.
Platí tedy

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(f(t))[z])' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \\ &= \int_0^\infty -tf(t)e^{-zt}\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}(-tf(t))[z].\end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali, že pro každé $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > \sigma_f$, $(\mathcal{L}(f(t))[z])'$ existuje, tj. $\mathcal{L}(f(t))[z]$ je holomorfní a že $-tf(t) \in L^1_+$.
Dále platí, že

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(f(t))[z])'' &= (\mathcal{L}(-tf(t))[z])' \\ &= \mathcal{L}\left((t^2)f(t)\right)[z],\end{aligned}$$

přičemž jsme využili již dokázaného pro funkci $-tf(t) \in L^1_+$.
Indukcí tedy dostáváme, že

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)[z]^{(k)} = \mathcal{L}\left((-t)^k f(t)\right)[z], \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

5. Pro každé $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \sigma_f$, platí následující odhad

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|e^{-zt} f(t)\right| \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left|e^{-\sigma_f t} e^{-(z-\sigma_f)t} f(t)\right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-\sigma_f t} e^{-(x-\sigma_f)t} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{\leq} \int_0^\infty e^{-\sigma_f t} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \cdot \sup_{t \in [0,\infty)} e^{-(x-\sigma_f)t} \overset{(2)}{<} +\infty,\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili Hölderovu nerovnost a ve (2) fakt, že $x > \sigma_f$ a že z předpokladu platí $\int_0^\infty e^{-\sigma_f t} \left|f(t)\right| dt < +\infty$.

Našli jsme tedy integrovatelnou majorantu pro použití Lebesgueovy věty o záměně integrálu. Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left|\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt\right| &\leq \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-\sigma_f t} e^{-(x-\sigma_f)t} \left|f(t)\right| dt \\ &\overset{(1)}{\leq} \int_0^\infty e^{-\sigma_f t} \left|f(t)\right| \lim_{x\to\infty} \left(e^{-(x-\sigma_f)t}\right) dt \\ &= 0,\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili Lebesgueovu větu o záměně limity a integrálu.

K důkazu druhé části tvrzení využijeme Riemmanovo - Lebesgueovo lemma 5 a vztahu Fourierovy a Laplaceovy transformace. Tedy nechť je $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z > \sigma_f$, pak platí

$$\lim_{|y|\to\infty} \mathcal{L}\left(f(t)\right)[x + iy] = \lim_{|y|\to\infty} \mathcal{F}\left(e^{-xt} f(t)\right)[y] = 0.$$

6. Nechť $f, g \in L^1_+$, pak pro $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ platí odhad

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|f * g\right|(t) e^{-zt} \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left|\int_0^t f(t-u) g(u)\right| \mathrm{d}u e^{-zt} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^t \left|f(t-u)\right| \left|g(u)\right| \mathrm{d}u e^{-zt} \mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{=} \int_0^\infty \int_u^\infty \left|f(t-u)\right| \left|g(u)\right| e^{-zt} \mathrm{d}t \mathrm{d}u \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \left|f(t-u)\right| \left|g(u)\right| e^{-zt} \mathrm{d}t \mathrm{d}u \\ &\overset{(2)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \left|f(v)\right| \left|g(u)\right| e^{-z(v+u)} \mathrm{d}v \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \left|f(v)\right| e^{-zv} \mathrm{d}v \cdot \int_0^\infty \left|g(u)\right| e^{-zu} \mathrm{d}u < \infty,\end{aligned}$$

přimčemž v (1) jsme použili Fubiniho větu a ve (2) substituci $t = v + u$. Tedy $f * g \in L^1_+$.

Dále máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g(t))[z] &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u e^{-zt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)g(u)e^{-zt}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(v)g(u)e^{-z(v+u)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty f(v)e^{-zv}\mathrm{d}v \cdot \int_0^\infty g(u)e^{-zu}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$.

7. Nechť $f \in L^1_+$, pak platí následující rovnost

$$\int_0^t f(t)\mathrm{d}t = \int_0^t f(t) \cdot 1\mathrm{d}t = f * 1(t).$$

Dále máme, že

$$\int_0^\infty \left|1 \cdot e^{-zt}dt\right| < \infty$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. Tedy funkce konstantní jedna je z prostoru L^1_+.

Užitím předchozího, již dokázaného, tvrzení tedy můžeme psát, že

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)[z] &= \mathcal{L}(f * 1(t))[z] \\ &= \mathcal{L}(f(t))[z].\mathcal{L}(1(t))[z] \\ &= \mathcal{L}(f(t))[z]\frac{1}{z}\end{aligned}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{\sigma_f, 0\}$.

8. Užitím substituce $t - T = s$, pro $T > 0$, dostáváme, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > \sigma_f$, platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-T))[z] &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-zt}\mathrm{d}t \\ &= \int_T^\infty f(t-T)e^{-zt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(s)e^{-z(s+T)}\mathrm{d}s \\ &= e^{-zT}\int_0^\infty f(s)e^{-zs}\mathrm{d}s \\ &= e^{-zT}\mathcal{L}(f(t))[z].\end{aligned}$$

Tímto náš důkaz končí.

□

Nyní uvedeme další vlastnost Laplaceovy transformace. Narozdíl od předchozí věty si již nevystačíme s požadavkem, aby $f \in L^1_+$ a budeme muset předpokládat více - konkrétně spojitost funkce f až do n-té derivace.Tuto větu se zkráceným důkazem můžeme nalézt v Zemanian (1965). My důkaz doplníme o fakta a tvrzení, které autor považuje za zřejmé.

Věta 9 (Laplaceova transformace derivace)**.** *Nechť* $f \in L^1_+$, *navíc předpokládejme, že* $f \in C^1([0{,}\infty))$ *a že* $f' \in L^1_+$, *pak pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > \max\{\sigma_f, \sigma_{f'}\}$ *platí následující rovnost*

$$\mathcal{L}(f'(t))[z] = z\mathcal{L}(f(t))[z] - f(0).$$

Pokud dále platí, že $f^{(k)} \in L^1_+$, *pro* $k = 0, 1, \ldots, n$ *a* $f \in C^n([0{,}\infty))$, *pak pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > \max\{\sigma_f{,}\sigma_{f'}, \ldots {,}\sigma_{f^{(n)}}\}$ *platí obecnější rovnost*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))[z] = z^n\mathcal{L}(f(t))[z] - \sum_{k=0}^{n-1} z^k f^{(n-1-k)}(0).$$

Důkaz. Nechť $f, f' \in L^1_+$ a $f \in C^1([0{,}\infty)]$. Pak integrací per partes dostáváme pro $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > \max\{\sigma_f, \sigma_{f'}\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))[z] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}dt \\ &= e^{-zt}f(t)\Big|_{t=0}^{\infty} + z\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt \\ &= z\mathcal{L}(f(t))[z] - f(0),\end{aligned}$$

přičemž abychom mohli per partes použít, využijeme předpokladu, že $f \in C^1([0{,}\infty))$. Třetí rovnost plyne z odhadu pro $z \in \mathbb{C}$, $x = \mathrm{Re}(z) > \sigma_f$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left|e^{-zt}f(t)\right| &\le \lim_{t\to\infty} e^{-xt}\left|f(t)\right| \\ &\le \lim_{t\to\infty} e^{-xt}ce^{\sigma_f t} = 0.\end{aligned}$$

Druhou část tvrzení dokážeme induktivně. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Nyní pro $n = 2$ máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((f')'(t))[z] &= z\mathcal{L}(f'(t))[z] - f'(0) \\ &= z^2\mathcal{L}(f(t))[z] - zf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))[z] = z^n\mathcal{L}(f(t))[z] - \sum_{k=0}^{n-1} z^k f^{(n-1-k)}(0).$$

□

Poznámka. Ve Větě 9 autor uvádí předpoklad, že $f \in C^1([0{,}\infty))$, který v důkazu využívá pro použití per partes. Stačilo by ale předpokládat méně - konkrétně, že funkce $f, f'{,}f'' \ldots$ jsou absolutně spojité.

Následující věta se bude týkat záměny řady a Laplaceovy transformace, kterou využijeme při aplikaci Laplaceovy transformace na lineární diferenciální rovnice. Tuto větu se zkráceným důkazem můžeme nalézt v Doetsch (1950). My důkaz doplníme o fakta a tvrzení, které autor považuje za zřejmé.

Věta 10. *Nechť* $\mathcal{L}(f_i(t))$ *je Laplaceova transformace funkce* f_i, *pro každé* $i = 1{,}2{,}\cdots$. *Navíc předpokládejme existenci takového* $x_0 \in \mathbb{R}$, *pro které platí*

1. $x_0 \ge \sigma_{f_i}$, $i = 1, 2, \ldots,$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt$ *je konvergentní.*

Pak řada $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(f_i(t))[z]$ *stejnoměrně konverguje pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *takové, že* $\operatorname{Re} z \geq x_0$ *a řada* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ *konverguje absolutně skoro všude pro* $t \geq 0$*. Pokud zadefinujeme funkci* f *jako* $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$*, pak navíc platí* $\sigma_f \leq x_0$ *a* $\mathcal{L}(f(t))[z] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(f_i(t))[z]$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$*, takové, že* $\operatorname{Re} z \geq x_0$*.*

Důkaz. Definujme funkci ϕ_n jako

$$\phi_n(t) = e^{-x_0 t} \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)| \, .$$

Jelikož platí, že

$$\phi_n(t) \geq 0, \text{ a } \phi_n(t) \leq \phi_{n+1}(t),$$

limita

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$$

existuje pro všechna $t \geq 0$.

Z předpokladů platí, že $\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt$ je konvergentní, tudíž z věty o záměně řady a integrálu dostáváme rovnost

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt < \infty$$

a tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt &= \int_0^{\infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_0 t} |f_i(t)| \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{n \to \infty} \phi_n(t) \\ &= \int_0^{\infty} \phi(t) < \infty. \end{aligned}$$

Z konvergence integálu $\int_0^{\infty} \phi(t)$ vyplývá, že $\phi(t) = e^{-x_0 t} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t)|$ je konečná skoro všude na $(0, \infty)$. To ovšem implikuje, že $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t)|$ a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) =: f(t)$ konvergují skoro všude.
Dále platí

$$\left| e^{-x_0 t} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \right| \leq e^{-x_0 t} \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)| = \phi_n(t) \leq \phi(t).$$

Je také pravdou, že $e^{-x_0 t} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)$ konverguje skoro všude k $e^{-x_0 t} f(t)$, tedy

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f_i(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt,$$

to jest

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(f_i(t))[x_0] = \mathcal{L}(f(t))[x_0].$$

Pro $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z \geq x_0$ platí následující odhad

$$\left| e^{-zt} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \right| \leq \phi(t),$$

tedy pro takováto z můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}(f_i(t))[z]=\mathcal{L}(f(t))[z] \text{ pro } \operatorname{Re} z\geq x_0.$$

$\square$

3. Inverzní Laplaceova transformace

V této kapitole dokážeme, že Laplaceova transformace je prosté zobrazení (Lerchova věta), a tudíž má smysl mluvit o inverzní transformaci. Následně ukážeme, za jakých podmínek a jak tuto inverzní transformaci vyjádřit. Dále stanovíme podmínky na funkci tak, aby ona sama byla Laplaceovou transformací.

Nyní uvedeme a dokážeme dvě lemmata, která budeme potřebovat k dokázání Lerchovy věty. Tato lemmata a důkazy můžeme nalézt v Doetsch (1950). My je doplníme o tvrzení, která jsou v knize považována za zřejmá.

Lemma 11. *Nechť* $\varphi \in C([0,1])$ *a*

$$\int_0^1 \varphi(t)t^m \mathrm{d}t = 0 \textit{ pro všechna } m \in \mathbb{N}_0.$$

Poté platí $\varphi(t) = 0$ *pro každé* t.

