Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Úlohy s více řešeními a jejich místo na 1. stupni ZŠ

Word problems with different results at primary school

Kristýna Švihnosová

Vedoucí práce:	Mgr. Radka Havlíčková
Studijní program:	Učitelství pro základní školy (M7503)
Studijní obor:	I. ST (7503T047)

2020

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Slovní úlohy s více řešeními a jejich místo na 1. stupni ZŠ* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Děčíně dne 4. 12. 2020

Ráda bych poděkovala Mgr. Radce Havlíčkové za odborné rady, podnětné připomínky, pečlivost a pozitivní přístup, se kterým vedla mou práci. Rovněž děkuji všem učitelkám účastnícím se výzkumu. A v neposlední řadě jsem vděčná mé rodině, která pro mě byla při studiu oporou, a svým kolegyním, s nimiž jsme se v průběhu let podporovaly.

ABSTRAKT

Diplomová práce je zaměřena na problematiku slovních úloh s více řešeními, kterým není v odborné literatuře věnována systematická pozornost. Těžištěm práce je pozorování, jak se slovní úlohou s více řešeními pracují žáci a učitelé 1. stupně ZŠ. Teoretická část se soustředí na typologii slovních úloh, fáze jejich řešení a řešitelské strategie. Dále je navržena klasifikace slovních úloh dle počtu řešení a typologie slovních úloh s více řešeními. Významnou část tvoří cíle, s jakými tento typ úlohy může být ve vyučování matematice zadáván a které se mění v závislosti na učiteli a jeho přístupu k výuce. Práce se také věnuje základní charakteristice vyučovacích stylů. Zvolený kvalitativní výzkum metodou pozorování a dotazníku umožňuje popsat práci učitelů se slovní úlohou s více řešeními a identifikovat prvky vyučovacích stylů, konkrétně transmisivního a konstruktivistického, které se v jednání učitelů projevují. Doplňkovou metodou je zvolena analýza vybraných učebnic z hlediska přítomnosti slovních úloh s více řešeními, která odhaluje, zda se takové úlohy v učebnicích vyskytují a s jakými úlohami učitelé a žáci mohou mít zkušenost. Výzkum ukázal, že vyučovací styl učitele se při práci se slovní úlohou s více řešeními projevuje v jeho instrukcích, ve formulaci otázek, kterými žáky usměrňuje, a v jeho způsobu vedení třídní diskuze. Přístup učitele nemusí být plně ovlivněn učebnicí, kterou při vyučování používá. Ve vybraných učebnicích se nacházejí slovní úlohy s více řešeními, které buď explicitně vyzývají k více řešením, či jejich zadání není jednoznačné, čímž umožňují existenci více správných výsledků.

KLÍČOVÁ SLOVA

slovní úloha, více řešení, vyučovací styl, transmisivní přístup, konstruktivistický přístup, žáci 1. stupně ZŠ

ABSTRACT

The diploma thesis is focused on the issue of word problems with different results, to which is not given systematic attention in the specialized literature. The focus of the work is to observe how pupils and teachers of elementary school work with a word problem with different results. The theoretical part focuses on the typology of word problems, the phases of their solution and solving strategies. Furthermore, the classification of word problems according to the number of results and the typology of word problems with different results is proposed. A significant part consists of the goals with which this type of task can be assigned in the teaching of mathematics and which change depending on the teacher and his approach to teaching. The work also deals with the basic characteristics of teaching styles. The selected qualitative research using the method of observation and questionnaire allows to describe the work of teachers with a word problem with different results and to identify elements of teaching styles, namely transmissive and constructivist approaches, which are reflected in the actions of teachers. An additional method is the analysis of selected textbooks in terms of the presence of word problems with different results, which reveals whether such tasks occur in textbooks and what tasks teachers and pupils can experience. Research has shown that a teacher's teaching style, when working with a word problem with multiple solutions, is reflected in his instructions, in the formulation of the questions he directs the pupils with, and in his way of leading the class discussion. The teacher's approach may not be fully influenced by the textbook he uses. In selected textbooks, there are word problems with multiple solutions, which either explicitly call for multiple solutions, or their assignment is not unambiguous, thus enables the existence of more correct results.

KEYWORDS

word problem, different results, teaching style, transmissive approach, constructivist approach, primary school pupils

Obsah

Úvod

Za téma své diplomové práce jsem si vybrala *Slovní úlohy s více řešeními a jejich místo na 1. stupni ZŠ*. Záměrem práce je zanalyzovat slovní úlohu s více řešeními z hlediska její podoby, funkce a využití na prvním stupni základní školy a na konkrétní úloze ukázat, jak s takovými slovními úlohami pracují různí učitelé a žáci.

Pamatuji si, že na prvním stupni jsem měla slovní úlohy v oblibě. Ty, které jsme počítali z učebnice, měly vždy stejnou formu. Stačilo se zorientovat v textu, napsat zápis, aplikovat správnou číselnou operaci, vypočítat výsledek, napsat odpověď a mohlo se běžet k paní učitelce pro kontrolu a pochvalu. Zpětně se domnívám, že tyto slovní úlohy mě především podporovaly v soutěživosti s ostatními žáky, kdo bude mít slovní úlohu vypočítanou první. Obsah úloh byl jednoduchý a nevyžadoval hlubší zkoumání, výsledek úlohy byl vždy jen jeden.

S příchodem na vysokou školu jsem se seznámila s Hejného metodou výuky matematiky, kde se úlohy s více řešeními běžně vyskytují, nad jejich řešením řešitelé diskutují a nejsou překvapeni, pokud mají více jak jeden správný výsledek. Tyto úlohy mě zaujaly, byly pro mě výzvou. Na základě mých zkušeností jsem se zamýšlela, jak úlohu, která má více řešení, budou řešit třídy s různým způsobem výuky.

V teoretické části diplomové práce se věnuji vymezení pojmu slovní úloha. Dále se soustředím na slovní úlohy s více řešeními. Odůvodňuji, proč by s nimi měl umět učitel pracovat, vysvětluji, jak by je měl ve vyučování používat a v jakých směrech žáka rozvíjejí. Nakonec seznamuji čtenáře s vyučovacími styly učitelů a jejich přístupy k vyučovaní matematice, které jsou charakterizovány mnohými pozitivními i negativními jevy, jež se mohou projevit i v postoji k slovním úlohám s více řešeními.

Ve výzkumné části popisuji výsledky bádání, kdy jsem v třetích třídách ZŠ pozorovala, jak učitelé pracují se slovními úlohami s více řešeními, a všímala si jevů u jednotlivých učitelů, které provázejí jejich přístup k vyučování matematice. Také jsem zjišťovala, v jaké míře jsou učitelé i žáci zvyklí pracovat s podobnými úlohami, s čímž mi pomohla analýza učebnic, které třídy používají.

Teoretická část

Matematické úlohy jsou součástí lidské kultury již od starověku, kdy je lidé využívali k výpočtům v zemědělství, stavebnictví, obchodu, úřednictví či v jiných důležitých oborech spjatých s praktickou lidskou činností. Nejstarší slovní úlohy nalezneme v dochovaných památkách starověkého Východu, Egypta a Babylonu. Konforovič (1989) uvádí mnoho úloh z různých koutů světa:

> **Egypt (1788–1580 př. n. l.):** *„Sedm lidí má po sedmi kočkách, každá kočka sežere sedm myší, každá myš sežere sedm klasů, z každého klasu může vyrůst sedm měřic ječmene. Jak velké jsou jednotlivé počty a jejich celkový součet?“* (s. 17)
>
> **Řecko (6. st. n. l.):** *„Prach Diofantův v hrobě je skryt, pohleď, i kámen moudrým uměním prozradí věk zemřelého: Z vůle bohů byl po šestinu života dítětem a za další polovinu šestiny se dočkal chmýří na lících. Jak minula sedmina, oženil se s milovanou svojí, pět let s ní prožil, než syna dočkal se mudrc. Jen do poloviny svého věku se otec se synem těšil, brzy mohyla dítě otci skryla. Dvakrát dva roky otec oplakával syna, než po těch letech dočkal se svého smutného konce.“* (s. 74)

Řešení nejrůznějších matematických problémů vycházející z praktické činnosti lidí vedlo matematiky k odhalování nových zákonitostí, které daly vzniknout dnešní podobě této vědy. *„Zabýváme-li se úlohami dávných epoch, neměli bychom ani idealizovat, ani tvrdě odsuzovat minulost. Při objektivním zkoumání minulosti zjistíme, jak z něho vyrůstala současnost, a méně se budeme divit svým úspěchům.“* (Konforovič 1989, s. 10)

1 Slovní úloha

První kapitola se věnuje pojmu slovní úloha, typologii slovních úloh, jejich řešením, řešitelským strategiím a problematice, která se s nimi pojí. Nakonec jsou uvedeny cíle jejich zařazování do vzdělávání.

Dle Malinové (1983, s. 101) „… s*lovní úlohou rozumíme obvykle úlohy aritmetické, algebraické nebo geometrické, formulované slovy nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje řešení aritmetické nebo algebraické či geometrické úlohy.“* Blažková, Matoušková a Vaňurová (2011, s. 4) uvádějí: *„Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Pomocí vhodných úvah zjišťujeme, jaké početní operace je třeba provést se zadanými údaji, abychom mohli odpovědět na otázku slovní úlohy. Principem řešení těchto úloh je vytvoření matematického modelu konkrétní situace vyjádřené textem úlohy.“* Slovní úloha je tvořena **zadáním** a **otázkou**. Zadání obsahuje údaje, které jsou potřeba k zodpovězení otázky. Může ale obsahovat i prvky nadbytečné, nebo naopak neobsahovat všechny potřebné údaje.

Na základě uvedených vymezení můžeme ze dvou úloh níže označit pouze úlohu 1 jako slovní úlohu, jelikož je formulována slovy, ne matematickými symboly jako úloha 2, přestože pro vyřešení obou úloh je zapotřebí provést stejnou operaci se stejnými čísly.

Úloha 1: Výtvarný kroužek navštěvuje 5 dívek a 6 chlapců. Kolik dětí celkem navštěvuje kroužek?[1]

Úloha 2: $5 + 6 = \square$

1.1 Typologie slovních úloh

Odvárko et al. (1990, s. 205) dělí slovní úlohy do dvou skupin. První jsou slovní matematické úlohy, jež užívají pouze jazyka matematického, zadání nestojí mimo oblast matematiky, ale je třeba jej transformovat do příslušných matematických symbolů, viz úloha 3.

Úloha 3: Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4, dostanu číslo 17. Jaké číslo jsem si myslel?

Druhou skupinou jsou slovní úlohy vycházející **z reálné situace**, které je možné řešit přímo ve skutečnosti nebo početně, *„matematickými prostředky"*. Tyto úlohy s nematematickým obsahem popisuje jako *„úlohy s textem, ve kterém se zjevně vyskytuje aspoň jeden termín nepatřící do jazyka žádné matematické teorie"* (s. 216), viz úloha 4.

Úloha 4: Maminka mi dala 50 Kč na nákup. Koupil jsem chléb za 25 Kč a šunku za 20 Kč. Kolik korun mi po nákupu zbylo?

Dalším indikátorem slovní úlohy je její **kontext**. Divíšek et al. (1989, s. 123) vysvětlují: *„Slovní úloha je úloha z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém."* Vondrová a kol. (2019, s. 15) rozšiřují pojem slovní úlohy o takové, jejichž kontext je pseudo-reálný či imaginární, jelikož se ve slovních úlohách vyskytují situace, které by v reálném životě nemohly nastat, či by byly příliš složité. Také lze zadat slovní úlohu obohacenou o fiktivní prvky, se kterými se řešitel úlohy v reálném životě nesetká (Toom 1999 In: Novotná 2000, s. 14):

Úloha 5: Stonožka Anežka si nechala u ševce ušít boty. Kolik párů bot si objednala?

Slovní úlohy lze dělit také dle množství početních operací, které je nutné použít, abychom se dostali k jejich řešení, na úlohy **jednoduché** a **složené**. Pokud využíváme pouze jednu

[1] Není-li uvedeno jinak, tvůrcem všech úloh je autorka diplomové práce.

početní operaci, jedná se o úlohu jednoduchou. (Blažková, Matoušková a Vaňurová 2011, s. 4)

Úloha 6, jednoduchá: Matěj vlastnil 3 autíčka. K Vánocům dostal jedno nové. Kolik autíček má teď?

Autorky (s. 18–33) užívají detailnějšího dělení jednoduchých slovních úloh. Základní skupiny, kam jsou úlohy tříděny dle užitých početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení), se dále dělí v závislosti na reálných situacích, které úlohy popisují. Například úlohy o dělení, kterou je i úloha využívaná při výzkumné části této diplomové práce, autorky třídí na:

1. *úlohy na rozdělování na stejné části,*
2. *úlohy na dělení podle obsahu,*
3. *úlohy charakterizované vztahem n-krát méně,*
4. *úlohy charakterizované vztahem n-krát více řešené dělením,*
5. *úlohy na porovnávání podílem* (s. 30–33)

Divíšek et al. (1989, s. 127) třídí jednoduché slovní úlohy na aditivní, které jsou řešené operací sčítání či odčítání, a multiplikativní, jež jsou řešené operací násobení či dělení.

Úloha 7, aditivní: Honzík sbírá kartičky s fotbalisty. Už jich nasbíral 7. Kolik bude mít Honzík kartiček, když od maminky dostane dalších 7 kartiček?

Úloha 8, multiplikativní: Do třídy 3. B chodí 7 chlapců a dvakrát více dívek. Kolik je ve třídě dívek?

Složené slovní úlohy jsou úlohy, k jejichž řešení je potřeba alespoň dvou početních výkonů. Pokud řešitel chce odpovědět na otázku v zadání, musí vypočítat dílčí jednoduché úlohy, které na sebe navazují. Složené slovní úlohy jsou rozmanité a nelze je snadno třídit, jelikož mohou obsahovat různý počet dílčích jednoduchých úloh, jež mohou být různých typů. (Divíšek et al. 1989, s. 137) Tyto slovní úlohy jsou žáky známější, protože v reálném životě se setkávají se složitějšími situacemi než s těmi, které by bylo možné vyřešit pouze jednou početní operací (Stopenová, Novák 1993, s. 17).

Úloha 9, složená: Omalovánky stály 20 Kč. Po týdnu byly zlevněny o čtvrtinu. Další týden byly zdraženy o třetinu nové ceny. Kolik korun stojí omalovánky teď?

Novotná (2000, s. 17–19) dále vyčleňuje úlohy o pohybu, o společné práci, o směsích a o obsahu, pro které se užívá určitý postup řešení. Dalším typem, který je pro tuto práci zásadní, je úloha o dělení celku na části, kde vystupují celek a jeho části v některém ze vztahů:

a) v zadání slovní úlohy vystupuje zadaný celek a otázka úlohy je směřována na velikosti jeho částí
b) z textu úlohy jsou známy velikosti částí, otázka úlohy je směřována na velikost celku,
c) z textu úlohy je známa velikost celku a některé z jeho částí, otázka je směřována na velikost zbývajících částí,
d) z textu úlohy je známa velikost celku a velikosti jeho částí, otázka úlohy je směřována na počet částí celku. (s. 19)

Pro potřeby této práce se nabízí další kritérium třídění, které se v literatuře nevyskytuje, a tím je třídění slovních úloh z hlediska **počtu řešení**. Může být následující:

a) slovní úlohy s neexistujícím řešením
b) slovní úlohy s jedním řešením
c) slovní úlohy s více řešeními
d) slovní úlohy s nekonečným počtem řešení

Slovní úlohy, které nemají žádné řešení, mohou být úlohami, jejichž zadání je nesplnitelné, viz úloha 10, vyskytuje se v něm chyba, či otázka se nevztahuje k zadaným údajům, viz úloha 11.

Úloha 10: Tři koledníci vykoledovali dohromady 16 vajíček. Jak si je na konci dne mají rozdělit, aby žádné z vajíček nepoškodili?

Úloha 11: Filípek pořádá oslavu svých narozenin. Pozval na ni 5 spolužáků. Kolik let je Filípkovi?

Podobný typ nestandartních úloh, kde chybí potřebné údaje nebo kde je řešení přímo v zadání, je nazýván jako „kapitánské úlohy“. Původně se jednalo o úlohy s lodní tematikou, aktuálně jsou tímto termínem označovány jakékoliv slovní úlohy, které cílí především na čtení s porozuměním než na matematické dovednosti. (Laštovková 2016)

Slovní úlohy s jedním řešením jsou úlohy, které se v učebnicích vyskytují nejčastěji, procvičují obvykle základní matematické operace:

Úloha 12, jedno řešení: Do 3. A chodí 14 chlapců a 11 děvčat. Kolik žáků chodí do třídy celkem?

Slovním úlohám s více řešeními a s nekonečným počtem řešení se věnuji dále v kapitole 2, níže jsou uvedeny příklady takových úloh. Pokud bude řešitel řešit úlohu 14 v oboru přirozených čísel, pak je počet řešení konečný. Když se rozšíří obor o racionální čísla, bude jich nekonečno.

Úloha 13, více řešení: Jízda autobusem stojí 5 Kč. Jaké mince mi pan řidič vrátí, když budu platit desetikorunou?

Úloha 14, nekonečný počet řešení: Petr a Pavel měří dohromady 300 cm. Kolik měří každý z nich?

1.2 Fáze řešení slovní úlohy

Řešitel slovní úlohy obvykle prochází určitými fázemi při hledání jejího řešení. Blažková, Matoušková a Vaňurová (2011, s. 6–13) dělí fáze postupu řešení následovně:

a) *porozumění textu*

   Řešitel se nejprve musí zorientovat v zadání úlohy. Jaké údaje zadání poskytuje, jaká otázka je stanovena, zda jsou všechny pojmy známé. V této fázi hraje důležitou roli čtenářská gramotnost, zda je řešitel schopen zadání přečíst a porozumět mu.

b) *rozbor*

   Při rozboru řešitel hledá vztahy mezi zadanými údaji a stanovenou otázkou. Zjišťuje, zda jsou známé všechny potřebné podmínky či zda některé nejsou nadbytečné. K rozboru lze využít i grafické znázornění vztahů mezi zadanými údaji (pomocí konkrétních objektů, obdélníků, úseček, tabulky apod.), které usnadní či přímo umožní řešení úlohy.

c) *matematizace reálné situace*

   Řešitel dle zadání slovní úlohy, které není plně v jazyce matematiky, konstruuje matematickou úlohu, tj. vyjadřuje zadání matematickými symboly.

d) *provedení odhadu výsledku*

   Odhad výsledku žákovi pomůže v hledání správného řešení.

e) *řešení matematické úlohy*

   Řešitel vyřeší matematickou úlohu na základě zvládnutí početních operací.

f) *zkouška správnosti*

   Zkouška řešiteli slouží k ověření správnosti výsledku. Vede ho k opětovnému zamyšlení se nad zadáním úlohy a nad jeho zvoleným postupem řešení.

g) *odpověď na otázku slovní úlohy*

   Řešitel formuluje slovní odpověď na otázku ze zadání, ve slovní odpovědi se odráží výsledek jeho postupu řešení.

Jiné dělení nabízí Novotná (2000, s. 21), která postup rozdělila do tří etap:

1) *Etapa uchopování.*
2) *Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.*
3) *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy.*

„V praxi existují odchylky, někdy i závažné. Celý proces nemusí probíhat vždy lineárně, řešitel se může k některým etapám vracet nebo některou etapu vynechat.“ (Novotná 2000, s. 21) Každý pedagog by si měl klást otázku a uvážit, s jakým cílem bude na tomto postupu trvat. Malinová (1983, s. 102) uvádí: *„V zápise úlohy si má žák ujasnit a vyjádřit písemně, které údaje jsou dány a které má určit. Je výhodné, když si žáci navyknou na jednotný způsob zápisu slovní úlohy, jehož dodržování učitel důsledně vyžaduje. (…) Tato jednotící linie vede žáky od řešení jednoduchých úloh v 1. ročníku až k řešení složených úloh ve vyšších ročnících.“* Hejný (2014, s. 133) naopak kritizuje, že učitelé v mnoha situacích lpějí na předepsaném vypracování zápisu, výpočtu a odpovědi, aniž by ocenili žákovo řešení úlohy vhledem, které je mnohdy důležitější než formální vyřešení úlohy.

Na cestě od zadání k výsledku úlohy (případně k odpovědi na otázku) se řešitel může setkat s mnohými problémy, s kterými se učitelé vypořádávají dle svého přístupu k výuce. Porozuměním textu slovní úlohy se zabýval Hejný (1995), který analyzoval žákovská řešení úloh, všímal si problému mezi porozuměním a užíváním formálního poznatku při řešení slovních úloh. Sigmundová (2019, s. 181–182) na základě svého výzkumu, kterého se účastnilo 773 žáků ze 13 základních škol, zjistila, že pouze pochopení zadání úlohy nevede k správnému řešení. Udává, že neúspěšnost řešení závisela z 47 % na neporozumění zadání úlohy a z 53 % na problémech v jiném kroku řešení či na faktorech situačních či psychologických. Jirotková a Kloboučková (2013) se ptaly učitelů 1. stupně ZŠ na kritická místa matematiky a slovní úlohy byly jednou z oblastí, kterou 21 z 26 pedagogů zmínilo. V následných rozhovorech autorky zjistily, že za jeden z problémů učitelé považují chybějící logické myšlení žáků. Nejsou prý ochotni myslet, řešení brzy vzdávají nebo si neuvědomují nereálné výsledky úloh. Druhou nesnáz tvoří neporozumění textu úlohy, kdy žáci neidentifikují podstatné informace. S tím se pojí i nesnadné tvoření zápisu úlohy, se kterým učitelé žákům pomáhají skrz zdůrazňování signálních slov, podtrhávání podstatných informací, zkracování zadání apod.

1.3 Řešitelské strategie

Řešitelská strategie označuje postup, který řešitel zvolí, aby dosáhl svého cíle, tedy řešení úlohy. Například Hejný (2014) strategie dělí na:

- *Rutinní*
- *Nerutinní*
- *Signál*
  Použití vzorce či postupu na základě signálního slova.
- *Vhled*
  Řešitel má vhled do struktury vztahů dané situace a je schopen přímého řešení.
- *Modelování/dramatizace*
  Řešiteli pomůže, když zadanou situaci zrealizuje.
- *Odhad opírající se o smysluplná data*
- *Pokus – omyl*
  Viz vysvětlení níže.
- *Rozklad na dílčí úlohy*
  Řešitel rozdělí řešení do několika jednodušších kroků.
- *Od konce*
  Pro řešitele je snazší postupovat od výsledku.[2]
- *Simplifikace, procesualizace konceptu*
  Zjednodušení zadání úlohy, což umožňuje snazší řešení.
- *Přenos do jiného kontextu (*s. 57–58)
  Řešitel změní kontext úlohy, který je mu bližší a umožní mu jasnější řešení.

