

Univerzita Karlova  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Goniometrické funkce ve fyzikálních aplikacích

Goniometric functions in physical applications

František Hanzlík

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.  
Studijní program: Specializace v pedagogice  
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Goniometrické funkce ve fyzikálních aplikacích potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 2020

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Ladislavovi Kvaszovi, DSc., Dr., za významnou a všestrannou pomoc v průběhu jejího vytváření. Zejména chci poděkovat za průběžnou, rychlou a velmi důkladnou kontrolu v různých fázích dokončování bakalářské práce, a také za doporučení kvalitní literatury, na základě které jsem zpracoval značnou část textu.

## **ABSTRAKT**

Cílem bakalářské práce je představit praktické aplikace goniometrických funkcí v různých oblastech mechaniky. Jedná se přitom o takové oblasti, které jsou tak či onak součástí našeho každodenního života. V práci jsou popsány nebo vysvětleny nutné souvislosti tak, aby byl text srozumitelný pro absolventa střední školy. Práce může být použita jako učební pomůcka pro učitele fyziky nebo matematiky na středních školách. Důraz je kladen na aplikace goniometrických funkcí. Předchozí znalost goniometrických funkcí, zejména goniometrických vzorců, se předpokládá. Značná část práce je zpracována na základě zahraničních kurzů z fyziky. Práce není vyčerpávajícím výčtem oblastí fyziky, ve kterých lze goniometrické funkce uplatnit. Je však důkazem, že goniometrické funkce jsou pro popsání řady elementárních fyzikálních jevů nezbytné.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Goniometrické funkce, mechanika, aplikace

## **ABSTRACT**

The aim of the bachelor thesis is to present practical applications of goniometric functions in various fields of mechanics. These are areas that are part of our daily lives in one way or another. The work describes or explains the necessary context in order to make the text understandable to a high school graduate. The work can be used as a teaching tool for teachers of physics or mathematics in secondary schools. Emphasis is placed on the application of goniometric functions. Previous knowledge of goniometric functions, especially goniometric patterns, is assumed. Much of the work is processed on the basis of internationally recognized lectures in physics. The work is not an exhaustive list of areas of physics in which goniometric functions can be applied. However, it is proof that goniometric functions are necessary to describe a number of elementary physical phenomena.

## **KEYWORDS**

Goniometric functions, mechanics, applications

## Obsah

Cíl bakalářské práce.....	7
1 Nakloněná rovina.....	8
1.1 Posuvný pohyb po nakloněné rovině.....	8
1.1.1 Soustava dvou hranolů na nakloněné rovině dotýkající se jednou stěnou .....	10
1.1.2 Pohyb dvou hranolů na nakloněné rovině, z nichž jeden je umístěn na druhém .....	12
1.2 Valení po nakloněné rovině.....	16
1.3 Užití goniometrických funkcí při popisu pohybu tělesa po nakloněné rovině-shrnutí .....	22
2 Šikmý vrh .....	23
2.1 Šikmý vrh bez vlivu odporu vzduchu.....	23
2.2 Šikmý vrh ovlivněný odporem vzduchu.....	32
2.3 Využití goniometrických funkcí při popisu šikmého vrhu-shrnutí .....	33
3 Coriolisova síla.....	35
4 Kyvadlo .....	43
4.1 Matematické kyvadlo .....	43
4.2 Fyzické kyvadlo.....	47
4.2.1 Vztah mezi matematickým a fyzickým kyvadlem .....	51
4.3 Kónické kyvadlo.....	51
4.4 Příklady užití kyvadel.....	54
4.5 Využití goniometrických funkcí při popisu kyvadel-shrnutí.....	56
5 Těleso na pružině.....	57
5.1 Volné harmonické kmitání .....	58
5.2 Tlumené harmonické kmitání.....	62
5.3 Hranice mezi volným a tlumeným kmitáním .....	64
5.4 Nucené harmonické kmitání.....	68

5.4.1	Harmonicky buzené netlumené kmitání .....	68
5.4.2	Harmonicky buzené tlumené kmitání.....	71
5.5	Využití goniometrických funkcí při popisu pohybu tělesa zavěšeného na pružině- shrnutí .....	76
	Seznam použitých informačních zdrojů .....	79

## **Cíl bakalářské práce**

Goniometrické funkce mají využití zejména při výpočtech v pravouhlých trojúhelnících a lze je rozšířit i na trojúhelníky obecné. Protože pravouhlý trojúhelník lze z obecného trojúhelníku snadno vytvořit tím, že z vrcholu trojúhelníku vedeme kolmici na protější stranu, případně lze pravouhlý trojúhelník nalézt i v  $n$ -úhelníku, je zřejmé, že situací, ve kterých teoreticky lze goniometrické funkce použít, je mnoho. Tato práce si klade za cíl seznámit čtenáře s fyzikálními situacemi z oblasti mechaniky, které by bez goniometrických funkcí nemohly být popsány. Účelem přitom je názorně demonstrovat na zvolených příkladech používání goniometrických funkcí a ukázat, jak jejich vlastnosti popisují daný děj. Práce je rozdělena do pěti kapitol, které jsou věnovány fyzikálním dějům. Těmito ději jsou pohyb tělesa po nakloněné rovině, pohyb tělesa vrženého šikmým vrhem, odvození Coriolisovy síly, různé typy kyvadel a hmotný bod zavěšený na pružině, který se pohybuje za různých podmínek. V každé kapitole jsou uvedeny srozumitelné postupy, kterými se odvozují základní vzorce a vztahy příslušné tématu kapitoly, přičemž goniometrické funkce jsou v nich stěžejní. Poněkud odlišná je kapitola Coriolisova síla, ve které je existence této síly dokázána s tím, že goniometrické funkce jsou použity jen v průběhu tohoto dokazování. Proto součástí kapitoly Coriolisova síla není podkapitola věnovaná možným aplikacím goniometrických funkcí. Cílem práce je sestavit srozumitelný didaktický text, který může být použit jako pomůcka při výkladu tématu Goniometrické funkce na střední škole. Slouží proto spíše vyučujícím jako přehled aplikací těchto funkcí než samotným žákům, protože kapitoly jsou věnovány odvozování teorie a neobsahují početní příklady k procvičování goniometrických funkcí.



# 1 Nakloněná rovina

Nakloněná rovina se využívá k usnadnění práce, přestože celková vykonaná práce je při použití nakloněné roviny větší než bez jejího použití. Nevýhodou nakloněné roviny totiž je její značná prostorová náročnost (a tudíž také dráha, na které je práce vykonávána). Okamžitá konaná práce je ale při použití nakloněné roviny v každém okamžiku menší. Praktickými příklady využití nakloněné roviny jsou například větší sklony střech, na které v zimě působí vrstva sněhu menší silou směrem kolmým k zemi, nebo prkna, po kterých zvedáme do výšky těžké předměty tím snáz, čím menší úhel svírá prkno se zemí a také čím menší je výška, do které předmět zvedáme. Této základní přednosti jednoduchých strojů – usnadňování práce – si všiml už Archimedes (288 př.n.l. – 212 př.n.l.), když ilustroval zákon páky. Speciálně nakloněnou rovinou se pak zabýval Simon Stevin (1548–1620), holandský fyzik a myslitel z období renesance ve svém díle *De beghinselen der weegkonst* (v překladu *Princip rovnováhy*). Problematice nakloněné roviny se v neposlední řadě věnoval i Galileo Galilei (1564-1642), který při pokusech s nakloněnou rovinou objevil zákon volného pádu.

V souvislosti s nakloněnou rovinou zkoumáme pohyb tělesa a jeho charakteristiky. Těleso se může po rovině pohybovat buď pohybem posuvným, nebo valením. Posuvný pohyb po nakloněné rovině je určen zrychlením tělesa. Toto téma je zpracováno v kapitole 1.1 a bylo převzato z literatury (Svoboda, 1984, s. 69-71).

## 1.1 Posuvný pohyb po nakloněné rovině

Nakloněná rovina  $\sigma$  je rovina, která svírá s vodorovnou rovinou  $\rho$  ostrý úhel o velikosti  $\alpha$ . Předpokládejme, že na nakloněné rovině je umístěno těleso o hmotnosti  $m$ . Na toto těleso působí Země gravitační silou  $\vec{F}_g$ , jejíž směr je kolmý k rovině  $\rho$ . Gravitační sílu lze rozložit na dvě navzájem kolmé složky  $\vec{F}_p$  a  $\vec{F}_n$ , kde

$$F_p = F_g \cdot \sin(\alpha)$$

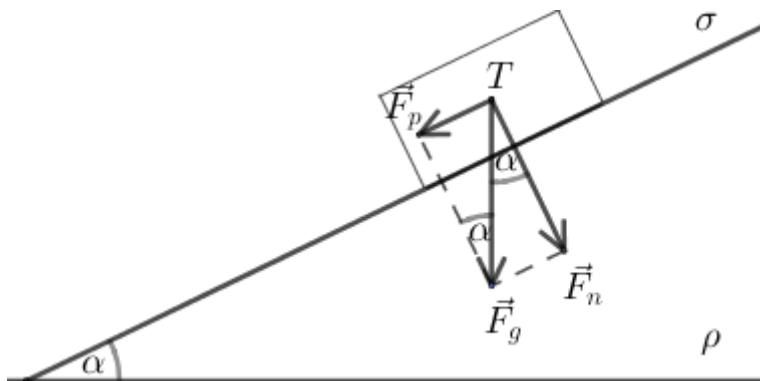
je síla, jejíž směr je rovnoběžný s nakloněnou rovinou, a složka

$$F_n = F_g \cdot \cos(\alpha)$$

vytváří tlakovou sílu. Gravitační síla

$$F_g = m \cdot g$$

je výslednicí těchto složek. Situace je znázorněna na obrázku č. 1.



Obrázek č. 1: Posuvný pohyb po nakloněné rovině

Pohybové účinky složky  $\vec{F}_n$  jsou podle 3. Newtonova pohybového zákona (zákon akce a reakce) anulovány silou, kterou na těleso působí nakloněná rovina. Do pohybu těleso uvádí pouze složka  $\vec{F}_p$ . Proti ní působí třecí síla  $\vec{F}_t$ .

Velikost třecí síly je rovna

$$F_t = f \cdot F_n,$$

kde  $f$  je součinitel dynamického tření mezi povrchem tělesa a roviny. Síla, která uvádí těleso do pohybu, má proto velikost

$$F = F_p - F_t,$$

respektive po dosazení

$$F = m \cdot g \cdot (\sin(\alpha) - f \cdot \cos(\alpha)). \quad (1)$$

Tuto sílu lze také podle 2. Newtonova pohybového zákona vyjádřit

$$F = m \cdot a. \quad (2)$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) zjistím velikost zrychlení

$$a = g \cdot (\sin(\alpha) - f \cdot \cos(\alpha)),$$

které tělesu udílí síla  $\vec{F}_p$ . Tento vztah platí za předpokladu, že je koeficient dynamického tření

$$f \leq \operatorname{tg}(\alpha).$$

Je-li

$$f > \operatorname{tg}(\alpha),$$

pak je zrychlení třecí síla větší než síla, která se snaží těleso uvést do pohybu, což znamená, že těleso je v klidu.

Zrychlení tělesa tedy závisí na velikosti úhlu  $\alpha$ , který svírá nakloněná rovina  $\sigma$  s vodorovnou rovinou  $\rho$ , a na hodnotě součinitele smykového tření  $f$ . Speciálně, pokud je zrychlení

$$a = 0$$

a těleso se po nakloněné rovině pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, pak je

$$f = \operatorname{tg}(\alpha).$$

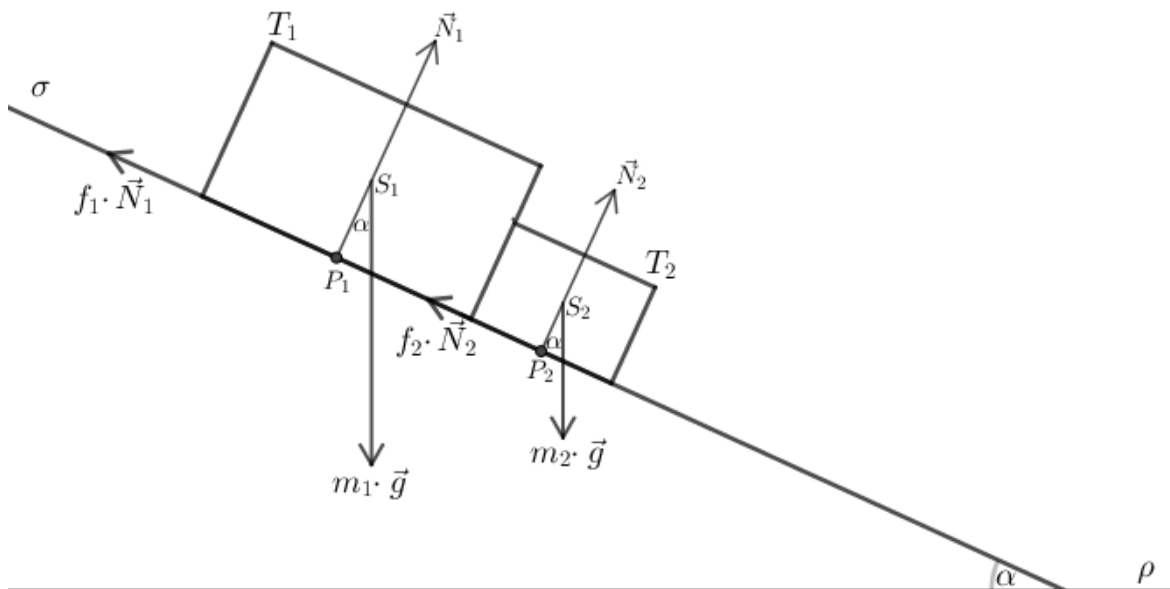
Tím jsou rozebrány všechny klíčové charakteristiky pohybu tělesa po nakloněné rovině. Obdobně lze charakteristiky pohybu odvodit i v případě, kdy se po nakloněné rovině pohybuje soustava dvou těles. V následujících dvou podkapitolách jsou rozebrány dvě základní varianty takových soustav, a to nejprve varianta, kdy jsou na nakloněné rovině dvě tělesa tvaru hranolu, která se navzájem dotýkají jednou stěnou, a za druhé situace, kdy jeden hranol je umístěn na druhém hranolu.

### 1.1.1 Soustava dvou hranolů na nakloněné rovině dotýkající se jednou stěnou

Uvažujme rovinu  $\rho$  a rovinu  $\sigma$ , která s rovinou  $\rho$  svírá úhel o velikosti  $\alpha$ .<sup>1</sup> Na nakloněné rovině  $\sigma$  jsou umístěna dvě tělesa  $T_1$  a  $T_2$  tvaru hranolu tak, že obě tělesa se dotýkají jednou stěnou. Hmotnost hranolu  $T_1$  je  $m_1$  a hmotnost hranolu  $T_2$  je  $m_2$ . Součinitel tření mezi tělesem  $T_1$  a rovinou  $\sigma$  je  $f_1$ . Součinitel tření mezi  $T_2$  a  $\sigma$  je  $f_2$ . Výchozí situace je znázorněna na obrázku č. 2.

---

<sup>1</sup> (Fähnrich, 2001, str. 31, 106)



Obrázek č. 2: Tělesa umístěná za sebou na nakloněné rovině

Úlohu budu řešit zvlášť pro případ, kdy je  $f_1 < f_2$ , a zadruhé  $f_1 > f_2$ .

Předpokládejme tedy nejprve, že je  $f_1 < f_2$ . Na velikosti součinitele smykového tření  $f$  závisí přímo úměrně velikost třecí síly. Proto na první těleso  $T_1$  působí větší třecí síla než na druhé těleso  $T_2$  a první těleso se tudíž pohybuje pomaleji. Tělesa se pohybují těsně za sebou, takže je první těleso zpomalováno druhým tělesem. Zrychlení  $\vec{a}_1$  prvního tělesa se zvětšuje do té doby, dokud se velikosti zrychlení  $\vec{a}_1$  a  $\vec{a}_2$  nesrovnají. Soustava těchto dvou těles se pak pohybuje se zrychlením  $\vec{a}$ . Sestavím pohybovou rovnici pro těleso  $T_1$

$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g \cdot (\sin(\alpha) - f_1 \cdot \cos(\alpha))$$

a pro těleso  $T_2$

$$m_2 \cdot a = m_2 \cdot g \cdot (\sin(\alpha) - f_2 \cdot \cos(\alpha)).$$

Sečtením obou těchto rovnic a následným vynásobením vzniklé rovnice výrazem  $\frac{1}{m_1 + m_2}$

zjistím, že zrychlení  $\vec{a}$ , kterým se pohybují obě tělesa, je rovno

$$a = g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}.$$

Najdu velikost síly  $\vec{T}$ , kterou působí druhé těleso na první; velikost této síly je kladná. Stejnou silou, ale s opačným znaménkem, působí první těleso na druhé. Sestavím pohybovou rovnici pro druhé těleso. Dostávám rovnici

$$F_p - F_t - T = m_2 \cdot a,$$

odkud po dosazení a úpravě vyjádřím

$$T = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot (f_1 - f_2) \cdot \cos(\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Pokud je  $f_1 > f_2$ , tak je třecí síla prvního tělesa větší než třecí síla druhého tělesa, což znamená, že první těleso se pohybuje pomaleji než druhé těleso. Proto obě tělesa nemají společný dotyk a tlaková síla  $\vec{T}$ , kterou na sebe působí, je nulová. Obě tělesa se pohybují samostatně se zrychlením stejného směru, ale obecně různé velikosti. Zrychlení prvního tělesa je

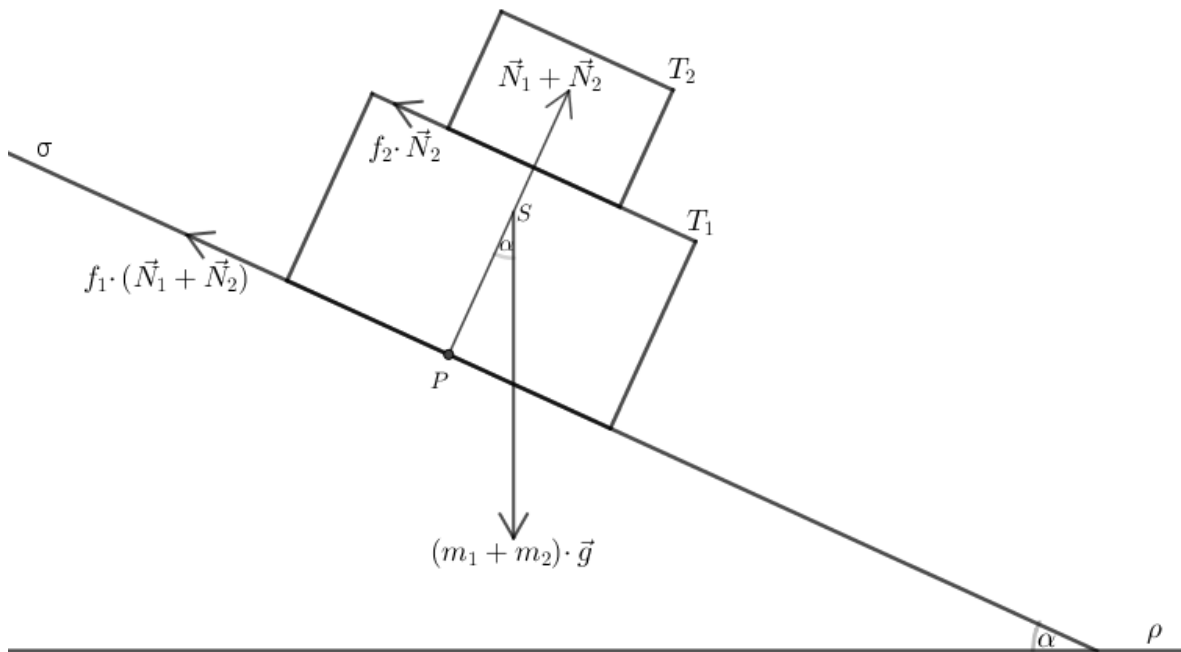
$$a_1 = g \cdot (\sin(\alpha) - f_1 \cdot \cos(\alpha))$$

a zrychlení druhého tělesa je

$$a_2 = g \cdot (\sin(\alpha) - f_2 \cdot \cos(\alpha)).$$

### 1.1.2 Pohyb dvou hranolů na nakloněné rovině, z nichž jeden je umístěn na druhém

Uvažujme rovinu  $\rho$  a rovinu  $\sigma$ , která s rovinou  $\rho$  svírá úhel o velikosti  $\alpha$ . Na nakloněné rovině  $\sigma$  jsou umístěna dvě tělesa  $T_1$  a  $T_2$  tvaru hranolu tak, že těleso  $T_2$  je umístěno na tělese  $T_1$  a nedotýká se roviny  $\sigma$ , a těleso  $T_1$  je na rovině  $\sigma$  položeno jednou stěnou. Hmotnost tělesa  $T_1$  je  $m_1$ . Součinitel smykového tření mezi tělesem  $T_1$  a rovinou  $\sigma$  je  $f_1$ . Hmotnost tělesa  $T_2$  je  $m_2$ . Součinitel smykového tření mezi tělesy  $T_2$  a  $T_1$  je  $f_2$ . Obě tělesa jsou v čase  $t = 0$  v klidu. Výchozí situace je znázorněna na obrázku č. 3.