Důkaz. Podle Weierstrassovy věty platí, že množina polynomů na [0,1] je hustá v $C([0,1])$. Tedy nalezneme posloupnost polynomů $\{p_n\}$ takovou, že $\{p_n\}$ konverguje stejnoměrně k φ na $[0,1]$, dále však platí, že posloupnost $\{p_n\varphi\}$ konverguje stejnoměrně k funkci φ^2.

Z předpokladů kladených na funkci φ máme, že

$$\int_0^1 p_n\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{p_n\varphi\}$ dále tedy platí, že

$$\int_0^1 (\varphi(t))^2\mathrm{d}t = 0.$$

Je ale pravdou, že integrál z nezáporné funkce je nula právě tehdy, když je tato funkce rovná nule skoro všude na $[0,1]$. Ze spojitosti φ pak plyne, že je rovna nule všude na $[0,1]$.

□

Lemma 12. *Nechť* $f \in L^1_+$, *navíc předpokládejme, že* $f \in C([0,\infty))$ *a že existuje* $p_0 \in \mathbb{R}$ *takové, že platí*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = 0, \qquad \textit{pro všechna } p \in [p_0, +\infty).$$

Poté platí $f(t) = 0$ *pro skoro každé* t.

Důkaz. Pro důkaz této věty stačí předpokládat, že

$$\int_0^\infty f(t)e^{-(p_0+n)t}\mathrm{d}t = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

Definujme funkci b předpisem

$$b(t) := \int_t^\infty f(s)e^{-p_0 s}\mathrm{d}s.$$

Díky konvergenci integrálu $\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-p_0 t}\mathrm{d}t$ z podmínky $f \in L^1_+$ je funkce b dobře definovaná. Derivací integrálu podle dolní meze máme

$$b'(t) = -f(t)e^{-p_0 t}.$$

Tedy $b(t)$ je v $C^1([0,\infty))$ a navíc $b(0) = 0$, díky předpokladu, že $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = 0$, pro všechna $p \in [p_0,\infty)$.

Pokud je to nezbytné, zvětšením p_0 zajistíme, že funkce

$$g(t) := f(t)e^{-(p_0-1)t} \in L^1(0,\infty).$$

Nyní již můžeme odhadnout funkci $b(t)$ následovně

$$|b(t)| = \left|\int_t^\infty g(s)e^{-s}\mathrm{d}s\right| \le e^{-t}\int_t^\infty g(s)\mathrm{d}s \le ce^{-t}. \tag{3.2}$$

Dále použitím per partes dostáváme, že

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_0 t}e^{-nt}\mathrm{d}t = -b(t)e^{-nt}\Big|_{t=0}^{\infty} - n\int_0^\infty b(t)e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

Tedy z (3.1)-(3.2) plyne

$$\int_0^\infty b(t)e^{-nt}dt = 0, \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Využitím substituce $x = e^{-t}$ ovšem dostáváme

$$\int_0^1 \varphi(x)x^{n-1}dx = 0, \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}, n \ge 1,$$
$$\text{kde } \varphi(x) = b(-\log x).$$

Pokud dodefinujeme $\varphi(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 1$, pak platí, že funkce φ je spojitá na [0,1]. Tedy použitím Lemmatu 11 dostáváme, že $\varphi = 0$ skoro všude. Proto i $b = 0$ skoro všude a podle (3) je

$$f(t) = -b'(t)e^{p_0 t} = 0 \text{ pro skoro každé } t \in [0,\infty).$$

□

Nyní již máme připravený veškerý potřebný aparát k dokázání Lerchovy věty.

Věta 13 (Lerch)**.** *Nechť $f, g \in L^1_+$ a navíc předpokládejme, že $f, g \in C((0,\infty))$ a že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí*

$$\mathcal{L}(f(t))[x] = \mathcal{L}(g(t))[x], \textit{ pro všechna } x \in (c,\infty).$$

Poté platí: $f(t) = g(t)$ pro skoro všechna t.

Důkaz. Pro všechna $x \in (c,\infty)$ platí

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = \int_0^\infty g(t)e^{-xt}dt$$
$$\int_0^\infty (f(t) - g(t))e^{-xt}dt = 0.$$

Podle předchozího lemmatu tedy máme, že $(f(t) - g(t)) = 0$ pro skoro všechna t. Tedy $f(t) = g(t)$ pro skoro všechna t.

$\square$

Dokázali jsme, že Laplaceova transformace je prosté zobrazení a má tedy smysl mluvit o její inverzi. Následující věta ukazuje, jak k této inverzi dojít. Můžeme ji najít v Zemanian (1965). My ji doplníme o tvrzení, která jsou v knize považována za zřejmá.

Věta 14. *Nechť $f \in L^1_+$, navíc předpokládejme, že $\mathcal{F}(f(t)e^{-xt}) \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pro všechna $x > \sigma_f$. Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$, $c > \sigma_f$ a pro $t \in [0,\infty)$ platí*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to\infty} \int_{c-iy}^{c+iy} F(z)e^{zt}dz. \tag{3.3}$$

Důkaz. Nechť je $z \in \mathbb{C}$, pak můžeme psát, že $z = c + i\omega$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $\omega \in \mathbb{R}$. Rovnici (3.3) můžeme užitím substituce $z = c + i\omega$ přepsat následovně

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to\infty} \int_{c-iy}^{c+iy} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} F(c+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} \mathcal{F}(f(t)e^{-ct})[\omega]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

přičemž jsme ve druhé rovnosti využili vztahu Fourierovy a Laplaceovy transformace. Přesněji: víme, že platí

$$\begin{aligned}F(c+i\omega) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(c+iw)t}\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}(f(t)e^{-ct})[\omega].\end{aligned}$$

Dále z věty o inverzní Fourierově transformaci máme

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} \mathcal{F}(f(t)e^{-ct})[\omega]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t)e^{-ct}.$$

Nyní se musíme přesvědčit, jestli splňujeme předpoklady této věty.

1. $\underline{f \cdot e^{-x} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$
   Z předpokladu, že $f \in L^1_+$ víme, že integrál $\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-xt}dt$ konverguje pro $x > \sigma_f$ a že $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Tedy $f \cdot e^{-x} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pro $x > \sigma_f$.

2. $\underline{\mathcal{F}(f(t)e^{-xt}) \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$
   Platí z předpokladu.

A tedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to\infty} \int_{c-iy}^{c+iy} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} \mathcal{F}(f(t)e^{-ct})[\omega]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= e^{ct}f(t)e^{-ct}.\end{aligned}$$

$\square$

Předchozí věta předpokláda, že funkce F je Laplacevou transformací funkce f. Nyní nás bude ale zajímat, jaké podmínky musí splnit funkce komplexní proměnné, aby byla Laplaceovou transformací nějaké funkce, jestliže tuto informaci nemáme. Následující větu můžeme najít v Zemanian (1965). My ji doplníme o tvrzení, která jsou v knize považována za zřejmá.

Věta 15. *Předpokládejme, že funkce F je holomorfní na celé polorovině* $\mathrm{Re}(z) \geq a$, $a \in \mathbb{R}$ *a že splňuje následující nerovnost*

$$|F(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \tag{3.4}$$

kde c je reálná konstanta. Pokud platí, že v integrálu

$$\mathcal{L}^{-1}(F(z)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to\infty} \int_{c-iy}^{c+iy} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z$$

je $c \geq a$, pak $\mathcal{L}^{-1}(F(z)) = f(t)$ existuje a $f \in C([0,\infty))$. Navíc $f(t) = 0$ pro $t < 0$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(z)$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > a$.

Důkaz. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ zadefinujme funkci f následovně

$$e^{-at}f(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Nyní ověříme, zda má naše definice smysl, to jest, jestli integrál $\int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\omega)e^{i\omega t}d\omega$ konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$. Nejdříve předpokládejme, že $a \neq 0$, pak máme, že

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(a+i\omega)e^{i\omega t}\right| \mathrm{d}\omega &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\omega)| \,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{(1)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{|a+i\omega|^2}\mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{a^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{\pi c}{|a|},
\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili předpokladu (3.4).
Buď nyní $a = 0$ a $k > 0$, pak

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(i\omega)e^{i\omega t}\right| \mathrm{d}\omega &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)| \,\mathrm{d}\omega \\
&\leq \int_{-\infty}^{-k} \frac{c}{|i\omega|^2}\mathrm{d}\omega + \int_{k}^{\infty} \frac{c}{|i\omega|^2}\mathrm{d}\omega \\
&+ \int_{-k}^{k} |F(i\omega)| \,\mathrm{d}\omega \\
&\leq \int_{-\infty}^{-k} \frac{c}{\omega^2}d\omega + \int_{k}^{\infty} \frac{c}{\omega^2}\mathrm{d}\omega \\
&+ \int_{-k}^{k} |F(i\omega)| \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{2c}{k} + \hat{c} < \infty, \text{ kde } \hat{c} \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili spojitosti funkce F plynoucí z její holomorfnosti.
Tedy integrál $\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$ konverguje absolutně stejnoměrně pro všechna $t \in \mathbb{R}$, tudíž funkce f je dobře definovaná a omezená pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Dále ověřme spojitost funkce f. Buď $\delta \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-a(t+\delta)}f(t+\delta) - e^{-at}f(t)\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega(t+\delta)}\mathrm{d}\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}(e^{i\omega\delta}-1)\mathrm{d}\omega\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(a+i\omega)e^{i\omega t}\right|\left|(e^{i\omega\delta}-1)\right|\mathrm{d}\omega \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(a+i\omega)\right|\left|(e^{i\omega\delta}-1)\right|\mathrm{d}\omega \\
\leq&2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(a+i\omega)\right|\left|\sin\frac{\omega\delta}{2}\right|\mathrm{d}\omega \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-T}\left|F(a+i\omega)\right|d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{\infty}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega \\
+&\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|F(a+i\omega)\right|\left|\frac{\omega\delta}{2}\right|\left|\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}\right|\mathrm{d}\omega \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-T}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{\infty}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega \\
+&\left|\delta\right|\left|T\right|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|F(a+i\omega)\right|\left|\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}\right|\mathrm{d}\omega \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-T}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{\infty}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega \\
+&\left|\delta\right|\left|T\right|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|F(a+i\omega)\right|\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt T dostatečně velké a δ dostatečně malé tak, že

$$\left|e^{-a(t+\delta)}f(t+\delta) - e^{-at}f(t)\right| < \varepsilon.$$

Tímto jsme dokázali spojitost funkce $e^{-at}f(t)$ a tedy i funkce f.

Dále ověříme, že $f(t) = 0$ pro $t < 0$. Uvažujme křivkový integrál

$$\int_{\varphi} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z,$$

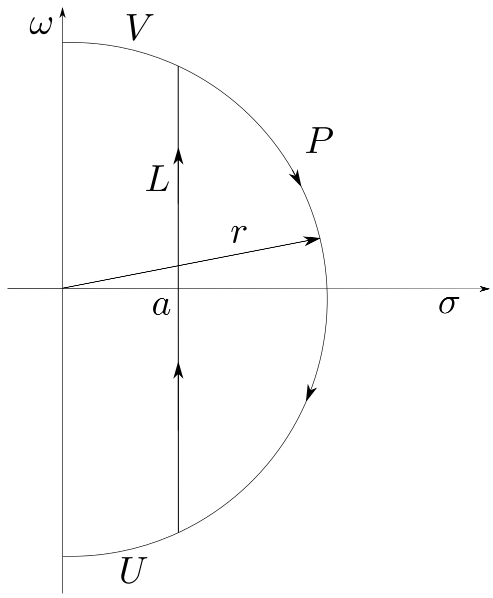
kde křivka φ leží v polorovině $\operatorname{Re} z \leq a$ a sestává z úsečky L na přímce $z = a + i\omega$ a z oblouku P kruhu se středem v počátku a poloměru r. Jak tato křivka vypadá je vidět na obrázku 3.1.