Novotná (2000) popisuje několik řešitelských strategií. Jednou z nich je také metoda *pokus – omyl*, ke které se řešitel uchyluje z důvodu např. neporozumění zadání či pokud mu není známo explicitní řešení, a musí tak k řešení úlohy přistoupit experimentálně. Důležitou roli hraje ověřování (zkouškou), zda výsledek odpovídá zadání. Tato strategie může být

[2] Např. u úloh „*myslím si číslo*“.

zdlouhavá, pokud se řešitel netrefí na první pokus. Zda vede ke zdárnému konci, závisí na vytrvalosti řešitele a na náhodě, či správném odhadu řešení. Dále nemusí vést k správnému výsledku, pokud se řešitel domnívá, že pokus je správný, aniž by ho ověřil zkouškou či konfrontoval s podmínkami v zadání. Novotná (s. 41) dodává: *„Častým případem je, že řešitel po jednom nebo několika více nebo méně náhodných pokusech o „uhádnutí" výsledku porozumí struktuře úlohy, odhalí vzájemné vztahy ze zadání a přechází k jiné strategii, založené na řešení odpovídající transformované matematické úlohy."* Další strategií může být *hledání v paměti*[3], kdy si řešitel vybaví vzorec, který kdysi aplikoval na podobnou slovní úlohu, a bez většího porozumění úloze ho teď použije. Jinou strategií je *textace*, při níž řešitel využívá všech vztahů v zadání, které mohou vést k řešení úlohy. Také je možné užití strategie *transformace* a *využití předchozí znalosti*, kdy si řešitel přizpůsobí zadání tak, aby odpovídalo úloze, kterou již v minulosti úspěšně řešil. Novotná dále popisuje, jaký je rozdíl užití aritmetické či algebraické strategie, kdy aritmetické řešení je mnohdy rychlejší a snadnější než sestavování rovnic o jedné či více neznámých. Jako *neškolské* či *netradiční* strategie označuje takové, na které řešitel přichází s vlastím řešením na základě vhledu do úlohy (s. 43–45). Stopenová a Novák (1993, s. 22) zmiňují, že v některých případech lze z grafického znázornění úlohy při rozboru vyčíst řešení úlohy, jedná se tedy o *grafické řešení úlohy*.

Potíže, které souvisejí se zvolením řešitelská strategie, mohou přicházet v různých fázích řešení slovní úlohy. Hejný a Stehlíková (1999) se ve svém výzkumu věnovali procesu uchopování slovní úlohy, který je součástí řešení a vede k nesprávným řešitelským strategiím. Jde se o špatně zvolený postup řešení z důvodu *záměny úlohy za jinou* nebo *neschopnosti správně vložit objekty do vztahů* nebo z důvodu *epizodického chápání textu*, kdy se řešitel soustředí na činnost (ví jakou operaci použít), ale ne na podmínky. Dále popisují strategii *náhodně volené kalkulace*, kdy řešitel neporozumí vztahům mezi zadanými údaji, a tak volí početní operaci náhodně. V některých případech dojde ke správnému výsledku, ale tento nesprávně zvolený způsob řešení nemusí být učitelem vždy odhalen.

Jirotková a Kloboučková (2013) upozorňují, že strategie spojování *signálních slov* s odpovídající matematickou operací není tou nejvhodnější. Například slova „přijít, dostat,

[3] Hejný a Stehlíková (1999, s. 47) označují tuto strategii jako *strategii tematického zařazení*.

nastoupit, vyhrát" nás navádějí k operaci sčítání, přitom se může jednat o *antisignály*, které prověřují, zda řešitel porozuměl zadání.[4]

Úloha 15, s antisignálem: Jáchym v soutěži vyhrál 5 sběratelských kartiček, teď jich vlastní 32. Kolik jich měl původně?

S tímto názorem se shodují i Divíšek et al. (1989, s. 124). Zmiňují, že zdánlivě učiteli stačí, aby naučil žáky aplikovat určité početní operace na základě verbálních *signálů*, které se objevují v zadání úlohy, ale tyto signály jsou často zavádějící. Žáci nemají řešit úlohy dle nacvičených příkladů, přesto k tomu v hodinách matematiky dochází. Úlohy jednoduché lze třídit (dle jedné použité početní operace) a tím dochází k typizaci. Ale úlohy složené bývají rozmanitější. Proto se učitelé snaží s žáky řešit velké množství těchto úloh, což je ale nepřipravuje na řešení úloh netypizovaných. Divíšek et al. u speciálních složených typů úloh připouští (s. 150): *„I když nechceme provádět typologii složených slovních úloh a dáváme přednost řešení na základě podrobné analýzy situace, (...) jsou v učebnicích skupiny složených slovních úloh, které je vhodné na 1. stupni ZŠ řešit „osvědčeným" způsobem. Učitel ho dětem prozradí nikoli jako jedině možnou, nebo dokonce nařízenou metodu, ale jako dobrý nápad, kterým nám ušetří čas."*

Otázkou je, zda učitelé nepoužívají podobné postupy, jež byly zmíněny výše, aby žáci byli schopni rychle a efektivně řešit úlohy, ačkoliv jim nemusejí rozumět, například v přijímacích testech, které bývají i pro rodiče zásadní. Tím ale ztrácí na důležitosti jiné cíle, jež jsou důležité a budou zmíněny dále.

1.4 Cíle řešení slovních úloh

Cílem řešení slovních úloh nemá být naučit žáka schopnosti matematizovat a řešit veškeré problémy v jeho reálném životě, ale vybavit ho **funkčním postupem**, jak takové problémy řešit. Tím, že vedeme žáky k osvojování určitého postupu při řešení úloh, připravujeme je na řešení úloh složitějších, se kterými se setkají v pozdějších letech studia (Divíšek et al. 1989, s. 123). S tím souhlasí i Blažková, Matoušková a Vaňurová (2011, s. 15): *„Cílem výuky matematiky v oblasti slovních úloh není jen naučit žáky řešit izolovaně některé jednotlivé slovní úlohy, ale naučit je především* ***metodě*** *řešení slovních úloh."* Dále uvádějí, že slovní úlohy rozvíjejí žákovo myšlení, pozornost a představivost. Při jejich řešení si žák

[4] Příběhy z praxe lze nalézt v (Hejný, Kuřina 2009; Hejný 2014).

upevňuje početní návyky a užívá základní početní operace. Slovní úlohy jej dále připravují na situace, které mohou nastat v reálném životě.

Stopenová a Novák (1993, s. 14) uvádějí funkce jednoduchých slovních úloh. Mohou mít funkci **motivační**, jelikož žáci při řešení snadných slovních úloh mohou nabývat jistoty a jsou odhodláni řešit i náročnější úlohy. Úlohy splňují funkci **poznávací** a jak již bylo řečeno o početních operacích, dochází k jejich **upevňování** a **procvičování**. Funkci **diagnostickou** popisuje i Hejný (2014). Vnímá slovní úlohy také jako prostředek k **ověření porozumění** početním operacím. Pokud žák úspěšně vyřeší základní slovní úlohu, je schopen uchopit úlohu s antisignálem a vytvoří slovní úlohu, jejíž matematický model je zadaný, poté učitel ví, že došlo k porozumění daným operacím (sčítání, odčítání, násobení, dělení). Důležitým faktorem slovních úloh je fakt, že analýza jejich řešení může učiteli pomoci k odhalení formalismu, viz 3.3.3.

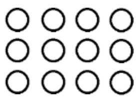
2 Slovní úlohy s více řešeními

Aby bylo možné vysvětlit, proč se práce zabývá konkrétně slovními úlohami s více řešeními a v čem tkví jejich důležitost, nejprve je nutné stanovit, jaký význam má slovo *řešení* v této práci. Nabízí totiž dvě roviny, jak ho chápat – jako proces či koncept.

Zaprvé pojmem řešení může být myšlen určitý **způsob, strategie**, jak dojdeme k výsledku úlohy. Malinová (1983, s. 103) popisuje způsob řešení „úsudkem“, rovnicí, grafickým řešením a experimentem. Těmito způsoby najdeme tentýž výsledek. Hledání více způsobů řešení má velké didaktické využití, i když bývá učiteli podceňováno. Lze ho vnímat jako hledání nového, jednoduššího či efektivnějšího způsobu řešení, kdy si žáci rozvíjejí logické myšlení a jeho flexibilitu (Stopenová, Novák 1993, s. 29). Tato tvrzení můžeme doplnit slovy Konforoviče (1989, s. 11): *„Podmanivá krása matematické tvořivosti podněcuje učence i matematiky-amatéry, aby hledali stále nové důkazy už dokázaných vět, nové způsoby řešení už dávno rozřešených úloh.“* Úloha 16 nabízí více způsobů, jak dojít k jejímu výsledku.

Úloha 16: Babička koupila svým třem vnoučkům koláče. Kolik koláčů dostalo každé dítě, když babička koupila koláčů 12 a rozdělila je spravedlivě?

Komentář k úloze 16: Existuje více způsobů, jak dojít k výsledku úlohy, viz Obr. 1.



Obrázek 1 Grafické řešení úlohy 16

Zadruhé pojmem řešení je označován samotný **výsledek** úlohy. V této diplomové práci bude pojmem *řešení* označován pouze výsledek úlohy, ke kterému se lze dostat určitým *postupem*. Když bude zmíněno *„úloha má více řešení“* je tím myšleno, že vede k více správným výsledkům, nikoliv, že je řešitelná více způsoby, postupy.

Slovní úloha s více řešeními, je úloha, která nemá pouze jeden výsledek, ale má jich více či nekonečně mnoho. Následující úlohy lze označit jako slovní úlohy s více řešeními:

Úloha 17: Házela jsem dvěma kostkami. Jaká čísla mi padla, když jejich součet byl osm?

Úloha 18: Mám v kapse méně než 10 mincí. Které mince to mohou být, je-li jejich celková hodnota 15 Kč? (Vaňurová et al. 1995c, s. 3)

Úloha 19: Jana a Martina hrají speciální hru podobnou „Člověče, nezlob se!“. Hrají se dvěma kostkami, zelená kostka určuje, kolik políček hráč postoupí směrem vpřed, červená kostka určuje počet políček vzad. Jany figurka stojí na prvním políčku, Martiny figurka na čtvrtém políčku. Co musí Janě padnout na kostkách, aby skončila na stejném políčku jako Martina?

2.1 Typy slovních úloh s více řešeními

Slovní úlohy s více řešeními lze rozdělit do různých skupin, u nichž se poté mění cíl, s jakým mohou být využity. Jedná se o:

- úlohy, které explicitně vyzývají k více řešením nebo je naznačují (např. způsobovým slovesem „moct“):

Úloha 20: Jenda a Zuzka dostali od maminky 20 Kč. Jakým způsobem si mohli peníze rozdělit?

- úlohy, jejichž zadání připouští různé interpretace a tím nám (nevědomě) umožňuje hledat více řešení:

Úloha 21: Dva kamarádi si dohromady objednali šunkovou a sýrovou pizzu, každá je rozdělená na 8 kousků. Lukáš snědl dvakrát víc kousků než Tomáš. Kolik snědl každý z nich, když v krabici zbyl jeden kousek sýrové pizzy?

Komentář k úloze 21: Úloha má více řešení, pokud řešitel bude zohledňovat, kolik kousků konkrétní pizzy kamarádi snědli, viz Tab. 21.

Tabulka 1 Řešení úlohy 21

Řešení	**Lukáš**		**Tomáš**	
	ŠUNKA	SÝR	ŠUNKA	SÝR
1.	8	2	0	5
2.	7	3	1	4
3.	6	4	2	3
4.	5	5	3	2
5.	4	6	4	1
6.	3	7	5	0

Zvláštní skupinu, která nepatří do slovních úloh s více řešeními, tvoří úlohy, které se explicitně ptají, kolika **způsoby** lze dojít k výsledku, neptá se na konkrétní řešení, i když je nejspíše očekává.

Úloha 22: Kolika různými způsoby zaplatíš 30 Kč pomocí tří mincí?

Komentář k úloze 22: Úloha se ptá, kolika způsoby, lze zaplatit 30 Kč. Odpověď je jediná – dvěma způsoby, ale lze doplnit, že konkrétně jde o způsoby: 10 Kč + 10 Kč + 10 Kč a 20 Kč + 5 Kč + 5 Kč.

Taková úloha by dle této práce nebyla označena za úlohu s více řešeními, jelikož výsledek je jen jeden, přestože konkrétních způsobů, jak zkombinovat mince, je více. Aby mohla být tato úloha označena za úlohu s více řešeními, šlo by ji přepsat následovně:

Úloha 23: Jakým způsobem lze zaplatit 30 Kč pomocí tří mincí?

Komentář k úloze 23: Úloha má dvě řešení: 10 Kč + 10 Kč + 10 Kč nebo 20 Kč + 5 Kč + 5 Kč.

2.2 Řešitelské strategie úloh s více řešeními

Úlohy, které mají více různých řešení, bývají nejčastěji úlohami kombinatorickými. Řešitel volí z několika možností, jak úlohu vyřešit. Použije odpovídající vzorec; úlohu řeší systematicky/tabulkou, což umožní nalezení všech řešení, viz úloha 24; přijde na řešení metodou pokus – omyl; získá do úlohy vhled a bude schopen všechna řešení hned vypsat.

Úloha 24: V cukrárně mají čtyři druhy zmrzliny: vanilkovou, čokoládovou, jahodovou a oříškovou. Děti si kupovaly zmrzlinu po dvou kopečcích. Jak si mohly vybrat? Sestav tabulku. (Vaňurová 1995b, s. 57)

Komentář k úloze 24: Řešitel používá k zaznamenání kombinací tabulku, viz Tab. 2. Lze také použít vzorec pro kombinace s opakováním, $K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$.

Tabulka 2 Řešení úlohy 24

Řešení	V	Č	J	O
1.	o o			
2.	o	o		
3.	o		o	
4.	o			o
5.		o o		
6.		o	o	
7.		o		o
8.			o o	
9.			o	o
10.				o o

Úloha 25: Po výletu jsem měla v peněžence 5 mincí, tedy celkem 24 Kč. Které mince mi zbyly v peněžence? (Jirotková et al. 2009, s. 6)

Komentář k úloze 25: Řešitel může řešit úlohu tak, že systematicky postupuje od největší hodnoty k nejmenší:

- 20 Kč, 1 Kč, 1 Kč, 1 Kč, 1 Kč
- 10 Kč, 10 Kč, 2 Kč, 1 Kč, 1 Kč
- 10 Kč, 5 Kč, 5 Kč, 2 Kč, 2 Kč

2.3 Cíle úloh s více řešeními

Slovní úlohy s více řešeními naplňují kromě cílů běžných slovních úloh, jež byly zmíněny v kapitole 1.4, další specifické cíle. Jelikož se jedná o netradiční úlohy, mohou být pro žáky zajímavými, mohou je vnímat jako výzvu a **motivovat** je k dalšímu matematickému bádání. Vedou žáky k **hledání více způsobů řešení**, **využívání různých strategií a metod**. Učitelé mohou tyto úlohy používat jako formu **individualizace**, kdy nejobtížnějším stupněm úlohy může být nalezení dalších/všech jejích řešení.

Práce se slovními úlohami ověřuje, zda je žák schopen **porozumět textu a správně jej interpretovat**. Učí se třídit informace v zadání na zásadní a nadbytečné, čímž si buduje schopnost **kritického myšlení**.

Důležitým faktorem při řešení těchto úloh je, zda žáci předem vědí, že mají hledat více řešení. Pokud jim to není řečeno a nejsou zvyklí podobné úlohy řešit, nemusejí se nad možností více řešení zamyslet. Pokud je žákům prozrazeno, že řešení není pouze jedno, mají prostor na úlohu nahlížet jinak. Někteří se pokusí najít všechna a dokázat, že jich více není. O tom, jak se bude s úlohou pracovat, může rozhodovat učitel dle svého stanoveného cíle, k němuž chce tyto slovní úlohy využít.

Foongová (2005) zastává názor, že slovní úlohy s nejednoznačným řešením podporují **kreativitu** žáků. Žáci se musejí setkávat s podobně bohatými úlohami, nad kterými mohou uvažovat, při kterých mohou dokazovat, k jakým procesům v jejich myšlení dochází, vysvětlovat, jaké použili postupy řešení, diskutovat o nich, prezentovat své nápady a hledat spojitosti napříč matematikou a reálným životem. Pokud se žáci budou učit pouze určité postupy řešení a aplikovat je na standartní úlohy, jejich tvůrčí myšlení nebude plně rozvíjeno. Autorka ale upozorňuje, že pouhé začlenění těchto nestandartních úloh do hodiny nezajišťuje kreativitu žáků a jejich myšlení na vyšší úrovni. Důležitý je **přístup** učitele k těmto úlohám, jak tyto úlohy ve vyučování uvede, zda vyzve žáky, aby přišli s netradičními způsoby řešení a umožní jim být kreativními.

Jak bylo zmíněno výše, hledání více řešení úlohy umožňuje otevřít ve třídě diskuzi, při níž žák může být vyzván k vlastní interpretaci a vnímání zadání, k argumentaci, obhájení vlastního názoru a učí se přijímat i názor odlišný svému. Toto vede k posilování sociálních, personálních a komunikačních kompetencí. V následující části bude nastíněno, jak s těmito cíli pracuje české školství v rámci naplňování klíčových kompetencí a očekávaných výstupů.

2.3.1 Funkce slovních úloh ve vzdělávání – RVP ZV

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání[5] je státním kurikulárním dokumentem, který specifikuje úroveň **klíčových kompetencí**, kterých by žáci měli dosáhnout na konci povinné školní docházky. Dále stanovuje **obsah** základního vzdělávání – činnostně orientované očekávané výstupy pro jednotlivé vzdělávací oblasti (vyučované předměty), tedy co žáci mají umět. Očekávané výstupy jsou formulované pro tři období (po 3., 5. a 9. ročníku), kdy závaznou úroveň stanovují jen pro 2. a 3. období. Prostředkem k jejich dosažení je **učivo**, které je na úrovni RVP ZV doporučené.

Téma slovních úloh s více řešeními spadá do vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace.* V následujícím cílovém zaměření této oblasti lze nalézt cíle shodující se s cíli slovních úloh, které byly popsány v částech 1.4 a 2.3, jinými slovy lze říct, že **slovní úlohy vedou k naplnění klíčových kompetencí**. *„Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:*

(...)
- *rozvíjení **kombinatorického a logického myšlení**, ke **kritickému usuzování** a srozumitelné a věcné **argumentaci** prostřednictvím řešení matematických problémů*

(...)
- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, **metod řešení úloh**) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu*
- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (**matematizací reálných situací**), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely*
- ***provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému***
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, **prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh** a ke zdokonalování grafického projevu*

[5] Dále jen RVP ZV.

- *rozvíjení* ***spolupráce*** *při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k* ***využití získaného řešení v praxi****; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že* ***k výsledku lze dospět různými způsoby***
- *rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení,* ***k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti****, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů“* (RVP ZV 2017, s. 30–31)

Obsah vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* je dělen do čtyř tematických okruhů: *Číslo a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru; Nestandartní aplikační úlohy a problémy.* Pojem slovní úloha najdeme explicitně vyjádřen pouze v tematickém okruhu *Nestandartní aplikační úlohy a problémy*, který je zařazen až od 2. období, tedy od 4. třídy. Konkrétně úlohy s více řešeními se zde nevyskytují, ale lze je zařadit pod jednotný pojem *úlohy* (což mohou být i ty slovní a čistě matematické), který je v očekávaných výstupech zmiňován následovně:

- *„M-3-1-05 řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace*
- *M-5-1-04 řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel*
- *M-5-4-01 řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“* (s. 31–34)

Stopenová a Novák (1993, s. 14) uvádějí: *„Slovní úlohy netvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prolínají se celým matematickým učivem.“* Přestože autoři popisují situaci v roce 1993, od té dnešní se nijak neliší, jelikož slovní úlohy nejsou v RVP ZV samostatným tematickým celkem.

3 Vyučovací styly učitelů

Poslední kapitola teoretické části je věnována především práci učitele při vyučování, na čem je závislý jeho vyučovací styl a čím se vyznačuje. Dále se kapitola zabývá vyučováním matematiky a seznamuje s vybranými přístupy, které lze v tomto předmětu zaujmout.

Nejprve budou vymezeny pojmy učební styl žáka a vyučovací styl učitele. Jedná se o dvě odlišné charakteristiky, které spolu úzce souvisejí.

3.1 Učební styl

Učební styl je individuálně specifickým postupem při učení, který je založený na kognitivním stylu – jak jedinec myslí, zpracovává informace, pamatuje si, řeší problémy apod. Učební styl je závislý na vrozeném základě, věkem se může měnit, závisí také na učivu a cíli učení. Dále ho ovlivňuje motivační struktura žáka, jeho emocionální rozpoložení a sociální prostředí. Bývá neuvědomovaný. Pokud se jedinec snaží své učení zefektivnit, měl by poznat, který z učebních stylů ho vystihuje. Může mít prvky více učebních stylů, a dle toho volit učební strategii.

Jedna z klasifikací učebních stylů je založena na dominanci jedné z mozkových hemisfér. Škoda a Doulík (2011, s. 48) uvádějí: *„Žáci preferující levou mozkovou hemisféru upřednostňují systematický a strukturovaný styl vyučování i učení se, usilují o logický řád a pořádek ve vědomostech, dovednostech a návycích, upřednostňují induktivní a praktické učební materiály. Žáci preferující pravou mozkovou hemisféru upřednostňují intuitivní učení, vnímají celostně, vyžadují kladnou psychosociální atmosféru při vyučování a učení, rádi používají metodu analogie, potřebují vzory.“* Jiná klasifikace závisí na smyslovém vnímání, respektive který smyslový orgán je pro jedince preferovaný. Na tomto základě se dělí vizuální typy, auditivní typy, haptické typy, slovně-pojmové typy. Dalším dělením učebních stylů mohou být povrchové a hloubkové styly učení. Dle aktivního přístupu, myšlení, pozorování a vnímání smysly můžeme jedince charakterizovat jako reflektivní, teoretické, pragmatické či aktivní typy. (Škoda, Doulík 2011)

Záměrem shrnutí klasifikací učebních stylů nebyl jejich detailní popis, ale snaha poukázat na existenci rozdílů v učení mezi jedinci – žáky, nemluvě o skutečnosti, že učební styl učitele může být také odlišný. To poté může vést k neefektivní výuce, pokud si učitel neuvědomuje rozdíly mezi učebním stylem žáků a svým vlastním.