Obrázek č. 3: Tělesa umístěná na sobě na nakloněné rovině

Řešení této části záleží na vzájemném vztahu mezi parametry  $f_1$ ,  $f_2$  a  $\alpha$ . Protože se roviny  $\sigma$  bezprostředně dotýká těleso o hmotnosti  $m_1$  (dále nazývané první těleso), zaměřím se nejprve na vztah mezi  $f_1$  a  $\alpha$ . Těleso je přitahováno Zemí gravitační silou

$$F_g = m \cdot g.$$

Tu rozložím stejně jako v části (a) na složku  $\vec{F}_p$ , jejíž směr je rovnoběžný s nakloněnou rovinou, a na složku  $\vec{F}_n$ , což je síla normálová a působí kolmo k nakloněné rovině. Pro zmíněné síly platí vztah

$$F_g = F_p + F_n.$$

Dále na tělesa na nakloněné rovině působí normálová síla. Je-li  $\vec{N}_2$  normálová síla, kterou působí druhé (horní) těleso na stěnu prvního (spodního) tělesa, pak první těleso působí na nakloněnou rovinu normálovou silou  $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , kde  $\vec{N}_1$  je normálová síla, kterou by na nakloněnou rovinu působilo samotné první těleso, pokud by na ní bylo umístěno samostatně. Protože je složka  $a_1$  vektoru zrychlení  $\vec{a}$  soustavy, která je na rovinu  $\sigma$  kolmá, rovna nule, má pohybová rovnice ve směru kolmém na nakloněnou rovinu tvar

$$m \cdot a_1 = F_2 - N = 0.$$

Proto je

$$F_2 = N$$

a lze tedy vyjádřit

$$N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha).$$

Proti síle  $\vec{F}_p$  působí třecí síla  $\vec{F}_t$  taková, že pro sílu  $\vec{F}$ , která uvádí těleso do pohybu, platí rovnost

$$F = F_p - F_t. \quad (3)$$

Je-li těleso v klidu, pak je síla (3) nulová, a proto je

$$F_t = F_p,$$

neboli

$$F_t = m \cdot g \cdot \sin(\alpha).$$

Dále lze velikost třecí síly vyjádřit pomocí součinitele tření  $f$

$$F_t = f \cdot N. \quad (4)$$

Po dosazení dostávám

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \leq f \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

a po úpravách

$$f \geq \operatorname{tg}(\alpha), \quad (5)$$

kde koeficient  $f$  závisí na typu materiálu, z nichž je vyrobeno těleso a nakloněná rovina. Za této podmínky zůstává těleso v klidu. Pokud bych dosadil za stejné proměnné do rovnosti (4) a provedl bych stejné úpravy, dostal bych rovnost

$$f = \operatorname{tg}(\alpha). \quad (6)$$

Ze vztahů (5) a (6) vyplývá, že těleso zůstává v klidu právě tehdy, když je

$$f \geq \operatorname{tg}(\alpha).$$

Řešení úlohy rozdělím na samostatné části.

(i) Pokud je

$$f_1 \geq \operatorname{tg}(\alpha)$$

a

$$f_2 \geq \operatorname{tg}(\alpha),$$

pak obě tělesa na nakloněné rovině setrvávají v klidu, a proto jsou zrychlení

$$a_1 = a_2 = 0.$$

(ii) Pokud je

$$f_1 \geq \operatorname{tg}(\alpha)$$

a

$$f_2 < \operatorname{tg}(\alpha),$$

je zrychlení prvního tělesa

$$a_1 = 0$$

a zrychlení druhého tělesa je

$$a_2 = g \cdot (\sin(\alpha) - f_2 \cdot \cos(\alpha)).$$

(iii) Necht' je

$$f_1 < \operatorname{tg}(\alpha)$$

a současně

$$f_1 \geq f_2.$$

Pak třecí síla působící na druhé těleso určená koeficientem tření  $f_2$  působí proti třecí síle, která také ovlivňuje pohyb druhého tělesa a je určena koeficientem tření  $f_1$ . Celkově druhé těleso ovlivňuje zrychlení prvního tělesa třecí silou

$$F_{t_2} = -m_2 \cdot g \cdot f_1 \cdot \cos(\alpha) + m_2 \cdot g \cdot f_2 \cdot \cos(\alpha). \quad (7)$$

Podle 2. Newtonova pohybového zákona udílí prvnímu tělesu zrychlení síla



$$F_1 = m_1 \cdot a_1,$$

kteřá je rovna výslednici všech sil, které na první těleso působí. Proto je zrychlení prvního tělesa

$$a_1 = g \cdot \left[ \sin(\alpha) - f_1 \cdot \cos(\alpha) + \frac{m_2 \cdot (f_2 - f_1) \cdot \cos(\alpha)}{m_1} \right].$$

Na zrychlení druhého tělesa nemá vliv koeficient tření  $f_1$ , který působí mezi nakloněnou rovinou a prvním tělesem, a proto se druhé těleso pohybuje se zrychlením

$$a_2 = g \cdot (\sin(\alpha) - f_2 \cdot \cos(\alpha)).$$

(iv) Necht' je

$$f_1 < \operatorname{tg}(\alpha)$$

a současně

$$f_1 < f_2.$$

Pak je třecí síla (7) nulová, a proto se první i druhé těleso pohybují se zrychlením

$$a_1 = a_2 = g \cdot (\sin(\alpha) - f_1 \cdot \cos(\alpha))$$

bez ohledu na to, zda je

$$f_2 \geq \operatorname{tg}(\alpha),$$

nebo

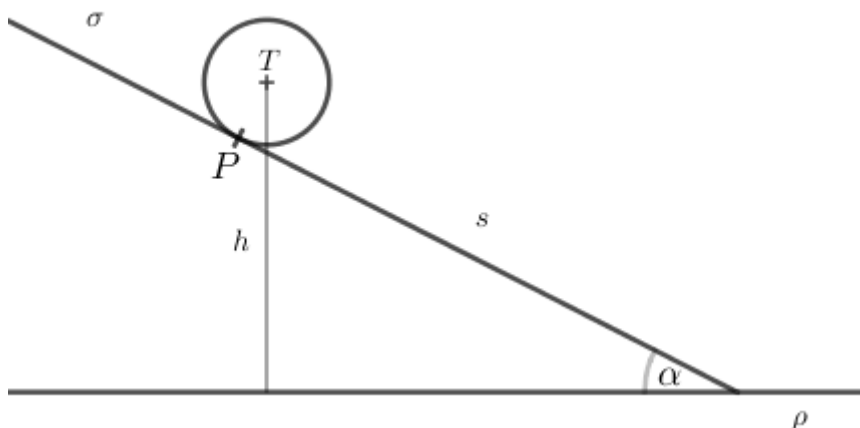
$$f_2 < \operatorname{tg}(\alpha).$$

Následující podkapitola zkoumá pohyb tělesa valením po nakloněné rovině. Toto téma je zpracováno na základě literatury (Halliday, 2000, str. 297-302).

## 1.2 Valení po nakloněné rovině

Necht' je dána rovina  $\rho$  a rovina  $\sigma$ , která je s rovinou  $\rho$  různoběžná a jejich odchylka je ostrý úhel  $\alpha$ . Rovina  $\sigma$  je rovina nakloněná vůči rovině  $\rho$ . Na rovině  $\sigma$  je umístěno homogenní rotačně symetrické těleso, jehož těžiště je v bodě  $T$ . Tento bod je současně jeho hmotným

středem i geometrickým středem. Bez újmy na obecnosti lze za těleso na rovině  $\sigma$  zvolit kouli o poloměru  $R$  a o hmotnosti  $m$ . Označím symbolem  $h$  vzdálenost jejího těžiště od roviny  $\rho$ . Koule se dotýká roviny  $\sigma$  v bodě  $P$ . Situace je znázorněna na obrázku č. 4.



Obrázek č. 4: Koule na nakloněné rovině

Po uvedení koule do pohybu se bude po nakloněné rovině pohybovat valením. Předpokladem přitom je, že se koule valí po přímé dráze bez prokluzování. Valení je druh pohybu, na který lze nahlížet například jako na složení posuvného a otáčivého pohybu. Toto zavedení umožní zabývat se dále kinetickou energií valící se koule při valivém pohybu. Bod okamžitého dotyku  $P$  s rovinou  $\sigma$  se při valivém pohybu posune za časový úsek  $t$  dopředu o vzdálenost  $s$ . Označím  $P'$  bod dotyku koule s rovinou  $\sigma$  po uplynutí času  $t$ . Pak bod  $P'$  je obraz bodu  $P$  v otočení se středem v těžišti  $T$  o úhel  $\psi$ . Délka dráhy  $s$  je přímo úměrná velikosti úhlu  $\psi$  a také velikosti poloměru koule  $R$ . Pomocí těchto dvou veličin ji lze vyjádřit vztahem

$$s = R \cdot \psi. \quad (8)$$

Těžiště koule (a tedy také její geometrický střed) se pohybuje rychlostí  $\vec{v}$  rovnoběžně s nakloněnou rovinou  $\sigma$ . Velikost rychlosti středu koule je určena derivací

$$\frac{ds}{dt}$$

Velikost úhlové rychlosti  $\omega$  koule vzhledem k ose vedené jeho středem je určena derivací

$$\frac{d\psi}{dt}$$

Zderivováním vztahu (8) podle času  $t$  tedy vznikne rovnost

$$v = \omega \cdot R, \quad (9)$$

ze které lze bezprostředně vyjádřit velikost úhlové rychlosti  $\omega$ . Tato rovnost platí za předpokladu, že se koule valí bez prokluzování.

Pokud na valivý pohyb nahlédneme jako na složení posuvného a otáčivého pohybu, pohybují se body na obvodu koule (tzv. sféře) různou rychlostí. Body, které se nachází velmi blízko bodu dotyku  $P$ , se pohybují rychlostí téměř nulovou. Naopak body, které jsou v největší vzdálenosti od  $P$ , se ze všech bodů na sféře pohybují nejrychleji, a to rychlostí téměř dvakrát velkou, než je rychlost středu koule. Velikost rychlosti středu koule lze určit jednak ze zákona zachování mechanické energie, nebo druhým způsobem s využitím momentu hybnosti soustavy, v níž se koule pohybuje po nakloněné rovině. Výsledná velikost rychlosti pohybu bude stejná nezávisle na volbě postupu.

Zákon zachování mechanické energie říká, že při každém mechanickém ději v izolované soustavě těles se kinetická energie mění v potenciální a naopak, ale celková mechanická energie soustavy zůstává konstantní. Pro výpočet okamžité kinetické energie koule využijí zavedení valivého pohybu jako složení posuvného a rotačního pohybu. Velikost kinetické energie závisí přímo úměrně na vzdálenosti  $h$  těžiště (a geometrického středu)  $T$  koule od roviny  $\rho$ . Lze ji vyjádřit jako rovnost

$$h = s \cdot \sin(\alpha).$$

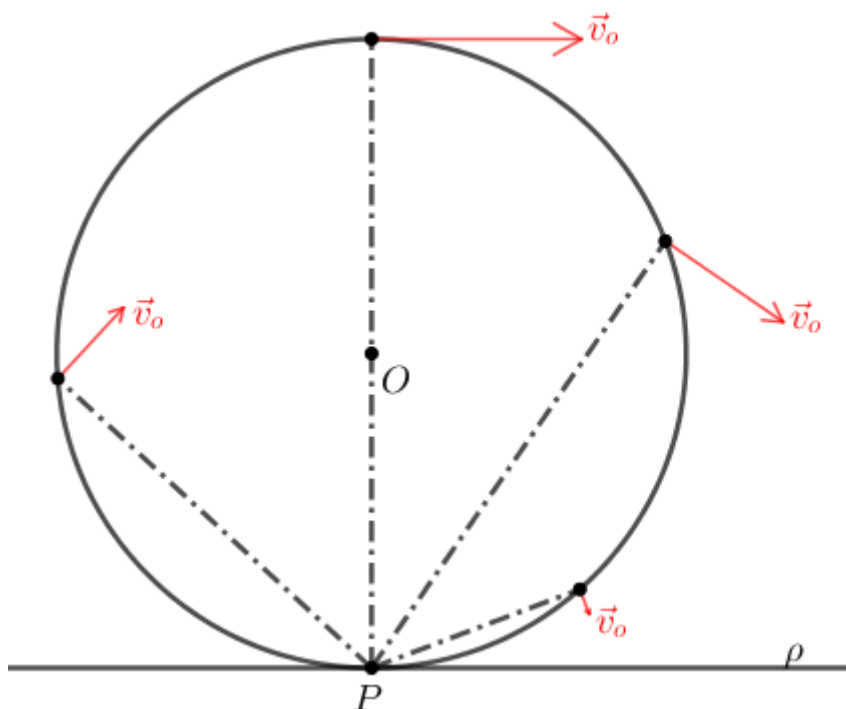
Koule během svého pohybu z místa, v němž byla do pohybu uvedena, až do okamžiku, ve kterém se poprvé dotkne roviny  $\rho$ , získá kinetickou energii  $E_k$  o velikosti

$$E_k = m \cdot g \cdot s \cdot \sin(\alpha). \quad (10)$$

Další vyjádření kinetické energie koule plyne ze zavedení valivého pohybu jako rotace kolem okamžité osy. Okamžitou osou je přímka procházející středem koule  $T$  a okamžitým bodem dotyku  $P$  koule s rovinou  $\sigma$ . Kinetická energie tělesa je potom rovna

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_P \cdot \omega^2, \quad (11)$$

kde  $I_P$  je moment setrvačnosti koule vzhledem k ose vedené bodem  $P$  (a neprocházející těžištěm koule) a  $\omega$  je úhlová rychlost koule. Moment setrvačnosti koule je skalární veličina vyjadřující míru setrvačnosti tělesa při jeho otáčivém pohybu. Závisí na rozložení hmoty v tělese tak, že čím jsou částice těžší a vzdálenější od osy, kolem které těleso rotuje, tím je moment setrvačnosti tělesa větší.



Obrázek č. 5: Okamžitá osa otáčení

Veličinu  $I_P$  dále vyjádřím s využitím vztahu plynoucího ze Steinerovy věty. Ta říká, že moment setrvačnosti tělesa vzhledem k jeho ose neprocházející těžištěm  $I_P$  je roven součtu momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm  $I_T$  a součinu hmotnosti  $m$  tělesa a druhé mocnině vzdálenosti  $R$  obou zmíněných os, přičemž osa procházející těžištěm je vedena rovnoběžně s osou těžištěm neprocházející. Matematická formulace Steinerovy věty je

$$I_P = I_T + m \cdot R^2. \quad (12)$$

Dosazením vztahu (12) do vztahu (11) a s využitím vyjádření (9) pro rychlost těžiště koule získávám pro okamžitou kinetickou energii koule vztah

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_T \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_T^2. \quad (13)$$

Tento vztah odpovídá zavedení valivého pohybu jako složení posuvného a otáčivého pohybu. První sčítanec na pravé straně ve vyjádření (13) je roven kinetické energii rotačního pohybu koule kolem osy vedené jejím těžištěm; druhý sčítanec vyjadřuje příspěvek celkové kinetické energie koule plynoucí z jejího posuvného pohybu. Za předpokladu, že koule na nakloněné rovině je plná, je

$$I_T = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2. \quad (14)$$

Porovnáním vztahů (10) a (13) pro kinetickou energii koule a také s využitím (14) a vyjádření  $\vec{\omega}$  ze vztahu (9) plyne po úpravách pro rychlost těžiště koule vztah

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot s \cdot \sin(\alpha)}.$$

Rychlost těžiště (a geometrického středu koule) tedy nezávisí na hmotnosti koule ani na jejím poloměru.

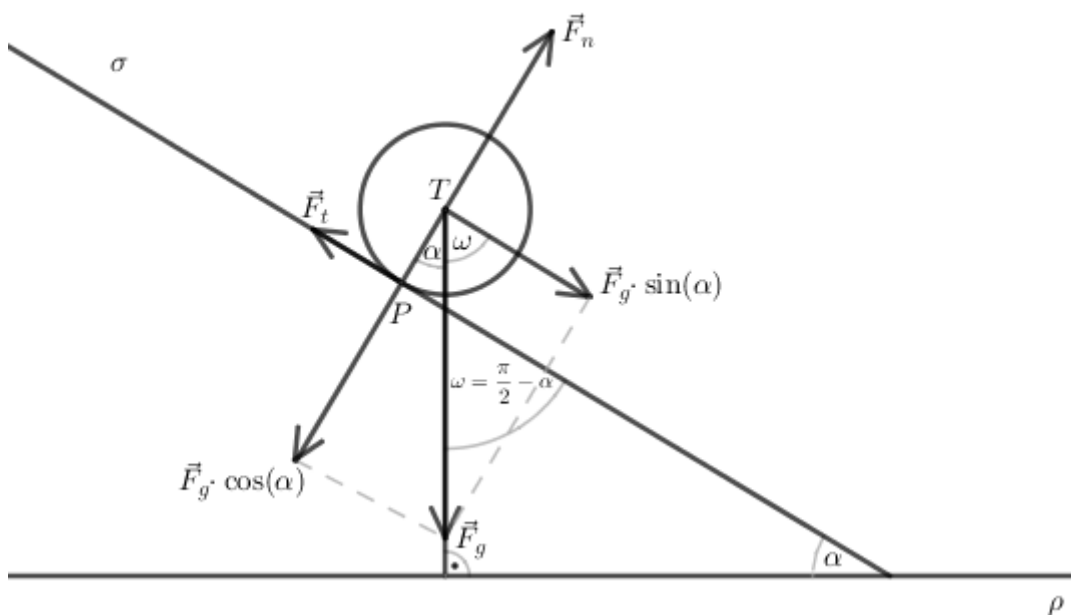
Další charakteristiky pohybu koule po nakloněné rovině vyplynou z hybnosti koule a momentu hybnosti soustavy  $S$ . Soustavou  $S$  se zde rozumí koule, roviny  $\rho$  a  $\sigma$  a Země. Při tomto odvození jsou využívány zákonitosti charakterizující síly, které na kouli při pohybu působí. Těmito silami jsou třecí síla  $\vec{F}_t$  působící proti směru pohybu koule, tíhová síla Země  $\vec{F}_g$  působící kolmo na rovinu  $\rho$  do středu Země a normálová síla  $\vec{F}_n$  působící kolmo k nakloněné rovině  $\sigma$  směrem vzhůru.