Tedy můžeme psát

$$\int_{\varphi} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = \int_{a-ir}^{a+ir} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z + \int_{P} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z.$$

Z předpokladů máme, že funkce F je holomorfní na celé polorovině $\operatorname{Re} z \geq a$, tedy z Cauchyho věty dostáváme, že

$$\int_{\varphi} F(z)e^{zt}dz = 0.$$



Obrázek 3.1:

Nyní dokážeme, že

$$\int_P F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = 0 \text{ pro } r \to \infty.$$

Pouhým rozepsáním dostáváme, že

$$\int_P F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(re^{i\theta})e^{tre^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_U F(z)e^{zt}\mathrm{d}z - \int_V F(z)e^{zt}\mathrm{d}z,$$

přičemž segmenty U a V jsou vyznačeny na obrázku 3.1.
Dále počítejme

$$\left|\int_U F(z)e^{zt}dz\right| \leq \max_{|z|=r} \frac{ce^{at}}{|z|^2} \cdot \text{délka U} \to 0 \cdot a = 0 \text{ pro } r \to \infty.$$

Stejným způsobem vyjde, že

$$\left|\int_V F(z)e^{zt}dz\right| \to 0 \text{ pro } r \to \infty.$$

Navíc ještě platí

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(re^{i\theta})e^{tre^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| &\leq \max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{tre^{i\theta}}\right| \mathrm{d}\theta \\
&\leq \max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{rt\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= 2\max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{rt\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= 2\max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{rt\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2\max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{rt\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2\max_{|z|=r} |F(z)|\, r \int_{0}^{\infty} e^{rt\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2\max_{|z|=r} |F(z)|\, r(-\frac{2}{rt}) \\
&= -4\max_{|z|=r} \frac{c}{|z|^2}\frac{1}{t} \to 0 \text{ pro } r \to \infty.
\end{aligned}
$$

Pro $t > 0$ platí tedy následující rovnosti

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{at}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zt}dz \\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{a-ir}^{a+ir} F(z)e^{zt}dz = 0,
\end{aligned}
$$

přičemž jsme použili substituci $z = a + i\omega$.

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, nulová pro $t > 0$ a $e^{-at}f(t)$ je omezená pro všechna t, je $e^{-ct}f(t)$ absolutně integrovatelná pro každé $c > a$. Proto má f Laplaceovu transformaci. Dále ověříme, že tato transformace je skutečně funkce F.

Pro každé $c > a$ platí

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}e^{ct}\int_{-\infty}^{\infty} F(c+i\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
2\pi e^{-ct}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}F(c+i\omega) \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi e^{-ct}f(t)e^{-i\omega t}dt &= F(c+i\omega) \\
\int_{0}^{\infty} f(t)^{-(c+i\omega)t} &= F(c+i\omega) \\
\mathcal{L}(f(t))[c+i\omega] &= F(c+i\omega).
\end{aligned}
$$

Protože funkce F je holomorfní na celé polorovině $\mathrm{Re}(z) \geq a$, $F(c+i\omega)$ splňuje předpoklady věty o inverzní Fourierově transformaci, což ospravedlňuje její použití. Z jednoznačnosti Fourierovy transformace dostáváme, že existuje pouze jedna funkce komplexní proměnné z, která je spojitá na přímce $z = c+i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, a která je Fourierovou transformací funkce f.

□

4. Lebesgue-Stieltjesův integrál

Cílem této kapitoly bude zadefinovat Lebesgue-Stieltjesův integrál, dokázat jeho základní vlastnosti, jako například linearitu, per partes a větu o substituci, a objasnit vztah s Lebesgueovým integrálem.

4.1 Lebesgue-Stieltjesova míra

Nechť $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zleva spojitá funkce a navíc platí, že $\eta \in BV([a, b])$. Dodefinujeme-li η následujícím způsobem

$$\eta(t) = \eta(b^+) \text{ pro } t > b$$
$$\eta(t) = \eta(a^-) \text{ pro } t < a,$$

pak platí, že $\eta \in BV((-\infty, \infty))$. Z toho ovšem plyne, že existují dvě neklesající, zleva spojité funkce η_1, η_2 takové, že

$$\eta = \eta_1 - \eta_2.$$

Dále si zadefinujme dvě množinové funkce $\mu_{\eta_1}, \mu_{\eta_2}$ následovně. Pokud $\{[a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ je množina disjunktních intervalů, pak položme

$$\mu_{\eta_k}\left(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^n \left(\eta_k(b_i^-) - \eta_k(a_i^-)\right) \text{ pro } k = 1, 2.$$

Nyní položme jako $\mathcal{A}$ množinu všech konečných sjednocení polouzavřených disjunktních intervalů tvaru $[c,d)$, kde $-\infty \leq c < d \leq \infty$, pro $c = -\infty$ uvažujme interval $(-\infty, d)$, společně s prázdnou množinou.

Věta 16. *$\mathcal{A}$ je algebra.*

Důkaz. Buď $\mathcal{E} := \{[a, b) : a < b\} \cup \emptyset$, kde pro $a = -\infty$ uvažujme interval $(-\infty, b)$, pak platí:

1. Pokud $E, F \in \mathcal{E}$, pak $E \cap F \in \mathcal{E}$, protože průnik dvou polouzavřených intervalů je buď prázdná množina nebo opět polouzavřený interval.

2. Pokud $E \in \mathcal{E}$, pak E^c je konečné sjednocení disjunktních intervalů z E.

Abychom dokázali, že $\mathcal{A}$ je algebra, musíme ověřit, zda je uzavřená na konečná sjednocení, na rozdíl, a zda obsahuje celou reálnou osu.

V důkazu, že $\mathcal{A}$ je uzavřená na konečná sjednocení, budeme postupovat indukcí. Nechť nejdříve $E, F \in \mathcal{E}$. Pak platí, že $F^c = \bigcup_{i=1}^k C_j$, kde $C_j \in \mathcal{E}$ pro $j = 1, \ldots, k$ a disjunktní. A tedy máme, že

$$E \cup F = (E \cap F^c) \cup F = F \cup \bigcup_{i=1}^k (C_j \cap E),$$

kde jsme $E \cup F$ zapsali jako sjednocení disjunktních intervalů náležících do $\mathcal{E}$. Jako indukční krok předpokládejme, že $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ je sjednocení disjunktních intervalů z $\mathcal{E}$, pak

$$E \cup F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap F^c) \right) \cup F$$

a opět dostáváme, že sjednocení jsme zapsali jako sjednocení disjunktních intervalů náležící do $\mathcal{E}$. Tedy jsme dokázali, že pro každé $E, F \in \mathcal{A}$ je $E \cup F \in \mathcal{A}$.

V důkazu, že $\mathcal{A}$ je uzavřená na rozdíly, budeme opět postupovat indukcí. Nechť nejdříve $E, F \in \mathcal{E}$. Pak opět platí, že $F^c = \bigcup_{i=1}^{k} C_j$, kde $C_j \in \mathcal{E}$ pro $j = 1, \ldots, k$ a disjunktní. A tedy máme, že

$$E \setminus F = E \cap F^c = \bigcup_{i=1}^{k} C_j \cap E$$

kde jsme $E \setminus F$ zapsali jako sjednocení disjunktních intervalů náležící do $\mathcal{E}$. Jako indukční krok předpokládejme, že $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ je sjednocení disjunktních intervalů z $\mathcal{E}$, pak

$$E \setminus F = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap F^c)$$

a opět dostáváme, že $E \setminus F$ jsme zapsali jako sjednocení disjunktních intervalů náležící do $\mathcal{E}$. Tedy jsme dokázali, že pro každé $E, F \in \mathcal{A}$ je $E \setminus F \in \mathcal{A}$.

Dále máme, že $\mathbb{R} = (-\infty, a) \cup [a, \infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$, z toho ovšem plyne, že $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Tudíž $\mathcal{A}$ je algebra.

$\square$

Pokud dodefinujeme funkce μ_{η_k}, $k = 1, 2$, pro prázdnou množinu následovně $\mu_{\eta_k}(\emptyset) = 0$, pak jsou tyto funkce pramírami na $\mathcal{A}$.

Věta 17. *μ_{η_k}, $k = 1, 2$ jsou pramíry na $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Již víme, že $\mu_{\eta_k}(\emptyset) = 0$ pro $k = 1, 2$. Stačí tedy dokázat, že pro množinu $A = \{[a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ disjunktních intervalů je $\mu_{\eta_k}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\eta_k}([a_i, b_i))$.

Protože $\mathcal{A}$ je množina všech konečných sjednocení polouzavřených disjunktních intervalů, stačí předpokládat, že $A = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$. Z toho, že jsou funkce η_k neklesající ihned plyne nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{\eta_k}([a_i, b_i)) \leq \mu_{\eta_k}(A) \text{ a tedy } \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\eta_k}([a_i, b_i)) \leq \mu_{\eta_k}(A).$$

K důkazu opačné nerovnosti zvolme $\varepsilon > 0$ a $\delta, \delta_i > 0$ takové, že $\mu_{\eta_k}(a - \delta) - \mu_{\eta_k}(a) < \varepsilon$ a $\mu_{\eta_k}(b_j - \delta_j) - \mu_{\eta_k}(b_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$, což můžeme, protože η_k jsou zleva spojité. Tedy máme, že interval $[a, b-\delta]$ je pokryt otevřenými intervaly $(a_j - \delta, b_j)$ a protože je $[a, b - \delta]$ kompaktní, existuje konečné podpokrytí. Z monotonie η_k nám tedy plyne, že

$$\mu_{\eta_k}(b) - \mu_{\eta_k}(a - \delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_k(b_j - \delta) - \eta_k(a_j))$$

a tedy

$$\mu_{\eta_k}(b) - \mu_{\eta_k}(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_k(b_j) - \eta_k(a_j)) + 2\varepsilon.$$

□

Z Hopfovy rozšiřovací věty tedy plyne, že existuje právě jedna konečná míra $\tilde{\mu}_{\eta_1}$ na $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ taková, že $\tilde{\mu}_{\eta_1} = \mu_{\eta_1}$ na $\mathcal{A}$ a právě jedna konečná míra $\tilde{\mu}_{\eta_2}$ na $\sigma(\mathcal{A})$ taková, že $\tilde{\mu}_{\eta_2} = \mu_{\eta_2}$ na $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Položme nyní $\mu_\eta = \tilde{\mu}_{\eta_1} - \tilde{\mu}_{\eta_2}$. Pak platí, že μ_η je znaménková míra na $= \mathcal{B}$.

Definice 3. *μ_η nazýváme Lebesgue-Stieltjesovou mírou příslušnou funkci η.*

Poznámka. Z definice Lebesgue-Stieltjesovy míry plyne, že Lebesgueova míra je speciální případ Lebesgue-Stieltjesovy míry, kde $\eta = x$, pro $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Lebesgue-Stieltjesův integrál

Definice 4. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}$ a $f > \Omega \in \mathbb{R}$ měřitelná. Její Lebesgue-Stieltjesův integrál podle μ_η definujeme postupně takto*

- *je-li f jednoduchá a nezáporná, pak f lze napsat ve tvaru $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, kde $c_j \geq 0$ a A_j jsou po dvou disjunktní, a definujeme*

$$\int_\Omega f \mu_\eta = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{\mu}_{\eta_1}(A_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{\mu}_{\eta_2}(A_j).$$

- *Je-li f nezáporná, definujeme*

$$\int_\Omega f \mu_\eta = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \sup \left\{ \int_\Omega s \tilde{\mu}_{\eta_i}; 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá měřitelná} \right\}.$$

- *Je-li f reálná, definujeme*

$$\int_\Omega f \mu_\eta = \int_\Omega f^+ \mu_\eta - \int_\Omega f^- \mu_\eta,$$

pokud rozdíl má smysl.