3.2 Vyučovací styl

Vyučovací styl je specifický způsob vyučování, které učitel realizuje. Jedná se o soubor organizačních forem, vyučovacích metod a prostředků, které pedagog využívá. Každému učiteli vyhovuje jiný styl, který dokonce může být odlišný v rámci různých předmětů, ale měl by být schopný ho přizpůsobovat potřebám svých žáků. *„Podobně jako u stylů učení také u vyučovacích stylů si člověk přesně neuvědomuje, které postupy převážně používá a proč používá právě tyto. Je na ně zvyklý, osvědčily se mu, dospěl k nim na základě vlastních zkušeností s řízením výuky.“* (Mareš 2013, s. 467)

Stejně jako učební styly, tak i vyučovací styly lze dělit na základě preference mozkových hemisfér. Učitel by měl aktivizovat obě hemisféry. Učitel může aplikovat například **globální styl**, který je zaměřen na komplexní vnímání určité situace. Učitel vnímá aktuální stav žáků, přizpůsobuje se jejich potřebám, má k nim blízko, jejich vztah je založen na vzájemné důvěře a respektu k sobě navzájem. Učitel nelpí pouze na vědomostech, ale snaží se rozvíjet i složku sociální a citovou. V opačném spektru se nachází **styl analytický**, kdy učitel je schopen se oprostit od působení okolí a je zaměřen především na vědomosti. (Škoda, Doulík 2011, s. 68–70)

Fenstermacher a Soltis (2008) vymezují tři základní styly vyučování: exekutivní, facilitační a liberální. Popisují je dle pěti ústředních součástí vyučování, které jsou ve vyučovacích stylech různě důležité, jde o vyučovací metody, vlastnosti a potřeby žáků, znalosti učiva, cíle (záměr vyučování) a charakter vztahů a interakce mezi učitelem a žáky.

Exekutivní styl je také nazýván manažerský, vede k efektivnímu učení. Učitel plánuje celé vyučování dle daného učiva, dle toho vybírá určité organizační formy a metody práce, skrz které si žák učivo osvojí. Následně se snaží svůj plán uskutečnit a případně ho flexibilně upravuje dle vyhodnocení úspěšnosti. Cílem je co nejúčinnější a nejefektivnější předávání informací, znalostí, ale již ne jejich použití. Důležitým faktorem, který při exekutivním stylu vyučování hraje roli, je čas – čas aktivního učení. Také učitel žákovi pomáhá s orientací v učivu, poskytuje mu korektivní zpětnou vazbu, povzbuzuje ho v učení a poskytuje mu dostatečný čas pro odpověď. Menší pozornost je věnována potřebám a zájmům žáka, rozvíjení dobrých vztahů mezi učitelem a žákem, budování morálních vlastností.

Facilitační vyučovací styl je zaměřen především na osobnost žáka. Cílem není samotné předávání znalostí žákovi, ale jeho osobnostní rozvoj, péče o jeho jedinečné schopnosti. Vnímá žáka jako osobu, která již má získané určité znalosti a vědomosti. Úkolem učitele je pomoci žákovi tento základ propojit s novými poznatky, vede žáka k sebepoznávání a k seberealizaci. Zvládnutí učiva slouží jako prostředek k rozvoji individuality žáka. Učitel nevyvíjí nátlak na žáka, ale motivuje jej k vlastnímu poznávání. Poskytuje žákovi dostatečný prostor pro svobodnou volbu, je shovívavý k jeho chybám, což bývá kritizováno.

Naopak učitel s **liberálním stylem** upřednostňuje vzdělávací cíle a učivo, napomáhá k formování myšlení, usuzování a morálního jednání. I přes individuální schopnosti žáků se učitelé snaží, aby si všichni osvojili základní znalosti všech vědních oborů, které poté aplikují v praktickém životě v civilizovaném světě. Toto bývá kritizováno, jelikož dochází k přetěžování žáků, přitom ne všichni potřebují a mají schopnost pojmout všechno předkládané učivo.

Hejný a Kuřina (2009) dále popisují dvě přístupové strategie, které učitel ve vyučování může aplikovat. **Dialogická strategie** je založena na společné práci učitele a žáka. Učitel vnímá, jak žák v hodině pracuje, na jaké podněty reaguje, jaké emoce se v něm probouzejí. Snaží se monitorovat situaci ve třídě, porozumět, jaké impulsy spouštějí určité reakce mezi žáky, a volí vhodný způsob vlastní reakce na jednání žáka. Chová se a jedná dle svého nastaveného hodnotového systému a dle nastavených pravidel třídy, nezneužívá své moci nad žáky, ale využívá své přirozené autority. Učitel by měl na svůj výkon nahlížet kriticky a být schopen sebereflexe. Druhou strategii, kterou popisují, je **strategie postojová**. Učitel s touto strategií přistupuje k vyučování tak, aby co nejlépe splnil svoji práci – předal žákům určité poznatky. Narušování průběhu hodiny vnímá negativně (např. když žák v úloze nejedná dle stanovených postupů). Očekává od svých žáků určité jednání dle „nálepek“, kterými si je zařadil na základě jejich předchozího chování, a podle toho i na žáky reaguje. A nakonec si je vědom své moci, kterou využívá k prosazení svých cílů.

Na základě předchozích odstavců si lze povšimnout, že jednotlivé učební i vyučovací styly jsou velmi různorodé a mají své klady a zápory. V realitě se mohou od zde popsaného mírně odlišovat a také může docházet k jejich prolínání. Učitel by měl mít co nejpestřejší zásobu vyučovacích strategií, metod, postupů, jak vyučování koncipovat, aby bylo co nejefektivnější pro všechny žáky.

Mareš (2013, s. 467–468) upozorňuje na problematiku používání sousloví *vyučovací styl* a *učitelův přístup k výuce*, kdy jsou tyto pojmy vnímány buď jako synonyma, částečně se překrývající, nebo jako podřazené, kdy učitelův přístup je podřazen vyučovacímu stylu. V této práci jsou vnímané jako souznačné.

3.3 Současné proměny vyučování matematice

Jak již bylo zmíněno, vyučovací styl by měl učitel přizpůsobovat svým žákům, mění se také na základě cíle, kterého učitel či celkově školství chce dosáhnout. Tento cíl je určen i učivem jako takovým. Formami, postupy a cíli vyučování se zabývají didaktici. Hejný a Stehlíková (1999) nastiňují vývoj didaktiky matematiky, který je znatelný od poloviny 20. století. V 50. letech docházelo k rozšiřování obsahu učiva z důvodu domnělé akcelerace mládeže, i když se jednalo spíše o tělesný než duševní vývoj, což nevedlo ke zkvalitnění výuky. Následovala snaha o změnu vyučování, které bylo postavené na drilu a memorování. Tuto změnu přinesla teorie množin, kterou se museli učit a objevovat i sami učitelé. Poté, co se učitelé stali odborníky na daný obor, přestali na sobě pracovat, stala se jejich práce opět stereotypní, což činilo i žáky pasivními a hlas získali odpůrci „množinové matematiky“. Hejný a Stehlíková (s. 15) se domnívají, že za sestup modernizace nemohlo učivo jako takové, ale práce učitele, která ztrácela na tvořivosti a motivovanosti. Jinými slovy lze tvrdit, že úroveň kvality práce učitele určuje kvalitu vyučování matematice.

Didaktici matematiky se začali zabývat metodami a netradičními přístupy ve vyučování matematice. Jedním z příkladů takového přístupu je konstruktivistický, který bude dále v práci popsán. Také zdůrazňovali, jak důležité je pro pedagoga být seznámen s **poznávacími procesy** člověka – žáka, aby ho byl učitel schopen efektivně vzdělávat.

3.3.1 Teorie generického modelu

Jednou z teorií, které se zabývají poznávacím procesem, je *Teorie generického modelu* (dále TGM). Její základy lze nalézt v práci Víta Hejného, který se od 40. let 20. století snažil zvýšit efektivitu vyučování matematice právě skrz poznání, co probíhá v žákově hlavě. Na jeho práci později navázal jeho syn Milan Hejný (Hejný 2014). Aktuálně je poznávací proces dle této teorie rozdělen do pěti etap: **motivace, izolované modely, generický model, abstraktní poznatek, krystalizace**. Popisuje, jak zvídavý žák skrz motivaci a vnitřní potřebu poznávat objevuje izolované modely – *„konkrétní případy příští znalosti“* (s. 47), které se ukládají do jeho paměti, vzájemně se shlukují, propojují do struktury, vyčleňují ze struktury či rozvíjejí. Žák cítí, že některé k sobě patří, ale zatím neví jak. Aha moment přichází s objevením generického modelu, který je zastupuje. Poté dochází k abstrakci poznatku, například změnou jazyka, a následně ke krystalizaci, kdy poznatek je zabudován do kognitivní struktury.

Pět etap poznávacího procesu ilustruji na příkladu s pojmem „polovina“:

1. *Motivace*: Dítě je motivováno třídit různé předměty do skupin, rozdělovat předměty na části.
2. *Izolované modely*: Dítě přijímá od rodiče část jablka/rohlíku, se slovy: „Tady máš půlku jablíčka/rohlíku.“ Dostává instrukce, aby papír rozdělil „napůl“. Při rodinné oslavě si maminka stěžuje: „Půlka rodiny má rýmu.“
3. *Generický model*: Dítě poznává, že pojem „polovina“ označuje jednu ze dvou stejně velkých částí.
4. *Abstraktní poznatek:* Dítě slovo „polovina“ zapíše zlomkem $\frac{1}{2}$.
5. *Krystalizace*: Pojem „polovina“ a jeho symbolický zápis je ukládán do dlouhodobé paměti.

3.3.2 Přístupy k výuce matematiky

Přístup k výuce je určen nejen realizovaným způsobem vyučování učitele, jeho zvolenými strategiemi a metodami výuky, ale také učebními strategiemi vyučovaného jedince, žáka, a celkově jeho individualitou (Škoda, Doulík 2011). Jirotková (2012) navrhuje nástroj diagnostiky edukačního stylu učitele, který je sestaven z dvaceti parametrů, jež jsou uspořádány tematicky do čtyř oblastí. První zkoumá přesvědčení učitele, tj. jaký má vztah k matematice, co je jeho cílem, jaké edukační a přístupové strategie aplikuje, jak komunikuje s kolegy a zda má zájem o vlastní profesní rozvoj. Druhou oblast tvoří životní zkušenosti, které učitele vedou k jeho pedagogickému přesvědčení. Třetí oblast se týká osobnosti učitele – mírou sebedůvěry v pedagogické, didaktické, matematické a sociální oblasti a hodnocení vlastní edukační strategie. Poslední oblast se vztahuje k učitelově schopnosti a pedagogické, didaktické, matematické i sociální kompetenci (s. 254–255).

Dle Hejného (2014) lze vymezit dva základní, protichůdné přístupy k výuce, které jsou klasifikovány dle míry intelektuální autonomie, jež poskytuje učitel žákovi k odhalování poznatků. Jedná se o přístup transmisivní a konstruktivistický. Práce se věnuje aplikaci těchto přístupů ve vyučování matematice.

Transmisivní vyučování je jinak označováno jako tradiční a vychází z několika koncepcí, které uvádí Zormanová (2012). Jedná se o koncepci dogmatickou, jelikož při výuce dochází k předání hotových poznatků a dovedností od učitele žákovi (transmise), druhou je slovně-názorná koncepce, která byla vlastní Janu Ámosi Komenskému, a poslední je koncepce verbálně-reprodukční, již zastával Johann Friedrich Herbart a jež upřednostňuje paměť nad porozuměním. Vyučování je zaměřeno na jeho obsah a na výkon žáka. Menší důraz je kladen na žákovu osobnost – jeho potřeby, motivy a překážky v učení. Transmisivní výuka je systematická, je vhodná při zprostředkování náročné a složité látky a umožňuje jednoduchým způsobem předat žákům poučky a pravidla, k čemuž bývá nejčastěji využívána metoda výkladu. Tímto způsobem vedení výuky bývají žáci efektivně připravováni například k přijímacím testům na střední a vysoké školy.

Přestože se jedná o přístup prověřený historií, bývá kritizován, a to i konkrétně při jeho využití v hodinách matematiky. *„Jak můžeme při transmisivním přístupu k vyučování naučit aplikovat poznatky? Existuje patrně jen jedna cesta: dát vzory, poskytnout instrukce. Je to cesta relativně rychlá, akceptovatelná značnou částí populace (...), ale přesto rovněž ne ideální, neboť může vést k paradoxní situaci: Žák umí řešit úlohu, aniž by jí rozuměl,“* (Hejný, Kuřina 2009, s. 193) Učitel žákům ukáže určitý způsob, postup, jak úlohu řešit. Žák se tento postup naučí, opakuje ho, utvrzuje, aby ho následně co nejrychleji a správně aplikoval. Proto učitel pracuje se standardními, typovými úlohami, které se žáci učí rozeznávat, aby na ně poté aplikovali naučený postup. Žák je ve vyučování pasivní v tom smyslu, že si nové poznatky aktivně nevytváří, pouze je přijímá od učitele, proto lze učitele označit za hlavního aktéra výuky. Poznatky nebývají propojované a po čase dochází k jejich zapomínání. Žákovi sice bývá umožněno přicházet s jinými, často delšími, zato kreativnějšími způsoby řešení, ale nebývá mu dovolováno je prezentovat, aby spolužáky nezmátl. Učitel upřednostňuje svůj – z jeho pohledu ideální – způsob řešení. Dále je v transmisivním vyučování chyba považována za něco nevhodného, co je třeba odstranit, je pouze důkazem, že se žák nedostatečně naučil. Klima třídy může být charakterizováno strachem – žák se bojí, že bude chybovat, učitel se obává, že nestihne učivo probrat. Další charakteristikou může být převládající frontální výuka a monolog učitele. (Hejný, Stehlíková 1999; Hejný, Novotná, Stehlíková 2004; Pecina, Zormanová 2009)

Hejný ve svých publikacích (Hejný, Kuřina 2009; Hejný 2012) uvádí důvody, proč neshledává transmisivní přístup ideálním. Je přesvědčen, že žák při tomto typu vyučování nedochází k porozumění, není důležitý proces řešení, ale pouze fakta, výsledky a paměť. V (Hejný 2014, s. 120) sděluje hlavní cíl učitelů 1. stupně, kteří inklinují k výše uvedenému přístupu k výuce: *„naučit žáky hbitě a spolehlivě sčítat, odčítat, násobit a dělit, a to jak mentálně, tak písemně.“* Mnoho příběhů z transmisivního vyučování lze najít v (Hejný, Kuřina 2009; Hejný 2014), kde autoři odůvodňují jeho kritiku. Zvláště silnou formou transmisivního vyučování je **instruktivní vyučování**, které je založeno na dodržování instrukcí od učitele, což činí samostatnou tvořivost žáka nežádoucí.

Stehlíková (2004) popisuje **konstruktivistické přístupy** k vyučování matematice, jejichž základem je konstrukce vlastního poznání, což je zcela odlišuje od přístupu transmisivního. Hejný a Kuřina (2009) vymezují *didaktický konstruktivismus,* který popisují skrz *desatero konstruktivismu* (s. 194–195). Zásadní roli hraje vztah učitele a žáka. Učitel motivuje žáka k aktivitě skrz kladené otázky, diskuze a nabízené úlohy. Probouzí v něm zvídavost, zásadní je jeho vnitřní motivace – chce poznávat, objevovat, tvořit. Vede ho k formulování vlastních kreativních řešení, k argumentaci, čímž nečiní žáka pasivním přijímatelem hotových poznatků. Spíše mu ukazuje, jak dojít k poznání skrz vlastní aktivitu, porozumění a na základě vlastních zkušeností, které si přináší z reálného života. Je pro něj důležité, co již žák zná, s čím přichází do školy (nevnímá ho jako „prázdnou nádobu“). Učitel umí pracovat s chybou žáka, vnímá ji jako součást poznávacího procesu. Klima třídy je založeno na důvěře, kterou je naplněna i společná diskuze nad řešenými problémy a práce ve skupinách. Tato slova shrnuje Pecina a Zormanová (2009, s. 20): *„V konstruktivisticky orientované výuce jde o to, abychom vhodným způsobem zadávali žákům odpovídající výukové problémy, které oni následně řeší s odpovídající pomocí pedagoga. Žák je tedy* *stavěn do role „objevitele", který objevuje (konstruuje) své nové poznatky na základě dosavadní zkušenosti a na základě aktivní myšlenkové činnosti."*

Hejný (2014) upozorňuje na několik různých interpretací konstruktivismu, které vznikly během posledních 20 let, proto jeho konkrétní metodu pojmenovává jako *Vyučování orientované na budování schémat.* Vychází z poznávacího procesu (TGM), skrz který dochází k budování mentálních matematických schémat – seskupení poznatků a zkušeností[6]. Zásadní je v této metodě práce a přístup učitele odpovídající konstruktivismu a učivo, které je žákům zprostředkováno skrz různá didaktická prostředí.

Ačkoliv jsou pozitiva konstruktivismu pevně teoreticky zakotvena, Kalhous a Obst (2002) upozorňují na nedostatek empirických výzkumů, které by kvantifikovaly přínos tohoto přístupu v praxi. Jejich obavy se týkají zhoršení vzdělávacích výsledků žáků. Zároveň ale zdůrazňují, že se tato teorie neustále vyvíjí, což dokazuje fakt, že na mnoha českých školách aktuálně probíhá výuka orientovaná na budování schémat podle Hejného, která je postavena na principech konstruktivismu. MŠMT udělilo učebnicím Hejného a kol. schvalovací doložku a žáci vyučovaní „Hejného metodou" mají předpoklady pro úspěch při přijímacích zkouškách (H-mat, o. p. s. 2017).

3.3.3 Projevy chybného přístupu učitele k vyučování

Přístup učitele k vyučování může zásadně ovlivnit žákovo poznávání v matematice. V případě, že dojde k přeskočení jedné či více etap poznávacího procesu čili dojde k jeho zrychlení, žák přijímá hotový, *formální* poznatek. Formální poznatky nejsou propojeny na životní zkušenosti, na již získané poznatky, nemají potenciál dalšího rozvoje, nejsou aplikovatelné v nestandartních situacích, žáci je mnohdy neumějí identifikovat a opravit (Hejný 2014, s. 55–56). Předcházet formalismu lze silnou propedeutikou – dodržováním průběhu poznávacího procesu, poskytnutím dostatečného času na jednotlivé etapy a nabízením velkého množství izolovaných modelů, také upozorňováním na propojenost nových poznatků s předešlými. Důležitou roli hraje motivace k učení a novému poznávání, jež má učitel u žáků podporovat. (Hejný, Stehlíková 1999, s. 30)

[6] Více lze nalézt v (Hejný 2014, s. 81–111).

Problematika formalismu je zde uváděna nejen kvůli souvislosti s vyučovacími styly učitelů a jejich přístupy k vyučování, ale i se slovními úlohami. Hejný (2014) navrhuje diagnostiku formalismu například skrz **písemné řešení slovní úlohy**. Sleduje, zda žák úlohu přijal – jestli ji začal řešit, či ji z určitých důvodů odmítl; zda jí plně porozuměl; jak pracoval s vlastní chybou; jakou řešitelskou strategii použil; jak argumentoval; jaký jazyk (ne/standardní, specifický, jiný) použil (s. 57–58). Kvalitu poznatků zjišťujeme také skrz slovní úlohy s antisignálem. Reedukace formalismu probíhá snížením náročnosti úloh a následným budováním chybějících izolovaných a generických modelů (s. 55). Diagnostika žákovských řešení úloh může napovědět něco o vyučovacím stylu učitele. Hejný a Stehlíková (1999) jsou přesvědčeni, že hlavní příčinou formalismu je již zmíněné transmisivní vyučování.

4 Východiska teoretické části pro výzkumnou část

Teoretická část práce vymezila pojem *slovní úloha s více řešeními*. Vysvětlila, jak se odlišuje od běžných slovních úloh, a to v rámci její řešitelské strategie a cílů, s jakými jsou tyto úlohy zařazovány do vyučování. Dále uvedla charakteristiku určitých vyučovacích stylů učitele a jak v závislosti na jeho přístupu se mění aktivita a poznávací proces žáka ve vyučování matematice. V jaké míře ovlivňuje učitelův přístup práci se slovní úlohou s více řešeními bude obsahem následující výzkumné části práce.

Výzkumná část

Tématem diplomové práce jsou slovní úlohy s více řešeními. Cíle, s jakými mohou být zařazovány do vyučování matematice, jsou odborně a detailně doloženy v teoretické části práce, ale přesto zde bude zmíněn jejich hlavní význam: rozvoj porozumění textu, kritického myšlení, tvořivosti a vznik diskuze ve třídě. Různé přístupy učitelů k vyučování, konkrétně v matematice, jsou taktéž popsány v předchozí části práce.

5 Výzkumný problém a cíl výzkumu

Odborná literatura se zabývá především řešitelskými strategiemi či metodologií, jak se slovními úlohami ve vyučování pracovat, ale nezaměřuje se na slovní úlohy s více řešeními, které si žádají jiný přístup nejen řešitele, ale zejména i učitele. Slovní úlohy s více řešeními jsou podle názoru autorky této práce opomíjené a jejich význam není v odborné literatuře doceněn. Tyto skutečnosti vedly k návrhu výzkumu, který by objasnil, jak se s takovými úlohami pracuje ve vyučování.

Cílem výzkumu bylo popsat, jak různí učitelé pracují ve třídě se slovní úlohou s více řešeními. Porovnat jejich přístupy k této úloze na úrovni zadání úlohy, požadavků na žáky, institucionalizace poznatku, formy práce. Dále analyzovat vybrané učebnice z pohledu přítomnosti úloh s více řešeními.[7] A nakonec na základě pozorování učitelů bylo cílem identifikovat prvky vyučovacích stylů, viz kapitola 3, při jejich práci se slovní úlohou s více řešeními.

5.1 Výzkumná strategie a výzkumné otázky

Vzhledem k povaze výzkumného problému a vymezeným cílům výzkumu byla zvolena **kvalitativní** výzkumná strategie, jež umožňuje vniknutí do situací s přirozenými podmínkami, ve kterých daná problematika přímo vystupuje. Kvalitativní výzkum obvykle trvá delší čas, což umožňuje detailnější popsání celé situace a analýzu prostředí. (Hendl 2005)

[7] Výzkum se zaměřoval na učebnice, které používali učitelé účastnící se výzkumného šetření.