Z obrázku č. 6 je zřejmé, že pro velikost úhlu  $\omega$  platí  $\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , a proto je odchylka tíhové síly  $\vec{F}_g$  a jedné složky  $\vec{F}_n$  vektoru tíhové síly rovna  $\frac{\pi}{2} - \omega = \alpha$ . Úhel, který svírají vektory těchto sil, je tedy stejný jako odchylka rovin  $\rho$  a  $\sigma$ . Velikost této odchylky lze určit ze vztahu

$$\cos(\alpha) = \frac{F_n}{F_g}.$$

Odtud také plyne vyjádření  $F_n = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ . Analogicky určím velikost druhé složky  $\vec{F}_p$  vektoru tíhové síly  $\vec{F}_g$

$$F_p = m \cdot g \cdot \sin(\alpha).$$



Obrázek č. 6: Nakloněná rovina – rozklad síly na složky

Z 2. Newtonova zákona vyplývá pro hybnost tělesa při posuvném pohybu vztah

$$m \cdot a = \sum F.$$

Zvolíme-li souřadnicovou soustavu  $Oxy$  tak, že třecí síla  $\vec{F}_t$  je částí souřadnicové osy  $x$  a osa  $y$  je na ni kolmá a prochází bodem  $P$ , má tato rovnost pro  $x$ -ovou složku  $\vec{a}_x$  vektoru zrychlení  $\vec{a}$  tvar

$$m \cdot a_x = -F_t + m \cdot g \cdot \sin(\alpha).$$

### 1.3 Užití goniometrických funkcí při popisu pohybu tělesa po nakloněné rovině-shrnutí

Nejdůležitějším jevem, který v souvislosti s nakloněnou rovinou zkoumáme, je pohyb tělesa, resp. soustavy těles po nakloněné rovině. Podle tvaru tělesa se tento pohyb dělí na posuvný a na valivý. K přesnějšímu fyzikálnímu určení tohoto pohybu je nutné využít goniometrické funkce. Těmi jsou blíže popsány jednotlivé síly, které na těleso při pohybu působí, i vzájemné působení těchto sil. Každou působící sílu lze rozložit na dvě složky, které jsou navzájem kolmé, a lze je doplnit na rovnoběžník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé. Velikosti vnitřních úhlů v takovém rovnoběžníku se dají vyjádřit pomocí velikosti odchylky  $\alpha$  nakloněné roviny od základní roviny. Navíc rozkládaná síla je úhlopříčkou v daném pravoúhelníku. To znamená, že rovnoběžník rozdělí na dva pravoúhlé trojúhelníky. V nich se pak s využitím znalosti velikostí jejich vnitřních úhlů pro bližší určení sil využívají goniometrické funkce. Protože vektor rychlosti pohybu tělesa po nakloněné rovině je rovnoběžný s nakloněnou rovinou, lze s využitím goniometrických rovnic popsat rychlost tělesa, případně jeho zrychlení a další charakteristiky. Z výše řečeného vyplývá, že rychlost pohybu je závislá mimo jiné na odchylce  $\alpha$  rovin. Rovněž tuto závislost lze s využitím goniometrických funkcí zkoumat. Díky vztahům, které s použitím goniometrických funkcí získáme, budeme schopni odpovědět na otázku, jestli se těleso pohybující se po nakloněné rovině během pohybu zastaví, s jakým zrychlením se pohybuje, jaké jsou charakteristiky pohybu soustavy těles apod. Tyto obecné úvahy lze pak prakticky využít i při řešení problémů z praxe všude tam, kde se nakloněná rovina využívá. Příklady jejího využití jsou v kapitole zmíněny.

## 2 Šikmý vrh

Těleso (resp. hmotný bod) se pohybuje šikmým vrhem, jestliže bylo uvedeno do pohybu působením vnějších sil a jestliže se pohybuje ve svislé rovině  $\rho$  se zrychlením, jehož směr i velikost jsou stejné jako zrychlení volného pádu  $\vec{g}$ . Rychlost, kterou se těleso pohybuje v okamžiku uvedení do pohybu, se nazývá počáteční rychlost. Rovina  $\rho$  je určena dvěma různoběžnými vektory: směrem počáteční rychlosti tělesa a vektorem tíhového zrychlení.

V této kapitole je nejprve rozebrán případ, kdy na těleso během pohybu nepůsobí odporová síla prostředí, a poté situace, kdy prostředí na těleso působí. Pro praxi má samozřejmě větší význam takový svislý vrh, při kterém je odporová síla prostředí nenulová. Předmětem studia bývají různé charakteristiky pohybu tělesa, například trajektorie jeho pohybu, rychlost v daném časovém okamžiku, dráha doletu tělesa apod. Těleso, na které při šikmém vrhu působí odpor vzduchu, se pohybuje po křivce zvané balistická křivka. Ta se svým tvarem poněkud podobá parabole. Jak bude ukázáno v podkapitole 2.1., je parabola trajektorií tělesa, na které při šikmém vrhu odpor prostředí nepůsobí.

Šikmý vrh se v praxi využívá zejména ve sportu a ve vojenské technice. Věda, která se zabývá pohybem tělesa při šikmém vrhu za působení odporových sil prostředí, se nazývá balistika. Úžeji tato věda popisuje pohyb střely a aplikace tohoto pohybu při střelbě sportovní či lovecké a má díky tomu poměrně široké uplatnění. Pro praxi zřejmě nejdůležitější odvětví balistiky je tzv. vnější balistika, která popisuje pohyb střely během jejího letu od okamžiku výstřelu až k místu dopadu. Tomu je věnována i podkapitola 2.2. Balistika se nicméně zabývá také například jevy, které vznikají uvnitř hlavně v okamžiku výstřelu, nebo účinkem střely na cíl.

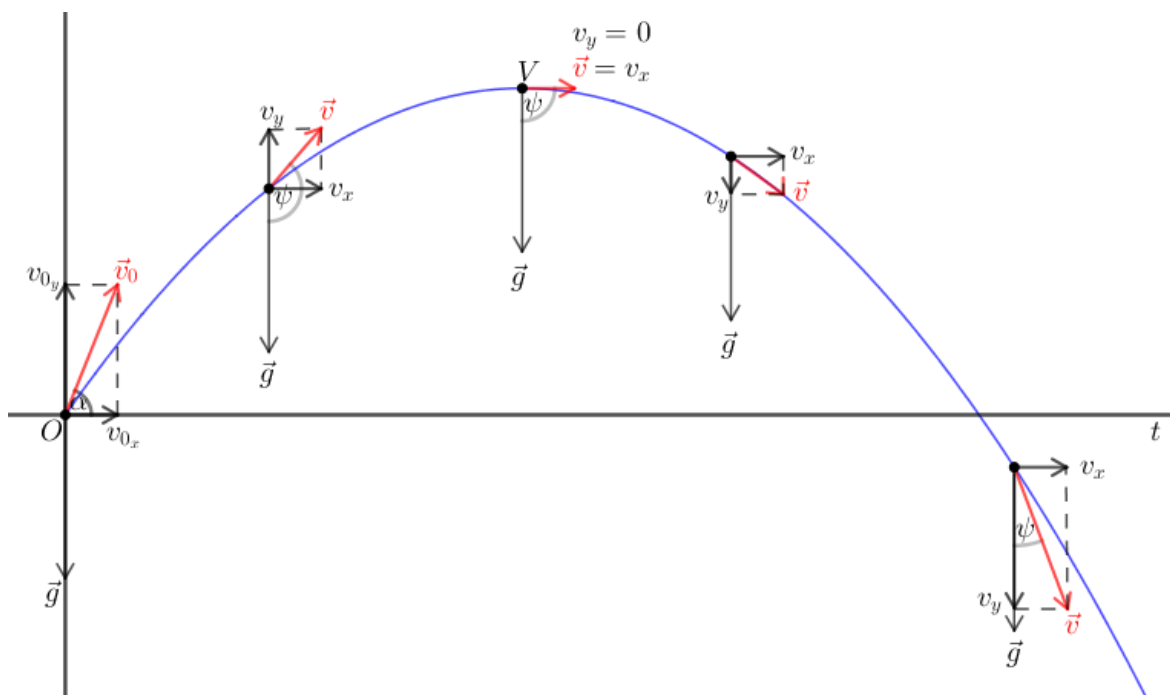
Téma je zpracováno v literatuře (Bajer, 2015, str. 85-87 a 89-90), Mechanika 1, ze které ji přejímám.

### 2.1 Šikmý vrh bez vlivu odporu vzduchu

Šikmý vrh je volný pád tělesa, které bylo vystřeleno nenulovou počáteční rychlostí  $\vec{v}_0$ . Při tomto pádu na těleso působí kromě vektoru počáteční rychlosti  $\vec{v}_0 = (v_x; v_y)$  pouze tíhová



síla  $F_g = m \cdot g$ , respektive gravitační zrychlení  $\vec{g}$ , budeme-li místo tělesa uvažovat hmotný bod. Trajektorii hmotného bodu při šikmém vrhu je část paraboly, jak bude odvozeno dále. Na obrázku č. 7 je znázorněno, jak se v závislosti na čase  $t$  mění poloha hmotného bodu.<sup>2</sup>



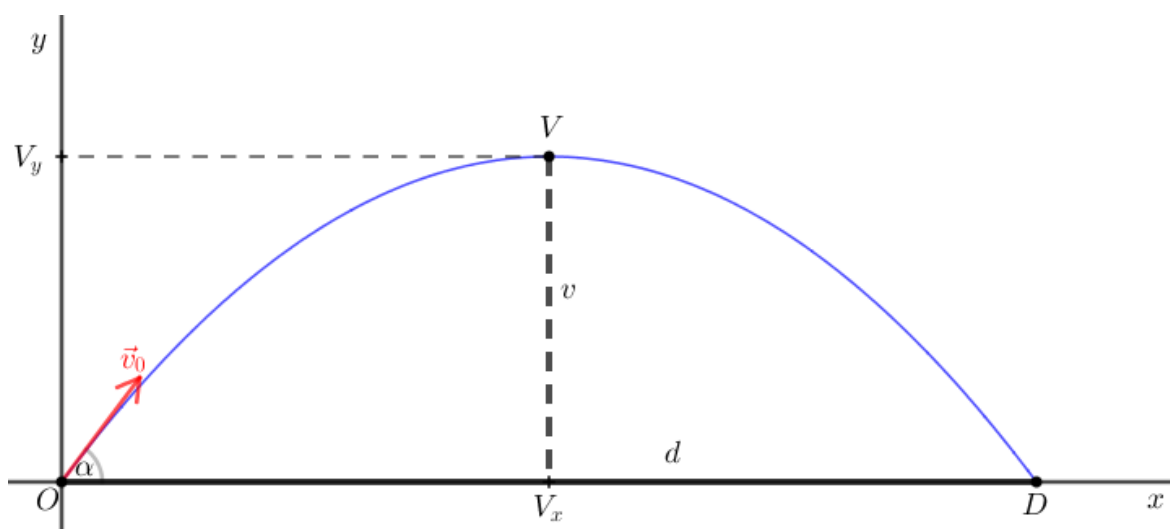
Obrázek č. 7: Vektor okamžité rychlosti a vektor gravitačního zrychlení hmotného bodu při šikmém vrhu

Navíc jsou v obrázku zakresleny vektory rychlosti a vektory gravitačního zrychlení, které v daných polohách na hmotný bod působí. Vektor gravitačního zrychlení má v každém okamžiku stejný směr i velikost. Naopak vektor okamžité rychlosti  $\vec{v}_0$ , respektive  $\vec{v}$ , má v každé ze zvolených poloh hmotného bodu odlišný směr i velikost. Vektor okamžité rychlosti působí směrem vzhůru až do okamžiku, kdy se hmotný bod dostane do polohy  $V$ . To je maximální výška, které hmotný bod při šikmém vrhu dosáhne a vektor okamžité rychlosti v něm má směr vodorovný. Po dosažení bodu  $V$  se při pohybu tělesa začne stále zřetelněji projevovat působení vektoru gravitačního zrychlení  $\vec{g}$ , takže vektor  $\vec{v}$  bude nyní také směřovat dolů. Je zřejmé, že odchylka  $\psi$  vektorů  $\vec{g}$  a  $\vec{v}$  je s plynoucím časem stále menší: největší je v okamžiku výstřelu a s přibývajícím časem platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi = 0$ . Také platí,

<sup>2</sup> (Halliday, 2000, str. 65)

že před dosažením nejvyšší výšky  $V$  je odchylka  $\psi$  tupý úhel, v okamžiku dosažení polohy  $V$  jsou na sebe vektory  $\vec{g}$  a  $\vec{v}$  kolmé a poté je  $\psi$  úhel ostrý.

Úhel  $\alpha$ , který svírá vektor počáteční rychlosti  $\vec{v}_0$  tělesa s rovinou určenou bodem výstřelu a bodem dopadu tělesa, se nazývá elevační úhel. Vzdálenost  $d$  bodu výstřelu a bodu dopadu tělesa je dolet  $D$  tělesa vrženého šikmým vrhem. Největší vzdálenost tělesa od roviny  $\rho$  je výška  $v$  šikmého vrhu. Tyto pojmy jsou znázorněny na obrázku č. 8.



Obrázek č. 8: Šikmý vrh-pojmy

Trajektorii hmotného bodu vrženého šikmým vrhem popíšu pomocí souřadnicového systému  $Oxy$ , jak je znázorněno na obrázku č. 8. Již víme, že vektor okamžité rychlosti  $\vec{v}$  hmotného bodu lze zapsat ve složkách

$$\vec{v} = (v_x; v_y),$$

kde

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

a

$$v_y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t. \quad (15)$$

Tyto vztahy vyplývají z obrázku č. 7, ve kterém je znázorněn kolmý průmět vektoru počáteční rychlosti na souřadnicovou osu  $t$ . Okamžitou polohu tělesa pohybující se rychlostí

$\vec{v}$  určím zintegrováním složek této rychlosti podle proměnné  $t$ ; tím získám vyjádření polohy bodu  $X = [x; y]$

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Těleso po výstřelu zpočátku stoupá šikmo vzhůru, dokud nedosáhne svého vrcholu  $V$ , jehož  $y$ -ová souřadnice určuje výšku šikmého vrhu. Vrchol  $V$  je (jediným) bodem trajektorie tělesa, ve kterém je složka  $v_y$  okamžité rychlosti tělesa rovna nule, což s využitím (15) nastává v čase

$$t_0 = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}.$$

Po dosazení této hodnoty  $t_0$  do vztahů pro okamžitou polohu bodu zjistím, že vrchol  $V$  trajektorie tělesa je bod

$$V = \left[ \frac{v_0^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{g}; \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2 \cdot g} \right].$$

$Y$ -ová souřadnice bodu  $V$  určuje největší výšku  $H$ , jakou těleso při šikmém vrhu dosáhne. Je zřejmé, že  $H$  závisí přímo úměrně na počáteční rychlosti tělesa a také na velikosti (ostrého) elevačního úhlu  $\alpha$ . Nejvyšších hodnot dosahuje  $H$  pro

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

což je pravá limitní hodnota rozmezí velikostí ostrých úhlů. Svírá-li rovina vrhu s rovinou  $\rho$  pravý úhel, hovoříme o vrhu svislém vzhůru. Pro toto  $\alpha$  je

$$h_s = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

To je největší výška, kterou těleso dosáhne při vrhu svislém vzhůru. Nejvyšší výška, které těleso dosáhne (při neměnné počáteční rychlosti) při šikmém vrhu, se hodnotě  $h_s$  limitně blíží.

Určím délku dostřelu tělesa při šikmém vrhu. Označím  $D$  bod dopadu tělesa na rovinu  $\rho$  při šikmém vrhu.  $Y$ -ová souřadnice bodu  $D$  je rovna nule. Čas  $t$ , ve kterém těleso dopadne na  $\rho$ , proto určím vyřešením rovnice

$$v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0$$

s neznámou  $t$ . Rovnici vyhovuje kořen

$$t = 0$$

a kořen

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}.$$

Kořen  $t = 0$  je určení času v okamžiku vržení tělesa, proto není řešením dané úlohy. Druhý kořen dosadím do vyjádření  $x$ -ové souřadnice okamžité polohy tělesa a po úpravách dostanu

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}.$$

Bod  $D$  má tedy souřadnice

$$D = \left[ \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}; 0 \right].$$

Tím je určena poloha bodu v okamžiku dopadu tělesa na rovinu  $\rho$ . Vzdálenost bodu vržení tělesa a bodu dopadu je tím větší, čím je větší počáteční rychlost tělesa, a také závisí na velikosti elevačního úhlu  $\alpha$ . Při neměnné počáteční rychlosti je tato vzdálenost největší pro

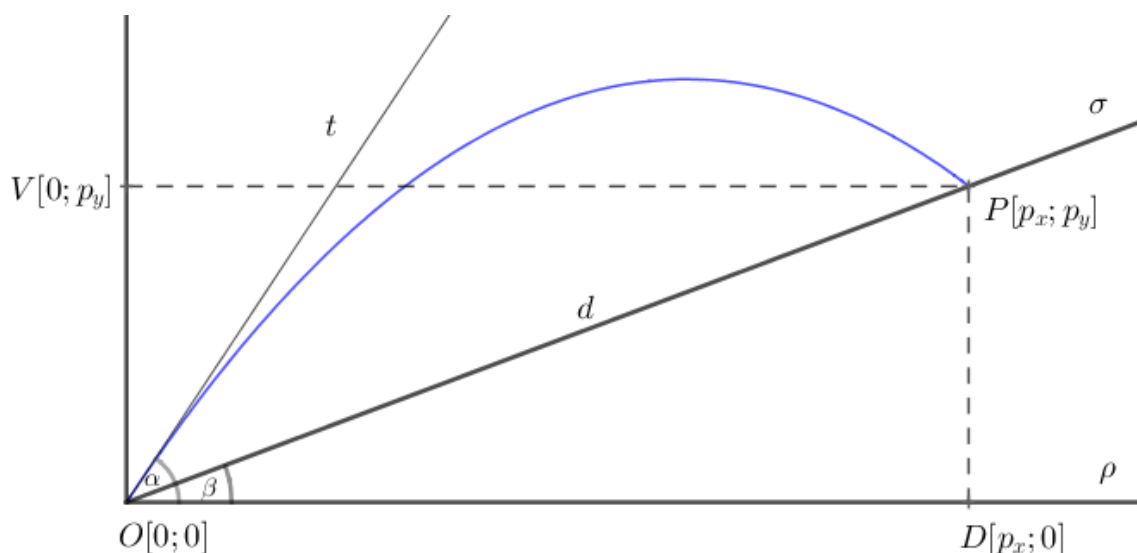
$$\alpha = \frac{\pi}{4},$$

kdy je délka doletu tělesa rovna

$$D_x = \frac{v_0^2}{g}.$$

Naopak, pokud se  $\alpha$  limitně blíží krajním hodnotám vymezení ostrého úhlu  $0$  a  $\frac{\pi}{2}$ , je vzdálenost bodu vrhu od bodu dopadu tělesa téměř nulová.

Zabývejme se nyní otázkou, jak konkrétně odchylka  $\beta$  nakloněné roviny  $\sigma$  od roviny  $\rho$  a velikost elevačního úhlu  $\alpha$  ovlivňují dráhu doletu vrženého tělesa (Bajer, 2015, str. 89-90). Předpokládejme, že těleso je vrženo rychlostí  $\vec{v}_0$  pod úhlem  $\alpha$  a že úhel  $\alpha$  i odchylka  $\beta$  jsou ostré. Na těleso při pohybu navíc nepůsobí odpor vzduchu ani žádné další vlivy prostředí. Poloha tělesa v okamžiku jeho vržení je znázorněna na obrázku č. 9.