Poznámka. Z definice Lebesgue-Stieltjesova integrálu plyne, že Lebesgueův integrál je speciální případ Lebesgue-Stieltjesova integrálu, kde $\eta = x$.

4.2.1 Vlastnosti

V této sekci si uvedeme základní vlastnosti Lebesgue-Stieltjesova integrálu, omezíme se ovšem jen na integraci spojitých funkcí.

Značení 2. *Lebesgue-Stieltjesovu míru příslušnou funkci g budeme značit μ_g.*

Důkazy všech následujících vět můžeme nalézt v Tvrdý v kapitole 5, kde jsou ale tvrzení dokazována pro Riemann-Stietjesův integrál, platí ale následující vztah mezi Lebesgue-Stieltjesovým a Riemann-Stieltjesův integrálem, jehož důkaz lze nalézt v Jarník (1984) v kapitole X.

Věta 18. *Nechť $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ a nechť $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$, pak platí, že*

$$(\mathrm{RS})\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) = (\mathrm{LS})\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x)$$

Věta 19 (Existence)**.** *Nechť $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ a nechť $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$. Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) \text{ a } \int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu_f(x).$$

Věta 20 (Absolutní hodnota integrálu)**.** *Nechť $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$, $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ a nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[a,x]}(g)}(x)$. Pak platí, že*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[a,x]}(g)}(x) \leq \|f\|_\infty \,\mathrm{var}_{[a,b]}g.$$

Věta 21 (Linearita integrálu)**.** *Nechť $f, f_1, f_2 \in C([a,b],\mathbb{R})$ a $g, g_1, g_2 \in BV([a,b],\mathbb{R})$. Potom pro libovolné $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí, že*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\mathrm{d}\mu_g(x) = c_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}\mu_g(x) + c_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}\mu_g(x)$$

a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(\mu_{g_1}(x) + \mu_{g_2}(x)) = c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_{g_1}(x) + c_2\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_{g_2}(x)$$

Věta 22. *Jestliže $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$ a $c \in [a,b]$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) + \int_c^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x).$$

Věta 23. *Je-li $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$, pak jeden z integrálů*

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu_f(x) \text{ a } \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}(x)$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě platí, že

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu_f(x) = \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}(x)$$

Věta 24 (Integrace per partes)**.** *Je-li $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$, $c \in [a,b]$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) + \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Věta 25 (Substituce)**.** *Nechť funkce $\phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[\alpha,\beta]$ ryze monotónní a spojitá a zobrazuje tento interval na interval $[a,b]$. Potom pro $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ a $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$ platí*

$$\text{existuje-li } \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x), \text{ existuje také } \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\mathrm{d}\mu_g(\phi(x))$$

a

$$\pm\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\mathrm{d}\mu_g(\phi(x)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x),$$

kde „+“ platí, je-li ϕ rostoucí a „−“ platí, je-li ϕ klesající.

Věta 26 (Konvergenční věta)**.** *Nechť* $f, f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť platí, že posloupnost* $\{f_n\}$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \ a \ \ |f_n| \leq M < \infty \ \ pro \ x \in [a,b] \ \ a \ n \in \mathbb{N}.$$

Dále nechť funkce $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$ *je taková, že integrály*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) \ \ a \ \ \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}\mu_g(x)$$

existují pro každé $n \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}\mu_g(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x).$$

Věta 27 (Riesz)**.** L *je spojitý lineární funkcionál na* $C([a,b],\mathbb{R})$ *právě tehdy, když existuje funkce* $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$ *taková, že* $g(b) = 0, g(t) = g(t^-)$ *pro každé* $t \in (a,b)$ *a*

$$L(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu_g(x)$$

a $\|L\| = \mathrm{var}_{[a,b]}g$.

Poznámka. Lebesgue-Stieltjesův integrál můžeme definovat i ve více dimenzích. Pro $n \in \mathbb{N}$ buď $\eta = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $\eta_{ij} \in BV[a,b]$ pro každé $i,j = 1,\ldots,n$, a $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^\top$ funkce na $\mathbb{R}$ jdoucí do $\mathbb{R}^n$. Pak definujeme

$$\int_a^b d\mu_\eta(t)f(t) = \left(\sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{1j}}(t),\ldots,\sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{nj}}(t)\right)^\top,$$

kde integrály $\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{ij}}(t)$ jsou již zadefinované Lebesque-Stieltjesovy integrály.

Poznámka. Zatím jsme definovali Lebesgue-Stieltjesův integrál jen pro funkce na $\mathbb{R}$ jdoucí do $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Pro funkci f jdoucí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ definujeme

$$\int_a^b f(t)\mu_\eta(t) = \int_a^b (\mathrm{Re}\, f(t))\mu_\eta(t) + i\int_a^b (\mathrm{Im}\, f(t))\mu_\eta(t).$$

Pro funkci $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^\top$ jdoucí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, opět definujeme

$$\int_a^b d\mu_\eta(t)f(t) = \left(\sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{1j}}(t),\ldots,\sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{nj}}(t)\right)^\top,$$

kde

$$\int_a^b f_j(t)\mu_{\eta_{ij}}(t) = \int_a^b (\mathrm{Re}\, f_j(t))\mu_{\eta_{ij}}(t) + i\int_a^b (\mathrm{Im}\, f_j(t))\mu_{\eta_{ij}}(t).$$

5. Řešení lineární diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace

V této kapitole ukážeme, jak řešit lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty pomocí Laplaceovy transformace. Postupy použité v této kapitole mohou být reprodukovány při řešení obecnějších rovnic, jak si ukážeme v další kapitole této práce.

Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}$ je pevná konstanta, g: $I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce z prostoru L^1_+, splňující

$$|g(t)| \leq ae^{bt},$$

kde a a b jsou reálné konstanty, a uvažujme následující diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + g(t) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde funkce x je spojitá na $\mathbb{R}$. Dle Picardovy věty existuje právě jedno řešení (5.1) na $\mathbb{R}$. My toto řešení nalezneme pomocí Laplaceovy transformace.

Nejdříve se ale přesvědčíme, že x a x' splňují předpoklady k tomu, abychom na ně Laplaceovu transformaci mohli aplikovat.

Platí následující

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + g(t) \\ \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t Ax(s) + g(s)\mathrm{d}s \\ x(t) - x_0 &= \int_0^t Ax(s) + g(s)\mathrm{d}s \\ |x(t)| &\leq |x_0| + |A| \int_0^t |x(s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^t |g(s)|\,\mathrm{d}s \\ |x(t)| &\overset{(1)}{\leq} \left(|x_0| + \int_0^t |g(s)|\,\mathrm{d}s\right) e^{|A|t} = ce^{|A|t}, \end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili Grönwallovu větu 3 pro $u(t) = |x(t)|$, $\alpha(t) = |x_0| + \int_0^t |g(s)|$ a $\beta = |A|$. Nyní jsme dostali odhad na funkci x, tedy máme i odhad na její derivaci

$$|x'(t)| \leq |A|\, ce^{|A|t} + ae^{bt} \leq Ce^{\max\{b,|A|\}t} \text{ pro každé } t \in I.$$

Tedy funkce x, x' a g splňují předpoklady pro aplikaci Laplaceovy transformace pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{|A|, b\}$.

Nyní tedy počítejme

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + g(t) \quad (1) \\ \mathcal{L}(x'(t))[z] &= \mathcal{L}A(x(t) + g(t))[z] \quad (2) \\ z\mathcal{L}(x(t))[z] - x_0 &= A\mathcal{L}(x(t))[z] + \mathcal{L}(g(t))[z] \quad (3) \\ \mathcal{L}(x(t))[z] &= (z-A)^{-1}x_0 + (z-A)^{-1}\mathcal{L}(g(t))[z], \quad (4) \end{aligned}$$

přičemž ve kroku (1) ke (2) jsme na obě strany rovnice aplikovali Laplaceovu transformaci, ve kroku (2) ke (3) jsme využili linearity Laplaceovy transformace a větu o Laplaceově transformaci derivace (kde jsme využili spojitosti funkce x a x', jakožto součtu dvou spojitých funkcí). Ve kroku (3) ke (4) jsme od obou stran rovnice odečetli $A\mathcal{L}(x(t))[z]$, přičetli k oboum stranám rovnice x_0 a nakonec rovnost přenásobili $(z-A)^{-1}$, což je možné díky volbě z.

Dále tedy počítejme

$$\begin{aligned}(z-A)^{-1} &= \left(z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{z^k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{z^{k+1}}\\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}A^k\mathcal{L}\left(\frac{t^k}{k!}\right)[z]\\ &\overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}\left(\frac{(At)^k}{k!}\right)[z]\\ &\overset{(3)}{=} \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}\right)[z]\\ &= \mathcal{L}\left(e^{At}\right),\end{aligned} \tag{5.2}$$

přičemž v (1) jsme využili faktu, že

$$\int_0^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z^{k+1}}, \text{ pro } \operatorname{Re} z > 0,$$

ve (2)

$$\int_0^\infty A^k\frac{t^k}{k!}e^{-zt}\mathrm{d}t = \frac{A^k}{z^{k+1}}, \text{ pro } \operatorname{Re} z > 0,$$

a ve (3) větu o záměně sumy a Laplaceovy transformace 10, kde $f_k := \frac{(At)^k}{k!}$. Platí, že $\sigma_{f_k} = 0$, tedy pro $x_0 > 0$ máme

$$\int_0^\infty \left|\frac{(At)^k}{k!}\right| e^{-x_0 t}\mathrm{d}t = \frac{A^k}{{x_0}^{k+1}}$$

a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{{x_0}^{k+1}} = \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{x_0}\right)^k = -\frac{1}{x_0}\frac{x_0}{(A-x_0)} \text{ pro } \left|\frac{A}{x_0}\right| < 1$$

Tedy zvolíme $x_0 > |A|$ a touto volbou jsme oprávněni použít větu 10.

Dále počítejme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x(t))[z] &= (z-A)^{-1}x_0 + (z-A)^{-1}\mathcal{L}(g(t))[z]\\ &\overset{(1)}{=} \mathcal{L}\left(e^{At}\right)[z]x_0 + \mathcal{L}\left(e^{At}\right)\mathcal{L}(g(t))[z]\\ &\overset{(2)}{=} \mathcal{L}\left(x_0e^{At}\right)[z] + \mathcal{L}\left(e^{At} * g(t)\right)[z]\\ &\overset{(3)}{=} \mathcal{L}\left(x_0e^{At} + e^{At} * g(t)\right)[z]\\ &= \mathcal{L}\left(x_0e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)\mathrm{d}s\right)[z]\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme využili výpočtu (5.2) a ve (2) jsme aplikovali větu o linearitě a Laplaceově transformaci konvoluce 8. Ve (3) jsme opět využili věty 8.

Celkově jsme dostali

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right)[z] = \mathcal{L}\left(x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s) \mathrm{d}s\right)[z], \operatorname{Re} z > \max\{|A|, b\}.$$

Použitím Lerchovy věty 13 dostáváme, že

$$x(t) = x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s) \mathrm{d}s, t \in \mathbb{R}.$$

6. Řešení lineární funkcionální diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace

V této kapitole si ukážeme, jak řešit lineární funkcionální diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace. Budeme postupovat podle článku Franze Kappela, jenž byl uvěřejněn ve sbírce Arino (2006) jako kapitola 3. Doplníme ho o informace, které autor považoval za zřejmé, nebo nebyly uvedeny.