Výzkumnice, autorka této práce, si pro účely svého šetření zvolila vlastní výzkumný design s prvky případové studie, konkrétně mnohopřípadové[8] explanační – *„podávající komplexní vysvětlení případu tím, že rozkrývají příčinné řetězce a důležité kontextové podmínky“* (Hendl 2005, s.102). V případové studii se používá více informačních zdrojů a veškeré dostupné metody sběru dat (nejčastěji hloubkový rozhovor, pozorování apod.), aby výzkumník obsáhl zkoumaný případ komplexně. Vzhledem k vymezeným cílům se nejevil tento design výzkumu jako ideální, proto se jím výzkumnice pouze inspirovala. Švaříček a Šeďová (s. 83) říkají, že *„si řada výzkumníků pro účely svého šetření vytváří* ad hoc *vlastní výzkumný design, nepoužije tedy žádný z předem připravených balíčků postupů, ačkoli se jimi může inspirovat“.*

Výzkumné otázky je možné doplňovat a měnit během výzkumného šetření (Hendl 2005, s. 40), stejně tomu bylo i u tohoto výzkumu. Přesné znění otázek vykrystalizovalo až v průběhu bádání a po pilotním šetření. Na základě cílů výzkumu byla zvolena následující hlavní výzkumná otázka:

- ***Jak se liší přístup učitelů matematiky v práci se slovní úlohou, která má více řešení?***

Dále byly formulovány specifické výzkumné otázky:

- *Jakým způsobem učitelé ovlivňují práci žáků se slovní úlohou s více řešeními?*
- *Při kterých fázích práce s úlohou je možné sledovat prvky vyučovacího stylu učitele?*

5.2 Výzkumné metody

Jádrem předkládaného výzkumu je otevřené nezúčastněné nestrukturované pozorování[9], které sloužilo k naplnění cíle týkajícího se učitelů a jejich práce se slovní úlohou s více řešeními ve vyučování matematice a jejich přístupu k této úloze. Jako nástroj pro porovnání přístupů učitelů k úloze sloužily vybrané jevy, které byly identifikovány při zpracování dat

[8] **Mnohapřípadová studie** = výzkumy, v nichž se realizuje šetření u více, minimálně dvou případů (Švaříček, Šeďová 2010, s. 106)

[9] **Otevřené pozorování** = pozorovatel informuje účastníky o své činnosti (Hendl 2005, s. 191)

Nezúčastněné pozorování = dochází k minimální interakci pozorovatele s pozorovaným objektem (Tamtéž, s. 202)

Nestrukturované pozorování = bez předem daného předpisu (Tamtéž, s. 191) z pozorování. Jedná se o: zadání, instrukce, více řešení, nové učivo, interpretaci řešení, nekonečně mnoho řešení, cíl.

Data získaná z pozorování, jež byla následně zpracována, byla doplněna o informace z **dotazníku** s otevřenými otázkami, který byl pozorovaným učitelům předložen.

Dotazy před hodinou:

1. **Co očekáváte od žáků, jak si s úlohou o perníčcích poradí?**
   - Cíl dotazu: Výzkumnice očekává, že učitel odhadne, jak si žáci s úlohou poradí. Jeho domněnky budou poté porovnány s realitou, jak si žáci s úlohou poradí.
2. **Řešíte v hodinách matematiky úlohy (příklad, cvičení, hru, aktivitu), které mají více řešení? Pokud ano, je vaším cílem, aby všichni žáci přišli na všechna řešení?**
   - Cíl dotazu: Zjistit, zda žáci rozvíjejí své myšlení i tímto typem slovních úloh. Zda jsou na ně zvyklí. Pokud ano, lze očekávat, že úloha jim nebude činit problém. Mohli by být zvyklí o výsledcích diskutovat.
3. **Dle jaké řady učebnic žáky vyučujete?**
   - Cíl dotazu: Tato informace slouží k analýze učebnic. Když bude výzkumnice vědět, s jakou učebnicí učitel pracuje, lze předpokládat, s jakými typy úloh se žáci běžně setkávají.
4. **Slovní úlohy čerpáte pouze z výše uvedených učebnic/pracovních sešitů, nebo doplňujete jinými zdroji? Pokud ano, tak v jaké míře (vyjádřete procenty).**
   - Cíl dotazu: Dozvědět se, zda učitel pracuje i s úlohami mimo učebnici, a tím si zjistit výpovědní hodnotu, jakou bude mít analýza učebnic (viz dotaz č. 3).
5. **Jak mají vaši žáci v oblibě slovní úlohy?**
   - Cíl dotazu: Představit si, s jakým přístupem budou žáci k slovní úloze přistupovat, jaká bude ve třídě atmosféra.

Po hodině následovala poslední otázka:

6. **Po zkušenostech, které máte, pracoval/a byste s úlohu jinak?**
   - Cíl dotazu: Získat zpětnou vazbu k proběhlé hodině. Zda byl učitel spokojený, či by udělal něco jinak. Zda se naplnila jeho očekávání.

K naplnění cíle analyzovat učebnice z pohledu přítomnosti úloh s více řešeními byly použity otázky č. 3 a 4 z dotazníku. Skrz vybranou metodu **analýzy dokumentů** bylo zjištěno, zda a v jaké míře se v učebnicích, se kterými pracují učitelé z výzkumu, nacházejí slovní úlohy s více řešeními. Analýza dokumentů spolu s metodou pozorování a dotazníku sloužila k vytvoření úplnějšího obrazu zkoumané problematiky.[10]

Na základě přechozích kroků výzkumu mohlo dojít k identifikací některých prvků popsaných vyučovacích stylů v jednání učitelů.

Závěry vyplývající z tohoto výzkumu nemohou být zobecňovány, jelikož platí pouze pro daný vzorek, na kterém byl výzkum prováděn.

6 Výzkumný vzorek

Výzkumu se účastnili konkrétní učitelé, kteří byli výzkumnici náhodně doporučeni. Při výzkumu byla použita slovní úloha, kterou lze zařadit již do prvního ročníku, ale její potenciál, který se skrývá ve více řešeních při použití racionálních čísel, je využitelný i pro starší žáky. Nakonec byli osloveni učitelé třetích ročníků základních škol. Výzkumný vzorek tvoří učitelé pěti tříd ze tří různých pražských základních škol.

ZŠ Bílá je velkou školou nacházející se na pomezí sídliště a vilové zástavby. V některých ročnících je až 6 paralelních tříd. Jedná se o školu, která úzce spolupracuje s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy. Třída, jež se účastnila výzkumu, je vyučována matematice Hejného metodou. V hodině bylo přítomno 19 žáků, asistentka a vyučující, která ve třídě učí pouze matematiku. Paní učitelka Bílá má 30 let zkušeností z praxe.

ZŠ Modrá je sídlištní školou, která také spolupracuje s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy. V ročnících jsou 3–4 paralelní třídy. V některých třídách je aplikována metoda Hejného, ale ve třídě oslovené pro výzkum tomu tak není. Paní učitelka Modrá učí dva roky

[10] Výzkumnice zamýšlela použít i analýzu ŠVP škol z výzkumu (viz Příloha 1 – Analýza ŠVP škol z výzkumu), jaké jsou výchovné a vzdělávací strategie učitelů k rozvoji a utváření klíčových kompetencí a jakou roli v tomto procesu hrají slovní úlohy (s více řešeními). Analýza ale neměla dostatečnou vypovídající hodnotu, jelikož není známé, v jaké míře učitelé reálně dodržují stanoviska ŠVP či zda nepracují nad jeho rámec.

(v době výzkumu byla studentkou posledního ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy) a v její třídě je 22 žáků.

ZŠ Zelená se nachází v blízkosti sídliště. V ročnících jsou až tři paralelní třídy. Do výzkumu se zapojily všechny tři třídy třetího ročníku a ve všech probíhá výuka matematiky Hejného metodou. Paní učitelky Světlá a Tmavá mají pětadvacetiletou učitelskou praxi, paní učitelka Sytá má pětiletou praxi. Ve třídě učitelky Světlé je 20 žáků, ve třídě učitelky Tmavé 21 žáků a do třídy učitelky Syté chodí 24 žáků.

7 Etika výzkumu

Jednotliví učitelé, jejichž kontakty byly uvedené na stránkách školy či byly součástí doporučení, byli kontaktováni prostřednictvím e-mailové zprávy. Byl jim sdělen záměr a cíl diplomové práce a výzkumu. Výzkum odsouhlasilo vedení školy, v třídách bylo dovoleno natáčet na kameru či nahrávat na diktafon. Účastníci výzkumu byli ujištěni o anonymitě osobních údajů a získaných dat, proto jsou jména škol, učitelů i žáků v této práci anonymizována. Po ukončení výzkumu byly smazány veškeré nahrávky, které byly během pozorování pořízeny.

8 Popis úlohy

Pozorování probíhalo v hodině matematiky, během které učitel zadal žákům úlohu, jež mu byla výzkumnicí poskytnuta.

Jeníček s Mařenkou snědli dohromady tři perníčky. Kolik snědl Jeníček a kolik Mařenka?[11]

Dle teoretické části diplomové práce lze tuto úlohu označit jako **slovní úlohu**, jelikož je zde slovně popsána určitá situace, která vyúsťuje v problém. **Kontext** úlohy je reálný, ale použití jmen „Jeníček a Mařenka“ a předmětu „perníček“ řešiteli může evokovat pohádku „O perníkové chaloupce“, tím se kontext stává fiktivním, zároveň ale zůstává dobře představitelným. Jedná se o úlohu **jednoduchou**. K jejímu výpočtu lze použít multiplikativní operaci – **dělení**, jelikož v zadání slovní úlohy vystupuje zadaný celek a otázka úlohy je směřována na velikosti jeho částí.

[11] Autorkou úlohy je Mgr. Radka Havlíčková, vedoucí této diplomové práce.

Na první pohled má úloha jedno či několik málo řešení, při pozornějším přečtení (a také v závislosti na zkušenostech řešitele) může být **řešení nekonečně mnoho**. Zadání úlohy totiž nespecifikuje, zda části, na které je dělen celek, mají být stejné velké. Přesto se dá zadání upravit tak, aby úloha měla pouze jedno řešení:

> Jeníček s Mařenkou snědli dohromady tři perníčky. Kolik snědl Jeníček a kolik Mařenka, **pokud se rozdělili spravedlivě**?

8.1 Řešení úlohy

Pokud by úloha byla zadána se změnou, která je uvedena výše, řešiteli by stačilo použít operaci dělení a získal by jedno jediné řešení, 3 : 2 = 1,5. Zadaná slovní úloha ale nabízí i další řešení. Počet perníčků byl záměrně volen lichý, aby i méně zkušené řešitele navedl na myšlenku dělení na nestejné části. Dále zadání nespecifikuje, zda Jeníček či Mařenka snědli alespoň jeden perníček, proto jedním z řešení může být i to, že jeden snědl všechny a druhý žádný.

Řešitel hledá čísla, jejichž součet je 3. V oboru přirozených čísel to jsou řešení 1 a 2, 0 a 3. Předmět „perníček“ řešiteli umožňuje pracovat i v oboru racionálních čísel, protože perníčky lze dělit, popřípadě drobit. Tím lze dojít k řešení např. 1,3 a 1,7 a k nekonečnému počtu dalších řešení.

Předmětem neshod mohou být i řešení opačná (1 a 2, 2 a 1 a podobně 0 a 3, 3 a 0), pokud přidělujeme konkrétní počet perníčků konkrétní osobě. Nebo číselný zápis určité části perníčku – jak se vyjádří jedno „ukousnutí“.

9 Průběh a realizace výzkumu

Pilotní výzkum

V březnu 2019 nejprve proběhl pilotní výzkum (pozorování) v náhodné třídě, kde byly přítomné výzkumnice, vedoucí práce a jedna pomocnice. Záměrem tohoto pokusu bylo ujistit se o síle výzkumné otázky a odhalit problémy, které by mohly nastat při komunikaci mezi výzkumnicí a učitelem. Bylo ověřeno, zda instrukce pro učitele jsou jasné, a rozhodlo se, jakým způsobem bude probíhat zaznamenávání výzkumu, na video/diktafon. Na základě pilotu byly instrukce a otázky pro učitele upraveny, aby co nejlépe plnily svoji funkci. Dále byly navrženy otázky do dotazníku, jehož data měla následně pomoci dokreslit celkovou situaci. Slovní úloha si zachovala svoji podobu a bylo rozhodnuto, že k výzkumu budou vyzváni učitelé třetích tříd základní školy.

Oslovení učitelů a instrukce

Na jaře 2020 byli osloveni učitelé. K výzkumu se jich přihlásilo cca 10, ale z důvodu březnového uzavření škol kvůli pandemii covidu-19 se uskutečnilo pozorování pouze v pěti třídách. Díky bohatým datům, která byla získána, se pozorování v dalších třídách již nekonala.

Učitelům byly zaslány instrukce e-mailem. Učitelé byli požádáni, aby úlohu zařadili do hodiny přirozeně, aby žáci neodhalili, že výzkumnice je v hodině přítomna kvůli jejímu řešení. Zařazena mohla být do kterékoliv části hodiny tak, aby na ni byl dostatek času. Měla být zadána ústně a zadání mohlo být víckrát zopakováno. Žáci měli úlohu řešit na volný list papíru, který si výzkumnice poté odnesla, či do sešitu, který si ofotila. Učitel měl nechat žáky pracovat tak, jak je zvyklý, když pracují se slovními úlohami. Na řešení mohli žáci pracovat nejdříve samostatně, poté ve dvojicích či všichni společně. Práci s úlohou měl učitel ukončit ve chvíli, která se mu zdála nejvhodnější. Výzkumnice nekonkretizovala výsledek, ke kterému měli žáci dojít. Důležitý byl celý průběh – od zadání po řešení. Součástí instrukcí byla i informace, že pozorování bude nahráváno, pokud s tím bude vedení souhlasit.

Realizace výzkumu

Před realizací výzkumu ve třídě měli učitelé vyplnit dotazník (e-mailem nebo osobně) s otázkami, které přiblížily, jak pracují se slovními úlohami v hodině. Následovalo pozorování v hodině, kam byla zařazena výzkumná úloha. Záznam pozorování byl poté přepsán do textové podoby a následně analyzován. Dalším krokem při výzkumu byla analýza učebnic, které učitelé v dotazníku uvedli jako ty, podle nichž učí.

Všechna získaná data byla zpracována. Snahou autorky práce bylo tato data propojit a získat tak celistvější pohled na danou problematiku.

10 Zpracování a interpretace získaných dat

Kapitola věnující se zpracování a následné interpretaci získaných dat je klíčovou kapitolou výzkumné části diplomové práce. Lze ji rozdělit na dva celky – analýza pozorování a analýza dokumentů.

10.1 Pozorování

Pozorování probíhalo v jedné hodině matematiky všech vybraných třetích ročníků. Záznam, který výzkumnice nahrála za použití kamery či diktafonu, sloužil k následnému přepisu a analyzování.

Nejprve budou popsány jednotlivé třídy na základě odpovědí, které učitelky uvedly při dotazování před hodinou. Následuje shrnutí průběhu hodiny, do které byla výzkumná slovní úloha zařazena, a odpověď na otázku, zda by učitelky, na základě proběhlé hodiny, pracovaly s úlohou jinak. Nakonec jsou výzkumnicí vybrány jevy, které se při práci s úlohou vyskytly a jsou porovnávány v rámci všech tříd.

Paní učitelka Bílá

Učitelka Bílá předpokládala, že řešení se ve třídě objeví více. Očekávala dotazy, zda mají mít Jeníček s Mařenkou stejný počet perníčků. V hodinách řeší úlohy s více řešeními, které užívá jako gradované úlohy, kdy některým dětem stačí najít jedno řešení, rychlejší najdou více a pak ty nejrychlejší, nejbystřejší hledají řešení všechna, případně se snaží přijít na to, proč už jiná řešení nejsou. V době výzkumu (jaro 2020) vyučovala dle pilotních verzí učebnic nakladatelství H-mat, o. p. s. Slovní úlohy zadává většinou vlastní, které se hodí ke kapitole v učebnici, k zážitkům dětí a životu ve třídě. Takové slovní úlohy tvoří asi 90 % všech zadávaných slovních úloh ve vyučování. Dle jejího mínění žáci mají ke slovním úlohám různý vztah. Berou je hodně jako výzvu. Někdy bojují s přečtením zadání, popřípadě pochopením, co se po nich vlastně chce.

Realizace: Žáci řešili výzkumnou slovní úlohu nejprve samostatně na papír, učitelka 4x zopakovala zadání. Při čtení slovní úlohy neprozradila žákům, že mají hledat více řešení. Když žáci úlohu vyřešili, šli na koberec, kde si navzájem řešení ukázali. Když na koberec došli všichni, utvořili kruh a paní učitelka vedla diskuzi o výsledcích, žáky musela tišit a udržovat v klidu. Několik žáků opakovalo výsledek 1,5 a 1,5, ke kterému došli různou cestou, někteří řešení malovali. Učitelka žáky podporovala, že nehledají jedno správné řešení. Když se objevilo řešení, že by jeden perníček zůstal mamince, žáci ho začali rozebírat, paní učitelka do diskuze nijak nezasahovala, pouze poté komentovala, že je ráda, když na to nejdou všichni stejně. Nevnášela do diskuze svůj názor, žáky neusměrňovala. Poté ale naznačila, že může být i jiné řešení: „Má někdo úplně jiné řešení? Že tam má jinak ty počty?“ Tuto výzvu využil žák jménem Janek, který celou situaci přizpůsobil sobě a řekl, že on jako Jeníček by dostal dva a čtvrt a Mařenka třičtvrtě. Tímto žákům naznačil, že perníček se nemusí dělit spravedlivě. Jiný žák poté upozornil na „oblíbenou verzi“ Janka, kdy on jako Jeníček by snědl 3 a Mařenka 0. Toto řešení učitelka nekomentovala, nejspíše neslyšela. Mezitím u ostatních žáků ověřila, zda zadání opravdu schvaluje nespravedlivé dělení. Souhlasili. Učitelka pochválila Janka, jak situaci využil. Nápad dalšího žáka, když by si Jeníček a Mařenka rozdělili perníčky napůl a měli k tomu drobek, okomentovala tím, že neví, kde by ten drobek vzala. Jeden ze žáků reagoval, že drobek by vzniknul od toho, jak perník rozřízli, ale učitelka řešení dále nerozváděla a poté diskuzi ukončila. Celá aktivita s úlohou trvala 9 minut.

Po hodině učitelka Bílá komentovala průběh a zda by něco udělala jinak: „Bylo fajn, že ten Jenda pak řekl i to, jak by se nechtěl dělit. Tak to si myslím, že je fajn, když už se to jich týká, ten pohled mě vůbec nenapadl, že to je prostě jiný. Průběh bych asi nechala. Tato třída není… musím je v průběhu furt držet. Nesmím to nechat tak rozjet, takže bych to asi nechala tak. Když už pak seděli, tak si myslím, že ta diskuze byla taková fajn. Já jsem jim vyloženě nechtěla říkat, co je správně. Takže tam bych to asi nechala, tam jsem vždycky ráda, když to přežiju.“

Paní učitelka Modrá

Učitelka Modrá nevěděla, co od žáků očekávat. Slovní úlohy vždy řešili pouze z učebnice a měli je napsané před sebou. Předpokládala, že pro některé bude těžké si úlohu pamatovat nebo si ji vůbec nějakým způsobem zapsat, aniž by ji viděli, a také jim může činit problém, že úloha má více řešení. Doufala, že přijdou na nějaká řešení a vznikne diskuse. Žáci nejsou moc zvyklí na argumentaci svých odpovědí, ale učitelka Modrá se je tomu snaží učit. Obávala se, že pokud se doberou k jednomu výsledku, tak nastane situace ticha, kdy žáci s výsledkem budou spokojeni a ona je bude muset navádět k dalšímu řešení. Také očekávala variantu druhou, kdy se žáci začnou dohadovat, protože budou mít každý jiné řešení. Hodnotila, že tato úloha bude i pro ni zajímavá k pozorování reakcí žáků. V hodinách matematiky zatím s dětmi řešila slovní úlohy, které mají pouze jedno řešení. Při vyučování používá učebnice nakladatelství Alter (1995), ze kterých čerpá veškeré slovní úlohy, jiné zdroje nepoužívá. Někteří žáci úlohy nemají rádi vůbec, jiní mají rádi, když mohou slovní úlohu vymyslet s tím, že ji bude řešit jiný ze spolužáků. Se slovními úlohami pracuje učitelka Modrá tak, že ji žáci mají před sebou v učebnici a řeší ji do sešitu samostatně.

Realizace: Paní učitelka přečetla zadání a hned se ozvalo první řešení (3 : 2 = 1,5, každý snědl 1,5). Paní učitelka požadovala zápis a řešení na tabuli, což bylo náročné na čas. Vše řešili společně diskuzí. Dále se ozývali žáci, že mají jiné řešení, jednalo se ale o jiný zápis stejného výsledku (3-1,5=1,5). Po otázce učitelky, jestli je možné, že by snědli i něco jiného, přišli žáci s dalším řešením 1+2=3 a že mohou části být i naopak (1 a 2; 2 a 1). Žáci diskutovali nad tím, že všechno vychází tři, takže to není nové řešení. Přitom si neuvědomili, že součet dvou částí bude vždy tři, pouze velikost částí se mění, učitelka poradila, aby si představili, že oni jednou sní jeden perníček, podruhé dva, takže to nebude stejné řešení. Dále se začala objevovat řešení 2,5 a půl, 3 a 0. Žáci nejdříve nesouhlasili s nulou, protože to prý neodpovídá zadání, učitelka to nechala k rozmyšlení. Žáci poté začali používat menší zlomky (1¾ a 1¼) a desetinná čísla (1,1 a 1,9; 1,2 a 1,8; 0,1 a 2,9), učitelka vysvětlovala, jak tato čísla fungují (jako kdyby si ukousli z perníčku). Práce s úlohou byla ukončena větou, že je strašně moc možností. Třída řešila slovní úlohu 34 minut.

Na otázku, zda by po zkušenostech, které má, pracovala s úlohou jinak, odpověděla: „V podstatě asi bych to jinak neudělala, nebo myslím si, že ne, protože tím, jak oni nejsou vlastně vůbec zvyklí na jiný řešení, tak jakože pak jsem jim to prozradila. Nebo jako prozradila... já jsem jim to neprozradila ze začátku. Říkala jsem, až potom jsem se s nimi bavila, že teda přišli na více řešení, tak jestli to má další. Myslím, že bych to jinak moc neudělala.“

ZŠ Zelená

Paní učitelka Světlá

Paní učitelka Světlá předpokládala, že žáci najdou všechna řešení. Úlohy, které mají více řešení, řeší s žáky někdy, podle toho, zda chápou, jak najít všechna řešení. Slovní úlohy čerpá pouze z učebnice Fraus (2009). Žáci je mají podle ní rádi, rádi nad nimi diskutují.

Realizace: V první části hodiny paní učitelka zadávala žákům úlohy, kde se objevovalo více řešení. Poté jim zadala výzkumnou slovní úlohu se slovy, že mají zkusit napsat všechna řešení. Po instrukcích se první žák zeptal, zda tam může být půl, což paní učitelka nekomentovala, pouze se zamračila, že prozrazuje žákům řešení. Po chvíli samostatné práce zjišťovala, zda má někdo více jak tři řešení. Řešení zapisovala paní učitelka do tabulky na tabuli. Žáci učitelce diktovali svá řešení. Když zaznělo 1,5 a 1,5 jeden z žáků argumentoval, že půl se použít nesmělo, což nebylo řečeno. Říkal, že by se to potom rozdrobilo, kdybychom perníček půlili, paní učitelka se pouze zeptala, zda je půlení špatné a jinak to nekomentovala. Žáci odsouhlasili řešení 3 a 0. Dále učitelka Světlá vyzvala žáky k přemýšlení, jak velký ten perník mohl být. Pokud by byl velký, tak by se dal dělit jinak než jen na půlku. Poté žáci přišli s desetinnými čísly a s dělením perníčku na miliontiny a na drobečky, s tím učitelka souhlasila, ale v praxi by to dle ní nemělo smysl. Učitelka chtěla, aby žáci shrnuli, jak by se dalo jednoduše na tuto slovní úlohu odpovědět. Jeden ze žáků řekl, že úloha má mnoho řešení. Následně po nich žádala, aby zadání změnili tak, aby úloha měla jedno řešení. Jeden žák by přidal informaci, kolik snědl Jeníček a doptával by se na Mařenku. Učitelka souhlasila, ale upřesnila: „Ale já bych chtěla zadat takové to jakože… Dohromady snědli tři, ale ještě k tomu musíš něco říct, aby to mělo určitý počet řešení.“ Žáci navrhovali, že děti museli sníst aspoň jeden perníček, nesměli půlit, nesměli sníst více jak 1,5 nebo že snědli stejně, což by umožnilo pouze jedno řešení. Učitelka žáky pochválila a práci s úlohou ukončila, trvala celkem 14 minut.