Obrázek č. 9: Dopad tělesa na nakloněnou rovinu

Trajektorií tělesa vrženého za daných podmínek je část paraboly. Okamžitá poloha tělesa vyplývá z dosazení za příslušné proměnné do rovnic

$$x = v \cdot t \cdot \cos(\alpha) \quad (16)$$

$$y = v \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad (17)$$

Nechť je  $P$  bod o souřadnicích  $P = [p_x; p_y]$  bodem dopadu tělesa na nakloněnou rovinu  $\sigma$ . Bod  $P$  je současně bodem trajektorie tělesa i bodem ležícím v rovině  $\sigma$ . Pro všechny body  $X = [x; y]$  nakloněné roviny  $\sigma$  platí

$$\text{tg}(\beta) = \frac{y}{x}.$$

Souřadnice bodu  $P$  jsou tedy určeny vztahem

$$p_y = p_x \cdot \text{tg}(\beta).$$

Otázkou je, v jaké vzdálenosti vzhledem k soustavě  $Oxy$  od místa vržení dopadne těleso na nakloněnou rovinu  $\sigma$ . V dalších výpočtech jsou bez újmy na obecnosti ztotožněny proměnné  $x$  a  $p_x$ . Z rovnice (16) je

$$t = \frac{x}{v \cdot \cos(\alpha)}.$$

Po dosazení tohoto vyjádření do (17) vznikne rovnice

$$x \cdot \operatorname{tg}(\beta) = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)},$$

kterou lze upravit na normovanou kvadratickou rovnici

$$x^2 + \frac{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha))}{g} \cdot x = 0.$$

Po rozkladu její levé strany na kořenové činitele je zřejmé, že kořeny této rovnice jsou

$$x = 0$$

a

$$x = \frac{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta))}{g}.$$

Jedním z bodů, ve kterém trajektorie tělesa protíná  $\sigma$ , je bod  $O = [0; 0]$ , který odpovídá kořenu  $x = 0$  rovnice. Bod  $O$  však není bodem dopadu tělesa na nakloněnou rovinu, proto tento kořen nevyhovuje podmínkám úlohy. Úloze vyhovuje pouze druhý kořen, který má tvar

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta))}{g} = \\ &= \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \left( \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} - \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos^2(\alpha)). \end{aligned} \quad (18)$$

Poslední výraz lze vnímat jako funkci  $f$ , která různým hodnotám proměnných  $\vec{v}$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  přiřazuje nějakou (nezápornou) hodnotu  $p_x$ . Předpokladem je, že počáteční rychlost  $\vec{v}$  je

v rámci pokusů konstantní. Nyní zkoumejme, jak hodnotu  $p_x$  ovlivní velikosti úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Protože úhel  $\beta$ , který svírají roviny  $\sigma$  a  $\rho$ , je rovněž konstantou, závisí délka doletu  $p_x$  tělesa pouze na velikosti elevačního úhlu  $\alpha$ , jehož velikost se při každém pokusu může měnit. Vzniká otázka, pro jakou hodnotu  $\alpha$  je délka doletu vrženého tělesa maximální. Označme  $f$  funkci, která určuje závislost této délky doletu na parametrech, které na ni mají vliv. Funkce je určena již známým výrazem (18); je tedy

$$f(\alpha) = \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos^2(\alpha)).$$

Největší hodnoty nabývá  $f$  v bodě svého maxima. Maximum nabývá funkce pro takovou hodnotu  $\alpha$ , která vyhovuje rovnici

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot [\cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot (-\sin(\alpha)) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot (-\sin(\alpha))] \\ &= \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta) \cdot \sin(2\alpha)) = 0. \end{aligned}$$

Symbol  $f'(\alpha)$  označuje první derivaci funkce  $f$  podle proměnné  $\alpha$ . V souladu s vlastnostmi první derivace funkce musí být položeno  $f'(\alpha) = 0$ . To může nastat jen tehdy, pokud je

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta) \cdot \sin(2\alpha) = 0. \quad (19)$$

Při dalších úpravách bude využita identita

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}.$$

Po vyjádření  $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$  z této identity a po jejím dosazení do (19) získá rovnost (19) tvar

$$\operatorname{cotg}(2\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta),$$

respektive

$$\operatorname{cotg}(2\alpha) + \operatorname{tg}(\beta) = 0.$$

Nyní je vhodné použít součtový vzorec

$$\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{cotg}(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}. \quad (20)$$

Jeho platnost lze dokázat převedením levé strany na zlomek se společným jmenovatelem a následným použitím dalšího součtového vzorce

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

S využitím (20) je

$$\cotg(2\alpha) + \tg(\beta) = \frac{\cos(2\alpha - \beta)}{\sin(2\alpha) \cdot \cos(\beta)} = 0.$$

Protože zlomek je roven nule právě tehdy, když je jeho čítecel roven nule a jmenovatel má smysl, je řešení této rovnice ekvivalentní řešení rovnice

$$\cos(2\alpha - \beta) = 0,$$

čili

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right),$$

kde  $k$  je libovolné celé číslo. Porovnáním argumentů goniometrické funkce kosinus vyjádřím velikost elevačního úhlu

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}. \quad (21)$$

Tento vztah určuje závislost, která musí být splněna pro úhly  $\alpha$  a  $\beta$ , aby vzdálenost dopadu tělesa na rovinu  $\sigma$  od místa hození tělesa byla největší. Speciálně, pokud roviny  $\rho$  a  $\sigma$  splývají, je jejich odchylka  $\beta = 0$ , což znovu potvrzuje již známou skutečnost, že dopad tělesa na rovinu je nejdelší, je-li těleso vrženo pod elevačním úhlem

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Nyní ještě určím délku  $d_{max}$  maximálního doletu tělesa. Délka doletu tělesa na obrázku č. 9 odpovídá velikosti úsečky  $OP$ . Pokud má tato úsečka být co nejdelší, musí být maximální možná i  $x$ -ová souřadnice bodu  $P$ ; označím ji  $p_{x_{max}}$ . Její hodnota vyplyne z rovnosti (18), v níž má úhel  $\alpha$  velikost (21). Pro maximální dolet platí

$$d_{max} = \frac{p_{x_{max}}}{\cos(\beta)}.$$



Toto vyjádření lze dále zapsat a upravit následovně:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{x_{max}}}{\cos(\beta)} &= \frac{2 \cdot v^2}{g \cdot \cos(\beta)} \cdot \left( \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right) = \\
 &= \frac{2 \cdot v^2}{g \cdot \cos(\beta)} \cdot \left[ \left( \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) - \operatorname{tg}(\beta) \cdot \\
 &\quad \left. \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{2 \cdot v^2}{g \cdot \cos(\beta)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right] = \frac{2 \cdot v^2}{g \cdot \cos(\beta)} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos(\beta)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\beta)}{2} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin(\beta)}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{v^2}{g \cdot (1 + \sin(\beta))}.
 \end{aligned}$$

Je tedy

$$d_{max} = \frac{v^2}{g \cdot (1 + \sin(\beta))}.$$

Maximální dráha letu míče tedy závisí na velikosti odchyly  $\beta$  nakloněné roviny  $\sigma$  od roviny  $\rho$ . Čím je tato odchyly větší (v mezích ostrého úhlu), tím kratší je  $d_{max}$ . Maximální délka doletu míče je největší, pokud roviny  $\sigma$  a  $\rho$  splývají.

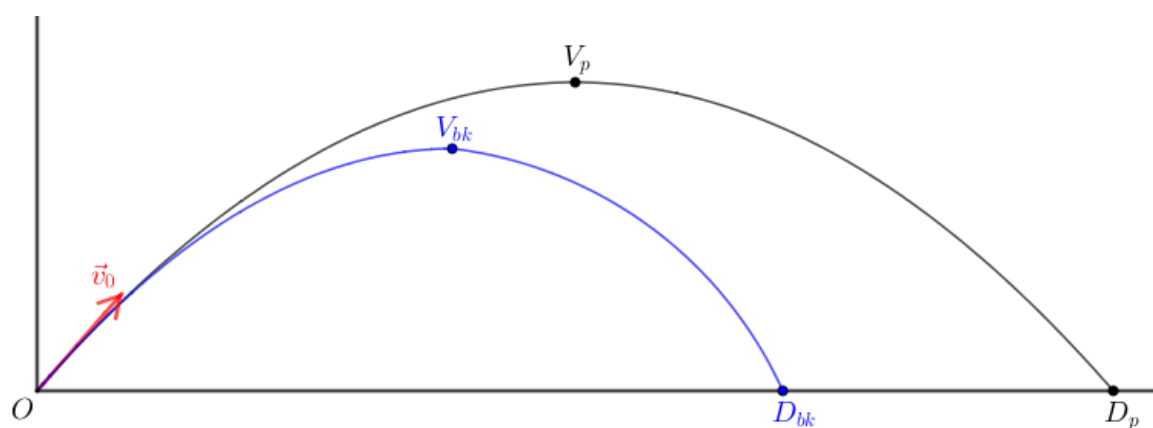
## 2.2 Šikmý vrh ovlivněný odporem vzduchu

Započtení vlivu odporu vzduchu změní tvar trajektorie tělesa vrženého šikmým vrhem.<sup>3</sup> Vlivem odporu vzduchu těleso v každém časovém okamžiku ztrácí svoji pohybovou energii, a proto je jeho délka doletu v takovém případě vždy menší než v ideálním případě, tedy bez

---

<sup>3</sup> (Bajer, 2015, str. 83-92)

působení vnějšího okolí. Na rovinu  $\rho$ , ze které bylo těleso vrženo, dopadne těleso pod větším úhlem než elevační úhel  $\alpha$ . Výška šikmého vrhu je v tomto případě menší, než pokud odpor vzduchu neuvažujeme. Trajektorie tělesa při takovém šikmém vrhu je balistická křivka. Pokud na hmotný bod vržený šikmým vrhem působí kromě gravitační síly ještě odporová síla vzduchu, je trajektorií hmotného bodu tzv. balistická křivka. Jedná se o křivku, která se svým tvarem liší od paraboly především tím, že nemá žádnou osu, podle které by byla souměrná. Rozdíl v trajektoriích tělesa, na které při pohybu působí odpor vzduchu, oproti letu tohoto stejného tělesa ve vakuu, jsou zřejmé z obrázku č. 10: balistická křivka je znázorněna modře.



Obrázek č. 10: Balistická křivka

### 2.3 Využití goniometrických funkcí při popisu šikmého vrhu-shrnutí

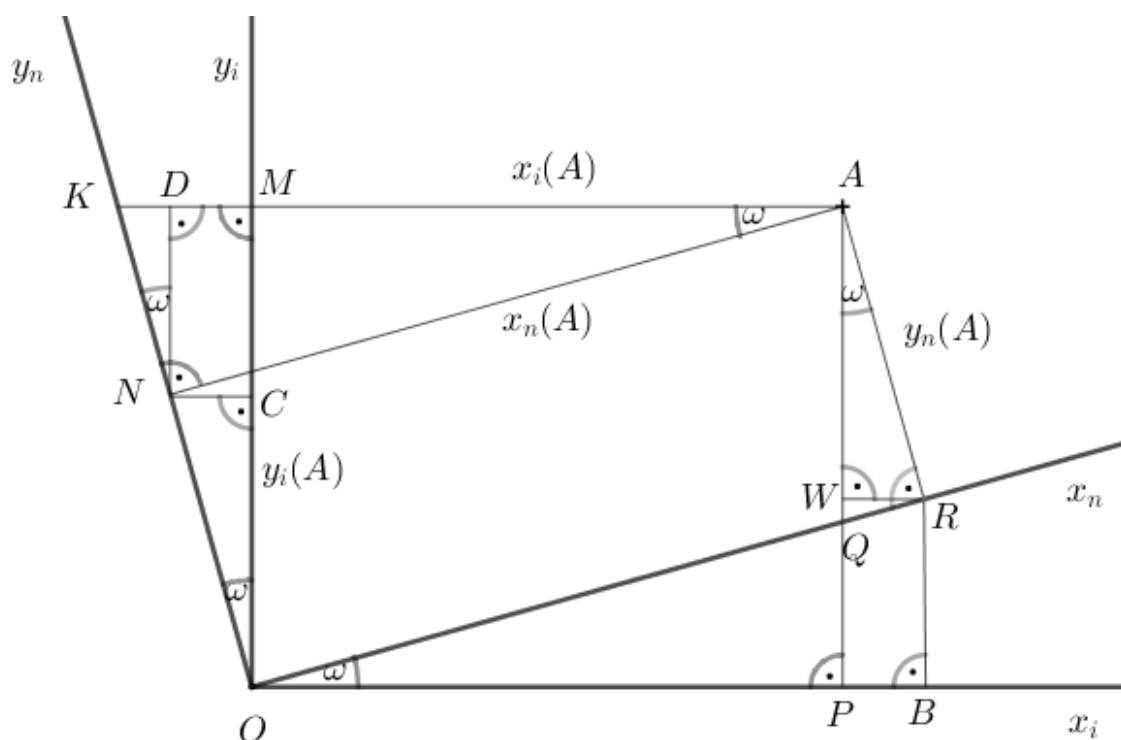
Goniometrické funkce je nutné použít při určování základních charakteristik šikmého vrhu, a to zejména ve variantě, kdy na pohybující se těleso nepůsobí odpor vzduchu. V takovém případě je účelné pohybující se těleso zakreslit do vhodně zvolené soustavy souřadnic  $Oxy$  a poté jeho pohyb interpretovat matematicky vyjádřením okamžité polohy tělesa v souřadnicové soustavě. Ta je určena vektorem počáteční rychlosti a vektorem gravitačního zrychlení. Vektor počáteční rychlosti svírá se souřadnicovou osou  $x$  úhel o velikosti  $\alpha$ , který se nazývá elevační úhel. Okamžitá poloha tělesa je určena hodnotou goniometrické funkce kosinus úhlu  $\alpha$  pro  $x$ -ovou souřadnici, respektive hodnotou funkce sinus  $\alpha$  pro  $y$ -ovou souřadnici tělesa. Takové určení je pak východiskem pro další výpočty, ze kterých lze

usoudit, jaká je trajektorie tělesa při šikmém vrhu, jaké maximální výšky těleso dosáhne i jaká je dráha doletu tělesa. Z průběhu goniometrických funkcí sinus a kosinus lze také určit velikosti elevačního úhlu  $\alpha$ , pro který nabývají zmiňované charakteristiky extrémních hodnot. K těmto výpočtům je také nezbytné ovládat řadu dalších vztahů mezi goniometrickými funkcemi, zejména součtové vzorce, a také derivace goniometrických funkcí a základní metody řešení goniometrických rovnic. Zde se využívá periodicitu goniometrických funkcí. Díky této vlastnosti lze goniometrickými funkcemi jednoznačně popsat i nekonečné děje. Je nutné podotknout, že jinak než goniometrickými funkcemi šikmý vrh bez působení vlivu prostředí popsat nelze.

Na druhou stranu, pokud zohledníme i všechny vlivy prostředí, je matematický popis pohybu pomocí goniometrických funkcí problematický. Vždy totiž záleží na výslednici sil působící na těleso v konkrétních podmínkách, což výlučně matematicky provést nelze. Poznatky o tom, jak probíhá šikmý vrh bez působení vnějších sil, v takovém případě slouží jen jako východisko. Například trajektorie tělesa, na které působí odpor vzduchu, se ideálnímu tvaru (parabole) jen částečně přibližuje, ale nejedná se ani o parabolu, ani o žádnou jinou elementární matematickou křivku. Použití goniometrických funkcí je zde tím méně přesné, čím větší doba od okamžiku vržení tělesa uběhla.

### 3 Coriolisova síla

Uvažujme neinerciální soustavu souřadnou  $Ox_n y_n z_n$  a inerciální soustavu souřadnou  $Ox_i y_i z_i$  v prostoru a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že soustava  $Ox_n y_n z_n$  se otáčí kolem souřadnicové osy  $z$  soustavy  $Ox_i y_i z_i$  úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$ , která je pro jednoduchost konstantní. Libovolný bod  $A$  v neinerciální soustavě  $Ox_n y_n z_n$  lze současně vyjádřit v inerciální soustavě  $Ox_i y_i z_i$ ; necht' je jeho vyjádření  $A[x_n; y_n; z_n]$  v soustavě  $Ox_n y_n z_n$  a obdobně  $A[x_i; y_i; z_i]$  v soustavě  $Ox_i y_i z_i$ . Východiskem pro odvození vzájemného vztahu mezi souřadnicemi bodu  $A$  v neinerciální a v inerciální soustavě souřadné je následující obrázek.



Obrázek č. 11: Odvození přechodu od inerciální k neinerciální vztažné soustavě

Obě soustavy mají společný počátek  $O$  a také mají společnou  $z$ -ovou souřadnicovou osu, která je v zavedené rotaci množinou samodružných bodů, a proto se při rotaci mění jen  $x$ -ová a  $y$ -ová souřadnice bodu  $A$ . Úhel, který svírají souřadnicové osy  $x_i$  a  $x_n$ , má velikost  $\omega$  a je orientován v kladném směru. Stejnou velikost však mají i jiné úhly na obrázku. Zprvce se jedná o úhel u vrcholu  $A$  v trojúhelníku  $NAK$ . Jde o pravoúhlý trojúhelník s pravým

úhlem u vrcholu  $N$ . Pro jeho strany navíc platí, že  $\overline{KA} \parallel \overline{OP}$  a  $\overline{NA} \parallel \overline{OR}$ , takže úhly  $\sphericalangle KAN$  a  $\sphericalangle POR$  mají stejnou (neorientovanou) velikost  $\omega$ . Další úhel o stejné velikosti je úhel u vrcholu  $O$  v trojúhelníku  $OMK$ . Tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $M$ . Z kolmosti souřadných os  $x_n$  a  $y_n$  plyne pro velikost jeho vnitřního úhlu  $MOK$

$$|\sphericalangle MOK| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle ROM| = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \omega = |\sphericalangle POR|.$$

Velikost  $\omega$  má také úhel u vrcholu  $N$  v trojúhelníku  $NDK$ , protože trojúhelníky  $OMK$  a  $NDK$  jsou si navzájem podobné. Navíc jsou trojúhelníky  $WRA$  a  $CNO$  shodné, takže je také  $|\sphericalangle CON| = |\sphericalangle WAR| = \omega$ .

Odvodit vztah mezi vyjádřením bodu  $A$  v neinerciální soustavě souřadné a v inerciální soustavě souřadné znamená určit závislost mezi souřadnicemi  $x_n, y_n$  a  $x_i, y_i$  bodu  $A$ . (Vztah mezi  $z$ -ovými souřadnicemi bodu v těchto soustavách plyne ze zavedení rotace; zřejmě je  $z_n = z_i$ .) Rovnicím, kterými je tato závislost vyjádřena, říkáme transformační rovnice. Při jejich nalézání se vychází z pravoúhlých trojúhelníků na obrázku č. 11, v nichž lze použít goniometrické funkce, a ze značení zavedeného v obrázku.

Označme  $P$  průsečík kolmice vedené z bodu  $A$  na souřadnicovou osu  $x_i$  a osy  $x_i$  a  $M$  průsečík kolmice vedené z bodu  $A$  na souřadnicovou osu  $y_i$  a osy  $y_i$ . Potom je  $|OP| = x_i(A)$  a  $|OM| = y_i(A)$ . Dále označme  $R$  průsečík kolmice vedené z bodu  $A$  na souřadnicovou osu  $x_n$  a osy  $x_n$  a  $N$  průsečík kolmice vedené z bodu  $A$  na souřadnicovou osu  $y_n$  a osy  $y_n$ . Pak je  $|OR| = x_n(A)$  a  $|ON| = y_n(A)$ . Necht' je dále  $B$  průsečík kolmice vedené z bodu  $R$  na souřadnicovou osu  $x_i$  a osy  $x_i$ . Trojúhelník  $OBR$  je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $B$  a velikost jeho odvěsny  $OB$  je  $|OB| = |OR| \cdot \cos(\omega)$ . Označme  $W$  průsečík kolmice vedené z bodu  $R$  na úsečku  $AP$  a úsečky  $AP$ . Pak má úsečka  $WR$  stejnou velikost jako úsečka  $PB$ , a navíc je  $|RA| = |ON|$ , takže je také  $|RA| = y_n(A)$ . Trojúhelník  $WRA$  je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $W$  a pro velikost jeho odvěsny  $WR$  platí  $|WR| = |AR| \cdot \sin(\omega)$ , protože úhly  $\sphericalangle PAR$  a  $\sphericalangle MON$  mají stejnou velikost  $\omega$ , protože jejich sobě odpovídající ramena jsou rovnoběžná. Úsečka  $PB$  má stejnou velikost jako úsečka  $WR$ . Proto je  $x_i(A) = |OB| - |BP| = |OR| \cdot \cos(\omega) - |AR| \cdot \sin(\omega)$ . Po dosazení za  $|RA| = y_n(A)$  vznikne první transformační rovnice  $x_i(A) = x_n(A) \cdot \cos(\omega) - y_n(A) \cdot \sin(\omega)$ .

Nyní definuji bod  $C$  jako průsečík kolmice vedené z bodu  $N$  na souřadnicovou osu  $y_i$ . K odvození druhé transformační rovnice využiji vztahu  $y_i(A) = |OM| = |OC| + |CM|$ . Velikost úsečky  $OC$  vyplýne z pravoúhlého trojúhelníku  $NCO$  s pravým úhlem u vrcholu  $C$ . V něm pro hledanou délku odvěsny  $OC$  platí  $|OC| = y_n(A) \cdot \cos(\omega)$ . Dále využiju shodnosti trojúhelníků  $\triangle ADN$  a  $\triangle OBR$ ; tyto trojúhelníky jsou shodné podle věty  $uu$ , protože se shodují ve velikostech dvou sobě odpovídajících vnitřních úhlech. Z jejich shodnosti plyne, že je  $|DN| = |BR|$ . V pravoúhlém trojúhelníku  $OBR$  platí pro velikost odvěsny  $BR$  vztah  $|BR| = |OR| \cdot \sin(\omega)$ , a proto je také  $|DN| = |OR| \cdot \sin(\omega) = x_n(A) \cdot \sin(\omega)$ . Po dosazení za  $y_i(A) = |OM|$  vznikne transformační rovnice  $y_i(A) = x_n(A) \cdot \sin(\omega) + y_n(A) \cdot \cos(\omega)$ .