Značení 3. *Jako x_τ si označíme funkci x posunutou o τ, tj $x_\tau(t) := x(t+\tau)$.*

Uvažujme následující rovnici s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} x'(t) &= L(x_t), \quad t > 0 \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \end{aligned} \tag{6.1}$$

kde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, je pevná konstanta, $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R})$ a L lineární spojitý funkcionál na $C([-r,0],\mathbb{R})$. Řešením (6.1) budeme rozumět $x \in C([-r,\infty),\mathbb{R})$ splňující následující

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(0) + \int_0^t L(x_\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \phi(t), \quad -r \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Z Věty 27 plyne, že existuje funkce $\eta \in BV([-r,0],\mathbb{R})$ taková, že

$$L(x_\tau) = \int_{-r}^0 x_\tau(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s),$$

přičemž $\eta(0) = 0$ a $\eta(t) = \eta(t^-)$ pro každé $t \in (-r, 0)$. Tedy η je zleva spojitá. My funkci η dodefinujeme na celé $\mathbb{R}$ následovně

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 0 \text{ pro } t > 0 \\ \eta(t) &= \eta(-r) \text{ pro } t < -r, \end{aligned}$$

a tedy si můžeme rovnici (6.1) přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_{-r}^0 x_t(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s), \quad t > 0 \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

6.1 Existence řešení a jeho odhad

Abychom mohli vůbec o nějakém řešení problému (6.1) mluvit, musíme nejprve zjistit, zda vůbec nějaké existuje. Na tento problém nám odpoví následující věta.

Věta 28. *Pro každé* $\phi \in C([-r,0],\mathbb{C})$ *existuje právě jedno řešení rovnice* (6.1) *na* $[0,\infty)$.

Důkaz. K dokázání této věty použijeme Banachovu větu o pevném bodě 6.
Buď $\mathcal{B}$ prostor všech spojitých funkcí $y : [0,T] \to \mathbb{C}$, které splňují, že $y(0) = \phi(0)$. Dále pro $y \in \mathcal{B}$ definujme funkci $\tilde{y}$ předpisem

- $\tilde{y}(t) = \phi(t)$ pro $-r \leq t \leq 0$,
- $\tilde{y}(t) = y(t)$ pro $0 \leq t \leq T$.

Nyní si definujme operátor $\mathcal{T}_T$ na prostoru $\mathcal{B}$ následovně

$$(\mathcal{T}_T y)(t) := \phi(0) + \int_0^t \int_{-r}^0 \tilde{x}(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau, \quad t < T < \infty$$

K ospravedlnění použití Banachovy věty 6 musíme ovšem dokázat, že $\mathcal{B}$ je úplný neprázdný metrický prostor a že $\mathcal{T}_T$ je kontrakce pro všechna $T > 0$. Pokud toto dokážeme, pak bude existovat právě jedna funkce $x : [0,T] \to \mathbb{C}$, která bude pevným bodem operátoru $\mathcal{T}_T$ pro každé $T > 0$. Tedy pokud ještě dodefinujeme $x(t) := \phi(t)$ pro $-r \leq t \leq 0$, pak jsme našli funkci $x : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ splňující (6.1).

- $\mathcal{B}$ je úplný metrický prostor:
  Zvolme $\gamma < -\operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)$ a na prostoru $\mathcal{B}$ zaveďme metriku $\|\cdot\|_\gamma$ následovně

  $$\|y - z\|_\gamma := \sup_{0\leq t\leq T} |y(t) - z(t)|\, e^{\gamma t}, \quad y, z \in \mathcal{B}.$$

  Dále víme, že prostor $C([0,T],\mathbb{C})$ se supremovou metrikou ρ, kde $\rho(y,z) := \sup_{0\leq t\leq T} |y(t) - z(t)|$, $y, z \in C([0,T],\mathbb{C})$, je úplný metrický prostor. Jelikož metrika $\|\cdot\|_\gamma$ je ekvivalentní s ρ, stačí dokázat, že $\mathcal{B}$ s metrikou $\|\cdot\|_\gamma$ je uzavřená podmnožina prostoru $C([0,T],\mathbb{C})$.

  Buď f_n posloupnost funkcí z prostoru $\mathcal{B}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Našim cílem bude ukázat, že $f \in \mathcal{B}$. Z úplnosti prostoru $C([0,T],\mathbb{C})$ a faktu, že $\mathcal{B} \subset C([0,T],\mathbb{C})$ máme, že $f \in C([0,T],\mathbb{C})$. Navíc platí, že

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \phi(0)$$

  a tedy $f(0) = \phi(0)$, z čehož plyne, že $f \in \mathcal{B}$.

- $\mathcal{T}_T$ je kontrakce:
  Buď $y, z \in \mathcal{B}$, pak platí

  $$\begin{aligned}
  &|(\mathcal{T}_T y)(t) - (\mathcal{T}_T z)(t)| = \\
  &\left| \int_0^t \int_{-r}^0 \tilde{y}(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_{-r}^0 \tilde{z}(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau \right| \overset{(1)}{\leq} \\
  &\int_0^t \int_{-r}^0 |\tilde{y}(\tau+s) - \tilde{z}(\tau+s)|\, \mathrm{d}\mu_{(\operatorname{var}_{[-r,s]}(\eta))}(s)\mathrm{d}\tau \overset{(2)}{\leq} \\
  &\int_0^t \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)\, \|\tilde{y}_\tau - \tilde{z}_\tau\|\, \mathrm{d}\tau = \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^t \|\tilde{y}_\tau - \tilde{z}_\tau\|\, \mathrm{d}\tau,
  \end{aligned}$$

přičemž v (1) a (2) jsme využili větu 20.

Pro $t \in [-r, 0]$ máme, že $\tilde{y}_\tau - \tilde{z}_\tau = 0$ a proto

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}_\tau - \tilde{z}_\tau\| &= \sup_{-r \le \theta \le 0} |\tilde{y}(\tau+\theta) - \tilde{z}(\tau+\theta)| \, e^{\gamma(\tau+\theta)} e^{-\gamma(\tau+\theta)} \\ &= e^{-\gamma\tau} \sup_{0 \le t \le T} |y(t) - z(t)| \, e^{\gamma\tau} \\ &= e^{-\gamma\tau} \|y - z\|_\gamma .\end{aligned}$$

Tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned}|(\mathcal{T}_T y)(t) - (\mathcal{T}_T z)(t)| &\le \|y - z\|_\gamma \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^t e^{-\gamma\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta) \|y - z\|_\gamma \left(-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right) \\ &< -\frac{\operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)}{\gamma} \|y - z\|_\gamma \, e^{-\gamma t} \text{ pro } 0 \le t \le T.\end{aligned}$$

To ale implikuje, že

$$\|\mathcal{T}_T y - \mathcal{T}_T z\|_\gamma < -\frac{\operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)}{\gamma} \|y - z\|_\gamma .$$

Z volby $\gamma < -\operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)$ ale plyne, že

$$\|\mathcal{T}_T y - \mathcal{T}_T z\|_\gamma < l \, \|y - z\|_\gamma ,$$

kde $l < 1$, a tedy operátor $\mathcal{T}_T$ je kontrakce pro všechny $T > 0$.

$\square$

Nyní již víme, že řešení rovnice (6.1) existuje, ale neznáme jeho podobu. Ke zjištění tvaru řešení využijeme aplikace Laplaceovy transformace na (6.1). Abychom toto mohli udělat, musíme zjistit, jestli funkce x, x'a x_τ jsou z prostoru L^1_+. Na to nám odpoví následující věta.

Věta 29. *Nechť x je řešením rovnice* (6.1) *na intervalu* $[0, \infty)$. *Pak platí následující odhady*

$$\begin{aligned}\|x\| &\le \tilde{C}_\phi e^{C_\eta t}, \quad t \ge 0, \\ \left| \int_{-r}^0 x(t+s) \mathrm{d}\mu_\eta(s) \right| &\le C_\eta \tilde{C}_\phi e^{C_\eta t}, \quad t \ge 0, \\ \|x'\| &\le C_\eta \tilde{C}_\phi e^{C_\eta t}, \quad t \ge 0,\end{aligned}$$

kde $C_\eta = \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)$ a $\tilde{C}_\phi$ je konečná konstanta závislá na funkci ϕ.

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned}&x(t) = \phi(0) + \int_0^t \int_{-r}^0 x(\tau+s) \mathrm{d}\mu_\eta(s) \mathrm{d}\tau, \quad t \ge 0 \\ &x(t) = \phi(t), \quad -r \le t \le 0.\end{aligned}$$

Tedy máme následující odhad pro $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= \left|\phi(0) + \int_0^t \int_{-r}^0 x(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leq |\phi(0)| + \left|\int_0^t \int_{-r}^0 x(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\overset{(1)}{\leq} \|\phi\| + \int_0^t \int_{-r}^0 |x(\tau+s)| \,\mathrm{d}\mu_{(\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta))}(s)\mathrm{d}\tau, \\
&\leq \|\phi\| + \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^t \sup_{s\in[-r,0]} |x(\tau+s)| \,\mathrm{d}\tau \\
&= \|\phi\| + \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^t \sup_{t\in[\tau-r,\tau]} |x(t)| \,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme využili Věty 20.

Dále definujme funkci σ jako

$$\sigma(T) = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|\,.$$

Pak ale platí, že

$$\int_0^t \sup_{t\in[\tau-r,\tau]} |x(t)| \,\mathrm{d}\tau \leq \int_0^t (\sigma(\tau) + \|\phi\|)\,\mathrm{d}\tau$$

A tudíž

$$\sigma(T) \leq \tilde{C}_\phi + \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^T \sigma(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0.$$

Použitím Grönwallovy věty 3 pro $u = \sigma(T)$, $\alpha = \tilde{C}_\phi$, $\beta = \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)$ a $a = 0$ dostáváme, že

$$\sigma(T) \leq \tilde{C}_\phi e^{\int_0^t \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)\mathrm{d}s} = \tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}, \quad t \geq 0$$

a tudíž

$$\|x\| \leq \tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}, \quad t \geq 0.$$

Dále pro $t + \theta \geq 0$ platí, že

$$\begin{aligned}
|x(t+\theta)| &= \left|\phi(0) + \int_0^{t+\theta} \int_{-r}^0 x(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leq |\phi(0)| + \left|\int_0^{t+\theta} \int_{-r}^0 x(\tau+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\overset{(1)}{\leq} \|\phi\| + \int_0^{t+\theta} \int_{-r}^0 |x(\tau+s)| \,\mathrm{d}\mu_{(\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta))}(s)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \|\phi\| + \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) \int_0^{t+\theta} \sup_{t\in[\tau-r,\tau]} |x(t)| \,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme využili Věty 20 a stejným způsobem jako výše dostáváme, že

$$|x(t+\theta)| \leq \tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}, \quad t \geq 0 \quad t + \theta \geq 0.$$

Navíc pro $t + \theta \leq 0$

$$|x(t+\theta)| = |\phi(t+\theta)| \leq \|\phi\|\,,$$

a dostáváme, že

$$\|x_t\| \leq \tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}, \quad t \geq 0.$$

Tudíž

$$\left|\int_{-r}^{0} x(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right| \leq \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)\,\|x_t\| \leq \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)\tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}, \quad t \geq 0.$$

Nakonec ze vztahu

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} x(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s), \quad t > 0$$

a z předešlých odhadů, odhadneme funkci x' následovně

$$\|x'\| \leq \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)\,\|x_t\| \leq \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)\tilde{C}_\phi e^{(\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta))t}.$$

$\square$

6.2 Laplaceova transformace řešení

V této části aplikujeme Laplaceovu transformaci na obě strany rovnice (6.1). To můžeme udělat, jelikož z Věty 29 existuje Laplaceova transformace funkcí x, x' a x_τ alespoň pro $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)$.