Zda by něco měnila, okomentovala následovně: „Ne. Takhle žáci přišli na všechna řešení. Důležité pro mě bylo, aby pochopili, proč to má více řešení, a ne jenom jedno.“

Paní učitelka Tmavá

Paní učitelka Tmavá předpokládala, že slovní úloha o perníčcích bude žákům připadat jednoduchá, když počítají jen se třemi perníčky. V hodinách matematiky řeší úlohy, které mají jedno, dvě, tři řešení, anebo mají najít všechna řešení. Někteří žáci je najdou, někteří ne. Učitelka Tmavá učí dle učebnice od nakladatelství Fraus (2009). Slovních úloh je prý v učebnici hrozně málo, takže z 80 % vymýšlí své. V učebnici nepožadují vždy zápis, výpočet, odpověď, to dělají do školních sešitů. Slovní úlohy mají rádi ti žáci, kterým to s nimi jde. Ti, kteří nechápou, tak je nemají v oblibě.

Realizace: Při zadání slovní úlohy paní učitelka řekla, že budou hledat více řešení a že úloha je jednoduchá. Po přečtení zadání dodala, že si perníčky mohou rozdělit několika způsoby, stejně jako kdyby se oni sami dělili o něco se svým sourozencem. Po dotazu, zda to musí být spravedlivé, učitelka komentovala, že to neřekla, ale že v tom případě by bylo pouze jedno řešení. Když jeden ze žáků řekl, že jde hodně řešení, paní učitelka souhlasila. Zdůrazňovala, že perníčky na rozdíl od kamenů se dají dělit na menší části. Pro představu ukázala 3 pomeranče, které byly ke svačině, a ptala se, jak by se daly dělit. Poté zjišťovala, kolik mají žáci řešení. Poté prozradila jedno řešení (2 a 1) a že jde použít i obráceně (1 a 2). Další řešení žáků bylo půlení třetího perníčku, nebo jeho čtvrcení. Paní učitelka vždy řešení komentovala a vysvětlovala, vyzývala k dalším řešením. Když měl žák až osm řešení, slíbila mu, že se na to podívá po hodině. Práci se slovní úlohou shrnula a řekla, že perníček mohou dělit na různé díly, že na tom je tato úloha založená. Se slovní úlohou pracovali 10 minut.

Hodinu komentovala následovně: „Dopadlo to přesně tak, jak jsem očekávala. Těm dětem, kterým to pálí… Jiní prostě nic. Ten žák, který měl nejvíce řešení, je nadprůměrně nadaný, s tím se zbytek nedá porovnávat.“

Paní učitelka Sytá

Paní učitelka Sytá předpokládala, že úlohu zvládnou všichni, někteří budou přemýšlet i s dělením na poloviny, možná čtvrtiny. Úlohy, které mají více řešení, v hodinách řeší. Není jejím cílem, aby všichni přišli na všechna řešení, ale při společné kontrole je jako třída dají dohromady. Učitelka Sytá učí dle učebnice nakladatelství Fraus (2009). Vzhledem k náročnosti učebnice čerpá většinu úloh z ní, 10 % z jiných zdrojů. Zda mají žáci slovní úlohy v oblibě, záleží na typu úloh. Problémové úlohy mají rádi více, „klasické se zápisem" moc ne.

Realizace: Paní učitelka dala žákům na vybranou, zda chtějí pracovat sami nebo ve dvojicích. Při zadání slovní úlohy řekla, že mají najít co největší počet řešení a že mají zapisovat pouze výsledky. Po několika minutách chodili žáci k tabuli a zapisovali výsledky do tabulky. Paní učitelka je vyzvala, že pokud by měl někdo k řešení námitky, ať se přihlásí. Jeden z žáků při řešení 0 a 3 namítnul, že bylo v úloze řečeno, že měli sníst aspoň jeden perníček. Paní učitelka s ním nesouhlasila. Dále se na tabuli objevilo další řešení, ale šlo o opačné řešení. Paní učitelka to okomentovala, že čekala, kdy toto přijde a vyzvala žáky k diskuzi. Jedna žačka argumentovala tím, že Mařenka a Jeníček nejsou jedna osoba, takže je rozdíl, když pokaždé sní více jeden z nich. Paní učitelka souhlasila a ukázala řešení na příkladu konkrétních žáků. Poté se objevilo řešení s desetinnými čísly (0,3 a 2,7), které paní učitelka komentovala, že to ještě žáci neumí, ale že je to, jako kdyby si perníček rozdělili na malé kousíčky. Dále se objevilo řešení, na které žáci přišli, když si perníčky namalovali a rozčtvrtili a Jeníčkovi a Mařence by dali 6 kousků. S pomocí učitelky přišli na to, že se jedná opět o řešení 1,5 a 1,5. Stejně to bylo u řešení 0,25 · 6 · 2. Další řešení bylo 0,25 a 2,75. Někdo řekl, že jde nekonečno možností, na to ale učitelka nereagovala, nejspíše neslyšela. Jeden z žáků upozornil, že by šlo ještě 1,99, potom 1,98 a dalších milion možností. Učitelka souhlasila, že kdyby použili desetinná čísla, tak existuje mnoho možností, a žádala další řešení, která byla bez desetinných čísel, ty jí mohli ukázat po hodině. Následně aktivitu ukončila. Řešili úlohu celkem 24 minut.

Paní učitelka na otázku, zda by s úlohou pracovala jinak, odpověděla: „Asi bych to nezadávala jinak, byla jsem docela ráda, že rádi pracují ve dvojici, že si poradili, o tom podiskutovali. Kdybych jim neřekla, že mají hledat více řešení, myslím, že by hledali i více, anebo by se hodně ptali. Doptávali by se, jestli můžou desetinná čísla, jestli 0 a 3, 3 a 0 je stejné. To mi bylo jasné, že bychom tu půl hodiny diskutovali, proto jsem jim to řekla."

10.1.1 Analýza jevů

Následuje analýza jevů, které byly evidovány v hodinách matematiky, do nichž učitelky zařadily výzkumnou slovní úlohu. Bylo vybráno sedm jevů, které souvisejí s prací učitele, přestože jsou data bohatá i na další jevy, které se týkají činnosti žáků. K dokreslení situace slouží úseky z hodin (přepis dialogů a pozorování) a ukázka řešení žáků.[12] Jevy jsou seřazené dle průběhu hodiny – od zadání, přes způsob řešení, po ukončení práce se slovní úlohou. V každé tabulce jsou uvedeny ukázky situací ke všem učitelkám a jejich následné porovnání a komentář.[13]

J1. Zadání

Tento jev popisuje zařazení výzkumné slovní úlohy do hodiny. Zda jejímu řešení něco předcházelo a jak dlouho se s ní pracovalo. Jev popisuje i samotné zadání úlohy, kolikrát ho učitelka přečte a jak učitelka úlohu komentuje. Skrz instrukce může učitel žákům např. prozradit informace k řešení, a tím ovlivnit jejich proces zkoumání.

(a) Bílá	*Třída se nejdříve věnovala vymýšlení příkladů v prostředí Abaku. Poté učitelka rozdala prázdné papíry, žáci si je ve dvojici rozpůlili. Oznámila, že budou řešit slovní úlohu.* **U:** Tak říkám, jo? Ta úloha je docela krátká. Zkus o ní popřemýšlet. Kdo bude mít vyřešeno, vezme papír, tužku a jde dozadu. **Ž:** *Ujišťují se, jaké pomůcky mohou použít.* **U:** Tak. Diktuju. *Diktuje úlohu. Dvakrát přečte zadání.* **Ž1:** A máme je rozpůlit? **Ž:** *Někteří již vykřikují, že mají výsledek.* **U:** Udělej to teď, jak myslíš. Pak si povíme, jak jste na to šli. *Opakuje úlohu, tiší žáky.* Je to taková… spíš úloha … *Znovu opakuje zadání.* Zadání přečetla celkem: 4x
(b) Modrá	*Na začátku psali krátký test. Dále učitelka rozdala papíry, žáci si svůj podepsali a dostali instrukce, že jim přečte slovní úlohu, která nebude na známky.* **U:** *Tiší žáky. Opakuje úlohu*. Nechám vám chviličku na přemýšlení. Ž1 se hlásí, Ž1 už má? Zadání přečetla celkem: 2x
(c) Světlá	*Na začátku hodiny proběhla desetiminutovka na násobilku. Následovala úloha o dědovi Lesoňovi (více řešení) a počítání se závorkami.* **U:** Vy teď dostanete papíry, na kterých bude taková zase další slovní úloha, problémová. A já bych chtěla, kdybyste mi tam zase zkusili napsat všechna řešení. Ano? *Rozdala úlohu vytištěnou na papíře.*

[12] Viz Příloha 2 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Bílé až Příloha 6.
[13] Pro jméno Jeníčka a Mařenky jsou použity zkratky J a M.

<table>
<tr><td></td><td> U: Zkusím vás v tom chvilku nechat samotné, pak si k tomu něco řekneme, ano? Zadání nečetla, každý měl zadání vytištěné </td></tr>
<tr><td>(d) Tmavá</td><td> Žáci v první části hodiny řešili slovní úlohy ze zásobníku slovních úloh z učebnice. U: Teď vám dám jinou slovní úlohu. Tady tentokrát budeme hledat víc řešení. Takže vzpomenete si, že když děláte ty příklady, že někde máme jedno řešení, někde najdeme dvě, někde jsme jich našli třeba pět. Tahleta slovní úloha je také na více řešení a je hrozně jednoduchá. Tam jde o to, jak dobře umíme přemýšlet. Čte zadání. Vaším úkolem je rozdělit ty tři perníčky mezi J a M. Neříkám k tomu nic. Opakuje zadání. A několika způsoby si to mohou mezi sebe rozdělit. Vysvětluje, jak mají zapisovat, do koleček. Vzpomeňte si na sebe, máte většina sourozence, něco dostanete tři kusy a teď to budete rozdělovat. Tak jak to rozdělíte. Ž1: A musí to být spravedlivě? U: To jsem neřekla… To by bylo jedno řešení, kdyby to bylo stejně. Ale vy řešíte různá řešení, tak si vzpomeňte na sebe, jak byste to mohli rozdělit. Jde více řešení, jak byste to mohli udělat. Opakuje zadání. Kdybyste měli kameny, tak u nich by to nešlo, že jo. Ale perníček… u toho to jde. Zadání přečetla celkem: 3x </td></tr>
<tr><td>(e) Sytá</td><td> Učitelka nejprve stanovila pravidla. Žáci se měli rozhodnout, jestli budou pracovat sami nebo ve dvojicích. A až zadá úkol, nikdo se jí na nic nemá ptát, mají se pokusit poradit si s úkolem sami. Pokud by si nebyli jisti nějakou možností, mají si ji zapsat a poté se ji pokusit obhájit. U: Já teď řeknu jednoduchou úlohu a vaším úkolem bude vymyslet co nejvíce řešení té úlohy. Nebudeme psát žádný zápis, žádné odpovědi, ani žádné výpočty. Napíšete tam jenom číslo. Až řeknu ten úkol, budete určitě vědět. Opakuje pravidla. Čte zadání, opakuje 3x. Zadání přečetla celkem: 3x </td></tr>
<tr><td colspan="2">Učitelky zadávaly úlohu v různých fázích hodiny. Všechny kromě jedné ji zadaly ústně, přečetly ji dvakrát až pětkrát. Učitelka Světlá zadala úlohu vytištěnou na papíře, přestože instrukce od výzkumnice požadovaly ústní zadání. Žáci si tak mohli úlohu přečíst několikrát a nemuseli pochybovat, jaká slova se v zadání nacházejí, v jiných třídách nad zadáním byly dohady a učitelky ho musely číst víckrát. Některé učitelky při zadávání hlasitě hodnotily úlohu jako problémovou, krátkou či jednoduchou, což mohlo žákům napovědět, že se nebude jednat o slovní úlohu, kterou běžně řeší. Všechny učitelky ze ZŠ Zelená žákům prozradily, že má úloha více řešení. Ve třídě tak nevznikla diskuze, která by se zabývala možností více jak jednoho řešení, spíše to vedlo k soutěžení a porovnávání, kdo jich má nejvíce.</td></tr>
</table>

J2. Instrukce, evidence řešení

Slovní úlohu mohou žáci řešit samostatně i ve skupinách, v lavici i mimo ni. Tento jev ukazuje, jakou formu práce učitelky zvolily a zda žáky instruovaly, jak si mají úlohu formálně zapsat a řešit ji – jak evidovat řešení.

<table>
<tr><td>(a) Bílá</td><td>Učitelka neřekla, jestli si mají úlohu zapsat a udělat zápis. Dostali pouze prázdný papír. Řešili úlohu samostatně, poté si ukazovali řešení na koberci a následovala diskuze v kruhu.</td></tr>
<tr><td>(b) Modrá</td><td>Žáci pracovali samostatně, poté svá řešení včetně zápisu ukazovali na tabuli.[14]

Ž1: Každý snědl 1,5 perníčku.

U: Hm, každý snědl 1,5 perníčku. Takže Ž1 to půjde zapsat. Zapiš to tak, jak si myslíš, že by byl správný zápis.

Ž1: Můžu udělat jenom zkráceně J a M?

U: Můžeš.

Ž1: Píše na tabuli zadání.

U: Takže Ž1 napsal: J a M, takže Jeníček a Mařenka, snědli dohromady 3.

Ž1: A mám zapsat i…

U: Zápis. Jak jsi přišel na výsledek.

Ž1: Mám napsat ty čísla tam…? Není si jistý, jak udělat zápis této úlohy.

U: Tak, jak tě to napadlo.

Ž1: Ještě jednou bych prosil přečíst…</td></tr>
<tr><td>(c) Světlá</td><td>Žáci pracovali nejdříve samostatně, žáci diktovali řešení, učitelka zapisovala výsledky do tabulky na tabuli.

U: (…) Zkusíme podiskutovat a zapisovat do té tabulky podle Ž3. Tak, Ž3, já budu zapisovat do tabulky… U na tabuli načrtla tabulku, sloupec pro Jeníčka a sloupec pro Mařenku, sloupec celkem. Zapisuje počet perníčků sama.

Ž3: Já tam nemám jakoby to celkem.

U: Jasně, vždycky je to tři. Tak říkej.</td></tr>
<tr><td>(d) Tmavá</td><td>Žáci pracovali nejdříve samostatně, poté svá řešení porovnávali v lavici. Učitelka řekla žákům, že si mají výsledky zapisovat do koleček.[15]

U: (…) Kontroluje, co žáci píšou a opravuje je. Ne příklad, vždycky jenom dvě kolečka, v jednom pro jednoho, v druhém pro druhého.</td></tr>
<tr><td>(e) Sytá</td><td>Dala žákům na výběr, zda budou pracovat samostatně, či ve dvojicích, požaduje pouze výsledek. Na tabuli zapisovali řešení žáci do tabulky.

U: (…) Nebudeme psát žádný zápis, žádné odpovědi, ani žádné výpočty. Napíšete tam jenom číslo. (…)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zápis řešení každá z učitelek pojala jinak. Bílá ho nijak nespecifikovala, pouze rozdala žákům prázdné papíry, bylo na žácích, jak si s úlohou poradí. Soustředila se více na řešení úlohy než na její formální zápis.</td></tr>
</table>

[14] Viz Příloha 3 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Modré.
[15] Viz Příloha 5 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Tmavé.

Modrá vyžadovala i zápis úlohy, který práci se slovní úlohou prodloužil, jelikož žáci si nebyli jisti, jak ho vytvořit. Na tabuli se tak objevila spousta zápisů, která se lišila minimálně. Diskuze vznikala hlavně nad způsobem zápisu než nad samotným řešením. Světlá zapisovala řešení na tabuli sama do tabulky, kterou se inspirovala u jednoho žáka. Tmavá žákům nařídila, aby si řešení zapisovali do koleček. Sytá žádala zapsat pouze čísla – řešení, a na tabuli je poté společně zapsali do tabulky.

J3. Více řešení

Již ze zadání slovní úlohy může být patrné, že má více řešení. U výzkumné slovní úlohy to tak není. Pokud žáci nejsou zvyklí řešit nestandardní úlohy, kam lze řadit i slovní úlohy s více řešeními, nemusí je napadnout hledat více správných výsledků. Pokud učitel žákům prozradí, že hledají více řešení, může je ochudit o aha moment a význam těchto úloh se částečně vytrácí. Tento jev popisuje, zda učitelky prozradily žákům tuto zvláštnost a případně v jaké fázi řešení to bylo. Také lze vysledovat, jak žáci i učitelé vnímají slovo „řešení“ různě – jako způsob, jak dojít k výsledku úlohy, či jako samotný výsledek.

(a) Bílá	*Učitelka Bílá se žáků ptala na různé způsoby řešení. Později i na jiné výsledky.* **U:** V pořádku, Ž5, tady teďka nejde o to jako, kdo to má správně. Ale jak jsme na to šli, spíš o takový postup, jak se s tím dá pracovat, a tak všechno, co se z toho dá vyčíst. Kdo teda měl podobně jako Ž5? Tři děleno dvouma… koukni kolem sebe, několik takových jsem viděla. Príma. Dobře. Může být jedno z řešení?! *Žáci souhlasí.* Tak, kdo má jiné řešení? Ž6, co jsi dělal? **Ž6:** Já jsem si řekl… Každej bude mít jeden a ten poslední třetí, co zbyl, dostane každý půlku. **U:** Tohle je tvůj zápis? Ty jsi… Mhmm, 1,5. Ty jsi na to šel takhle. Jakoby představil sis ty perníčky ve skutečnosti, bez příkladu. Co tam máš ty, Ž7? Ty to máš dlouhý… (…) **U:** To je dobře, když na to nejdou všichni stejně. Že to slyšíme, jak prostě každej je jinej a chtěl by to jinak. Ž9 by to chtěla takhle. Má někdo úplně jiné řešení? Že tam má jinak ty počty?
(b) Modrá	*Učitelka Modrá se ptala na více řešení, žáci na tabuli ukazovali svoje různé zápisy a způsoby řešení, ale výsledky byly vždy 1,5 a 1,5. Později se zeptala na jiné řešení.* **U:** Hm, skvělý! Všichni to měli stejně, nebo to měl někdo jinak? Ž1 se posadí…Ž2. **Ž2:** Já to mám jinak. **U:** Tak mi řekni tvůj výsledek. Na co jsi přišla ty. **Ž2:** *Ukazuje pouze jiný způsob řešení, ale výsledek je stále 1,5 a 1,5.* (…) **U:** Je možné, že by snědli i něco jiného? **Ž7:** Jo. Že by Jeníček snědl 2 a Mařenka 1. (…) **U:** Tak. My jsme vlastně zjistili, že tahle úloha… nebo vy jste přišli na to, že má několik řešení. Mohlo by tam být ještě nějaké jiné?
(c) Světlá	*Při zadání úlohy učitelka žádala po žácích zapsat všechna řešení.* **U:** Tak, všichni jste se nad tím už nějak zamysleli, je tady někdo, kdo má víc než tři řešení? **Ž:** *Pár žáků se hlásí.*

<table>
<tr><td></td><td>U: Dobře vy.

Ž2: A když má někdo víc než tři?

U: Všechna? Dobře. Zkusíme podiskutovat a zapisovat do té tabulky podle Ž3.</td></tr>
<tr><td>(d) Tmavá</td><td>U: (…) Ale vy řešíte různá řešení, tak si vzpomeňte na sebe, jak byste to mohli rozdělit. Jde více řešení, jak byste to mohli udělat. Opakuje zadání. Kdybyste měli kameny, tak u nich by to nešlo, že jo. Ale perníček… u toho to jde.</td></tr>
<tr><td>(e) Sytá</td><td>U: (…) Já teď řeknu jednoduchou úlohu a vaším úkolem bude vymyslet co nejvíce řešení té úlohy. Nebudeme psát žádný zápis, žádné odpovědi, ani žádné výpočty. Napíšete tam jenom číslo. Až řeknu ten úkol, budete určitě vědět. Opakuje pravidla. Čte zadání, opakuje 3x.

Ž: Radí se, zapisují si výsledky. Je slyšet slova půl, čtvrt a tři čtvrtě…

Učitelka nechala žákům 5 minut, občas zopakuje zadání.

U: Já myslím, že času bylo dostatek. Dopište. Tak, jak si to teď budeme kontrolovat. Ten, koho vyvolám, tak nám tady u tabule napíše, kolik podle něho, nějakou jednu možnost, snědl J, kolik snědla M. Pokud někdo k tomu bude mít něco třeba, že s tím nesouhlasí, protože to nevychází, nebo že prostě si myslí, že to takhle nejde, tak se přihlásí. Potom zase další možnosti. Takže kdo má nějakou možnost. Další možnosti si můžete dopisovat.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Učitelky Bílá a Modrá žákům v úvodu neprozradily, že má slovní úloha více řešení. V průběhu diskuze se ale ptaly na jiné řešení. Není jasné, zda obě chápou slovo „řešení“ jako výsledek úlohy, ale když se obě dvě zeptaly žáků na jiné řešení, žáci jim ukázali pouze jiný způsob řešení, ale se stejným výsledkem. Proto se poté doptávaly, zda má někdo úplně jiné řešení, jiné počty či jestli mohli sníst něco jiného – ptaly se na jiný výsledek. Učitelky ze ZŠ Zelená již v úvodu prozradily žákům, že mají hledat více řešení.</td></tr>
</table>

J4. Nové učivo

Zlomky a desetinná čísla se v RVP ZV (2017) objevují až pro 2. období prvního stupně ZŠ (4. a 5. třída). Pravděpodobně se s dělením celku na části ve svém životě setkávají všichni žáci, ale nemusejí umět vyjádřit části matematicky (číselně). Proto tento jev zkoumá, zda a jak žáci pracují se zlomky a desetinnými čísly. Sledována je i reakce učitele na danou situaci, zda nechá řešitele řešení vysvětlit, nebo to zastane sám.