Obecným vyjádřením úhlové rychlosti v závislosti na čase  $t$  je úhel o velikosti  $\omega t$ . Transformační rovnice lze s tímto značením zapsat do soustavy

$$\begin{aligned}x_i(A) &= x_n(A) \cdot \cos(\omega t) - y_n(A) \cdot \sin(\omega t) \\y_i(A) &= x_n(A) \cdot \sin(\omega t) + y_n(A) \cdot \cos(\omega t) \\z_i(A) &= z_n(A).\end{aligned}\tag{22}$$

Výrazy na pravé straně rovnic popisují, jak se mění souřadnice bodu v inerciální soustavě souřadné v závislosti na čase.<sup>4</sup> Navíc z nich lze určit vektor okamžité rychlosti  $\vec{v}_o$  pohybu bodu a také okamžité zrychlení bodu.  $x$ -ová složka vektoru okamžité rychlosti je definována

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x.$$

Symbolem  $\dot{x}$  je zde označena první derivace; konkrétně se jedná o první derivaci změny  $x$ -ové souřadnice podle času. Ostatní složky  $\vec{v}_o$  jsou definovány analogicky. Vektor  $\vec{v}_o$  jednoznačně vyplýne zderivováním každé rovnice soustavy (22) podle času. Tím vznikne soustava

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(A) &= \dot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t) \\ \dot{y}_i(A) &= \dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) + \dot{y}_n \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> (Kittel, 1973, str. 127-130)

$$\dot{z}_i(A) = \dot{z}_n(A). \quad (23)$$

Je-li bod v neinerciální soustavě souřadné v klidu, je  $\dot{x}_n(A) = 0$ ,  $\dot{y}_n(A) = 0$ ,  $\dot{z}_n(A) = 0$  a soustava (23) získává tvar

$$\dot{x}_i(A) = -\omega \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\dot{y}_i(A) = \omega \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{z}_i(A) = 0.$$

Pokud je bod v klidu v inerciální soustavě souřadné, je  $\dot{x}_i(A) = 0$ ,  $\dot{y}_i(A) = 0$ ,  $\dot{z}_i(A) = 0$ . Z prvních dvou rovnic soustavy (23) vznikne soustava

$$\dot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t) = 0$$

$$\dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) + \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t) = 0.$$

Sečtením obou rovnic a dalšími úpravami vznikne

$$\begin{aligned} & \dot{x}_n(A) \cdot (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) + x_n(A) \cdot \omega \cdot (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) + \dot{y}_n(A) \\ & \quad \cdot (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) - \omega \cdot y_n(A) \cdot (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \\ & = (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \cdot (x_n(A) \cdot \omega + \dot{y}_n(A)) + (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \\ & \quad \cdot (\dot{x}_n(A) - \omega \cdot y_n(A)) = 0. \end{aligned}$$

Protože v rovnici

$$\begin{aligned} & (\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \cdot (x_n(A) \cdot \omega + \dot{y}_n(A)) + (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \\ & \quad \cdot (\dot{x}_n(A) - \omega \cdot y_n(A)) = 0 \end{aligned}$$

nejsou výrazy  $\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$  a  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$  nikdy nulové současně, musí být  $x_n(A) \cdot \omega + \dot{y}_n(A) = 0$  a  $\dot{x}_n(A) - \omega \cdot y_n(A) = 0$ . Okamžitá rychlost bodu, který je vzhledem k neinerciální soustavě souřadné v klidu, je proto popsána rovnicemi

$$\dot{x}_n(A) = \omega \cdot y_n(A)$$

$$\dot{y}_n(A) = -\omega \cdot x_n(A)$$

$$\dot{z}_n(A) = 0.$$

$x$ -ová složka vektoru okamžitého zrychlení  $\vec{a}_o$  je definována

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Analogicky jsou definovány zbývající složky vektoru  $\vec{a}_o$ . Vektor okamžitého zrychlení bodu je tedy určen soustavou

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i(A) &= (\ddot{x}_n \cdot \cos(\omega t) - \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t)) + \\ &+ (-2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t)) + \\ &+ (-\omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) + \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t)) = a_{n/i_x} + a_{C_x} + a_{o_x} \\ \ddot{y}_i(A) &= (\ddot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) + \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t)) + \\ &+ (2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t)) + \\ &+ (-\omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t)) = a_{n/i_y} + a_{C_y} + a_{o_y} \\ \ddot{z}_i(A) &= \ddot{z}_n(A). \end{aligned} \tag{24}$$

Pravé strany výrazů soustavy (24) jsou součty třech zrychlení, která jsou přítomna v neinerciální soustavě souřadné pohybující se vůči určité inerciální soustavě konstantní úhlovou rychlostí  $\omega \cdot t$ . Zrychlení  $\vec{a}_{n/i} = (\ddot{x}_n \cdot \cos(\omega t) - \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t); \dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) + \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t); 0)$  je zrychlení hmotného bodu v neinerciální soustavě souřadné vůči inerciální soustavě souřadné. Zrychlení  $\vec{a}_C = (-2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t); 2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t); 0)$  je Coriolisovo zrychlení, ze kterého je odvozena Coriolisova síla. Zrychlení  $\vec{a}_o = (-\omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) + \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t); -\omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t); 0)$  je odstředivé zrychlení. Pokud je bod v inerciální soustavě souřadné v klidu, je  $\dot{x}_n(A) = 0$ ,  $\dot{y}_n(A) = 0$ , a proto je také  $\ddot{x}_n(A) = 0$  a  $\ddot{y}_n(A) = 0$ . První dvě rovnosti soustavy (24) pak nabývají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i(A) &= -\omega^2 \cdot (x_n(A) \cdot \cos(\omega t) - y_n(A) \cdot \sin(\omega t)) = -\omega^2 \cdot x_i(A) \\ \ddot{y}_i(A) &= -\omega^2 \cdot (x_n(A) \cdot \sin(\omega t) + y_n(A) \cdot \cos(\omega t)) = -\omega^2 \cdot y_i(A). \end{aligned} \tag{25}$$

Druhá rovnost v obou rovnicích je uplatněním soustavy (26) transformačních rovnic.

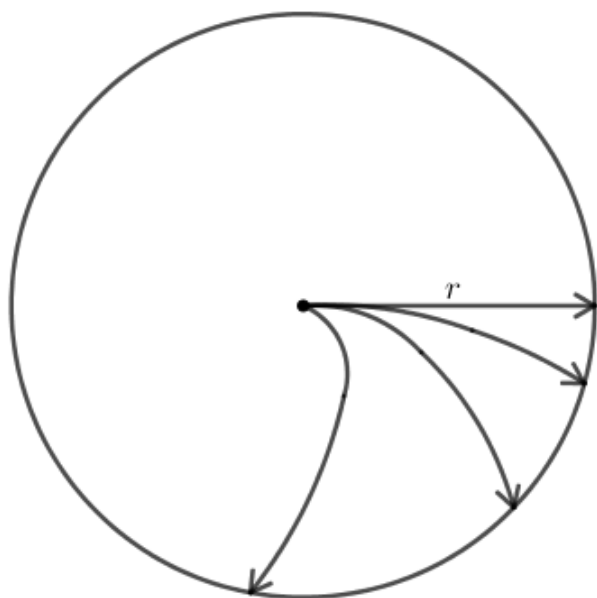
Rovnosti soustavy (25) lze zapsat ve formě vektoru



$$a_i = -\omega^2 \cdot r_i, \quad (26)$$

kde  $a_i = \ddot{r}_i$  je zrychlení bodu vzhledem k inerciální soustavě souřadné a vektor  $\vec{r}_i$  je vektor ve tvaru  $\vec{r}_i = x_i \cdot \hat{x}_i + y_i \cdot \hat{y}_i$ . Rovnost (26) je vyjádřením odstředivého zrychlení.

První dvě rovnosti soustavy (24) jsou nulové právě tehdy, když je  $x_n(A) = 0$  a  $y_n(A) = 0$ . Jak již bylo zmíněno, jsou rovny součtu složek vektorů Coriolisova zrychlení a odstředivého zrychlení. Pro pochopení působení Coriolisova zrychlení uvažujme bod pohybující se od počátku soustavy souřadnic  $Oxy$  po přímé čáře ve směru kladné poloosy  $x$ . Na tento bod při pohybu nepůsobí žádné skutečné síly. Je-li soustava  $Oxy$  inerciální, bude trajektorií pohybujícího se bodu přímá čára. Pokud je však soustava  $Oxy$  neinerciální, bude trajektorie jeho pohybu křivka, jak je znázorněno na obrázku č. 12. Rozdíl v trajektoriích pohybu v závislosti na typu soustavy  $Oxy$  je zapříčiněn právě působením Coriolisova zrychlení, respektive z něj odvozené Coriolisovy síly. Coriolisova síla je síla zdánlivá.



Obrázek č. 12: Bod pohybující se v inerciální a v neinerciální soustavě

Druhá zdánlivá síla, která působí na uvažovaný bod v pohybu, je síla odstředivá  $\vec{F}_o$ . Pokud je rychlost  $\vec{v}$  bodu malá ve srovnání s obvodovou rychlostí  $\vec{\omega}r$ , je Coriolisova síla podstatně menší než síla odstředivá.

Nyní předpokládejme, že máme danu inerciální soustavu souřadnou  $Oxyz$  se středem v počátku  $O[0; 0; 0]$  a že hmotný bod v této soustavě byl vypuzen z jejího středu  $O$ . Hmotný bod se pohybuje směrem od středu po přímce, takže jeho okamžitou polohu lze v závislosti na čase  $t$  a na počáteční rychlosti  $v_0$  vyjádřit jako souřadnice bodu  $X[v_0 \cdot t; 0; 0]$ . S využitím transformace soustavy souřadnic (26) vzniká soustava

$$\begin{aligned}x_n(A) \cdot \cos(\omega t) - y_n(A) \cdot \sin(\omega t) &= v_0 \cdot t \\x_n(A) \cdot \sin(\omega t) + y_n(A) \cdot \cos(\omega t) &= 0.\end{aligned}\tag{27}$$

Vynásobením první rovnice soustavy (27) výrazem  $\cos(\omega t)$  a druhé rovnice téže soustavy výrazem  $\sin(\omega t)$  a následným sečtením obou rovnic vznikne vyjádření

$$x_n(A) = v_0 \cdot t \cdot \cos(\omega t),$$

přičemž při úpravách bylo využito rovnosti  $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ . Po dosazení tohoto vyjádření  $x_n(A)$  do druhé rovnice soustavy (16) vyjádřím

$$y_n(A) = -v_0 \cdot t \cdot \sin(\omega t).$$

Druhá derivace rovnic soustavy (27) je

$$\begin{aligned}\ddot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \ddot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - 2 \\ \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t) + \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \sin(\omega t) &= 0 \\ \ddot{x}_n(A) \cdot \sin(\omega t) + 2 \cdot \omega \cdot \dot{x}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - \omega^2 \cdot x_n(A) \cdot \sin(\omega t) + \ddot{y}_n(A) \cdot \cos(\omega t) - 2 \\ \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot y_n(A) \cdot \cos(\omega t) &= 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Vynásobením první rovnice soustavy (28) výrazem  $\cos(\omega t)$ , vynásobením druhé rovnice této soustavy výrazem  $\sin(\omega t)$  a následným sečtením obou rovnic vznikne

$$\ddot{x}_n(A) - \omega^2 \cdot x_n(A) - 2 \cdot \omega \cdot \dot{y}_n(A) = 0.\tag{29}$$

Při úpravách bylo ve třech případech využito vzorce  $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ . Rovnici (29) vyhovují již známá vyjádření  $x_n(A) = v_0 \cdot t \cdot \cos(\omega t)$ ,  $y_n(A) = -v_0 \cdot t \cdot \sin(\omega t)$ .

Ve třídimenčním prostoru platí mezi zrychlením hmotného bodu v inerciální soustavě souřadné a v neinerciální soustavě souřadné vztah

$$\ddot{x}_i(A) = \ddot{x}_n(A) + 2 \cdot \omega \times v_n + \omega \times (\omega \times r) = \frac{F}{m}.$$

Tuto rovnost lze po vynásobení  $m$  zapsat ve tvaru

$$m \cdot \ddot{x}_n(A) = F - 2 \cdot m \cdot \omega \times v_n - m \cdot \omega \times (\omega \times r). \quad (30)$$

Na pravé straně vyjádření (30) je  $F$  pravá síla,  $F_C := -2 \cdot m \cdot \omega \times v_n$  je Coriolisova síla a  $F_o := -m \cdot \omega \times (\omega \times r)$  je odstředivá síla. Úhlová rychlost má v tomto vyjádření libovolný směr.

## 4 Kyvadlo

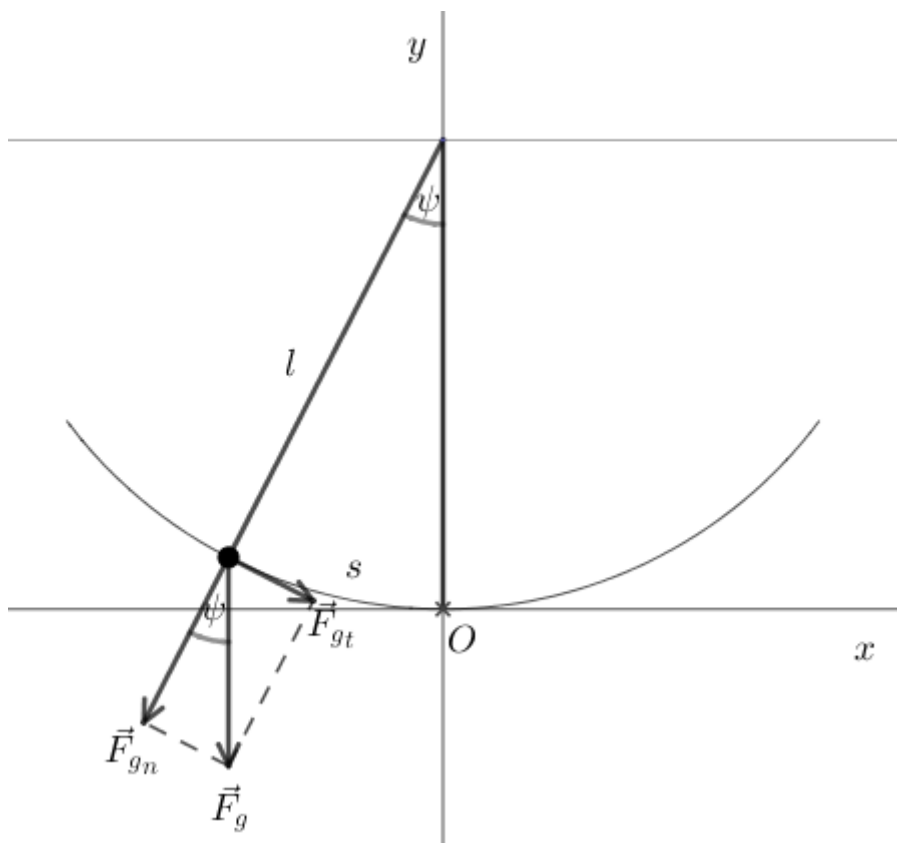
Cílem této kapitoly je představení vybraných druhů kyvadel (matematické kyvadlo, fyzické kyvadlo a kónické kyvadlo) a popsání zákonitostí jejich pohybu. Kapitola je rozdělena na několik podkapitol, ve kterých jsou vyjmenované typy kyvadla charakterizovány detailně. Typy kyvadla se liší svojí reprezentací. V případě matematického a kónického kyvadla se jedná o hmotný bod zavěšený na vláknech, v případě fyzického kyvadla je kyvadlem těleso s měnící se polohou jeho těžiště (neboli hmotného středu). Právě rozložením hmoty se zásadně liší fyzické kyvadlo od kyvadla matematického: fyzickým kyvadlem rozumíme reálná tělesa zavěšená na vláknech, zatímco v případě matematického kyvadla je jeho veškerá hmota soustředěna do hmotného bodu. Na tento hmotný bod působí pouze gravitační síla a všechny ostatní vlivy okolí jsou zanedbány. Matematické kyvadlo je proto vždy teoretický model kyvadla. V kapitole 4.2.1 je nicméně ukázáno, že ke každému fyzickému kyvadlu kývajícím se s periodou kyvu  $T$  existuje odpovídající matematické kyvadlo, které se kývá se stejnou periodou  $T$ .

Při rozboru jednotlivých druhů kyvadel jsem se zejména zaměřil na určení okamžité polohy kyvadla. Ta je ve všech případech závislá na okamžité odchylce vlákna, na kterém je kyvadlo zavěšeno, od rovnovážné polohy kyvadla. Rovnovážná poloha je taková poloha, kdy je rovina, jehož součástí je celá délka vlákna, kolmá na základní rovinu  $\rho$ . Právě při hledání předpisů, kterými je popsán pohyb kyvadel, se využívají goniometrické funkce.

### 4.1 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je nejjednodušším modelem kyvadla. Jedná se jen o teoretický model, neboť je při výpočtech prováděna celá řada zjednodušení: je zanedbán odpor vzduchu i vliv tření v místě závěsu kyvadla a tíhové pole se považuje za homogenní, což znamená, že gravitační síla má ve všech bodech takového pole stejný směr a stejnou velikost. Matematické kyvadlo je hmotný bod zavěšený na tenkém vláknech, přičemž hmotnost vlákna rovněž zanedbáváme. Stejně tak nebereme v úvahu působení žádných jiných vnějších vlivů včetně Coriolisovy síly, což znamená, že rovina kyvu je u matematického kyvadla neměnná.

To umožňuje jej popsat v dvourozměrném souřadnicovém systému  $Oxy$ , jak je tomu na obrázku č. 13.<sup>5</sup>



Obrázek č. 13: Matematické kyvadlo

Na obrázku je znázorněn hmotný bod ve tvaru kuličky pohybující se na vlákne při zachování všech podmínek matematického kyvadla. Trajektorií kuličky je část kružnice. Označím  $\psi$  odchylku vlákna od kolmice na rovinu  $\rho$ . Na kuličku působí pouze gravitační síla  $\vec{F}_g$ .

Tu lze rozložit na dvě složky  $\vec{F}_{gt}$  a  $\vec{F}_{gn}$ , kde  $\vec{F}_{gt}$  je tečný vektor v bodě, ve kterém se kulička v daný okamžik nachází, a síla  $\vec{F}_{gn}$  je normálový vektor ve stejném bodě. Tyto dvě složky jsou na sebe navzájem kolmé. Jejich složením vznikne gravitační síla  $\vec{F}_g$ . Síly  $\vec{F}_{gn}$  a  $\vec{F}_g$  svírají úhel o velikosti  $\psi$  a platí proto vztah

<sup>5</sup> (Zadrazil, 2015, str. 29, 30)

$$\sin(\psi) = \frac{-F_{g_t}}{F_g}.$$

Protože je navíc

$$F_g = m \cdot g,$$

vyjádřím složku

$$F_{g_t} = -m \cdot g \cdot \sin(\psi).$$

Dále označím  $s$  část trajektorie, která odpovídá úhlu  $\psi$ , pomocí velikosti  $\psi$ . Je-li  $l$  délka vlákna, na kterém je kulička zavěšena, pak je pro malá  $\psi$  délka  $s$  části kružnice přibližně rovna

$$s \doteq l \cdot \psi,$$

a proto je také

$$F_{g_t} \doteq s'' \doteq l \cdot \psi''.$$

Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí

$$F = m \cdot a.$$

Protože druhá derivace části trajektorie kuličky  $s''$  přibližného vyjádření složky  $\vec{F}_{g_t}$  gravitační síly určuje okamžité zrychlení kuličky v bodě, ve kterém se nachází, dostávám rovnost

$$m \cdot s'' = -m \cdot g \cdot \sin(\psi).$$

Pro malé úhly  $\psi$  je možné zjednodušeně zapsat

$$\sin(\psi) \doteq \psi.$$

Dále, po vydělení rovnosti výrazem  $m$  a po provedení dalších úprav dostávám rovnici

$$\psi'' + \frac{g}{l} \cdot \psi = 0.$$

To je homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s neznámou  $\psi$ . Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

s neznámou  $\lambda$ . Diskriminant charakteristické rovnice je záporné číslo, takže má tato rovnice dva navzájem komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_1 = 0 + \sqrt{\frac{g}{l}}i,$$

$$\lambda_2 = 0 - \sqrt{\frac{g}{l}}i.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice, jejíž charakteristická rovnice má záporný diskriminant, je

$$f(t) = c_1 \cdot e^{(a+bi)t} + c_2 \cdot e^{(a-bi)t}, \quad (31)$$

kde  $f$  je funkce, pomocí které zjistím velikost úhlové odchylky  $\psi$  kuličky od její rovnovážné polohy v závislosti na čase  $t$ . Reálná čísla  $a$  a  $b$  jsou složky komplexně sdružených kořenů charakteristické rovnice příslušné diferenciální rovnici. V daném případě je

$$a = 0$$

a

$$b = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (32)$$

Obecné řešení (31) dále zjednoduším využitím Eulerova vzorce

$$e^{i\psi} = \cos(\psi) + i \sin(\psi).$$

Upravím funkci

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \cdot e^{(a+bi)t} + c_2 \cdot e^{(a-bi)t} = \\ &= c_1 \cdot e^{at} \cdot [\cos(bt) + i \sin(bt)] + c_2 \cdot e^{at} \cdot [\cos(-bt) + i \sin(-bt)] = \\ &= (c_1 + c_2) \cdot e^{at} \cdot \cos(bt) + (c_1 - c_2) \cdot e^{at} \cdot \sin(bt) = \\ &= C_1 \cdot \cos(bt) + [C_2 \cdot \sin(bt)]i. \end{aligned}$$

Eulerův vzorec byl použit ve druhé rovnosti pro úhel  $\psi = bt$  a pro úhel  $\psi = -bt$ . Ve třetí rovnosti bylo využito faktu, že funkce kosinus je sudá a sinus je lichá funkce. Nakonec

dosadím za reálné číslo  $b$  výraz (32). Velikost odchylky  $\psi$  kuličky od její rovnovážné polohy je tedy určena předpisem

$$f(t) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Veličina

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

je úhlová frekvence pohybu kyvadla. Frekvence pohybu matematického kyvadla je

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Reálnějším modelem kyvadla, než je kyvadlo matematické, je fyzické kyvadlo, kterému je věnována podkapitola 4.2. Text je přejat z literatury (Bauer, 2014, str. 437).