Nyní již aplikujeme na obě strany rovnice Laplaceovu transformaci a uvažujeme $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{var}_{[-r,0]}(g)$. Dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x'(t))[z] &\overset{(1)}{=} \mathcal{L}\left(\int_{-r}^{-0} x(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)[z] \\
z\mathcal{L}(x(t))[z] - \phi(0) &\overset{(2)}{=} \int_0^\infty \int_{-r}^{0} x(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)e^{-zt}\mathrm{d}t \\
z\mathcal{L}(x(t))[z] - \phi(0) &\overset{(3)}{=} \int_{-r}^{0} \int_0^\infty x(t+s)e^{-zt}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
z\mathcal{L}(x(t))[z] - \phi(0) &\overset{(4)}{=} \int_{-r}^{0} \int_s^\infty x(\tau)e^{-z(\tau-s)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
z\mathcal{L}(x(t))[z] - \phi(0) &\overset{(5)}{=} \int_{-r}^{0} \int_s^0 \phi(\tau)e^{-z(\tau-s)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&\quad + \int_{-r}^{0} \int_0^\infty x(\tau)e^{-z(\tau-s)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
z\mathcal{L}(x(t))[z] - \phi(0) &\overset{(6)}{=} -\int_{-r}^{0} \int_0^s \phi(s-\xi)e^{z\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&\quad + \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathcal{L}(x(t))[z] \\
\mathcal{L}(x(t))[z]\left(z - \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right) &\overset{(7)}{=} \phi(0) - \int_{-r}^{0} \phi * e^{z}(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s),
\end{aligned}$$

přičemž:
(1) $\rightarrow$ (2) : na levé straně rovnosti jsme použili Větu 9. Z Věty 29 plyne, že x a x' jsou z prostoru L^1_+. Z předpokladů na řešení (6.1) máme spojitost funkce x. Zbývá ověřit spojitost funkce x'.

Platí, že x je stejnoměrně spojitá, protože

$$|x(t+\delta)-x(t)| = \left|\int_t^{t+\delta} L(x_\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq |\delta|\,\|L\|\,\|x_\tau\| \leq |\delta|\,\|L\|\,(\|x\|+\|\phi\|),$$

tedy pro každé $\varepsilon > 0$ zvolíme $\delta < \frac{\varepsilon}{\|x\|+\|\phi\|}$.

Nyní zvolme $\varepsilon > 0$, k němu nalezneme ze stejnoměrné spojitosti funkce x $\delta > 0$ a počítejme

$$\begin{aligned}|x'(t)-x'(t+\delta)| &= \left|\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s) - \int_{-r}^0 x(t+s+\delta)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right| \\ &\leq \int_{-r}^0 |x(t+s)-x(t+s+\delta)|\,\mathrm{d}_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\ &\leq \varepsilon\,\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta).\end{aligned}$$

Tedy funkce x' je spojitá a tím jsem ověřili všechny předpoklady věty 9.
(2) $\to$ (3) : Fubiniho věta.
(3) $\to$ (4) : Substituce $\tau = t+s$.
(4) $\to$ (5) : Roztržení integrálu podle počáteční podmínky.
(5) $\to$ (6) : Substituce $\xi = s-\tau$.
(6) $\to$ (7) : $\int_0^s \phi(s-\xi)e^{z\xi}\mathrm{d}\xi =: \phi * e^z(s)$

Celkově tedy dostáváme, že

$$\mathcal{L}(x(t))[z] = \left(\phi(0) - \int_{-r}^0 \phi * e^z(s)\mathrm{d}\mu_{\mathrm{g}}\eta(s)\right)\left(z - \int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)^{-1}. \tag{6.2}$$

Dále zadefinujme funkce $\hat{H}$ a $\hat{G}$ následovně

$$\begin{aligned}\hat{H}(z) &:= \phi(0) - \int_{-r}^0 \phi * e^z(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s), \\ \hat{G}(z) &:= z\left(1 - \frac{1}{z}\int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right).\end{aligned}$$

Nyní můžeme rovnost (6.2) přepsat následovně

$$\mathcal{L}(x(t))[z] = \hat{H}(z)\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}, \tag{6.3}$$

pro všechna z taková, že $\operatorname{Re} z > \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta)$ a splňující $\hat{G}(z) \neq 0$.

Definice 5. *Funkci* $z\left(1 - \frac{1}{z}\int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)$ *nazveme charakteristickou funkcí rovnice* (6.1).

Lemma 30. *Funkce* $\hat{H}$ *a* $\hat{G}$ *jsou holomorfní na* $\mathbb{C}$.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, pak pro $h \in \mathbb{R}, |h| < \varepsilon$ a $z \in \mathbb{C}$, platí

$$\begin{aligned}\hat{G}(z+h) - \hat{G}(z) &= z + h - \int_{-r}^0 e^{zs}e^{hs}\mathrm{d}\mu_\eta(s) - z + \int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\ &= h + \int_{-r}^0 e^{zs}(1-e^{hs})\mathrm{d}\mu_\eta(s)\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\hat{G}(z+h)-\hat{G}(z)}{h} = 1 + \int_{-r}^{0} e^{zs}\left(\frac{1-e^{hs}}{h}\right)\mathrm{d}\mu_\eta(s),$$

z toho ovšem plyne, že

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\hat{G}(z+h)-\hat{G}(z)}{h}\right| &\le 1 + \left|\int_{-r}^{0} e^{zs}\left(\frac{1-e^{hs}}{h}\right)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right| \\
&\le 1 + \int_{-r}^{0} e^{(\operatorname{Re} z)s}\left|\frac{1-e^{hs}}{h}\right|\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\overset{(1)}{\le} 1 + \sup_{s\in[-r,0]} e^{(\operatorname{Re} z)s}c(\varepsilon)e^{\frac{h}{2}}\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\overset{(2)}{\le} 1 + \sup_{s\in[-r,0]} e^{(\operatorname{Re} z)s}c(\varepsilon)e^{\frac{h}{2}}\,\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) < \infty,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

přičemž v (1) a (2) jsme využili Větu 20 a také odhadu, že $\left|\frac{1-e^{hs}}{h}\right| < c(\varepsilon)e^{\frac{h}{2}} < \infty$. Dále ovšem máme, že $\lim_{|h|\to 0}\frac{1-e^{hs}}{h} = -s$, položíme-li $f_h(s) = e^{zs}\left(\frac{1-e^{hs}}{h}\right)$, pak z odhadu (6.4) plyne, že

$$\int_{-r}^{0} e^{zs}\left(\frac{1-e^{hs}}{h}\right)\mathrm{d}\mu_\eta(s)$$

existuje a tudíž můžeme použít Větu 26 a dostáváme, že

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{\hat{G}(z+h)-\hat{G}(z)}{h} = \int_{-r}^{0}\lim_{|h|\to 0} e^{zs}\left(\frac{1-e^{hs}}{h}\right)\mathrm{d}\mu_\eta(s) = 1 - \int_{-r}^{0} e^{zs}s\,\mathrm{d}\mu_\eta(s).$$

Tedy $\hat{G}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$.

Podobným způsobem ověříme holomorfnost funkce $\hat{H}$.

$$\begin{aligned}
\hat{H}(z+h)-\hat{H}(z) &= -\int_{-r}^{0}\int_{0}^{s}\phi(s-\xi)e^{z\xi}e^{h\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&\quad + \int_{-r}^{0}\int_{0}^{s}\phi(s-\xi)e^{z\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&= \int_{-r}^{0}\int_{0}^{s}\phi(s-\xi)e^{z\xi}(1-e^{h\xi})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s),
\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\hat{H}(z+h)-\hat{H}(z)}{h} = \int_{-r}^{0}\int_{0}^{s}\phi(s-\xi)e^{z\xi}\frac{1-e^{h\xi}}{h}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s).$$

Z toho ovšem plyne, že

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\hat{H}(z+h)-\hat{H}(z)}{h}\right| &= \left|\int_{-r}^{0}\int_{0}^{s}\phi(s-\xi)e^{z\xi}\frac{1-e^{h\xi}}{h}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_{\eta}(s)\right| \\
&\leq \int_{-r}^{0}\left|\int_{s}^{0}\phi(\omega)e^{z(\omega-s)}\frac{1-e^{h(\omega-s)}}{h}\mathrm{d}\omega\right|\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \int_{-r}^{0}\int_{s}^{0}|\phi(\omega)|\,e^{\operatorname{Re}z(\omega-s)}\left|\frac{1-e^{h(\omega-s)}}{h}\right|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \int_{-r}^{0}\|\phi\|\,e^{-(\operatorname{Re}z)s}e^{-\frac{h}{2}s}\int_{s}^{0}c(\varepsilon)e^{\frac{h}{2}\omega}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \|\phi\|\sup_{s\in[-r,0]}e^{-s((\operatorname{Re}z)+\frac{h}{2})}c(\varepsilon)\int_{-r}^{0}\int_{s}^{0}e^{\frac{h}{2}\omega}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \|\phi\|\sup_{s\in[-r,0]}e^{-s(\operatorname{Re}z)}c(\varepsilon)\int_{-r}^{0}|s|\,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \|\phi\|\sup_{s\in[-r,0]}e^{-s(\operatorname{Re}z)}c(\varepsilon)r\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \|\phi\|\sup_{s\in[-r,0]}e^{-s(\operatorname{Re}z)}c(\varepsilon)r\,\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta).
\end{aligned}$$

Stejným způsobem jako u funkce $\hat{G}$ dostáváme, že derivace funkce $\hat{H}$ existuje pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a tudíž je holomorfní na $\mathbb{C}$.

□

Z Lemmatu 30 plyne, že funkce $\mathcal{L}(x(t))$ je definována na množině $\left\{z \in \mathbb{C} : \hat{G}(z) \neq 0\right\}$ a je meromorfní s případnými póly v bodech $\hat{G}(z) = 0$.

Poznámka. Z definicí funkcí $\hat{H}$ a $\hat{G}$ vidíme, že počáteční podmínka rovnice (6.1) se vyskytuje jen ve funkci $\hat{H}$. Proto se nejdříve zaměříme na funkci $\hat{G}$.

6.2.1 Fundamentální řešení

Naším dalším cílem bude odhadnout funkci $\frac{1}{z}\int_{-r}^{0}e^{zs}\mathrm{d}\mu_{\eta}(s)$, abychom mohli vyjadřit $\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}$ jako sumu podle vzorce $(1-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-r}^{0}e^{zs}\mathrm{d}\mu_{\eta}(s)\right| &\leq \int_{-r}^{0}e^{(\operatorname{Re}z)s}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \\
&\leq \sup_{s\in[-r,0]}e^{(\operatorname{Re}z)s}\,\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta).
\end{aligned}$$

Tedy máme, že

$$\left|\int_{-r}^{0}e^{zs}\mathrm{d}\mu_{\eta}(s)\right| \leq \begin{cases} \mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) & \text{pro } \operatorname{Re}z \geq 0, \\ e^{-r\operatorname{Re}z}\,\mathrm{var}_{[-r,0]}(\eta) & \text{pro } \operatorname{Re}z < 0. \end{cases}$$

Dále můžeme nalézt konstantu $K > 0$ takovou, že pro všechny $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}z > K$, bude platit

$$\left|\frac{1}{z}\int_{-r}^{0}e^{zs}\mathrm{d}\mu_{\eta}(s)\right| \leq \frac{K}{|z|} < \frac{K}{K} = 1.$$

Nyní již můžeme vyjádřit funkci $\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > K$, jako

$$\begin{aligned}\left(\hat{G}(z)\right)^{-1} &= z^{-1}\left(1 - \frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)^{j} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)^{j} \\ &:= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\infty}(\hat{g}(z))^{j}\end{aligned}$$

Cílem našeho dalšího snažení bude najít funkci, jejíž Laplaceova transformace je $\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}$.