(a) Bílá	*Žáci pracují s pojmem čtvrtina a polovina perníčku. Učitelka se neptá, jak by to žáci zapsali/znázornili.* **U:** Takže tys to udělal jak? **Ž13:** Takže já mám jeden a čtvrt. A Mařenka má jenom tři čtvrtě perníčku. **Ž14:** A co ten zbylej jeden? *Všimnul si chyby.* **Ž15:** Zbylej jeden? Dyť Janek má 2 a čtvrt. *Opravuje chybu.* **U:** Dva a čtvrt? A ona má… *Žáci se smějí.* ... a Mařenka má… **Ž13:** *Souhlasí.* Tři čtvrtě. *Jiné řešení se zlomky a desetinnými čísly se neobjevilo.*
(b) Modrá	*Žáci přišli na řešení, kde používají i čtvrtky. Učitelka upozorňuje, že to ještě neumí zapsat, ale mohou si to znázornit na obrázku perníčku. Dále žáci pracují s desetinnými čísly.* **Ž20:** Že Mařenka snědla 1 a ¾ a J 1 a ¼. **U:** To už jsme se dostali do velkých počtů. To neumíme zapisovat, ale umíme je rozdělit na obrázku, na tom perníčku. Kdyby M snědla 1 a ¼ perníčku a J snědl 1 a ¾ perníčku. Snědli by dohromady 3? (…) **Ž20:** Já mám ještě jeden. Že by Mařenka snědla 1 a kousek malej. **U:** Že by si kousla? Aha! **Ž20:** Jo… Můžu to prosím napsat? *Píše 1,1 a 1,9.* (…) **Ž22:** Je jich ještě hodně. Třeba 1,2 a 1,8. *Zapisuje na tabuli.* **Ž22:** Ještě 0,1 a pak 2,9. **U:** Aha. A co znamenají tyhle čísla, když píšete 0 celá 1… **Ž1:** To je třeba jenom jedno to číslo a potom je to rozdělený. **U:** Že ten jeden perníček je rozdělený? **Ž1:** Ne, to číslo. Třeba jak napsal Ž22. Ta jednička, to je jenom jakoby to číslo, ale ta dvojka to je jakoby rozdělení tý jedničky. **U:** Rozumíte děti? **Ž:** Ne!

	Ž22: Že to je třeba 1,2 a ta jednička je jedno celý číslo, jako máme třeba 10,2. ale ta dvojka je část dalšího čísla. A pak když třeba k tý dvojce přiřadíte osmičku, tak je z toho další jedno číslo. **U:** Tak my už jsme se dostali k tomu číslu… Ale co by znamenalo, 1,2, jak bych rozdělila ten perníček? **Ž22:** To je ten jeden perníček a ještě 2/4 toho perníčku. Jakoby… Je to menší než ten jeden perníček, ale je to blízko k tomu celému. Jsou to dvě procenta toho perníčku. **U:** Tady jsme říkali 0,5, že je půl. Takže z tady z toho perníčku ty bys vzal jen 0,2. **Ž22:** Takže bych si jen vzal 2 % toho perníčku. **U:** Teď už pleteš procenta do toho.
(c) Světlá	**U:** No jistě. Třeba J řekne: „Já nemám hlad." Ale celkem snědli ty tři perníky. Že jo? Tak jedeme dál, pánové a dámy. Takže tady máme jenom, J teda nechtěl, to se zapíše buďto takto, že má půlku a ta (M) má teda 2,5. Nebo se to zapíše 0,5. Já jenom vám to vysvětluji, že to neumíme zapisovat. (…) **U:** No, tím pádem by se daly rozdělit i jinak než na půlku. **Ž:** *Překřikují se.* Na čtvrtiny. Na třetiny. Na osminy. Na třicetidvoutiny. **Ž10:** Paní učitelko, mě napadly další! M 2,99 a J 0,1! **U:** No, Ž10 už je trošku dál, ten ovládá už i desetinná čísla. Takže J dáš 0,1 a M nacpeš. Dobře. **Ž:** *Diskutují o tloušťce M.* **Ž11:** M 2 perníčky a 1/3 a J má 2/3. **U:** Výborně. Nádhera. *Zapíše na tabuli.* A pak zase obráceně. **Ž12:** Paní učitelko, proč furt přežírají M? **U:** Ticho… **Ž:** *Říkají různé zlomky, i 6/4. Paní učitelka zapisuje předchozí řešení.* **Ž13:** *Nejhlasitější žák se přihlásí o slovo.* Paní učitelko, já vím další s desetinnýma. M 1,55 a J 1,45. **U:** Ano. *Nezapisuje další výsledky, které se ve třídě ozývají.* Teď bych od někoho chtěla, kdyby shrnul, jak by se to dalo odpovědět nějak jako… **Ž14:** Mnoho řešení. **U:** Výborně, Ž14 by řekla, že to má mnoho řešení. Jde o zdatnosti toho člověka, jak je na tom v matematice. My ještě úplně neovládáme zlomky a desetinná čísla, i když tady máme odborníky, že. A to tady ještě není náš profesor Žx, ale prostě podle svých vědomostí bychom si s tím poradili. A protože tam není napsáno, že se to nesmí dělit, tak jsme si s tím prostě začali hrát a začali jsme to dělit. Takže tam napíšeme odpověď, teďkon všichni, že tato úloha má…
(d) Tmavá	**Ž13:** Že jeden rozdělíme na čtvrtky, budeme mít 4 díly. Když z každého uděláme čtyři díly… **U:** Tak pak si já jich třeba můžu vzít… **Ž13:** …6 a druhej taky 6. **U:** To je pořád… To je 1,5 a 1,5… To ne. Jako je to dobře, ale já myslela jiný řešení.

<table>
<tr>
<td></td>
<td> Ž14: 1 a ¾ a on 1 a ¼
U: Ale třeba oba máme po jednom a ten jeden já nerozdělím na půlku, ale rozdělím ho třeba na čtyři díly a jeden díl dám J a 3 díly sobě. Takže já budu mít 1 a ¾ a on 1 a ¼. Jo? To je řešení, který udělal Ž14. Nebo to můžu rozdělit ještě jinak. </td>
</tr>
<tr>
<td>(e) Sytá</td>
<td> Žáci pracovali s pojmem polovina. Perníčky také na tabuli malovali a dělili na čtvrtiny. Dále pracovali i s desetinnými čísly.
Ž6: Zapisuje 0,3 a 2,7.
U: Takže pro ty, kteří se ještě neorientují v desetinných číslech…
Ž6: To jsem vymyslel já! Jeden z dvojice.
U: Takže M snědla 2 celé perníčky a ještě ten jeden, který zbývá do těch 3, tak si rozdělili mezi sebou na… části. Rozděluje perníček na tabuli na části. Takže, ta M měla ještě 7 kousků…
Ž7: Ještě to jde opačně.
U: … a J 3. Prostě rozdělili ten jeden perníček ještě jako na malý kousíčky. Tak, já vím, že ty desetinný čísla jsme ještě vůbec nebrali…
Ž7: Ale jsou super.
U: …to jdeme dopředu. Vyvolává další dvojici.
(…)
Ž11: Píše na tabuli 0,25 a 2,75.
Ž10: No jasně.
U: Tak to by taky bylo správně. Koukám, že už se dostáváme teda hodně do desetinných čísel. Kdybych sečetla... kdybych tu 25 přičetla k té 75 tak mi vyjde…
Ž11: Jakoby stovka.
U: Celý, jeden ten perníček. Tak by to bylo 2 plus 1, byly by to 3 perníčky. Vyvolává další. </td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Pro třídu učitelky Bílé byly pojmy polovina a čtvrtina známé, nebyly vysvětlovány, někdo je i znázornil na obrázku. Stejně pracovali žáci ve třídě učitelky Modré, která jen upozornila, že neumějí zlomky zapisovat. Navíc se zde objevila řešení s desetinnými čísly (ani učitelka, ani žáci tento termín nepoužili). Učitelka nechala žáky, kteří přišli s tímto řešením, vysvětlit ho ostatním. Výrazně je neopravovala a neuváděla tuto problematiku na pravou míru, vybízela je k tomu, aby řešení znázornili na perníčku. Paní učitelka Světlá komentovala řešení žáka, že je dál a již ovládá desetinná čísla, ale ostatním nebylo řešení vysvětleno. Ve třídě učitelky Tmavé dělili žáci perníčky na čtvrtiny, ale někteří s nimi chybně pracovali, jednalo se jen o nový způsob řešení se spravedlivým dělením. Učitelka Sytá uznávala řešení s desetinnými čísly, ale ostatním žákům ho vysvětlila sama.</td>
</tr>
</table>

J5. Interpretace řešení

Řešení úlohy mnohdy vede k diskuzi. Pokud žák přijde s vlastním řešením, většinou je učitelem vyzván, aby ho vysvětlil ostatním. V některých případech dochází k interpretaci výsledků učitelem s cílem ujistit se, že sám chápe řešení žáka, formuluje argumenty k lepšímu pochopení, nebo se snaží ostatním žákům vysvětlit postup, jaký řešitel použil. Je otázkou, zda interpretace učitelem je vhodná. Žáci se skrz vysvětlování svých myšlenkových postupů učí věcně argumentovat.

(a) Bílá	**Ž6:** Já jsem si řekl… Každej bude mít jeden a ten poslední třetí, co zbyl, dostane každý půlku. **U:** Tohle je tvůj zápis? Ty jsi… Mmm, 1,5. Ty jsi na to šel takhle. Jako by představil sis ty perníčky ve skutečnosti, bez příkladu. Co tam máš ty, Ž7? Ty to máš dlouhý… **Ž7:** Já jsem se od tý půlky to… já jsem si tu jedničku od tý půlky oddělil a ty dvě půlky jsem si sečetl a to se rovná jedna a ještě ty dvě jedničky se rovná tři. **U:** Ty sis udělal 1,5 a 1,5… plus 1,5 je tři. Ty jsi na to použil takovýhle sčítání. Tady je zase několik možností… Ž8, co máš ty? **Ž8:** Já jsem si nakreslila perníčky. **U:** To jsi nebyla jediná. Kdo ještě kreslil perníčky? *Nikdo se nehlásí.* Tady jich bylo víc. *Rozhlíží se po žácích.* Někdo se za to stydí, ale… ale vůbec není nic špatného, když si slovní úlohy kreslíme. Kdysi jsme si kreslili třeba tyč. Tak. Vyšlo ti tedy kolik…? **Ž8:** 1,5 že měli. (…) **Ž9:** Já jsem si to... já jsem si rozpůlila, že dám jeden perníček Mařence, jeden Jeníčkovi a ten poslední zůstane. **Ž10:** Ale snědli je! Paní učitelka říkala, že je snědli! A všechny snědli. **U:** Ty si myslíš… **Ž10:** Jeden nemohl zbýt, když všechny snědli… **Ž11:** Tak ho dali mamince. **Ž12:** Byli tam jen Jeníček a Mařenka. **Ž:** *Překřikují se, rozebírají zadání úlohy.* **U:** To je dobře, když na to nejdou všichni stejně. Že to slyšíme, jak prostě každej je jinej a chtěl by to jinak. Ž9 by to chtěla takhle. Má někdo úplně jiné řešení? Že tam má jinak ty počty?
(b) Modrá	**Ž2:** J a M snědli dohromady 3 perníčky. J 2+1=3, M 2+1=3, že dohromady snědli tři. **U:** Mh-hm, tak mi to vysvětli, jak jsi to myslela. I dětem to vysvětli. Máš tam napsané dva příklady. (…) **U:** Ty máš ještě jednu úvahu, tak nám ji za chviličku řekneš. Co vidíte na té tabuli? *Opakují, jaká řešení mají na tabuli., znovu vysvětlují.*

<table>
<tr><td></td><td>
U: Aha, takže tady máme 1,5. tady máme 1 a 2, tady také 1,5. Ukazuje na různá řešení. Myslíte si, že je to všechno správně?
Ž: Ano, ne… Nejsou si jistí.
U: Dobrá, tak to zatím necháme takhle. A Ž11 říkal, že má ještě jiné řešení.
Ž11: Já jsem měl 3 – 1,5 = 1,5.
U: Jak jsi přišel na 1,5? Když to v té úloze nezaznělo.
Ž11: Že M snědla jeden a půl perníčku a to… a J taky.
U: Nenutí dále vysvětlovat řešení. Takže jste zjistili, že J snědl 1,5 a M 1,5 a dohromady nám to dává 3. Pak nám ale tady Ž7 řekl, že Jeníček může sníst 2, Mařenka 1 a dohromady je to taky 3.
</td></tr>
<tr><td>(c) Světlá</td><td>
Ž7: Taky jde, že J má půlku a M má 2,5. A opačně, že jo.
U: No jistě. Třeba J řekne: „Já nemám hlad.“ Ale celkem snědli ty tři perníky. Že jo? Tak jedeme dál, pánové a dámy. Takže tady máme jenom, J teda nechtěl, to se zapíše buďto takto, že má půlku a ta (M) má teda 2,5. Nebo se to zapíše 0,5. Já jenom vám to vysvětluji, že to neumíme zapisovat.
Ž: Umíme! Někteří křičí.
U: Nebo pak to můžeme zapsat slovy, půl jenom.
Ž8: Nebo M nechtěla bejt tlustá…
U: No jistě nebo naopak. Podíváme se na to takhle. Takže M nechce být tlustá, to znamená, tady je J, tady je M (ukazuje do tabulky), takže v tom případě M má půlku a J má 2,5.
Ž9: A bude tlustej.
U: No tak nevíme, jak byl ten perník velkej. Když si vezmete tu pohádku, tak to byly perníky, které byly kde?
Ž: Na střeše, na perníkový chaloupce. Vykřikují.
U: Na té chaloupce. Myslíte, že byly takové? Ukazuje malý perník.
Ž: Nee! Ty musely být takovýhle… ukazují velké perníky.
U: No, tím pádem by se daly rozdělit i jinak, než na půlku.
Ž: Na čtvrtiny. Na třetiny. Na osminy. Na třicetidvoutiny… Překřikují se.
Ž10: Paní učitelko, mě napadly další! M 2,99 a J 0,1!
U: No, Ž10 už je trošku dál, ten ovládá už i desetinná čísla. Takže J dáš 0,1 a M nacpeš. Dobře.
</td></tr>
<tr><td>(d) Tmavá</td><td>
U: Ježiš, už konči prosimtě. Usmívá se. Prosím vás dopište řešení. Všichni by měli mít aspoň jedno řešení a to je, Žx, jaké..? Klidní žáky, žádná odpověď. Když budu, mírně řečeno, nenajedená M, tak si vezmu perníčky 2 a J dám jenom 1. To je jedno řešení. Jiný řešení je obráceně, že nebudu lakomá. Sobě si nechám…
Ž11: Jeden.
U: … jeden a J dopřeju…
Ž11: Dva.
U: A když budu spravedlivá…
Ž12: Tak jeden dáme sobě, druhý dáme J a třetí rozpůlíme.
</td></tr>
</table>

	U: Třetí rozpůlíme, takže každej budeme mít 1,5. Jo? Ještě teda jiný řešení má někdo…? **Ž13:** Že jeden rozdělíme na čtvrtky, budeme mít 4 díly. Když z každého uděláme čtyři díly… **U:** Tak pak si já jich třeba můžu vzít.. **Ž13:** 6 a druhej taky 6. **U:** To je pořád… To je 1,5 a 1,5… To ne. Jako je to dobře, ale já myslela jiný řešení. **Ž14:** 1 a ¾ a on 1 a ¼ **U:** Ale třeba oba máme po jednom a ten jeden já nerozdělím na půlku, ale rozdělím ho třeba na čtyři díly a jeden díl dám J a 3 díly sobě. Takže já budu mít 1 a ¾ a on 1 a ¼. Jo? To je řešení, který udělal Adam. Nebo to můžu rozdělit ještě jinak. **Ž15:** Sobě dám 2,5 a J dám půl. **U:** Jenom půlku, to budu hodně nenajedená. **Ž15:** Nebo sobě dám 3 a J nula. **U:** Taky. Já zblajznu všechny a J nedostane nic, ten bude na mě jenom koukat, jak budu jíst perníčky. Tak, ještě někdo má nějaký řešení? *Žák se hlásí.* Já vím, ty toho máš hodně. Kdo má to řešení, že budou mít oba dva stejně, to znamená 1,5 a 1,5. Žáci se h*lásí.* Vy jste se jakoby spravedlivě rozdělili. (…)
(e) Sytá	*Ž1 jde k tabuli a píše, U komentuje.* **U:** J snědl 1, M 2. Dohromady 3. Takže to vychází. *U vyvolává dalšího, Ž2 jde k tabuli a píše, U komentuje jeho řešení.* **U:** Ano, šlo by to. J snědl 1,5 a M taky 1,5. Tak to vychází. *Vyvolává dalšího.* **Ž3:** *Zapisuje 3 a 0.* **U:** No jasně. Jeníček nesnědl žádný perníček a M snědla 3. **Ž3:** Ještě by to šlo obráceně. *Učitelka poznámku nezaznamená.* **U:** Dohromady snědli 3. Ale jako nikde nebylo napsáno, aspoň já jsem to tak pochopila, že J musel sníst nějaký perníček. **Ž2:** No právě. (…) **Ž7:** *Píše 1,5 a 2,5.* **U:** Teďka někdo možná řekne, že to nevychází, pojďte to spočítat, kolik to vychází. To je čtyři kousky. *Třída souhlasí.* Protože jeden plus dva, to je tři kousky a půlka plus půlka je kolik kousků. Takže to je dohromady 4 kousky. A oni snědli 3. Tak, tohle by nešlo. Ale nevadí. Vyvolává další. (…) **Ž:** *Zapisují 0,3 a 2,7.* **U:** Takže pro ty, kteří se ještě neorientují v desetinných číslech… **Ž6:** To jsem vymyslel já! *Jeden z dvojice.* **U:** Takže M snědla 2 celé perníčky a ještě ten jeden, který zbývá do těch 3, tak si rozdělili mezi sebou na… části. Takže, ta M měla ještě 7 kousků… **Ž7:** Ještě to jde opačně.

	U: … a J 3. Prostě rozdělili ten jeden perníček ještě jako na malý kousíčky. Tak, já vím, že ty desetinný čísla jsme ještě vůbec nebraly…
Učitelka Bílá nechala žáky vysvětlovat vlastní řešení, někdy ho jinak formulovala či shrnula pro ostatní žáky. Učitelka Modrá nechala žáky vysvětlovat své způsoby řešení, doptávala se otázkami, když jí něco nebylo jasné. Učitelka Světlá komentovala řešení žáků. Učitelka Tmavá opakovaně interpretovala řešení žáků, vstupovala jim do vysvětlování, prozrazovala řešení. Učitelka Sytá komentovala a vysvětlovala řešení žáků včetně neobvyklého řešení.	

J6. Nekonečně mnoho řešení

Výzkumná slovní úloha má v oboru racionálních čísel nekonečně mnoho řešení. Cílem učitelky ale nemusí být, že žáci dojdou k tomuto zjištění. Tento jev ukazuje, v jaké fázi učitelky ukončily práci se slovní úlohou, k jakému řešení třída došla a zda byla zmíněna existence nekonečného množství řešení.

(a) Bílá	**U:** To je dobře, když na to nejdou všichni stejně. Že to slyšíme, jak prostě každej je jinej a chtěl by to jinak. Ž9 by to chtěla takhle. Má někdo úplně jiné řešení? Že tam má jinak ty počty? **(…)** **Ž17:** Já mám, že každej má 1,5 a drobek. **U:** To nevim, kde by si ten drobek vzala… **Ž18:** No od toho, jak to rozřízli! *Žáci se smějí.* **U:** Ták. Dobře. *Spěchá s ukončením úlohy.* Takže, děcka, ukončuju teďka úlohu o perníčkách.
(b) Modrá	**U:** (…) Myslíte, že už jsme našli úplně všechny možný odpovědi? **Ž:** Ano! Ne! **Ž21:** Ještě jich je milion! U: Ještě jich je milion? Jakto? **Ž21:** Protože ještě nějak si rozdělí ten perníček. Protože se ještě nějak rozdrobí ten perníček. **Ž20:** Já mám ještě jeden. Že by Mařenka snědla 1 a kousek malej. **U:** Že by si kousla? Aha! *Následuje diskuze nad desetinnými čísly.* (…) **U:** Ano. Takže na co jsme přišli? **Ž23:** Že je strašně moc možností, jak to udělat. Že třeba ulomit hlavičku… **U:** Jo, že někdo sní hlavičku, někdo celé tělo, a to je taky řešení. Dobrá, tak jo. Tak se připravte na hodinu prvouky.
(c) Světlá	**U:** Ano. *Nezapisuje výsledky, které se ve třídě ozývají.* Teď bych od někoho chtěla, kdyby shrnul, jak by se to dalo odpovědět nějak jako… **Ž14:** Mnoho řešení. **U:** Výborně, Ž14 by řekla, že to má mnoho řešení. Jde o zdatnosti toho člověka, jak je na tom v matematice. My ještě úplně neovládáme zlomky a desetinná čísla, i když tady máme odborníky, že. A to tady ještě není náš profesor Ž0, ale prostě podle svých vědomostí bychom si s tím poradili. A protože tam není napsáno, že se to nesmí dělit, tak jsme si s tím prostě začali hrát a začali jsme to dělit. Takže tam napíšeme odpověď[16], teďkon všichni, že tato úloha má…

[16] Viz Příloha 4 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Světlé.