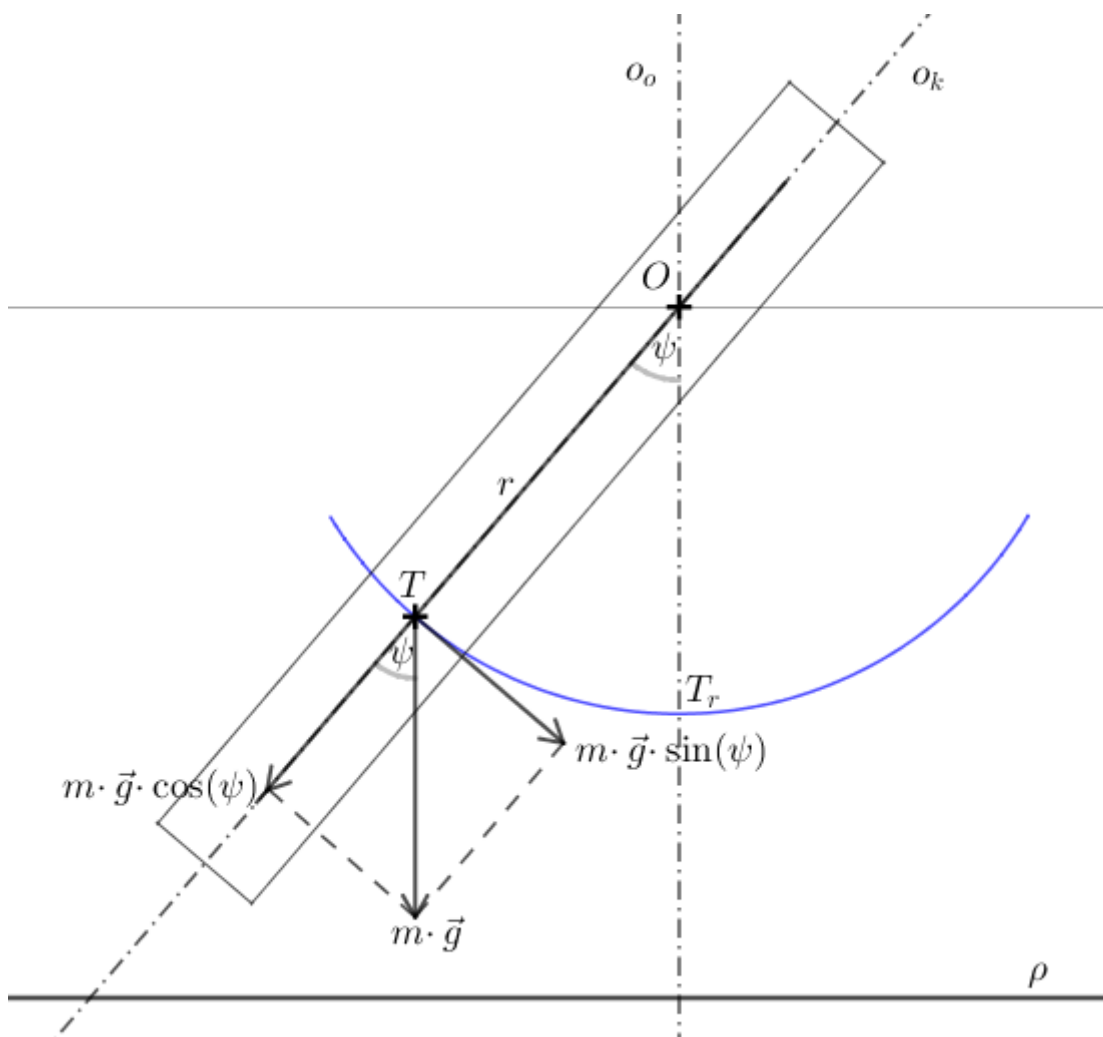
## 4.2 Fyzické kyvadlo

Fyzické kyvadlo je reálné kyvadlo takové, že veškerá jeho hmota není soustředěna do jednoho bodu. Fyzické kyvadlo se v prostoru otáčí kolem pevné vodorovné osy, která neprochází hmotným středem kyvadla. Poloha těžiště takového kyvadla závisí na odchylce osy kyvadla od vodorovné osy otáčení. Pokud je tato odchylka rovna 0, je těžiště v bodě závěsu kyvadla, v ostatních případech je totožné s jiným bodem osy kyvadla.<sup>6</sup> Do těžiště je také umístěn počáteční bod vektoru tíhové síly  $\vec{F}_g$  působící na kyvadlo.

---

<sup>6</sup> Zavěsíme-li fyzické kyvadlo v bodě jeho těžiště, nebude se po uvedení do pohybu kývat, ale bude rotovat kolem vodorovné osy.





Obrázek č. 14: Fyzické kyvadlo

Při pohybu fyzického kyvadla se mění jeho moment setrvačnosti  $I$ . To je fyzikální veličina, jejíž velikost udává míru setrvačnosti tělesa v průběhu otáčení a je závislá na aktuálním rozložení hmoty tělesa vzhledem k jeho ose otáčení. Při nalézání rovnice, která vyjadřuje závislost pohybu fyzického kyvadla na čase, vyjadřujeme, jak poloha momentu síly  $M$  a hmotnost kyvadla  $m$  ovlivňují velikost úhlového zrychlení, které vztahujeme k těžišti kyvadla. Dále označím  $r$  vzdálenost bodu závěsu kyvadla od jeho těžiště a  $\alpha$  úhel výsledného úhlového zrychlení. Pak pro moment síly platí vztah (viz obrázek)

$$M = -m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\psi). \quad (33)$$

Pravá strana rovnosti je záporná, protože moment síly vždy působí proti odchylce  $\psi$  osy kyvadla od jeho rovnovážné polohy. Předpokládám, že tyto odchylky jsou dostatečně malé,

aby je bylo možno v dalším textu přibližně vyjádřit  $\sin(\psi) \doteq \psi$ . Výsledný moment vůči ose vnějších sil působících na těleso je roven

$$M = I \cdot \alpha, \quad (34)$$

kde  $\alpha = \frac{d^2\psi}{dt^2}$  je úhlové zrychlení hmotného bodu, které lze vypočítat jako druhou derivaci úhlové dráhy podle času, a  $I$  je moment setrvačnosti vůči dané ose. Porovnáním vztahů (33) a (34) dostávám rovnici

$$I \cdot a + m \cdot g \cdot r \cdot \psi = 0,$$

kteřou vydělením  $I$  upravím na tvar

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot r}{I} \cdot \psi = 0. \quad (35)$$

Rovnice (35) je homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s neznámou  $\psi$ . Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \frac{m \cdot g \cdot r}{I} = 0. \quad (36)$$

Rovnice (36) je kvadratická rovnice s neznámou  $\lambda$ . Její diskriminant je

$$D = \frac{-4 \cdot m \cdot g \cdot r}{I}.$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou komplexně sdružená čísla

$$\lambda_1 = 0 + \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{I}} i$$

a

$$\lambda_2 = 0 - \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{I}} i.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (35) je funkce

$$f(t) = c_1 \cdot e^{(a+bi) \cdot t} + c_2 \cdot e^{(a-bi) \cdot t}, \quad (37)$$

kde reálná čísla  $a$  a  $b$  jsou složky komplexních řešení rovnice (36). Funkci (37) upravím s využitím Eulerova vzorce do podoby

$$f(t) = C_1 \cdot \cos(bt) + (C_2 \cdot \sin(bt)),$$

kde

$$C_1 := c_1 + c_2$$

a

$$C_2 := c_1 - c_2.$$

Úhlová frekvence kmitů fyzického kyvadla je

$$\omega_f = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{I}}.$$

Předpis, který udává okamžitou polohu fyzického kyvadla na čase, tedy je

$$f(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_f \cdot t).$$

Periodu kmitů kyvadla určím ze vzorce

$$T_f = \frac{2 \cdot \pi}{\omega},$$

což po dosazení dává

$$T_f = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot r}}. \quad (38)$$

Příkladem takového fyzického kyvadla je homogenní železná tyč o hmotnosti 5 kilogramů dlouhá 2 metry, která je zavěšena ve svém horním konci a je uvedena do pohybu, tedy vychýlena z rovnováhy. Její moment setrvačnosti se vypočítá podle Steinerovy věty. Ta umožňuje určit moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose otáčení, která je rovnoběžná s osou jdoucí středem hmotnosti tyče. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k takové ose jdoucí středem hmotnosti tělesa je roven  $I_{SH} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2$ , kde  $m$  je hmotnost tyče a  $r$  je vzdálenost bodu závěsu od středu hmotnosti tyče. Protože je tyč homogenní, je tato vzdálenost rovna polovině délky tyče, takže je  $r = 1(m)$ . Celkový moment setrvačnosti  $I$  je podle Steinerovy věty roven  $I = I_{SH} + m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r\right)^2$ . Po dosazení je tedy  $I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot r^2$ . Pro

dané hodnoty je tedy  $I = \frac{5}{3} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ . Po dosazení této hodnoty do vztahu (38) vplyne, že perioda kmitů  $T_f$  tohoto fyzického kyvadla je přibližně 1,1582 sekund.

#### 4.2.1 Vztah mezi matematickým a fyzickým kyvadlem

Pro libovolné fyzické kyvadlo kmitající s periodou  $T$  kolem bodu závěsu  $O$ , existuje matematické kyvadlo kmitající se stejnou periodou  $T$ .<sup>7</sup> Délka tohoto matematického kyvadla je  $L_o$ . Délka  $L_o$  je tzv. redukováná délka a lze ji zjistit ze vztahu

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

pro periodu kmitů matematického kyvadla.

Na spojnicí bodu závěsu  $O_m$  a těžiště  $T$  fyzického kyvadla pak lze nalézt bod  $O_f$  ve vzdálenosti  $L_m$  od  $O$  směrem k těžišti. Bod  $O_f$  je odpovídající bod závěsu fyzického kyvadla. Nazývá se kyvadlo reverzní vzhledem ke kyvadlu matematickému. V tomto bodě se bude kyvadlo kývat se stejnou periodou jako v bodě  $O_m$ .

### 4.3 Kónické kyvadlo

Kónické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti  $m$  zavěšený na nehmotném vlákně délky  $l$ , který se pohybuje tak, že vlákno opisuje plášť rotačního kužele.<sup>8</sup> Výška kužele je  $h$ . Odchylna výšky kužele od vlákna je úhel neměnné velikosti  $\psi$ . Samotný hmotný bod se přitom pohybuje po kružnici. Situace je znázorněna na obrázku č. 15.

Vlákno je zavěšeno v bodě závěsu  $O$ . Na hmotný bod při pohybu působí gravitační síla  $\vec{F}_g$  a tahová síla vlákna  $\vec{F}_t$ . Výslednicí těchto dvou sil je dostředivá síla  $\vec{F}_d$ . Dostředivá síla je síla vznikající vždy při křivočarém pohybu. Lze ji vyjádřit jako součin

$$F_d = m \cdot a_d,$$

---

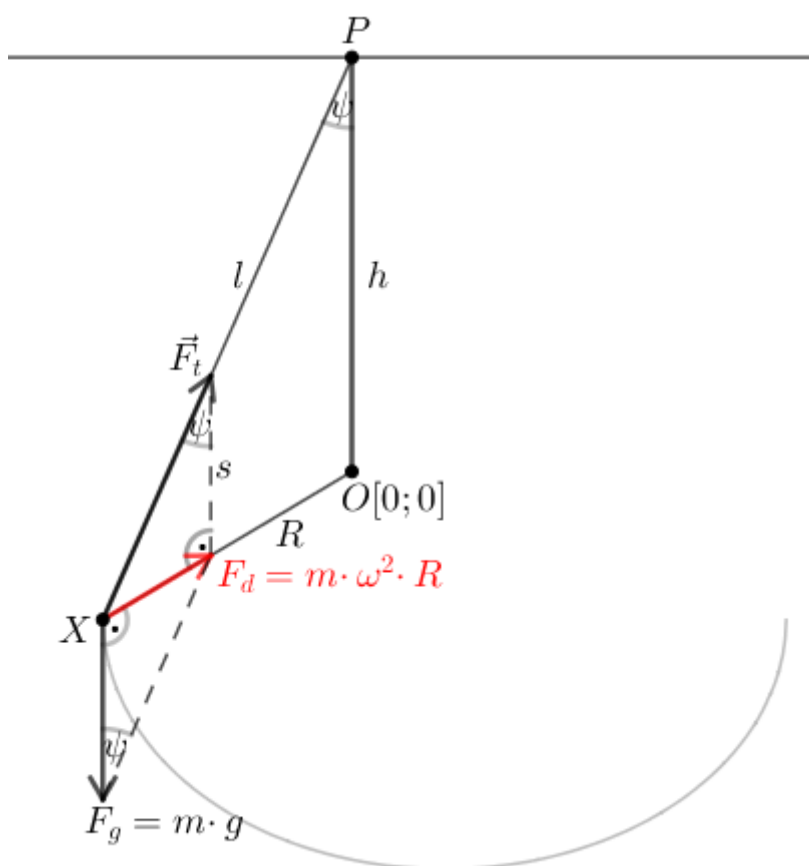
<sup>7</sup> (Halliday, 2000, str. 420)

<sup>8</sup> (Wellner, 1991, str.132)

kde  $m$  je hmotnost pohybujícího se tělesa a  $\vec{a}_d$  je dostředivé (nebo také normálové) zrychlení. To je příčinou neustálého zakřivování trajektorie hmotného bodu, protože dostředivé zrychlení, a tedy i dostředivá rychlost, vždy směřuje do středu zakřivení. Velikost dostředivé síly je dána rovností

$$F_d = m \cdot \omega^2 \cdot r, \quad (39)$$

kde  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost hmotného bodu a  $r$  je poloměr kružnice, která je trajektorií hmotného bodu.



Obrázek č. 15: Kónické kyvadlo

Podle 2. Newtonova pohybového zákona je součet sil působících na hmotný bod v tomto případě roven velikosti dostředivé síly

$$F_t + F_g = m \cdot a = F_d. \quad (40)$$

Střed trajektorie hmotného bodu umístěn v počátku soustavy souřadnic  $Oxy$ . V pravoúhlém trojúhelníku s jedním vrcholem  $X$  a s přeponou  $F_t$  platí

$$\sin(\psi) = \frac{F_d}{F_t} = \frac{m \cdot a}{F_t}. \quad (41)$$

Kombinací vztahů (39) a (40) navíc dostanu

$$F_d = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot r. \quad (42)$$

Porovnáním rovností (41) a (42) získávám rovnost

$$F_t \cdot \sin(\psi) = m \cdot \omega^2 \cdot r. \quad (43)$$

Vertikální souřadnice bodu  $X$  je nulová. Pokud tedy vyjádřím velikost  $s$  z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou  $F_t$

$$\cos(\psi) = \frac{s}{F_t}$$

(viz obrázek č. 15), tak lze zapsat

$$F_t \cdot \cos(\psi) - m \cdot g = 0. \quad (44)$$

Dále z rovností (43) a (44) vyjádřím sílu

$$F_t = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{\sin(\psi)} = \frac{m \cdot g}{\cos(\psi)},$$

odkud po úpravě vyplývá

$$g \cdot \operatorname{tg}(\psi) = \omega^2 \cdot r. \quad (45)$$

Podle obrázku navíc je

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{r}{h},$$

což po dosazení do (44) a úpravě umožňuje vyjádřit úhlovou rychlost hmotného bodu

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Perioda kmitání kónického kyvadla

$$T_k = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

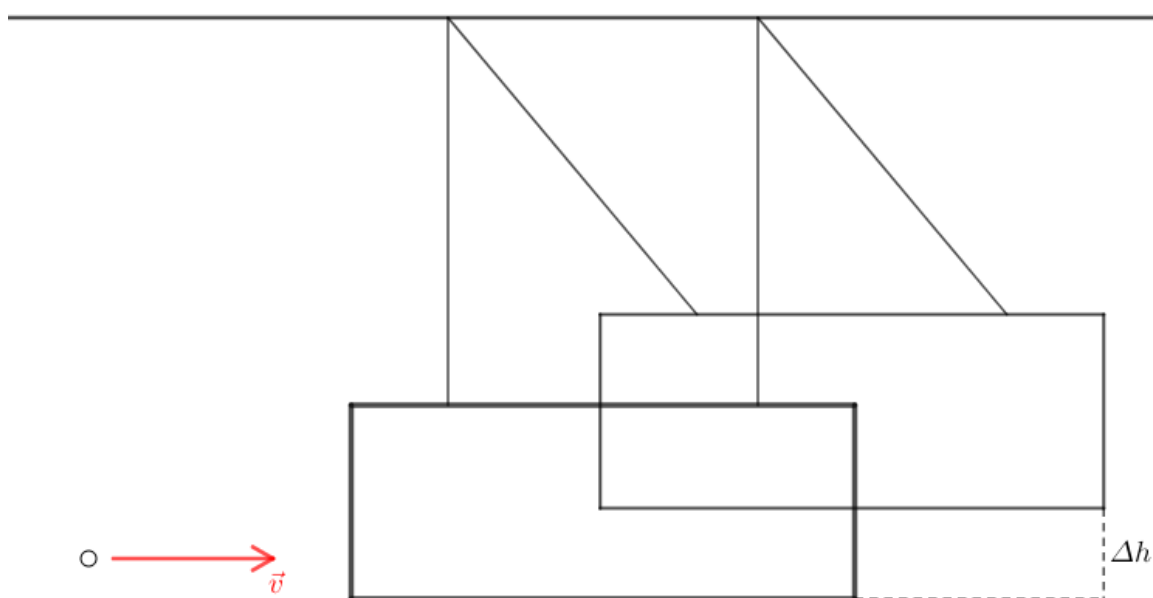
je rovna

$$T_k = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

#### 4.4 Příklady užití kyvadel

##### Balistické kyvadlo

Před vyvinutím zařízení pro elektronické měření času se k měření rychlosti projektilů střelných zbraní užívalo tzv. balistické kyvadlo.<sup>9</sup> Balistickým kyvadlem lze převést velkou rychlost lehké kulky na podstatně menší rychlost těžšího hranolu. Rychlost hranolu je proto snáze měřitelná a lze z ní zpětně odvodit i rychlost kulky. Příklad balistického kyvadla je znázorněn na obrázku č. 16.



Obrázek č. 16: Balistické kyvadlo

<sup>9</sup> (Halliday, 2000, str. 246-247)

Balistickým kyvadlem může být dřevěný hranol zavěšený na dvou vláknech zanedbatelné hmotnosti. Předpokládáme, že v čase  $t = 0$  je ze zbraně vystřelena kulka, která pronikne do hranolu a uváže v něm. Srážkou s kulkou je hranol vychýlen ze své rovnovážné polohy. Hranol s kulkou má bezprostředně po této srážce rychlost  $\vec{V}$ . Srážka kulky s hranolem je dokonale nepružná, protože kulka po proniknutí do hranolu v hranolu zůstane. Kinetická energie  $E_k$  soustavy hranol a kulka se při srážce změní. Mechanická energie  $E_m$  soustavy kyvadlo a Země se po vychýlení hranolu z rovnovážné polohy za předpokladu zanedbání odporu prostředí nicméně zachovává. Kinetická energie kyvadla v rovnovážné poloze je tudíž shodná s tíhovou potenciální energií soustavy kyvadlo a Země v momentu, kdy se kyvadlo nachází přesně v bodě obratu. Tento fakt vyjadřuje rovnost

$$\frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 = (M + m) \cdot g \cdot h, \quad (46)$$

kde  $M$  je hmotnost hranolu,  $m$  je hmotnost kulky a  $h$  je okamžitá výchylka těžiště soustavy hranol a kulka ze své rovnovážné polohy. Při označení  $\vec{v}$  rychlosti kulky navíc ze zákona zachování hybnosti plyne

$$m \cdot v = (m + M) \cdot V. \quad (47)$$

Po vyjádření  $\vec{V}$  z rovnosti (47) a jejím následným dosazením do (46) vyjádřím rychlost kulky

$$v = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Balistické kyvadlo tedy není modelem kyvadla výlučně teoretickým, jako je kyvadlo matematické. Dalším příkladem možnosti využití kyvadel je Foucaultovo kyvadlo pojmenované po francouzském fyzikovi Jean-Bernard-Léon Foucaultovi.<sup>10</sup> Ten v roce 1851 poprvé experimentálně dokázal, že na všechna tělesa na zemském povrchu působí síla, která je důsledkem rotace Země kolem své osy. Foucaultův pokus spočíval v zavěšení kyvadla o hmotnosti 28 kilogramů na provaz dlouhý 67 metrů s periodou kmitu 16 sekund. V průběhu času se postupně měnila rovina kyvu kyvadla, čímž bylo prokázáno působení zdánlivé síly. Tuto sílu teoreticky předpověděl již Gaspard Gustav de Coriolis (1792-1843), po kterém také tato síla byla pojmenována Coriolisova síla.