Věta 31. *Funkce*

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s), z \neq 0$$

je Laplaceovou transformací funkce $g_1(t) = -\eta(-t)$, $t \geq 0$. Dále platí, že funkce $\hat{g}^j$, $j = 1, 2, \ldots$, je Laplaceovou transformací funkce g_j, což je j-krát iterovaná konvoluce funkce g_1. Navíc

$$\int_0^\infty e^{-zt}\left|g_j(t)\right|\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^\infty e^{-zt}\left|g_1(t)\right|\mathrm{d}t\right)^j < \infty, \operatorname{Re} z > 0.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s) &\overset{(1)}{=} \frac{1}{z}e^{0z}\eta(0) - \frac{1}{z}e^{-rz}\eta(-r) - \int_{-r}^{0} e^{zs}\eta(s)\mathrm{d}s \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{z}e^{-rz}\eta(-r) - \int_0^r e^{-zs}\eta(-s)\mathrm{d}s \\ &\overset{(3)}{=} -\eta(-r)\int_r^\infty e^{-sz}\mathrm{d}s - \int_0^r e^{-zs}\eta(-s)\mathrm{d}s \\ &\overset{(4)}{=} -\int_0^\infty e^{-zs}\eta(-s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili Větu 24, ve (2) fakt, že $\eta(0) = 0$, ve (3) jsme si uvědomili rovnost $\frac{1}{z}e^{-rz}\eta(-r) = \eta(-r)\int_r^\infty e^{-sz}\mathrm{d}s$ a nakonec ve (4) jsme použili Větu 22. Navíc platí, že $\sup_{0\leq t<\infty}|\eta(-t)| = a < \infty$ a tedy

$$\left|-\int_0^\infty e^{-zs}\eta(-s)\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} z)s}a\mathrm{d}s = \frac{a}{\operatorname{Re} z} < \infty \text{ pro } \operatorname{Re} z > 0.$$

Tedy dostáváme, že $\mathcal{L}(g_1(t))[z] = \frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\eta(s)$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. Dále

$$\begin{aligned}\hat{g}(z)^2 &= \left(\mathcal{L}(g_1(t))[z]\right)^2 \\ &= \left(\mathcal{L}(-\eta(-t))[z]\right)^2 \\ &= \left(\mathcal{L}(-\eta(-t))[z]\right)\left(\mathcal{L}(-\eta(-t))[z]\right) \\ &= \mathcal{L}\left((-1)^2\eta(-t) * \eta(-t)\right)[z],\end{aligned}$$

přičemž v posledním řádku jsme použili Větu 8.

Induktivně platí, že

$$\hat{g}(z)^j = \mathcal{L}\left((-1)^j \eta(-t) \underbrace{* \cdots *}_{\text{(j-1)-krát}} \eta(-t)\right)[z].$$

Druhou část věty dokážeme indukcí.

Pro $j = 1$ je tvrzení zřejmé. Tedy předpokládejme, že nerovnost platí pro $j-1$. Pak dostáváme pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-zt} |g_j(t)| \,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty e^{-zt} \left| \int_0^t g_1(t-\tau) g_{j-1}(\tau) \mathrm{d}\tau \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t |g_1(t-\tau)| \, |g_{j-1}(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-z(t-\tau)} |g_1(t-\tau)| \, e^{-zt} |g_{j-1}(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-zt} |g_1(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \int_0^\infty e^{-zt} |g_{j-1}| \, (\tau) \mathrm{d}\tau \\
&\leq \left(\int_0^\infty e^{-zt} |g_1(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \right)^j,
\end{aligned}$$

přičemž v posledním řádku jsme použili indukční předpoklad pro $j-1$. Z toho ovšem plyne, že

$$\left| \int_0^\infty e^{-zt} g_j(t) \mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} z)\tau} |g_1| \, (\tau) \mathrm{d}\tau \right)^j \leq \left(\frac{a}{\operatorname{Re} z} \right)^j$$

a tedy $\sigma_{g_j} = 0$ pro každé $j = 1, 2, \ldots$.

□

Věta 32. $\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}$ *je Laplaceovou transformací funkce*

$$Y(t) := 1 + \int_0^t \sum_{j=1}^\infty g_j(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0,$$

kde $g_j(t) = (-1)^j \eta(-t) \underbrace{* \cdots *}_{\text{(j-1)-krát}} \eta(-t)$, $j = 1, 2, \ldots$.
Dále platí, že $\sigma_Y = \sup_{0 \leq t < \infty} |g_1(t)|$ *a že* $Y \in AC_{\mathrm{loc}}([0,\infty), \mathbb{R})$.

Důkaz. Z Věty 31 máme následující vyjádření funkce $\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}$ pro $\operatorname{Re} z > 0$

$$\left(\hat{G}(z)\right)^{-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}(g_i(t))[z].$$

Dále platí, že

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \mathcal{L}(1)[z], \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Tedy dohromady máme, že

$$\left(\hat{G}(z)\right)^{-1} = \mathcal{L}(1)[z] + \mathcal{L}(1)[z] \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}(g_j(t))[z], \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Naším dalším cílem bude aplikovat Větu 10 na $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(g_j(t))[z]$, jejíž předpoklady záhy ověříme. Tedy budeme mít

$$\begin{aligned}
\left(\hat{G}(z)\right)^{-1} =& \mathcal{L}(1)[z] + \mathcal{L}(1)[z] \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(g_j(t))[z] \\
\overset{(1)}{=}& \mathcal{L}(1)[z] + \mathcal{L}(1)[z] \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j(t)\right)[z] \\
\overset{(2)}{=}& \mathcal{L}(1)[z] + \mathcal{L}\left(1 * \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t)\right)[z] \\
=& \mathcal{L}(1)[z] + \mathcal{L}\left(\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\tau) \mathrm{d}\tau\right)[z] \\
\overset{(3)}{=}& \mathcal{L}\left(1 + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\tau) \mathrm{d}\tau\right)[z]
\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme použili větu 10, ve (2) a (3) Větu 8.

Z vyjádření funkce $Y(t)$ vidíme, že je součtem 1 a integrálu od 0 do t z funkce z $L^1([0,T],\mathbb{R})$, kde $t \in \mathbb{R}^+$ pro každé $t \in (0,\infty)$. Tedy $Y \in AC([0,T],\mathbb{R})$, pro každé $T \in (0,\infty)$, tudíž $Y \in AC_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathbb{R})$.

Nyní ověříme předpoklady Věty 10 na $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(g_j(t))[z]$. Z věty 31 platí, že $0 = \sigma_{g_j}$ pro každé $j = 1, 2, \ldots$ a dále

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_0 t} |g_j(t)| \, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a}{x_0}\right)^j < \infty \text{ pro } x_0 > a.$$

Tímto jsem ověřili předpoklady Věty 10.

Dále ovšem víme, že

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(Y(t))[z]| &= \left| \left(\hat{G}(z)\right)^{-1} \right| \\
&\leq \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{Re} z)t} |g_j(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\operatorname{Re} z}\right)^j \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pro všechna $\operatorname{Re} z > a = \sup_{0 \leq t < \infty} |g_1(t)|$. Tedy $\sigma_Y = \sup_{0 \leq t < \infty} |g_1(t)|$.

□

Věta 33. *Funkce $Y(t)$ je jediné řešení rovnice*

$$\begin{aligned}
Y(t) &= 1 - \int_0^t Y(t-\tau)\eta(-\tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0, \\
Y(t) &= 0, \quad t < 0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Důkaz. Máme, že

$$\begin{aligned}
\hat{G}(z) =& z\left(1-\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\eta(s)\right)\\
\frac{1}{z}\hat{G}(z) =& 1-\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\eta(s)\\
\frac{1}{z} =& \left(\hat{G}(z)\right)^{-1}-\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\eta(s)\\
\frac{1}{z}+\left(\hat{G}(z)\right)^{-1}\frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\eta(s) =& \left(\hat{G}(z)\right)^{-1}\\
\mathcal{L}(1)(z)+\mathcal{L}\left(Y(t)\right)(z)\mathcal{L}\left(-\eta(-t)\right)[z] =& \mathcal{L}\left(Y(t)\right)(z)\\
\mathcal{L}(1)(z)+\mathcal{L}\left(Y(t)*-\eta(-t)\right)[z] =& \mathcal{L}\left(Y(t)\right)(z)\\
\mathcal{L}(1)(z)+\mathcal{L}\left(-\int_0^t Y(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right)[z] =& \mathcal{L}\left(Y(t)\right)(z)\\
\mathcal{L}(1)(z)-\mathcal{L}\left(\int_0^t Y(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right)[z] =& \mathcal{L}\left(Y(t)\right)(z),\\
1-\int_0^t Y(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau =& Y(t)
\end{aligned}$$

<u>Jednoznoznačnost řešení:</u>
Buď Y_1 a Y_2 dvě řešení rovnice (6.5), pak pro $t \geq 0$ platí, že

$$\begin{aligned}
|Y_1(t)-Y_2(t)| &= \left|1-\int_0^t Y_1(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau-1+\int_0^t Y_2(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t Y_2(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t Y_1(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t Y_2(t-\tau)\eta(-\tau)-Y_1(t-\tau)\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t (Y_2(t-\tau)-Y_1(t-\tau))\eta(-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\\
&= \left|-\int_t^0 (Y_2(T)-Y_1(T))\eta(T-t)\mathrm{d}T\right|\\
&= \left|\int_0^t (Y_2(T)-Y_1(T))\eta(T-t)\mathrm{d}T\right|\\
&\leq \sup_{-r\leq\theta\leq 0}|\eta(\theta)|\int_0^t \left|Y_2(T)-Y_1(T)\right|\mathrm{d}T\\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

přičemž v posledním řádku jsme použili Větu 3 pro $u(t)=|Y_1(t)-Y_2(t)|$, $\alpha(t)=0$ a $\beta(s)=\sup_{-r\leq\theta\leq 0}$. Tedy $Y_1 \equiv Y_2$.

□

Definice 6. *Funkci Y nazveme fundamentálním řešením rovnice* (6.1).

6.2.2 Variace konstant

Z (6.3) máme, že

$$\mathcal{L}(x(t))[z]=\hat{H}(z)\hat{G}(z)^{-1},$$

kde

$$\hat{H}(z) := \phi(0) - \int_{-r}^{0} \phi * e^{z}(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s),$$
$$\hat{G}(z) := z\left(1 - \frac{1}{z}\int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right).$$

V předchozí části jsme zjistili, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{G}(z)^{-1}\right)(t) = Y(t), t \geq 0.$$

Nyní se zaměříme na funkci $\hat{H}$. Nejprve si funkci $\hat{H}$ rozepíšeme následovně

$$\hat{H}(z) = \phi(0) + \hat{H}_1(z),$$

kde

$$\hat{H}_1(z) = -\int_{-r}^{0} \phi * e^{z}(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s).$$

Následující věta nám řekne, zda můžeme $\hat{H}_1$ napsat jako Laplaceovu transformaci nějaké funkce.