	Ž15: více řešení. **U:** … více řešení. *Souhlasí.* **Ž16:** Já hádám, že jich má tak kolem stovky. **U:** No, Vojto, vlastně v podstatě kdybychom měli obrovský perníček a čím dál větší perníček a větší perníček… **Ž17:** No ale vždycky se to dá dělit na desetiny, na poloviny, na miliontiny… **U:** Ano, máš pravdu. Ale jako v praxi už to pak nemá smysl, protože se ti to bude drobit. **Ž18:** To už pak není k jídlu. **Ž19:** To by si pak vzali jen jeden drobeček. **Ž20:** Ani ne drobeček.
(d) Tmavá	**U:** Taky. Já zblajznu všechny a J nedostane nic, ten bude na mě jenom koukat, jak budu jíst perníčky. Tak, ještě někdo má nějaký řešení? *Žák se hlásí.* Já vím, ty toho máš hodně. Kdo má to řešení, že budou mít oba dva stejně, to znamená 1,5 a 1,5. Žáci se h*lásí.* Vy jste se jakoby spravedlivě rozdělili. *Ptá se i na další výsledky, žáci se hlásí, pokud to určité řešení mají.* Má každý alespoň jedno? Nebo je tady někdo, kdo neměl ani jedno… *Jedna žačka se hlásí.* **Ž6:** Já mám těch osm řešení. **U:** Ano, ano. Tak potom… Pak se na to podívám. Takže jsme vycházeli z toho, že můžu ten jeden perníček rozdělit na nějaké dílky ještě. Jako koláče. Na poloviny, na třetiny, na čtvrtiny… Na tom to je založený, výborně.
(e) Sytá	**U:** To tady už máme. Je to správně, ale už to tady máme. Ještě někdo má něco, co tady opravdu není? *Vyvolává Ž13.* **Ž12:** Je to nekonečno… *Učitelka neslyší.* **Ž13:** *Jde k tabuli a píše.* **U:** To je správně. *Komentuje řešení Ž13.* **Ž10:** To tam můžeš dát 1,99 a potom… **U:** Pojď to ukázat. **Ž10:** Tak jo. A potom je ještě milion možností. Potom jde ještě 1,98 … Prostě to jde milion. **U:** Teď jste se do toho zamíchali. Tak ale jako jo, akorát tady bychom to museli řešit takhle… O*pravuje desetinná čísla.* Jo? Tak. Ale jsem ráda, že jste tady do toho zabrousili. **Ž10:** Já jsem do toho zabrousil. **U:** Co se mi na tom líbí je, že někteří už opravdu už přemýšlíte v těžkých desetinných číslech ve třetí třídě, to jste opravdu dobrý. A nejenom v těch půlkách, které jsou i pro některé ve třetí třídě těžké, ale i čtvrtina a pak jste v nějakých 1/54 a tak dál. Tak to je jedna možnost, jedno co se mi na tom líbí. A druhý, že kluci správně řekli, že když bychom to brali na ty desetinný čísla, kdo to zná, tak těch možností je strašně moc.
	V hodině učitelky Bílé žáci přišli na více řešení, ale učitelka je nijak neevidovala, třída se nezamýšlela nad otočenými výsledky. Ozvalo se, že perníčky se dají drobit, ale nevedlo to k diskuzi o více řešeních. Učitelka nijak řešení úlohy neshrnula. Učitelka Modrá nechala žáky vypsat řešení na tabuli. Jeden žák navrhnul drobení, jiný odkousávání perníčků, což vedlo k vyjadřování částí desetinnými čísly a k shrnutí, že přišli na mnoho řešení. Učitelka

	Světlá se hned v úvodu ptala, zda má někdo více jak tři řešení. Vedla žáky k dělení perníčků, až zjistili, že se dají dělit na různé části, a tak má úloha více řešení. Jeden žák zmínil, že se dají dělit až na miliontiny (žák pojmem milion může chápat nekonečno), což učitelka odsouhlasila, ale upozornila na problémové realizování takového řešení. Učitelka Tmavá řekla, že by všichni měli mít aspoň jedno řešení. Žáka, který jich měl až osm, nedocenila, ale slíbila mu, že se na jeho řešení později podívá. V hodině učitelky Syté žáci při použití desetinných čísel zjistili, že existuje moc možností, jak lze perníčky dělit. Jeden dokonce řekl, že jich je nekonečno, ale to učitelka nezaznamenala. Druhý řekl, že jich je milion (opět si pod tímto pojmem může představovat nekonečno).

J7. Cíl

Učitelky nebyly vyzvány, aby formulovaly cíl pro aktivitu s výzkumnou úlohou. Dle instrukcí měly s úlohou pracovat, jak jsou zvyklé, proto si lze představit, zda by stejně pracovaly s podobnou úlohou, která by nebyla výzkumnicí pozorována. V dotazníku měly vyjádřit svá očekávání. A dle posledního dotazu, zda by po odučené hodině pracovaly s úlohou jinak, se dá odhadnout, zda učitelky dosáhly cíle, který (byť někdy nevědomě) sledovaly. Proto zde budou jejich očekávání a (ne)spokojenost porovnány.

(a) Bílá	Předpokládám, že řešení bude více. Asi se budou děti doptávat, zda musí mít stejně, což nevím, zda k tomu mám něco dodat já. (…) „Bylo fajn, že ten Jenda pak řekl i to, jak by se nechtěl dělit. Tak to si myslím, že je fajn, když už se to jich týká, ten pohled mě vůbec nenapadl, že to je prostě jiný. Průběh bych asi nechala. Tato třída není… musím je v průběhu furt držet. Nesmím to nechat tak rozjet, takže bych to asi nechala tak. Když už pak seděli, tak si myslím, že ta diskuze byla taková fajn. Já jsem jim vyloženě nechtěla říkat, co je správně. Takže tam bych to asi nechala, tam jsem vždycky ráda, když to přežiju.“
(b) Modrá	Vůbec nevím, co od žáků očekávat. Slovní úlohy vždy řešili pouze z učebnice a měli je napsané před sebou. Pro některé bude těžké si úlohu pamatovat nebo si ji vůbec nějakým způsobem zapsat, aniž by úlohu viděli. Také to, že úloha má více řešení. Doufám, že přijdou na nějaká řešení a vznikne diskuse. Žáci nejsou moc zvyklí na argumentaci svých odpovědí, ale snažím se je tomu učit. Myslím si, že pokud se dobereme k jednomu výsledku, tak nastane situace ticha, kdy žáci s výsledkem budou spokojeni a budu je muset navádět k dalšímu řešení. Také očekávám i variantu druhou, kdy se žáci začnou dohadovat, protože budou mít každý jiné řešení. Tato úloha bude i pro mě zajímavá k pozorování reakcí žáků. (…) „V podstatě asi bych to jinak neudělala, nebo myslím si, že ne, protože tím, jak oni nejsou vlastně vůbec zvyklí na jiný řešení, tak jakože pak jsem jim to prozradila. Nebo jako prozradila... já jsem jim to neprozradila ze začátku. Říkala jsem, až potom jsem se s nimi bavila, že teda přišli na více řešení, tak jestli to má další. Myslím, že bych to jinak moc neudělala.“
(c) Světlá	Předpokládám, že najdou všechna řešení (…) „Ne. Takhle žáci přišli na všechna řešení. Důležité pro mě bylo, aby pochopili, proč to má více řešení, a ne jenom jedno.“
(d) Tmavá	Bude jim to připadat jednoduché, když jsou jen tři. (…) „Dopadlo to přesně tak, jak jsem očekávala. Těm dětem, kterým to pálí… Jiní prostě nic. Ten žák, který měl nejvíce řešení, je nadprůměrně nadaný, s tím se zbytek nedá porovnávat.“
(e) Sytá	Úlohu zvládnou všichni. Někteří budou přemýšlet i s dělením na poloviny, možná čtvrtiny. (…) „Asi bych to nezadávala jinak, byla jsem docela ráda, že rádi pracují ve dvojici, že si poradili, o tom podiskutovali. Kdybych jim neřekla, že mají hledat více řešení, myslím,

	že by hledali i více, anebo by se hodně ptali. Doptávali by se, jestli můžou desetinná čísla, jestli 0 a 3, 3 a 0 je stejné. To mi bylo jasné, že bychom tu půl hodiny diskutovali, proto jsem jim to řekla.“
Žádná z učitelek by průběh práce s výzkumnou slovní úlohou neměnila. Učitelka Bílá očekávala, že přijdou s více řešeními a že se budou doptávat. Byla v rámci možností, které ji náročná třída umožnila, s prací spokojena, hodnotila kladně diskuzi a nepožadovala, aby žáci nalezli všechna řešení. Učitelka Modrá se obávala, jak si s úlohou žáci poradí. Nejsou zvyklí hledat více řešení, proto je i v průběhu hodiny vyzvala k hledání dalších. Důležitá pro ni byla diskuze a argumentace, se kterou žáci nemají mnoho zkušeností. Paní učitelka Světlá očekávala, že žáci najdou všechna řešení. Bylo pro ni důležité, aby odůvodnili, proč tomu tak je. Paní učitelka Tmavá očekávala, že úloha pro žáky bude jednoduchá. Po hodině řekla, že očekávala, že ti, kterým to pálí, najdou více řešení. Paní učitelka Sytá očekávala, že úlohu zvládnou všichni a poté hodnotila kladně spolupráci žáků. Vysvětlila, že z důvodu urychlení práce žákům prozradila, že mají hledat více řešení.	

10.2 Analýza učebnic

Cílem této části je zmapovat učebnice, dle kterých vyučují učitelé, kteří se účastnili výzkumu k diplomové práci. Úkolem je nalézt všechny slovní úlohy, které mají více řešení, a na základě toho si udělat představu, zda učitelé s takovými úlohami pracují, pokud své hodiny připravují především dle učebnic. Každá z učebnic je nejprve stručně popsána na základě dostupných informací od autorů a nakladatelství.

Matematika pro 3. ročník základních škol, díl 1–3 Alter, 1995

Jedná se o trojdílnou učebnici autorek Růženy Blažkové, Mileny Vaňurové, Květoslavy Matouškové, Hany Staudkové, která vznikla v druhé polovině 90. let. 20. století a navazuje na učebnice od stejných autorů. Učebnice měly být plně využitelné pro vzdělávací programy té doby. Později vzniklo sloučením třech dílů nové vydání, které odpovídá požadavkům RVP ZV. Úlohy z původních učebnic byly zařazeny téměř beze změny, došlo k aktualizaci cen a reálií, které se v učebnicích vyskytovaly. K učebnicím jsou dostupné dvojdílné pracovní sešity. Úlohy, kde žák aplikuje a modeluje osvojené početní operace, užívá různých metod řešení slovních úloh a ověřuje správnost jejich řešení, se ve vztahu k úlohám, které slouží k mechanickému nácviku početních operací, vyskytují v učebnicích v poměru asi 60 % ku 40 % (Kol. autorů učebnic 2006, s. 14).

Učebnice *Matematika pro 3. ročník základních škol* v úvodu (s. 4) prvního dílu udává vzor zápisu do sešitu. Ve všech dílech se objevuje velké množství slovních úloh, jednoduchých i složených, mezi kterými jsou úlohy na procvičování matematických operací, které různě obměňují svoji formu. Dále jsou zde kapitoly věnované cvičením z geometrie (převážně rýsování). Pod kapitoly „Hrajeme si“ patří závěr každé učebnice strany označené jako „Tři oříšky pro chytré hlavy“ s různými úlohami navíc a stránky věnované nakupování („Nakupujeme v mlékárně“, „Nakupujeme hračky“ apod.)[17], kde třída různým věcem z obchodů přiřadí ceny a pak dle zadání sestavuje nákupní seznam. Dle sestavení nákupního seznamu, se mění cena nákupu, tím dostáváme více řešení. Úloh, které explicitně vyzývají k více řešením nebo je naznačují (slovy „mohl“, „může“, „mohly“), není v učebnicích mnoho:

[17] Viz Příloha 7 – Úloha s více řešeními, Alter.

- Dana zaplatila v papírnictví 82 Kč. Pavel řekl, že zaplatil více než Dana, ale že mu stačila stokoruna. Kolik korun mohl zaplatit Pavel? (1. díl, s. 12)
- Ve třídě je 17 chlapců. Děvčat je méně než chlapců. Kolik může být ve třídě děvčat? (1. díl, s. 12)
- V obci žije přibližně 900 obyvatel (zaokrouhleno na stovky). Kolik obyvatel může být skutečně v této obci? (2. díl, s. 32)
- V cukrárně mají čtyři druhy zmrzliny: vanilkovou, čokoládovou, jahodovou a oříškovou. Děti si kupovaly zmrzlinu po dvou kopečcích. Jak si mohly vybrat? Sestav tabulku. (2. díl, s. 57)
- Mám v kapse méně než 10 mincí. Které mince to mohou být, je-li jejich celková hodnota 15 Kč? (3. díl, s. 3)

Dále se v učebnicích vyskytují úlohy, které by mohly mít více řešení, jelikož nám je zadání nezakazuje/neomezuje, takže záleží na tom, jak je interpretují žáci a učitel:

- Na hřišti si hrálo 12 chlapců a 10 děvčat. Sedm dětí odešlo domů. Kolik dětí zůstalo na hřišti? (1. díl, s. 11)

Přestože pod touto úlohou je nastíněné řešení, které vede pouze k jednomu výsledku, lze tuto úlohu řešit i tak, že budeme určovat přesný počet chlapců i děvčat, čímž dostaneme více řešení. Podobně to bude i u dalších úloh:

- Maminka upekla 20 tvarohových a 15 makových koláčů. Děti 8 koláčů snědly. Kolik koláčů maminka upekla? Kolik koláčů zůstalo? (1. díl, s. 14)
- Maminka nakoupila 35 sazenic kapusty, 60 sazenic zelí a 25 sazenic celeru. 12 sazeniček se neujalo a uschlo. Kolik sazenic zeleniny tam roste? (2. díl, s. 52)
- Sklář odlil 67 malých a 24 velkých sklenic. Dvě sklenice praskly. Kolik sklenic odevzdal? (3. díl, s. 12)
- Klárka slavila narozeniny. Měla bonboniéru, ve které bylo 5 řad bonbonů po čtyřech. Rozdala je třem kamarádkám tak, že měly každá stejně. Kolik bonbonů dostala každá kamarádka? Kolik bonbonů zůstalo Klárce? (3. díl, s. 17)
- Za dvě čokolády zaplatíme 16 Kč. Kolik zaplatíme za 1 čokoládu? (1. díl, s. 22)

Úloha s bonbóny neříká, že má Klárka kamarádkám rozdat co největší množství bonbónů, tím nám nechává prostor k více řešením. Úloha o čokoládách nespecifikuje, zda jsou obě dvě stejně drahé, tím nám umožňuje najít více řešení.

Jiné úlohy, mimo výše zmíněné, nevyzývají k většímu počtu řešení, ani je neskrývají. Pokud učitel nepracuje s jinými materiály, které nabízejí více možných řešení, nemusejí žáci dostatečně rozvíjet svoji tvořivost a nemusejí být citliví k vnímání významu textu úlohy.

Matematika: pro 3. ročník základní školy, Fraus, 2009

Řada učebnic, kam patří i výše zmíněná, vyšla v prvním vydání mezi lety 2007–2011 u nakladatelství Fraus a přináší učební materiály pro celý první stupeň základní školy. Spolupracoval na ní kolektiv autorů spolu s Milanem Hejným. Autoři vytvořili učebnice, které dávají základ nové koncepci výuky, jež má rozvíjet matematické myšlení, intelektuální a komunikační schopnosti a dovednosti, tvořivost a sociální chování žáků. Žáci pracují v různých prostředích, budují si matematická schémata ve svém vědomí. Podstatou jsou cíle výchovné, ne pouze poznatkové. Velký důraz je kladen na chybu, která není nežádoucí, ale má žákovi pomoci posunout se dál. Důležitou roli hraje klima ve třídě, práce učitele, který žáky především motivuje k objevování nových poznatků, a to skrz manipulaci, řešení úloh a diskuzi. Učebnice naplňuje očekávané výstupy dle RVP ZV. Učebnice pro třetí třídu má pouze jeden díl a k tomu dva pracovní sešity.

V učebnici se nacházejí úlohy, kde je explicitně vyjádřeno, že mají žáci hledat více řešení (většinou se jedná o úlohy na rozdělování mincí), ale není jich mnoho:

- Po výletu jsem měla v peněžence 5 mincí, tedy celkem 24 Kč. Které mince mi zbyly v peněžence? (s. 6)
- Kolika různými způsoby zaplatíš 25 Kč pomocí: a) tří; b) čtyř; c) pěti; d) šesti mincí? (s. 9)
- Kolika způsoby můžeme zaplatit:
  - 5 Kč jednou mincí, anebo více mincemi;
  - 10 Kč pěti, anebo šesti mincemi;
  - 17 Kč právě devíti mincemi. (s. 18)

Jinak se v učebnici nachází cvičení[18] z různých prostředí, která vybízejí k nalezení více/všech řešení, takže žáci jsou na takové situace zvyklí a jsou vedeni k prověřování, zda našli všechna. Učebnice působí zábavně, zároveň mírně chaoticky kvůli použitým barvám, obrázkům a různým typům cvičení, ale nabízí i nestandartní úlohy, které žáky rozvíjejí v logickém myšlení, tvořivosti, a učí je dojít k řešení skrz manipulativní činnosti. Díky gradovaným úlohám si žáci mohou volit optimální obtížnost a individuální rychlost postupu.

[18] Viz Příloha 8 – Úlohy s více řešeními, Fraus.

Matematika pro 3. ročník základní školy, H-mat, o. p. s., 2020

Obecně prospěšná společnost H-mat začala vydávat novou řadu učebnic matematiky, které jsou podložené několikaletým výzkumem vedeným Milanem Hejným a dvouletou pilotáží. Učebnice pro 3. ročník je nejnovější a vyšla v roce 2020.[19] Následovat ji budou učebnice pro 4. a 5. ročník. Autoři si kladou za cíl vytvořit materiály pro žáky od mateřských škol po 9. třídu základních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Učebnicová řada je určena pro konstruktivistický edukační styl. Vede žáky k budování schémat, témata se v ní prolínají, pracuje se v různých prostředích. Žáci spolupracují a diskutují mezi sebou, mají být motivováni, mít radost z vlastních poznatků, které jim učitel nezprostředkovává. Chyba je vnímána jako prostředek k učení. Žák si na základě své úrovně vybírá úlohy, které bude řešit, v tom mu pomáhají série gradovaných úloh. Učitel je hlavně průvodcem, organizuje hodinu, vede žákovské diskuze, pomáhá žákům, aby pochopili. Autoři zdůrazňují, že učebnice nejsou vhodné při výuce, která se neřídí výše zmíněnými principy. Učitelé nemají být nuceni učebnice využívat, pokud s touto metodou výuky nesouzní. (H- mat, o. p. s. 2020)

Jak již bylo řečeno, učebnice pracuje s velkým množstvím prostředí, proto jsou úlohy velmi různorodé. Nacházejí se zde úlohy s různým počtem řešení[20] a také slovní úlohy s matematickým kontextem. Slovní úlohy s nematematickým kontextem jsou tu zastoupeny také, ale ne v tak velké míře, jako tomu je například u nakladatelství Alter. Slovní úlohy, které by byly zadány tak, že by měly nevědomě více řešení, nebyly při analýze nalezeny. Slovní úlohy s více řešeními jsou o penězích a explicitně vyzývají k většímu počtu řešení:

- Kolika způsoby můžeme zaplatit:
  - 5 Kč, jestliže máme použít čtyři nebo pět mincí;
  - 10 Kč, jestliže máme použít šest nebo sedm mincí;
  - 15 Kč, jestliže máme použít právě osm mincí? (s. 18)

- Kolika způsoby můžeme zaplatit:
  - 5 Kč třemi nebo čtyřmi mincemi;
  - 10 Kč čtyřmi nebo pěti mincemi;
  - 15 Kč právě šesti mincemi? (s. 26)

[19] Aktuální informace k datu 10. 10. 2020.
[20] Viz Příloha 9 – Úlohy s více řešeními, H-mat.

Přestože se v této učebnici nenachází mnoho slovních úloh s více řešeními, pracuje žák s jinými úlohami, které na tuto problematiku míří (podobně jako v učebnicích Fraus). Možnost více řešení tak není žákovi neznámá.

Souhrn analýzy učebnic

Ve všech učebnicích, se kterými pracují učitelky z výzkumu, se nacházejí slovní úlohy s více řešeními. Nejčastěji se jedná o úlohy s penězi, které jsou založené na kombinaci jednotlivých mincí. Některé slovní úlohy mají v zadání explicitně vyjádřeno, že existuje více řešení. U mnoha úloh záleží na interpretaci zadání, které mnohdy připouští více řešení, přestože to nejspíše nebylo cílem autorů úloh. V té chvíli je důležitá role učitele, zda umožní žákům vlastní interpretaci zadání, zda využije možnost rozvíjet porozumění textu u žáků a otevře k tomu diskuzi ve třídě. V učebnicích Fraus a H-mat se nacházejí další úlohy, ne slovní, které mají více řešení, ale není tomu tak u učebnic nakladatelství Alter. Poté záleží na tom, jak učitel pracuje s interpretací zadání úloh a zda používá i jiné materiály, kam jsou (slovní) úlohy s více řešeními zařazovány.

10.3 Identifikace vyučovacích stylů

Dalším cílem, který byl v úvodu výzkumné části vymezen, byla identifikace prvků vyučovacích stylů na základě pozorování práce učitelů se slovní úlohou s více řešeními. Dle uvedených ukázek jevů, které se vyskytly během pozorování a byly zde analyzovány, je možné říct, že **práce se slovní úlohou s více řešeními je ovlivněna především přístupem učitele**. Vyučovací styl učitele nelze určit dle jedné vyučovací hodiny, k tomu by bylo potřeba delší a hlubší pozorování. V teoretické části práce bylo vysvětleno, že styly nemusejí být striktně vyhraněné, ale mohou se prolínat či měnit v závislosti na různých faktorech.

V hodinách se vyskytly jevy, které bylo možné přiřadit buď k transmisivnímu nebo ke konstruktivistickému stylu výuky. Jednání učitelek při práci se slovní úlohou s více řešeními bylo dle konkrétního naplnění jevů přiřazeno k jednotlivým přístupům, viz Tab. 3, ale není samozřejmé, že takový přístup zaujímají učitelky vždy, celkově a ve všech předmětech.

Tabulka 3 Přiřazení jevů k přístupům

Jev	Transmisivní přístup	Konstruktivistický přístup	Nelze jednoznačně určit
J1. Zadání	přečtení zadání, informace navíc		pouze přečtení zadání
	Světlá, Tmavá, Sytá		Bílá, Modrá
J2. Instrukce, evidence řešení	učitel určuje, jak má vypadat zápis / evidence řešení	bez instrukcí	učitel žádá zapsat jen výsledky
	Modrá, Světlá, Tmavá,	Bílá	Sytá
J3. Více řešení	prozrazení existence více řešení	utajení existence více řešení	
	Světlá, Tmavá, Sytá	Bílá, Modrá	
J4. Nové učivo	vysvětleno učitelem	vysvětleno řešiteli v diskuzi, doplňující otázky učitele	neobjevilo se; nevysvětluje, ukazuje, jak se to zapisuje

	Tmavá, Sytá	Modrá	Bílá, Světlá
J5. Interpretace řešení	učitel vysvětluje žákovo řešení, správnost ověřena učitelem	vysvětlení je na žákovi, učitel shrnuje / jinak formuluje žákovo řešení, správnost ověřena žáky v diskuzi	
	Světlá, Tmavá, Sytá	Bílá, Modrá	
J6. Nekonečně mnoho řešení	prioritou je nalézt všechna řešení	není prioritou nalézt všechna řešení	
	Světlá, Tmavá, Sytá	Bílá, Modrá	
J7. Cíl	nalézt všechna řešení	diskuze, argumentace, různé způsoby řešení; proč úloha umožňuje více řešení	
	Světlá, Tmavá, Sytá	Bílá, Modrá, Světlá	

Učitelka Bílá

Při pozorování paní učitelky Bílé bylo možné identifikovat prvky konstruktivistického stylu výuky. Nechala žáky, aby vysvětlili, jak postupovali, i když výsledky byly stejné, způsob řešení mohl být odlišný, za což žáky chválila. Přestože v jeden moment svojí otázkou naznačila, že existuje i jiné řešení, neodhalila žákům, že jich je nekonečně mnoho. Při reflexi odučené hodiny řekla, že žákům nechtěla prozrazovat, co je správně. Učitelka skutečně během diskuze neříkala, zda je řešení správně či nikoliv, nechala o tom rozhodnout žáky samotné. Dle jejích slov pro ni byla významná diskuze žáků, která v konstruktivistické výuce hraje důležitou roli. Učitelka pracuje s učebnicí nakladatelství H-mat (Hejný a kol. 2020), která obsahuje úlohy s více řešeními, a tak pro žáky není existence více řešení ničím novým.