---

<sup>10</sup> (Bajer, 2012, str. 335)



## 4.5 Využití goniometrických funkcí při popisu kyvadel-shrnutí

Předmětem studia kyvadel je zejména určování závislosti okamžité výchylky hmotného bodu zavěšeného na vlákne od rovnovážné polohy, a to jako funkci času. Při pohybu působí na hmotný bod síly, které ovlivňují pohyb hmotného bodu. Pro analyzování jejich vlivu je nutné tyto síly rozložit na složky a zabývat se každou silou zvlášť. Velikosti složek jsou rovny odpovídající goniometrické funkci úhlu, který tyto složky svírají. Často se při výpočtech využívá skutečnosti vyplývající z Taylorova rozvoje goniometrické funkce sinus, že pro malé úhly  $\psi$  lze s dostatečnou přesností nahradit  $\sin(\psi)$  za  $\psi$ , aniž by přitom zmíněný Taylorův rozvoj byl v textu uveden. Dále se zde goniometrické funkce vyskytují jako výsledek řešení diferenciálních rovnic druhého řádu takových, že diskriminant jejich charakteristických rovnic je záporný.

## 5 Těleso na pružině

Cílem kapitoly je demonstrovat užití goniometrických funkcí při popisu pohybu hmotného bodu, který je zavěšen na nehmotném vlákně a pohybuje se za různých vstupních podmínek. Takový mechanismus nazýváme mechanický oscilátor. Počátečními podmínkami je pak blíže určen pohyb, který hmotný bod vykonává.

Harmonický oscilátor má různé aplikace v mnoha odvětvích přírodních věd. Harmonickým oscilátorem může být například závaží na stromě, kyvadlo s malou výchylkou, případně jiná mechanická zařízení. Ve všech případech se v principu jedná o těleso na něčem zavěšené, které vykonává kmitavý pohyb. Tento pohyb lze bez ohledu na fyzikální charakteristiky harmonického oscilátoru popsat vždy v zásadě stejnou diferenciální rovnicí. Pomocí této jedné rovnice lze popsat velmi mnoho fyzikálních dějů vyskytujících se v každodenním životě; patří mezi ně například oscilace ladičky, která vytváří zvukové vlny, princip fungování termostatu, který reguluje teplotu okolního prostředí, oscilace náboje v elektrickém obvodu nebo vibrace elektronů v atomu vytvářejících světelné vlny. Pozoruhodné je, že všechny tyto jevy lze popsat obdobnými rovnicemi. Jedná se vždy o lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Těleso zavěšené na vlákně je nejjednodušším mechanickým systémem, jehož pohyb lze popsat uvedeným typem rovnice. (Feynman, 1980, str. 373-374).

Pohyb tělesa či hmotného bodu, při kterém určující veličina nabývá periodicky střídavě hodnot větších a menších, než je rovnovážná poloha sledované veličiny, se nazývá kmitání. Pokud kmitání trvá i poté, co na těleso (hmotný bod) přestaly působit vnější síly, které jej zapříčinily, říkáme, že se jedná o volné kmitání. Volné kmitání probíhá jen díky setrvačným silám a pružným silám soustavy a vzniká složením vlastních tvarů kmitání. Pokud soustava kmitá některým z vlastních tvarů kmitání, nazývá se příslušné kmitání vlastní. Pokud na soustavu působí vnější síly, jejichž směr a velikost se mění, jedná se o kmitání vynucené. (Baťa, 1987, str. 23).

## 5.1 Volné harmonické kmitání

Nechť je dán hmotný bod zavěšený na nehmotném vlákně, jehož trajektorii je přímka.<sup>11</sup> Při pohybu na něj působí síla  $F = -k \cdot s$ , kde  $k$  je tuhost pružiny a  $s$  je výchylka hmotného bodu od své rovnovážné polohy. Současně na hmotný bod působí síla podle druhého Newtonova zákona  $F = m \cdot a = m \cdot s''$ . Pohybová rovnice hmotného bodu má proto tvar

$$m \cdot s'' + k \cdot s = 0. \quad (48)$$

Závislost okamžité výchylky hmotného bodu od rovnovážné polohy je znázorněna na obrázku č. 17.

Před vyřešením diferenciální rovnice (48) definuji veličinu

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}},$$

kteřá se nazývá vlastní kruhová (úhlová) frekvence. Nyní lze pohybovou rovnici (48) po vydělení hmotností  $m$  a po správném dosazení zapsat

$$s'' + \omega_0^2 \cdot s = 0. \quad (49)$$

Jedná se o lineární homogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty.<sup>12</sup> Její charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (50)$$

Rovnice (49) je kvadratická rovnice s neznámou  $\lambda$  a diskriminantem

$$D = 2 \cdot \sqrt{-\omega_0^2}.$$

Diskriminant charakteristické rovnice (49) příslušný diferenciální rovnici (48) je záporný, a proto má rovnice (50) dva různé kořeny z oboru komplexních čísel, které jsou komplexně sdružené. Lze je tedy zapsat

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

---

<sup>11</sup> Katedra fyziky Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity

<sup>12</sup> Jíra, 2004, str. 90

respektive

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (48) má tvar

$$y = e^{\alpha x} \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)],$$

kde reálná čísla  $C_1$  a  $C_2$

jsou integrační konstanty. Po dosazení konkrétních hodnot má rovnice (48) řešení

$$w(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (51)$$

Hodnoty integračních konstant lze zapsat ve tvaru

$$C_1 = A \cdot \sin(\psi)$$

a

$$C_2 = A \cdot \cos(\psi)$$

pro nějaké reálné  $A$  a pro úhel  $\psi$ . Dosadím-li tyto hodnoty do (64), lze řešení diferenciální rovnice vyjádřit

$$s(t) = A \cdot (\sin(\psi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \cos(\psi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)).$$

S využitím součtového vzorce

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

vyjádřím řešení

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi),$$

kde  $A$  je amplituda volného harmonického kmitání a  $\psi$  je fázový posun. Jejich hodnoty zjistím z podmínek pro počáteční čas  $t = 0$ . Obecný vzorec pro okamžitou rychlost  $\vec{v}$

hmotného bodu je první derivace jeho dráhy podle času

$$s'(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi).$$

Pro  $t = 0$  vzniká soustava

$$s(0) = A \cdot \sin(\psi) = s_0$$

$$s'(0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\psi) = v_0. \quad (52)$$

Z její první rovnice plyne

$$A = \frac{s_0}{\sin(\psi)}. \quad (53)$$

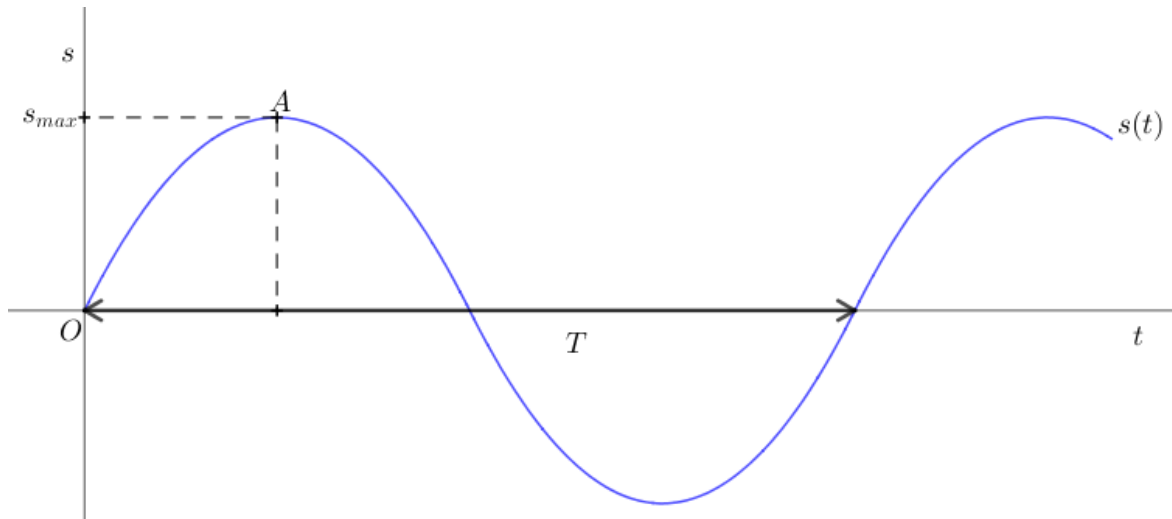
Po dosazení tohoto vztahu pro amplitudu do druhé rovnice soustavy (52) vyjádřím velikost fázového posunu

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{s_0}{v_0} \cdot \omega_0\right). \quad (54)$$

Po dosazení vztahu (54) do rovnosti (53) je vhodné převést výraz pro složení funkcí

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{s_0}{v_0} \cdot \omega_0\right)\right)$$

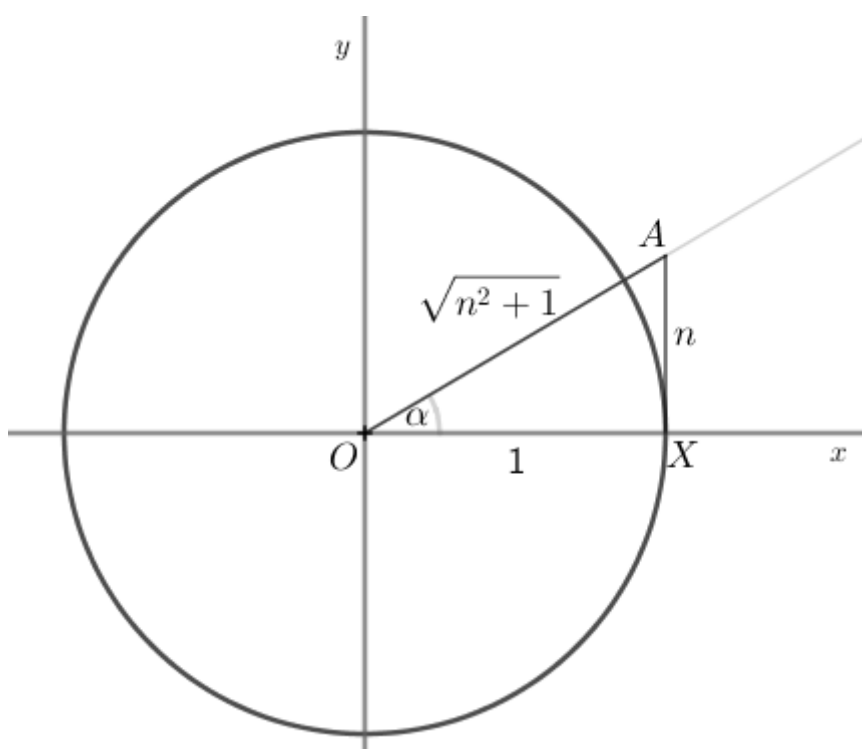
jen na podíl dvou polynomů, případně odmocnin z polynomů, což je provedeno v následujícím Příkladu.



Obrázek č. 17: Volné harmonické kmitání

#### Příklad.

V souřadnicové soustavě  $Oxy$  je dána kružnice se středem v počátku  $O$  a o poloměru 1, jak je znázorněno na obrázku č. 18.



Obrázek č. 18: Skládání goniometrických a cyklometrických funkcí

V pravouhlém trojúhelníku  $OXA$  s pravým úhlem u vrcholu  $X$  platí

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{n}{1}$$

nebo ekvivalentně

$$\alpha = \operatorname{arctg}(n). \quad (55)$$

V témže trojúhelníku také platí

$$\sin(\alpha) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (56)$$

Kombinací (55) a (56) dostávám vztah

$$\sin(\operatorname{arctg}(n)) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Po dosazení původního argumentu získávám po úpravě

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{s_0}{v_0} \cdot \omega_0\right)\right) = \frac{s_0 \cdot \omega_0}{\sqrt{s_0^2 \cdot \omega_0^2 + v_0^2}}$$

Tento tvar dosadím do (52); po úpravě je

$$A = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}.$$

Výrazem pro  $A$  je určena největší výchylka pohybu od rovnovážné polohy při volném harmonickém kmitání.

## 5.2 Tlumené harmonické kmitání

Téma tlumené harmonické kmitání hmotného bodu zavěšeného na pružině je zpracováno v literatuře (Kvasnica, 1988, str. 67-69). Předpokladem je, že oscilátor je umístěn v souřadnicové soustavě  $Oxy$  tak, jak je dále popsáno.

Nechť je dán hmotný bod. Soustava souřadnic  $Oxy$  je umístěna tak, že hmotný bod kmitá kolem souřadnicové osy  $x$ .

Předpokladem je, že na něj působí elastická síla

$$F_e = -k \cdot s$$

a odporová síla

$$F_o = -h \cdot v = -h \cdot s',$$

kde  $k > 0$  je tuhost pružiny a  $h > 0$  je odpor prostředí. Zavedu souřadnicový systém  $Oxy$  tak, že jeho počátek  $O$  je koncový bod vektoru elastické síly a osa  $x$  je totožná s přímkou, po které se hmotný bod pohybuje. Má-li hmotný bod hmotnost  $m$ , pak jeho pohybová rovnice je

$$m \cdot s'' = -k \cdot s - h \cdot s'.$$

Levá strana rovnice vyjadřuje znění druhého Newtonova pohybového zákona, neboť okamžité zrychlení  $\vec{a}$  je druhá derivace dráhy uražené hmotným bodem podle času. Definuji proměnné

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a

$$\delta := \frac{h}{2 \cdot m}.$$

S tímto označením lze pohybovou rovnicí zapsat

$$s'' + 2 \cdot \delta \cdot s' + \omega_0^2 \cdot s = 0. \quad (57)$$

Rovnice (57) je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty druhého řádu. Proměnná  $\omega_0$  této rovnice označuje frekvenci netlumeného harmonického kmitu. Rovnice (57) má charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s neznámou  $\lambda$ . Její diskriminant je

$$D = 4 \cdot \delta^2 - 4 \cdot \omega_0^2.$$

Obor hodnot, respektive počet řešení rovnice (57) závisí na znaménku diskriminantu. O tlumené harmonické kmitání hmotného bodu se jedná tehdy, kdy je  $\delta < \omega_0$ . V takovém případě je diskriminant  $D$  charakteristické rovnice záporný a kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}i,$$

$$\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}i.$$

Označím

$$\omega := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

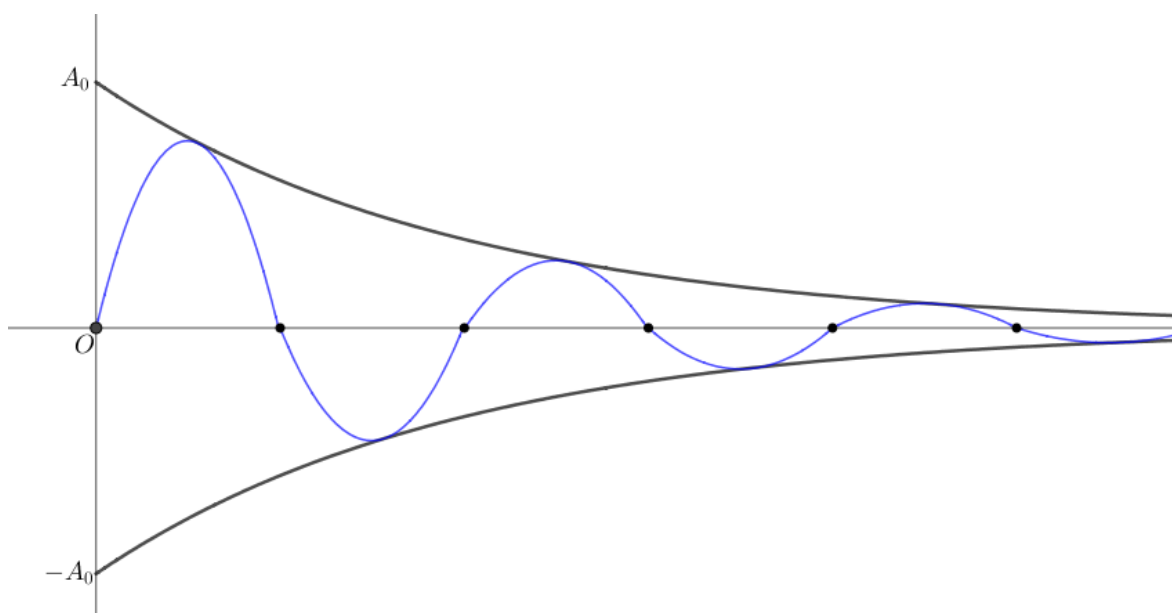
Řešení rovnice (49) zapíšu ve tvaru

$$s = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \alpha). \quad (58)$$

Velikost amplitudy  $A$  pohybu popsáno tímto předpisem je dána vztahem

$$A = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}.$$





Obrázek č. 19: Tlumené harmonické kmitání

Amplituda je nepřímo úměrná velikosti času  $t$ , nejedná se tudíž o konstantu. Navíc je tento pohyb popsán periodickou goniometrickou funkcí sinus. Rovnicí (58) je tedy skutečně popsáno tlumené harmonické kmitání.

### 5.3 Hranice mezi volným a tlumeným kmitáním

Vyšetřujeme pohyb<sup>13</sup> hmotného bodu popsaného rovnicí

$$m \cdot s'' + h \cdot s' + k \cdot s = 0 \quad (59)$$

s neznámou  $s$ . Trajektorii hmotného bodu lze bez újmy na obecnosti zakreslit celou v 1. kvadrantu souřadnicové soustavy  $Oxy$ , a proto je neznámá  $s > 0$ . Hodnotu neznámé lze vyjádřit jako

$$x = e^{p \cdot t}, \quad (60)$$

kde  $p \in R$  je parametr a  $t > 0$  je časový úsek. Po dosazení tohoto řešení do (59) získám rovnici

$$m \cdot p^2 \cdot e^{p \cdot t} + h \cdot p \cdot e^{p \cdot t} + k \cdot e^{p \cdot t} = 0,$$

---

<sup>13</sup> (Triffet, 1968, str. 67-69)

kteřou vytknutím kladného výrazu (60) a vydělením hmotností  $m$  převedu na kvadratickou rovnici

$$p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_0^2 = 0 \quad (61)$$

s neznámou  $p$ . Tato rovnice je současně normovanou charakteristickou rovnicí (59). Její diskriminant je

$$D = (2 \cdot \delta)^2 - 4 \cdot \omega_0^2, \quad (62)$$

a kořeny jsou proto

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Počet řešení kvadratické rovnice, a tedy i řešení diferenciální rovnice (58) závisí na hodnotě diskriminantu. Mohou nastat tři případy:

(i) Diskriminant  $D$  je kladný, pokud

$$(2 \cdot \delta)^2 > 4 \cdot \omega_0^2.$$

Pak je řešením rovnice (59) funkce ve tvaru

$$f(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[ c_1 \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right]. \quad (63)$$

Definuji proměnné

$$\xi_1 := \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) \cdot t^2$$

a

$$\xi_2 := \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) \cdot t^2.$$

Pak lze řešení (62) diferenciální rovnice (59) zapsat ve tvaru

$$f(t) = c_1 \cdot e^{\xi_1} + c_2 \cdot e^{\xi_2}.$$

Protože platí nerovnost

$$\delta > \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

(její platnost lze snadno ověřit umocněním na druhou), je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1 = -\infty \quad (64)$$

a také

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_2 = -\infty. \quad (65)$$

Z (64) vyplývá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\xi_1} = 0$$

a z (65) vyplývá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\xi_2} = 0.$$

Z toho je zřejmé, že funkční hodnota funkce  $f$  exponenciálně klesá s rostoucím časem a že hmotný bod pohybující se v souladu s (59) vůbec neosciluje.