Věta 34. *$\hat{H}_1$ je Laplaceovou transformací funkce*

$$h_1(t) = \begin{cases} \int_{-r}^{-t} \phi(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s), & 0 \leq t \leq r, \\ 0, & t > r. \end{cases}$$

Pokud ale rozšíříme funkci ϕ nulou pro $t > 0$, dostáváme, že

$$h_1(t) = \int_{-r}^{0} \phi(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s).$$

Důkaz. Je pravdou, že

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1(z) &= -\int_{-r}^{0} \phi * e^{z}(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&= -\int_{-r}^{0}\int_{0}^{s} \phi(s-\xi)e^{z\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&= \int_{-r}^{0}\int_{s}^{0} \phi(\tau)e^{-z(\tau-s)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&= \int_{-r}^{0}\int_{0}^{-s} \phi(T+s)e^{-zT}\mathrm{d}T\mathrm{d}\mu_\eta(s) \\
&= \int_{0}^{r}\int_{-r}^{-T} \phi(T+s)e^{-zT}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\mathrm{d}T \\
&= \int_{0}^{r} e^{-zT}h_1(T)\mathrm{d}T \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-zT}h_1(T)\mathrm{d}T \\
&= \mathcal{L}(h_1(t))[z].
\end{aligned}$$

□

Nyní již můžeme zformulovat a dokázat hlavní větu této sekce.

Věta 35 (Variace konstant)**.** *Řešení rovnice* (6.1) *ja dáno předpisem*

$$x(t) = \phi(0)Y(t) + \int_0^t L(\phi_\tau)Y(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

kde $L(\phi_\tau) = \int_{-r}^0 \phi_\tau(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)$.

Důkaz. Z (6.3) máme, že

$$\mathcal{L}(x(t))[z] = \hat{H}(z)\hat{G}(z)^{-1}$$

a dále platí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \left(\phi(0) + \hat{H}_1(z)\right)\hat{G}(z)^{-1} \\
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \left(\phi(0) + \mathcal{L}\left(\int_{-r}^0 \phi(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)[z]\right)\mathcal{L}\left(Y(t)\right)[z] \\
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \phi(0)\mathcal{L}\left(Y(t)\right)[z] + \mathcal{L}\left(\int_{-r}^0 \phi(t+s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)[z]\mathcal{L}\left(Y(t)\right)[z] \\
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \mathcal{L}\left(\phi(0)Y(t)\right)[z] + \mathcal{L}\left(L(\phi_t) * Y(t)\right) \\
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \mathcal{L}\left(\phi(0)Y(t) + L(\phi_t) * Y(t)\right) \\
\mathcal{L}(x(t))[z] &= \mathcal{L}\left(\phi(0)Y(t) + \int_0^t L(\phi_\tau)Y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

Užitím Lerchovy věty tedy dostáváme, že

$$x(t) = \phi(0)Y(t) + \int_0^t L(\phi_\tau)Y(t-\tau)\mathrm{d}\tau \text{ pro skoro všechna } t > 0.$$

□

6.2.3 Exponenciální odhad řešení

Cílem této části bude dokázat, co nejlepší exponenciální odhad funkce x.

Definice 7. *Buď* $\omega_{L,\phi} = \sup\{\operatorname{Re} z | \hat{G}(z) = 0\}$.

Poznámka. Platí, že

$$\hat{G}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s),$$

Dále máme následující odhad

$$|z| = \left|\int_{-r}^0 e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right| \leq \int_{-r}^0 e^{(\operatorname{Re} z)s}\mathrm{d}\mu_{\operatorname{var}_{[-r,s]}(\eta)}(s) \leq \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta), \text{ pro } \operatorname{Re} z > 0.$$

Z toho ovšem plyne, že $\omega_{L,\phi} < \infty$.

Věta 36.

Nejprve si $\mathcal{L}(x(t))[z] = \hat{G}(z)^{-1}\hat{H}(z)$ rozepíšeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\hat{G}(z)^{-1}\hat{H}(z) &= \hat{G}(z)^{-1}\hat{H}(z) - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\hat{H}(z) + (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\hat{H}(z) \\
&= \left(\hat{G}(z)^{-1} - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\right)\hat{H}(z) + (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\hat{H}(z) \\
&= a_1 + a_2,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(\hat{G}(z)^{-1} - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\right)\hat{H}(z) \\
a_2 &= (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\hat{H}(z)
\end{aligned}$$

A tedy

$$\mathcal{L}(x(t))[z] = a_1 + a_2.$$

<u>a_1 jako Laplaceova transformace:</u>
Funkci $\hat{G}(z)^{-1} - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}$ můžeme rozepsat následovně

$$\begin{aligned}
\hat{G}(z)^{-1} - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}I &= \hat{G}(z)^{-1}(z-\omega_{L,\phi})(z-\omega_{L,\phi})^{-1} \\
&\quad - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\hat{G}(z)^{-1}\hat{G}(z) \\
&= \hat{G}(z)^{-1}(z-\omega_{L,\phi})^{-1}\left((z-\omega_{L,\phi})I - \hat{G}(z)\right) \\
&\overset{(1)}{=} \hat{G}(z)^{-1}(z-\omega_{L,\phi})^{-1}\left(-\omega_{L,\phi}I + z - z + \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right) \\
&= \hat{G}(z)^{-1}(z-\omega_{L,\phi})^{-1}\left(-\omega_{L,\phi}I + \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right),
\end{aligned}$$

přičemž v (1) jsme si uvědomili, že $\hat{G}(z) = z - \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)$. Nyní již můžeme přejít k samotnému odhadu funkce a_1.

Nyní buď $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z = \gamma := \omega_{L,\phi} + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ libovolně malé.

$$\begin{aligned}
&\left|\hat{G}(z)^{-1}(z-\omega_{L,\phi})^{-1}\left(-\omega_{L,\phi} + \int_{-r}^{0} e^{zs}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)\hat{H}(z)\right| \leq \\
&\left|\hat{G}(\gamma+i\tau)^{-1}(\gamma+i\tau-\omega_{L,\phi})^{-1}\left(-\omega_{L,\phi} + \int_{-r}^{0} e^{(\gamma+i\tau)s}\mathrm{d}\mu_\eta(s)\right)\hat{H}(\gamma+i\tau)\right| \leq \\
&\frac{K}{\tau}\frac{1}{|\tau|}(|\omega_{L,\phi}| + N)M\|\phi\| \leq \frac{\hat{K}}{|\tau|^2}\|\phi\|.
\end{aligned}$$

Tedy podle věty 14 je funkce $\left(\hat{G}(z)^{-1} - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\right)\hat{H}(z)$ Laplaceovou transformací funkce

$$f(t) = e^{\gamma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

a platí, že

$$\left|e^{\gamma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right| \leq \tilde{C}e^{\gamma t}\|\phi\|$$

<u>a_2 jako Laplaceova transformace:</u>
Nejprve si uvědomíme, že

$$
\begin{aligned}
a_2 &= (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\phi(0) - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\int_{-r}^{0}\phi * e^{z}(s)\mathrm{d}\mu_\eta(s)\\
&= (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\phi(0) - (z-\omega_{L,\phi})^{-1}L(\phi * e^{z}).
\end{aligned}
$$

Dále buď $\operatorname{Re} z > \omega_{L,\phi}$, pak platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0)\right)[z] &= \int_0^\infty e^{-zt}e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty e^{(\omega_{L,\phi}-z)t}\phi(0)\mathrm{d}t\\
&= (z-\omega_{L,\phi})^{-1}\,\phi(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t} * L(\phi_t)\right)[z] &= \mathcal{L}(e^{\omega_{L,\phi}t})[z]\mathcal{L}(L(\phi_t))[z]\\
&= \int_0^\infty e^{(\omega_{L,\phi}-z)t}\mathrm{d}t(-L(\phi * e^{z}))\\
&= -(z-\omega_{L,\phi})^{-1}L(\phi * e^{z}).
\end{aligned}
$$

Tedy máme, že

$$
a_2 = \mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0)\right)[z] + \mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t} * L(\phi_t)\right)[z]
$$

a

$$
\left|e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0) + e^{\omega_{L,\phi}t}L(\phi_t)\right| \le e^{\gamma t}\left\|\phi\right\|\tilde{B}.
$$

Nové vyjádření funkce $\mathcal{L}(x(t))[z]$:
Tedy nyní máme, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že $\operatorname{Re} z > \omega_{L,\phi}$, platí

$$
\mathcal{L}(x(t))[z] = \mathcal{L}(f(t))[z] + \mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0)\right)[z] + \mathcal{L}\left(e^{\omega_{L,\phi}t} * L(\phi_t)\right)[z].
$$

Podle Lerchovy věty pak pro skoro všechna $t \ge 0$ platí

$$
x(t) = f(t) + e^{\omega_{L,\phi}t}\phi(0) + e^{\omega_{L,\phi}t} * L(\phi_t)
$$

a podle předchozích odhadů tedy máme, že

$$
|x(t)| \le \tilde{D}\left\|\phi\right\|e^{\gamma t} = \tilde{D}\left\|\phi\right\|e^{(\omega_{L,\phi}+\varepsilon)t}.
$$

6.2.4 Rozšíření do maticové formy

Pro větší přehlednost jsme dosud řešili rovnici (6.1), kde $x \in C\left([-r,\infty),\mathbb{R}\right)$, $\phi \in C\left([-r,0),\mathbb{R}\right)$ a $\eta \in BV([-r,0],\mathbb{R})$. Mohli bychom ale uvažovat i složitější rovnici, kdy $x \in C([-r,\infty),\mathbb{C}^n)$, $\phi \in C([-r,0],\mathbb{C}^n)$ a $\eta = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je matice $n \times n$, kde $\eta_{ij} \in BV([-r,0],\mathbb{R})$ pro všechna $i,j = 1,\dots,n$. To jest nově bychom měli rovnici

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\mu_\eta(s)x_t(s), \quad t > 0,\\
x(t) &= \phi(t), \quad -r \le t \le 0,
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

přičemž

$$
\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\mu_\eta(s)x_t(s) = \left(\sum_{j=1}^{n}\int_{-r}^{0}x_j(s)\mu_{\eta_{1j}}(s),\dots,\sum_{j=1}^{n}\int_{-r}^{0}x_j(s)\mu_{\eta_{nj}}(s)\right)^{\top}
$$

je Lebesgue-Stieltjesův integrál. Stejným způsobem jako v předešlých částech bychom došli k tomu, že Laplaceova transformace nyní již vektorové funkce x lze vyjádřit jako

$$\mathcal{L}(x(t))[z] = \left(\hat{G}(z)\right)^{-1} \hat{H}(z),$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že $\operatorname{Re} z > \operatorname{var}_{[-r,0]}(\eta)$ a $\det\left(\hat{G}(z)\right) \neq 0$. Funkce $\det\left(\hat{G}(z)\right)$ by tedy nově byla charakteristickou funkcí příslušnou rovnici (6.6) a nyní již vektorová funkce Y by byla fundamentálním řešením rovnice (6.6).

Seznam použité literatury

ARINO, O., editor (2006). *Delay Differential Equations and Applications.* Springer, United Kingdom. ISBN 1-4020-3646-0(PB).

DOETSCH, G. (1950). *Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation.* Birkhäuser, Basel.

HALE, J. K. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations.* 2.nd edition. Springer, New York. ISBN 0-387-94076-6.

JARNÍK, V. (1984). *Integrální počet II.* Academia, Praha. ISBN 104-21-853.

RUDIN, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, Inc. ISBN 978-0070542358.

RUDIN, W. (2003). *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Vydání 2., přepracované. Academia, Praha. ISBN 80-200-1125-0.

TVRDÝ, M. Stietjesův integrál (Kurzweilova teorie).

ZEMANIAN, A. H. (1965). *Distribution theory and transform analysis : an introduction to generalized functions, with applications.* McGraw-Hill, New York.