(ii) Diskriminant  $D$  je záporný, pokud

$$(2 \cdot \delta)^2 < 4 \cdot \omega_0^2.$$

Řešením rovnice (59) je potom funkce

$$f(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[ c_1 \cdot e^{\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right)i} + c_2 \cdot e^{\left(-\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right)i} \right], \quad (66)$$

kterou lze upravit na tvar

$$f(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \psi\right). \quad (67)$$

Hmotný bod bude oscilovat se stejnou periodou jako goniometrická funkce kosinus, ale amplituda jeho kmitu se bude v čase neustále zmenšovat.

Úpravy, kterými jsem od tvaru (65) dospěl ke tvaru (66), jsou analogické jako v podkapitolách 5.1 a 5.2, ve kterých se však obdobný tvar jako (66) vyskytuje s použitím goniometrické funkce sinus. Pro jednoduchost označím

$$K := A \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

a

$$\omega_0 := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} f_2(t) &= K \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi) = K \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\omega_0 \cdot t + \psi)\right] = \\ &= K \cdot \sin\left\{-\left[\omega_0 \cdot t + \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = -K \cdot \sin\left[\omega_0 \cdot t + \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = L \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta) \end{aligned}$$

s označením

$$L := -K,$$

$$\delta := \psi - \frac{\pi}{2}.$$

(iii) Diskriminant  $D$  je roven nule, pokud

$$(2 \cdot \delta)^2 = 4 \cdot \omega_0^2. \tag{68}$$

Potom má rovnice (59) jediný (dvojnásobný) kořen

$$p = -\delta$$

a řešení rovnice (59) je funkce

$$f(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t).$$

Hmotný bod, jehož trajektorii je grafické znázornění průběhu této funkce, se nepohybuje periodicky. Jeho výchylka od rovnovážné polohy se neustále zmenšuje, a to podstatně rychleji než v případě (i), dokud se hmotný bod v rovnovážné poloze neustálí. Hovoříme

proto o kritickém útlumu pohybu; ze vztahu (68) lze vyjádřit hodnotu kritického útlumu  $h_x$ , která je rovna

$$h_x = 2 \cdot \sqrt{m \cdot K_x}. \quad (69)$$

Konstanta kritického útlumu udává limitní hodnotu mezi periodickým a neperiodickým pohybem hmotného bodu. Je-li

$$h_x \geq 2 \cdot \sqrt{m \cdot K_x},$$

není pohyb popsáný rovnicí (59) periodický. Pokud je

$$h_x < 2 \cdot \sqrt{m \cdot K_x},$$

popisuje (59) periodický pohyb.

## 5.4 Nucené harmonické kmitání

### 5.4.1 Harmonicky buzené netlumené kmitání

Tato podkapitola<sup>14</sup> se zabývá hledáním závislosti okamžité výchylky  $\vec{s}$  hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v závislosti na čase  $t$  při pohybu, který je vyvolán vnější periodickou budicí silou

$$F_b = F_0 \cdot \sin(\omega t).$$

Symbolem  $\vec{F}_0$  je označena amplituda harmonických kmitů a  $\omega$  je frekvence budicí síly. Na hmotný bod dále působí vratná síla

$$F_v = -k \cdot s.$$

Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí pro pohyb tohoto hmotného bodu vztah

$$F_s = m \cdot s'' = -k \cdot s + F_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (70)$$

Rovnice (70) je pohybová rovnice harmonicky buzeného netlumeného kmitání. Tuto rovnici vydělím hmotností  $m$  a definuji frekvenci vlastních kmitů oscilátoru jako veličinu

---

<sup>14</sup> (Bajer, 2012, str. 287)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (71)$$

a amplitudu zrychlení budící síly

$$f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Po jejich dosazení do (70) získávám pohybovou rovnici

$$s'' + \omega_0^2 \cdot s = f_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (72)$$

Jedná se o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Její obecné řešení vyjádřím

$$\psi(t) = \psi_h(t) + \psi_p(t),$$

kde složka  $\psi_h(t)$  znamená řešení rovnice (72) s nulovou pravou stranou a  $\psi_p(t)$  je partikulární řešení této rovnice. Pro nalezení  $\psi_h(t)$  určím charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (73)$$

s neznámou  $\lambda$ . Její diskriminant je

$$D = -4 \cdot \omega_0^2$$

a kořeny jsou komplexní čísla

$$\lambda_1 = \omega_0 i$$

a

$$\lambda_2 = -\omega_0 i.$$

Výsledné řešení<sup>15</sup> rovnice (72) s nulovou pravou stranou lze proto zapsat jako

$$\psi_h(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi),$$

kde  $A$  a  $\psi$  jsou konstanty, které budou specifikovány.

Pro nalezení partikulárního řešení  $\psi_p(t)$  dosadím do rovnice (70)

---

<sup>15</sup> (Triffet, 1968, str. 203)

$$\psi_p(t) = K \cdot \sin(\omega t)$$

a určím hodnotu  $K$ , pro kterou je rovnice (70) splněna. Získám rovnici

$$-m \cdot K \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) + k \cdot K \cdot \sin(\omega t) = F_0 \cdot \sin(\omega t).$$

Po jejím vydělení  $\sin(\omega t)$  vyjádřím

$$K = \frac{F_0}{-m \cdot \omega^2 + k} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m \cdot \omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Při úpravách byl uplatněn vztah a fyzikální definice tuhosti pružiny

$$k = m \cdot \omega_0^2,$$

ze které jsem vyjádřil úhlovou frekvenci  $\omega$ . Partikulární řešení rovnice (70) proto je

$$\psi_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \sin(\omega t).$$

Závislost okamžité odchylky hmotného bodu od rovnovážné polohy při harmonicky buzeném netlumeném kmitání lze proto zapsat například ve tvaru

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \sin(\omega t). \quad (74)$$

Konstanty  $A$  a  $\psi$  určím na základě počátečních podmínek

$$\vec{s}(0) = \vec{s}_0$$

a

$$\vec{s}'(0) = \vec{v}_0.$$

Najdu první derivaci

$$s'(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi) + \frac{\frac{F_0}{k} \cdot \omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \cos(\omega t).$$

Z počátečních podmínek proto plyne soustava

$$A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\psi) + \frac{\frac{F_0}{k} \cdot \omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = s_0$$

$$A \cdot \sin(\psi) = v_0. \quad (75)$$

Z její druhé rovnice vyjádřím

$$A = \frac{v_0}{\sin(\psi)} \quad (76)$$

a toto vyjádření dosadím do první rovnice soustavy (75). Odtud po úpravách najdu na základě známých veličin velikost úhlu

$$\psi = \operatorname{arccotg} \left( \frac{s_0 \cdot k \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) + F_0 \cdot \omega \cdot \omega_0^2}{v_0 \cdot \omega_0 \cdot k \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)} \right).$$

Po dosazení získané hodnoty do (76) určím také konstantu  $A$ . Poté bude rovnice okamžité odchylky (74) úplně určena.

#### 5.4.2 Harmonicky buzené tlumené kmitání

Kmitání vyvolané harmonickou silou, které je tlumené působením vnějších sil, se od netlumeného kmitání vyvolaného harmonickou silou liší tím, že hmotný bod při pohybu ovlivňuje vnější odporová síla.<sup>16</sup> Ta působí proti směru pohybu a je rovna

$$F_o = -h \cdot s',$$

kde  $h$  je koeficient tlumení. Ostatní síly působící na hmotný bod jsou stejné jako v případě netlumeného kmitání. Pohybová rovnice hmotného bodu proto je

$$m \cdot s'' + h \cdot s' + k \cdot s = F_0 \cdot \sin(\omega t), \quad (77)$$

kde  $\omega$  je kmitočet budící síly. Jedná se o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto se její celkové řešení skládá ze složky  $\psi_h(t)$ , což je řešení rovnice (77) s nulovou pravou stranou, a ze složky  $\psi_p(t)$ , což je partikulární řešení (77). Protože se jedná o kmitání tlumené, jsou všechna obecná řešení rovnice (77) v homogenním

---

<sup>16</sup> (Bajer, 2012, str. 289)



tvaru funkce popisující tlumené kmitání, jak již bylo dokázáno v kapitole 5.3 při určování koeficientu kritického tlumení  $h_k$  ve všech možných případech (i), (ii) a (iii). Proto je s rostoucím časem složka  $\psi_h(t)$  stále více zanedbatelná a řešení rovnice (77) je určeno prakticky jen složkou  $\psi_p(t)$ . Předpokládám, že partikulární řešení (77) je

$$\psi_p(t) = K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t) \quad (78)$$

pro nějaké konkrétní  $K_1$  a  $K_2$ . Pro jejich nalezení určím nejprve první derivaci

$$\psi_p'(t) = K_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - K_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

a poté druhou derivaci

$$\psi_p''(t) = -K_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) - K_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t).$$

Po jejich dosazení do (77) dostávám

$$\begin{aligned} &(-m \cdot K_1 \cdot \omega^2 - h \cdot K_2 \cdot \omega + k \cdot K_1 - F_0) \cdot \sin(\omega t) \\ &+ (-m \cdot K_2 \cdot \omega^2 + C_x \cdot K_1 \cdot \omega + k \cdot K_2) \cdot \cos(\omega t) = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Protože (78) je partikulárním řešením rovnice (77) pouze pro

$$\sin(\omega t) \neq 0$$

a

$$\cos(\omega t) \neq 0,$$

je nutné najít podmínky, za kterých je rovnice (79) splněna. Přepíšu rovnici (79) do tvaru

$$A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) = 0 \quad (80)$$

a dále upravím

$$A \cdot \left( \pm \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} \right) = -B \cdot \cos(\omega t) \quad (81)$$

s využitím rovnosti

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

platné pro každé reálné  $x$ . Po umocnění (81) na druhou a dalších úpravách získám vztah

$$|B| = |A| \cdot |\operatorname{tg}(\omega t)|. \quad (82)$$

Rovnice (80) je tedy platná pro každou uspořádanou dvojici  $[A; B]$ , která vyhovuje rovnosti (82) za předpokladu, že hodnota  $\operatorname{tg}(\omega t)$  je zcela libovolná. Volím proto například  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Pro koeficienty v rovnici (79) proto platí

$$\begin{aligned} -m \cdot K_1 \cdot \omega^2 - h \cdot K_2 \cdot \omega + k \cdot K_1 - F_0 &= 0 \\ -m \cdot K_2 \cdot \omega^2 + h \cdot K_1 \cdot \omega + k \cdot K_2 &= 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Po vydělení soustavy (83) hmotností  $m$  a po provedení substitucí

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$f_0 := \frac{F_0}{m}$$

a

$$\gamma_0 := \frac{h}{m}$$

dostávám soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot K_1 + (-\gamma_0 \omega) \cdot K_2 &= f_0 \\ (\gamma_0 \omega) \cdot K_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot K_2 &= 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Z druhé rovnice této soustavy vyjádřím

$$K_1 = -\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\gamma_0 \cdot \omega} \cdot K_2 \quad (85)$$

a toto vyjádření dosadím do první rovnice. Po úpravách získám

$$K_2 = -\frac{f_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2}$$

a tento výraz dosadím do (85). Odtud zjistím, že

$$K_1 = \frac{\gamma_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2}.$$

Po dosazení hodnot  $K_1$  a  $K_2$  do rovnice (78) získá partikulární řešení diferenciální rovnice tvar

$$\psi_p(t) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2} \cdot [(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin(\omega t) - \gamma_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)]. \quad (86)$$

Nyní určím amplitudu  $A$  a fázový posun  $\psi$  harmonicky buzeného tlumeného kmitání. Protože partikulární řešení má charakter kmitů o frekvenci budící síly (což bylo prokázáno experimentálně), lze partikulární řešení zapsat také ve tvaru

$$\psi_p(t) = A \cdot \sin(\omega t - \psi). \quad (87)$$

Hodnoty  $A$  a  $\psi$  najdu porovnáním vztahů (86) a (87). Pravou stranu (87) upravím pomocí součtového vzorce

$$\psi_p(t) = (A \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\omega t) - (A \cdot \sin(\psi)) \cdot \cos(\omega t).$$

Koeficienty pro sinus, resp. kosinus úhlu  $\omega t$  porovnáím s jejich vyjádřením příslušných stejným úhlům v (86). Tím získám soustavu

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(\psi) &= \frac{f_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2} \\ A \cdot \sin(\psi) &= \frac{f_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2}. \end{aligned} \quad (88)$$

Z první rovnice této soustavy vyjádřím amplitudu

$$A = \frac{f_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \cdot \omega)^2] \cdot \cos(\psi)} \quad (89)$$

a dosadím toto vyjádření do druhé rovnice (88). Z ní po úpravách zjistím, že je velikost úhlu

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Dále vyjádřím

$$\gamma_0 = \frac{h}{m} = \frac{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}{m} = \frac{2 \cdot \sqrt{(\bar{\omega}^2 \cdot m) \cdot m}}{m} = 2 \cdot \bar{\omega},$$

kde

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

je úhlová frekvence kmitavého pohybu hmotného bodu. Ostatní proměnné mají obvyklý význam zmíněný již v předchozím textu. Proto lze velikost fázového zpoždění zapsat také ve tvaru

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \bar{\omega} \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

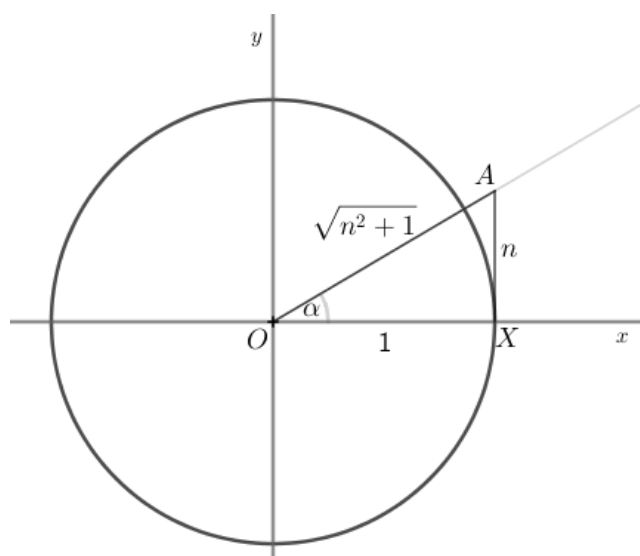
Amplitudu  $A$  kmitavého pohybu lze určit dosazením takto vyjádřeného úhlu  $\psi$  do (89). K tomu je nutné nejprve vyjádřit složení funkcí

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \bar{\omega} \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

jen jako podíl, resp. odmocninu z podílu dvou polynomů. Postup takového vyjádření je předveden v následující podkapitole.

#### 4.4.2.1 Skládání funkcí goniometrických a cyklometrických

Východiskem je zakreslení situace do souřadnicového systému  $Oxy$ . V ní je dána kružnice se středem v počátku  $O$  o poloměru 1, jak je znázorněno na obrázku č. 20.



Obrázek č. 20: Skládání goniometrických a cyklometrických funkcí

Z trojúhelníku  $OXA$  plyne rovnost

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Protože je navíc

$$\alpha = \operatorname{arctg}(n),$$

dostávám vyjádření

$$\cos(\operatorname{arctg}(n)) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Pro dané hodnoty je tedy

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot \bar{\omega} \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{4 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Po dosazení tohoto vyjádření do (89) dostávám amplitudu harmonicky buzeného tlumeného kmitání

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \omega^2}}$$

## 5.5 Využití goniometrických funkcí při popisu pohybu tělesa zavěšeného na pružině-shrnutí

V souvislosti s hmotným bodem zavěšeným na pružině se goniometrické funkce používají při stanovení závislosti okamžité výchylky hmotného bodu od rovnovážné polohy na čase. Goniometrické funkce se v této souvislosti objeví při řešení pohybové rovnice hmotného bodu. Ačkoli při různých vnějších podmínkách vypadá tato pohybová rovnice odlišně, vždy se jedná o diferenciální rovnici druhého řádu. Kořeny takové rovnice jsou pak výrazy, v nichž se vyskytují goniometrické funkce sinus a kosinus. K jednoznačnému nalezení funkcí popisujících závislost okamžité výchylky na čase je nutné využít počáteční podmínky, které vyplývají z formulace problému. Počáteční podmínky diferenciálních rovnic jsou určeny další charakteristiky pohybu hmotného bodu, jako je například amplituda

pohybu. Je přitom nutné znát vzorce pro počítání s goniometrickými funkcemi, například součtové vzorce funkcí sinus a kosinus.

## **Závěr**

Bakalářská práce představuje uplatnění goniometrických funkcí ve vybraných oblastech mechaniky. Kapitoly, o kterých práce pojednává, byly vybrány tak, aby probíraná problematika měla značné praktické dopady na náš každodenní život. Současně má být text srozumitelný všem zájemcům o matematiku a fyziku, kteří tyto disciplíny ovládají na úrovni středoškolského učiva. Práce není určena čtenářům hledajícím detailní rozbor libovolného z probíraných témat, ale propojuje zvolenou oblast matematiky (goniometrické funkce) se světem kolem nás. Právě aplikace funkcí v situacích rozebraných v práci jsou jejím hlavním přínosem. Zákonitosti odvozené v jednotlivých kapitolách platí většinou za zvláštních podmínek (např. pohyb tělesa vrženého šikmým vrhem platí za předpokladu zanedbání odporu prostředí), ale přesto z nich lze vyvodit základní principy průběhu reálných dějů.

Goniometrické funkce v každé části bakalářské práce sloužily k odvození základních vztahů. Zvláště zajímavé je jejich použití v kapitole věnované Coriolisově síle. Tato síla, ač je zdánlivá, byla v práci odvozena na základě vztahů platných pro pohyb hmotného bodu v inerciální a v neinerciální vztažné soustavě. V ostatních případech se v textu goniometrické funkce vyskytují jako důsledek vztahů mezi různými složkami sil, které na předmět (hmotný bod) působí. Protože se ve důsledku vždy jedná o použití goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku, vychází se v práci ze zavedení goniometrických funkcí obvyklém na střední škole a nejsou v ní uvedeny jiné možnosti jako například zavedení goniometrických funkcí pomocí Taylorových rozvoju řad. Pochopení použití funkcí v konkrétním případě je usnadněno obrázky, kterými je text doplněn.

## Seznam použitých informačních zdrojů

BAJER, JIŘÍ. *Mechanika 3*. Vydání druhé. Olomouc: RNDr. Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80903958-5-5 strana 287, 289

BAJER, JIŘÍ. *Mechanika 1. Vydání třetí*. Olomouc: chlup.net, 2015. strana 83-92. ISBN 978-80-903958-8-6 strana 83-92, 335

BAŤA, Miloslav, PLACHÝ, Václav, TRÁVNÍČEK, František. *Dynamika stavebních konstrukcí*. Vydání první. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1987. str. 23

BAUER, Wolfgang, WESTFALL, Gary D. *University Physics with Modern Physics*. 2. vydání. New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2014. ISBN 978-1-259-08075-3 str. 437

FÄHRNICH, Jaromír, HAVRÁNEK, Antonín, SLAVÍNSKÁ, Danka. *Příklady z mechaniky*. Vydání páté. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum, 2001. ISBN 80-246-0387-X strana 31, 106

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M. *Feynmanove přednášky z fyziky. 1. díl*. Vydání druhé. Bratislava: Vydavatelství technické a ekonomické literatury, 1986. strana 373-374

HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl. *Fyzika. Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Vydání první. Brno: Vysoké učení technické – nakladatelství VUTIUM, 2000. ISBN 80-214-1869-9 (VUTIUM) strana 297-302

JÍRA, Josef, MICKA, Michal, PUCHMAJER, Pavel. *Kinematika a dynamika v dopravě. Příklady*. Vydání první. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. strana 90-95

*Katedra fyziky Přírodovědecké knihovny Ostravské univerzity* [online]. Ostrava [cit. 3.12.2020] Dostupné z:

[artemis.osu.cz](http://artemis.osu.cz)

KITTEL, Charles, KNIGHT, Walter D., RUDERMAN, Malvin A. *Mechanics. Berkeley Physics Course. 1. díl*. Vydání druhé. USA: McGraw-Hill, 1973. strana 127-130

KVASNICA, Jozef, HAVRÁNEK, Antonín, LUKÁČ, Pavel, SPRUŠIL, Boris. *Mechanika*. 1. vydání. Praha: Academia – nakladatelství Československé akademie věd, 1988. strana 64-109

SVOBODA, Emanuel, BARTÁK, František, ŠIROKÁ, Miroslava. *Fyzika pro technické obory středních odborných škol*. Vydání třetí. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. strana 69-71

TRIFFET, Terry. *Mechanics. Point Objects and Particles*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc., 1968. str. 187-249

WELLNER, Marcel. *Elements of Physics*. New York: Plenum Press, 1991. ISBN 0-306-43354-0 str. 132

ZADRAŽIL, Tomáš. *Metody řešení diferenciálních rovnic*. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Strana 29-30. Katedra didaktiky matematiky, Praha 2015.