Učitelka Modrá

Při hodině paní učitelky Modré byl patrný konstruktivistický přístup. Přestože paní učitelka trvala na zápisu úlohy, což je nejspíše ovlivněno učebnicemi nakladatelství Alter (Vaňurová et al. 1995a–c), celou diskuzi vedla přirozeně a nesnažila se ji uspíšit. Žáci měli prostor všechna svá řešení napsat na tabuli a učitelka neříkala, které je správné a které špatné, rozhodli o tom žáci skrz diskuzi. Když se v řešení objevila desetinná čísla, jež většina žáků třídy neovládala, nechala učitelka řešitelům prostor pro vysvětlení, případně je usměrňovala otázkami. V dotazníku sdělila, že žáci nepracují s úlohami, které by měly více řešení, a že nejsou zvyklí na jejich argumentaci. Jelikož by na hodině nic neměnila, lze usoudit, že pro ni byla významná jak diskuze, tak to, že žáci objevili existenci mnoha řešení.

Učitelka Světlá

Přestože paní učitelka Světlá učí dle učebnic nakladatelství Fraus (Jirotková et al. 2009), které byly vytvořeny pro podporu konstruktivistického stylu výuky, v hodině se objevily momenty, které s tímto přístupem nesouzněly. Učitelka již při zadání úlohy žákům sdělila, že mají najít všechna řešení a poté se ptala, zda má někdo víc než tři řešení. Výsledky zapisovala na tabuli sama, žáci diktovali. Nenechala žáky, kteří použili zlomky a desetinná čísla, aby řešení vysvětlili, pouze řekla, že už jsou dál, že to ostatní neumějí, a bez objasnění jen ukázala, jak se taková čísla zapisují. Nastalo mnoho okamžiků, kdy sama prozradila řešení, nebo výsledky žáků interpretovala a objasňovala. Dle sebereflexe, na kterou mířila poslední otázka v dotazníku, by učitelka s úlohou nepracovala jinak, což dokazuje, že neinklinuje ke konstruktivistickému stylu.

Učitelka Tmavá

Paní učitelka Tmavá se ve většině klíčových jevů zachovala v souladu s transmisivním stylem, přitom učí dle učebnice Fraus (Jirotková et al. 2009). Při čtení zadání žákům řekla, že úloha je jednoduchá a že jde o to, jak umí přemýšlet. Prozradila jim, že mají hledat více řešení a instruovala je, jak si mají výsledky zapisovat. Během toho, co žáci pracovali na řešení, jim radila, připodobňovala perníčky k jiným předmětům, které by mohly být žákům bližší. Poté zjišťovala, kolik kdo má řešení. Doufala, že mají víc jak jedno, ale na druhou stranu se bála, aby někdo nepopsal celý papír. Nepočkala na řešení žáků a začala říkat správné výsledky, které zároveň vysvětlovala. Učitelčina práce s úlohou inklinovala k transmisivnímu stylu, kdy po žácích očekávala určité výkony, zároveň ne vždy doceňovala jejich snahu a většinu řešení prozradila/vysvětlila sama.

Učitelka Sytá

Při pozorování hodiny paní učitelky Syté, bylo patrné, že inklinuje k transmisivnímu stylu výuky, přestože také učí dle učebnice Fraus (Jirotková et al. 2009). Zadala úlohu s tím, že žáci mají najít co nejvíce řešení. Dle odpovědi v dotazníku to udělala proto, aby nestrávili půl hodiny diskuzí. Žáci si měli zapisovat pouze výsledky a zápis do tabulky na tabuli dělali sami. Žákům neprozrazovala řešení, ale jejími reakcemi a výzvami jim dávala korektivní zpětnou vazbu. Problematiku desetinných čísel okomentovala sama a snažila se všem vysvětlit, co znamenají.

11 Výzkumná zjištění

V této kapitole jsou formulované odpovědi na stanovené výzkumné otázky. Nejprve budou zodpovězeny specifické otázky, které směřují k odpovědi na hlavní výzkumnou otázku.

11.1 Specifické výzkumné otázky

- *Jakým způsobem učitelé ovlivňují práci žáků se slovní úlohou s více řešeními?*

Na základě pozorování lze říci, že učitelky ovlivnily řešitelský proces žáků u slovní úlohy s více řešeními především instrukcemi, způsobem řízení diskuze nebo volbou a formulací otázek.

Učitel zahajuje práci se slovní úlohou tím, že ji zadá. Může to být v různé části výuky. Průběh řešení úlohy ovlivňuje dle množství instrukcí, kterými žáky usměrňuje. Jeho role mu umožňuje určit, zda žáci budou pracovat samostatně, ve skupinách, či se mohou sami rozhodnout. Může po žácích žádat zápis zadání, postup i odpověď na slovní úlohu, pokud je pro něj tato formální stránka z určitého důvodu důležitá, anebo pro něj může být hlavní způsob řešení úlohy a její výsledky.

Počet objevených řešení či objevení existence nekonečného množství řešení je závislé nejen na aktivitě, zkušenosti, dovednostech a vědomostech žáků, ale i na instrukcích učitele, kterými žákům může radit. Dokonce může řešení prozradit sám. Učitel může ovlivnit, zda hledání více řešení bude mít soutěžní charakter.

Diskuze během hodiny může mít různou hloubku. Učitel se do ní může v různé míře zapojovat, vést ji, usměrňovat ji. Žáci mohou být vyzváni, aby svá řešení obhájili, vysvětlili, argumentovali. Nebo tuto funkci převezme učitel a řešení bude sám vysvětlovat či interpretovat.

Díky potenciálu slovní úlohy s více řešeními lze skrz práci s ní směřovat k mnoha cílům. Na základě zvoleného cíle, se kterým učitel úlohu zadá, ovlivňuje práci celé třídy. Pro někoho je cílem samotné hledání více řešení, objevení všech řešení, nebo jen samotná diskuze víceznačného zadání.

- *Při kterých fázích práce s úlohou je možné sledovat prvky vyučovacího stylu učitele?*

Prvky vyučovacího stylu učitele byly znatelné v průběhu celého procesu práce se slovní úlohou s více řešeními. Již v úvodu, při zadání úlohy, se učitelé rozhodli, jaké instrukce žákům sdělí, kolik jim toho prozradí. Vliv vyučovacího stylu byl patrný i při požadavcích na zápis úlohy a evidenci výsledků. Učitelé pracovali s výsledky žáků různě, někteří je pouze brali na vědomí, jiní je odsouhlasili či odmítli, nebo je sami vysvětlili a interpretovali či prozrazovali řešení. Ukončení práce s úlohou se také lišilo v závislosti na přístupu učitele, zda pro něj bylo důležité, aby žáci přišli ne existenci všech řešení, či nikoliv a spíše ocenili diskuzi a argumentaci žáků.

11.2 Hlavní výzkumná otázka

- ***Jak se liší přístup učitelů matematiky v práci se slovní úlohou, která má více řešení?***

Učitelky, které inklinují ke konstruktivistickému stylu výuky, svými instrukcemi žákům neprozradily, že má úloha více řešení. Doplňujícími otázkami se doptávaly na řešení žáků, nechaly je jejich výsledky vysvětlit a rozhodnutí, zda jsou správné, byla obsahem diskuze celé třídy. Stěžejní pro učitelky byla diskuze a argumentace řešení.

Učitelky, které měly sklon k transmisivnímu přístupu, žákům prozradily, že mají hledat více řešení, ať už s cílem urychlení celé aktivity, či se snahou najít opravdu všechna řešení úlohy. V diskuzích byly momenty, při kterých prozrazovaly nová řešení, interpretovaly řešení žáků a samy je vysvětlovaly.

Přístup učitele nemusí být plně ovlivněn učebnicí, kterou při vyučování používá. Ačkoliv jsou některé učebnice tvořeny tak, aby vedly ke konstruktivismu, nemusejí tak učitelé v realitě jednat. A naopak, přestože určitá učebnice nevyžaduje konstruktivistický přístup, neznamená to, že by učitel k němu neinklinoval.

Závěr

Záměrem mé práce bylo zanalyzovat slovní úlohu s více řešeními z několika hledisek. V teoretické části bylo nutné vymezit slovní úlohu jako takovou, která se od běžných matematických úloh liší slovní formulací zadání a nematematickým kontextem, který vychází z reálné situace. Dále jsem svoji pozornost zaměřila na klasifikaci úloh dle množství řešení, jelikož toto kritérium není dominantním tématem, kterým by se zabývala odborná literatura. Navrhla jsem tuto klasifikaci: slovní úlohy s neexistujícím řešením, s jedním řešením, s více řešeními a s nekonečným počtem řešení. Následující část přiblížila jednotlivé fáze řešitelského procesu a problematiku řešitelských strategií.

Výrazným rozdílem, který slovní úlohy s více řešeními do vyučování přinášejí a odlišují se tak od těch běžných, jsou jejich cíle. Mohou být snadno využity jako prostředek motivace, individualizace, k prohlubování schopnosti porozumět významu textu a jeho správné interpretaci. Lze jimi budovat schopnost kritického myšlení a podporovat kreativitu. Díky vzniku diskuze nad řešeními dochází k rozvíjení kompetence sociální, personální a komunikační, kdy se žáci učí vhodně argumentovat, obhajovat svůj názor, naslouchat a přijímat názor druhého. Tyto cíle jsou ve vyučování závislé zejména na přístupu učitele a na způsobu, jakým s úlohami pracuje. To může být ovlivněno či podmíněno specifickým vyučovacím stylem a používanou učebnicí. V současné době se často do protikladu staví transmisivní a konstruktivistický přístup k výuce, které se liší především mírou intelektuální autonomie, již poskytuje učitel žákovi k odhalování poznatků.

Výzkumná část přinesla zjištění, že učitel svým vyučovacím stylem ovlivňuje celý průběh práce se slovní úlohou s více řešeními. Prvky konstruktivistického a transmisivního přístupu bylo možné identifikovat v průběhu celého procesu. Záleží na učiteli, zda a jak bude využito potenciálu, který slovní úlohy s více řešeními mají. Přestože učitel pracuje s učebnicí, která je vhodná pro určitý styl výuky, neznamená to, že je i učiteli vlastní a že neinklinuje k jinému.

V úvodu bylo nutné stanovit, zda výzkum bude orientován na učitele či žáka, jak s úlohou pracují. Diplomovou práci jsem zaměřila na učitele, ale i druhá možnost by přinesla určité zajímavosti. Limitem výzkumu bylo krátkodobé pozorování. Proto nemohlo být s jistotou stanoveno, jaký přístup k vyučování matematice je učiteli vlastní, ale bylo možné identifikovat prvky vyučovacích stylů.

Téma slovních úloh s více řešeními nabízí mnoho možností ke zkoumání. Další výzkum by se mohl orientovat na řešitelskou strategii žáka a těžištěm výzkumu by bylo porovnání objevitelského procesu tříd z prvního a druhého stupně základní školy – např. jak úlohu řeší starší a zkušenější řešitelé z druhého stupně ZŠ narozdíl od žáků prvního stupně, objeví přesah úlohy do racionálních čísel, dokážou všechny nalezené výsledky zobecnit a formálně vyjádřit?

Vypracování této diplomové práce mi potvrdilo skutečnost, jak je důležité zadávat ve vyučování smysluplné aktivity s jasně vymezeným cílem. Při pozorování mě samotnou překvapilo, jak někteří učitelé reagují na žáky, a těmto reakcím bych se chtěla v budoucnu vyvarovat. Uvědomila jsem si, jak jednoduše a téměř nevědomě dokáže učitel ovlivnit řešitelský proces žáků u slovních úloh a jak významná je dobře vedená třídní diskuze.

Seznam použitých informačních zdrojů

- BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ, 2011. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty).* Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-5419-6.
- DIVÍŠEK, Jiří, Zdeněk BUŘIL a Jiří HÁJEK, 1989. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Učebnice pro vysoké školy. ISBN 80-04-20433-3.
- FENSTERMACHER, Gary D. a Jonas F. SOLTIS, 2008. *Vyučovací styly učitelů*. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-471-7.
- HEJNÝ, Milan, 2012. Pedagogické schopnosti učitele v matematice – příběh. In: KOHNOVÁ, Jana. *Profesní rozvoj učitelů a cíle školního vzdělávání*. 1 vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, s. 245–252. ISBN 978-80-7290-625-3.
- HEJNÝ, Milan, 2014. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-776-2.
- HEJNÝ, Milan a František KUŘINA, 2009. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* 2. aktualiz. vyd. Praha: Portál. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.
- HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, ed., 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Díl 2. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
- HEJNÝ, Milan a Naďa STEHLÍKOVÁ, 1999. *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Kapitoly z didaktiky matematiky. ISBN 80-86039-98-6.
- HENDL, Jan, 2005. *Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace*. Praha: Portál. ISBN 80-7367-040-2.
- JIROTKOVÁ, Darina, 2012. Didaktické schopnosti učitele v matematice. In: KOHNOVÁ, Jana. *Profesní rozvoj učitelů a cíle školního vzdělávání*. 1 vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze. s. 253–260 1. ISBN 978-80-7290-625-3.

- JIROTKOVÁ, Darina a Jaroslava KLOBOUČKOVÁ, 2013. Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů, 2013. In: RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, s. 19–61. ISBN 978-80-7290-723-6.
- KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST, 2009. *Školní didaktika*. 2. vyd. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-571-4.
- KONFOROVIČ, Andrej G., 1989. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-21848-2.
- LAŠTOVKOVÁ, Kateřina, 2016. *Jazyk slovních úloh aneb čtení s porozuměním v matematice na 1. stupni ZŠ.* Plzeň. Diplomová práce. Západočeská Univerzita, Fakulta pedagogická.
- MALINOVÁ, Eliška, 1983. *Didaktika matematiky na prvním stupni základní školy*. Praha: Univerzita Karlova.
- MAREŠ, Jiří, 2013. *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0174-8.
- NOVOTNÁ, Jarmila, 2000. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. Kapitoly z didaktiky matematiky. ISBN 80-7290-011-0.
- ODVÁRKO, Oldřich, Emil CALDA, Jaroslav ŠEDIVÝ a Stanislav ŽIDEK, 1990. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Učebnice pro vysoké školy. ISBN 80-04-20434-1.
- PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ, 2009. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi.* Brno: Masarykova univerzita. Spisy Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity. ISBN 978-80-210-4834-8.
- SIGMUNDOVÁ, Alena, 2019. *Čtení s porozuměním jako předpoklad úspěšné strategie řešení slovních úloh v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7603-047-3.
- STEHLÍKOVÁ, Naďa, 2004. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ, eds. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky (1. sv.).* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, s. 11–21. ISBN 80-7290-189-3.

- STOPENOVÁ, Anna a Bohumil NOVÁK, 1993. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ.* Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN 80-7067-294-3.
- ŠKODA, Jiří a Pavel DOULÍK, 2011. *Psychodidaktika: metody efektivního a smysluplného učení a vyučování.* Praha: Grada. Pedagogika. ISBN 978-80-247-3341-8.
- ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ, 2014. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Vydání druhé. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0644-6.
- VONDROVÁ, Naďa a kolektiv, 2019. *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-246-4516-2.
- ZORMANOVÁ, Lucie, 2012. *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod.* Praha: Grada. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-4100-0.

Elektronické zdroje

- FOONG, Pui Yee, 2005. Developing creativity in the Singapore primary mathematics classroom: Factors that support and inhibit. *Critical thinking* [online]. Vilnius (Lithuania): International Reading Association, October, 6 (4), s. 14–20 [cit. 29. 10. 2020]. ISSN 1392-947X. Dostupné z: https://d0819b89-4bdf-499d67fa91432dde5d1.filesusr.com/ugd/ 852b 78_2db9c0 9a75374b209d14102fcb277b6d.pdf
- Kolektiv autorů učebnic, 2006. Klíčové kompetence a očekávané výstupy k učebnicím Alter pro 1. stupeň ZŠ [online]. Všeň: Alter [cit. 10.11.2020]. https://www.alter.cz/prilohy/ alter-a-rvp-zv/klic_kompetence.pdf
- HEJNÝ, Milan, 1995. Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika* [online]. 1995, 45(4), 386-399, [cit.1.7.2020]. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=3229&lang=cs
- H-mat, o. p. s., 2020. Učebnice a pomůcky. *Hejného metoda* [online]. [cit. 10. 11. 2020]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/ucebnice
- H-mat, o. p. s, 2017. Přijímačky ukázaly, že „Hejného děti“ se srovnání bát nemusí. *Hejného metoda* [online]. 9. 6. 2017 [cit. 10.11.2020]. Dostupné z: https://www.hmat.cz/media/ 2017/jednotne-prijimaci-zkousky

Kurikulární dokumenty

- *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha, 2017 [cit. 17. 9. 2020]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani.
- *ŠVP škol z výzkumu, dostupné na webových stránkách či v kancelářích škol.*

Učebnice matematiky

- HEJNÝ, Milan a kol. H-mat, o. p. s., 2020. *Matematika pro 3. ročník.* Praha: H-mat, o. p. s. ISBN 978-80-88247-21-0.
- JIROTKOVÁ, Darina, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Milan HEJNÝ, 2009. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-824-0.
- VAŇUROVÁ, Milena, Květoslava MATOUŠKOVÁ, Hana STAUDKOVÁ a Růžena BLAŽKOVÁ, 1995a. *Matematika pro 3. ročník základních škol. Díl 1.* Vyd. 2., upr. Všeň: Alter. ISBN 80-85775-35-2.
- VAŇUROVÁ, Milena, Květoslava MATOUŠKOVÁ, Hana STAUDKOVÁ a Růžena BLAŽKOVÁ, 1995b. *Matematika pro 3. ročník základních škol. Díl 2.* Všeň: Alter. ISBN 80-85775-27-1.
- VAŇUROVÁ, Milena, Květoslava MATOUŠKOVÁ, Hana STAUDKOVÁ a Růžena BLAŽKOVÁ, 1995c. *Matematika pro 3. ročník základních škol. Díl 3*. Všeň: Alter. ISBN 80-85775-28-X.

Seznam příloh

Příloha 1 – Analýza ŠVP škol z výzkumu

Část věnovaná školním vzdělávacím programům (dále ŠVP) představuje programy tří škol, na kterých se uskutečnil výzkum k této diplomové práci.[21] Klíčovou částí je vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* a konkrétní body, jež se týkají slovních úloh. RVP ZV stanovuje, co má být obsahem ŠVP. Mimo jiné by mělo obsahovat výchovné a vzdělávací strategie – *„společné postupy uplatňované na úrovni vyučovacího předmětu, jimiž učitelé cíleně utvářejí a rozvíjejí klíčové kompetence žáků“* (RVP ZV 2017, s. 156).

ZŠ Bílá

V ŠVP ZŠ Bílá jsou v obecném přehledu uvedeny klíčové kompetence, kterých mají žáci dosáhnout, a k tomu jsou přiřazené konkrétní a detailní výchovné a vzdělávací strategie, které učitel aplikuje. Kompetence i strategie jsou dále rozpracovány přímo pro předmět Matematika. Tématu slovních úloh se dotýkají následující:

Kompetence k učení:

- *Učitel zadává úkoly způsobem, který umožňuje volbu různých postupů.*
- *Učitel zařazuje metody, při kterých žáci docházejí k objevům, řešením a závěrům sami.*

Kompetence k řešení problémů

- *Učitel vede žáky k řešení praktických úkolů.*

Kompetence komunikativní

- *Učitel vybízí žáky k tvoření otázek, hledání a posuzování odpovědí, párové a skupinové výuce, vyžadující komunikaci.*
- *Učitel vybízí žáky k tvoření otázek a slovních úloh.*

Kompetence sociální a personální

- *Učitel požaduje řešení úloh v patřičné kvalitě, vede žáky k sebekontrole každého kroku postupu řešení, systematické práci, vytrvalosti a přesnosti. Povzbuzuje žáky k vytrvalosti a posiluje jejich sebedůvěru.*

Strategie u předmětu Matematika nejsou tak detailně rozpracované jako v obecném přehledu, přesto se některé týkají konkrétně slovních úloh.

[21] ŠVP škol z výzkumu byly dostupné na webových stránkách či v kancelářích škol.

ŠVP dále představuje vzdělávací obsah, který rozděluje pro třídy, které mají matematiku profesora Hejného a které ji nemají. V přehledu pro třídy s běžnou výukou jsou slovní úlohy samostatným učivem a patří do tematického okruhu *Použití početních operací ve slovních úlohách.*

Vzdělávací obsah matematiky vyučované dle Hejného metody je více rozpracován. Jsou zde tematické okruhy: *Řešení slovních i numerických úloh s porozuměním, Poznávání různých strategií řešení úloh, Tvorba slovních úloh, Kombinatorické situace*. Tyto okruhy patří do učiva *Využití aritmetických operací k modelování situací a procesů v prostředích sémantických i strukturálních*.

Žák:

- *umí modelovat i řešit slovní úlohy využívající čtyř základních početních operací*
- *umí tvořit analogické úlohy*
- *ovládá některé řešitelské strategie jako pokus-omyl, řetězení od konce, vyčerpání všech možností, rozklad na podúlohy apod.*

ZŠ Modrá

Základní škola Modrá se v úvodu svého ŠVP věnuje charakteristice klíčových kompetencí tak, jak je vymezuje RVP, stejně popisuje i cílové zaměření vzdělávacích oblastí. Dále jsou u jednotlivých vzdělávacích oblastí uvedeny výchovné a vzdělávací strategie, které vedou k naplnění klíčových kompetencí a jsou přiřazené k tematickým okruhům.

Matematika a její aplikace mají žáka vést k:

<u>Kompetence k učení:</u>

- *využívání matematických poznatků při řešení úloh z praxe*

<u>Kompetence k řešení problémů:</u>

- *provádění rozboru úlohy, poznání a pochopení otázek k, plánování řešení, k odhadu výsledku, vyhodnocení správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy*
- *využívání vlastního úsudku a zkušenosti*

<u>Kompetence komunikativní:</u>

- *schopnost matematizovat reálné situace*

Lze si všimnout, že u znění předcházejících bodů není sloveso ve tvaru 1. osoby množného čísla oznamovacího způsobu (jako je např. u ZŠ Zelená), a tak formulace neznějí jako strategie, které má učitel aplikovat k naplnění cílů, ale spíše to působí již jako cíle samotné, ke kterým žák dojde.

V cílovém zaměření předmětu *Matematika* ve třetím ročníku se slovní úlohy vyskytují jako samostatný cíl, *„řešení slovních úloh“*. Dále v dílčích výstupech, při aplikaci základních početních operací:

Žák:

- *řeší slovní úlohy vedoucí k odčítání čísel v oboru do 100*
- *řeší slovní úlohy na porovnávání dvou trojciferných čísel, sčítání a odčítání dvou trojciferných čísel, na vztahy o n – více (méně).*
- *řeší slovní úlohy na násobení*
- *řeší slovní úlohy na dělení*
- *řeší slovní úlohy vedoucí ke dvěma početním výkonům (např. sčítání, násobení)*
- *řeší slovní úlohy na vztahy n – krát více, n – krát méně*
- *řeší a vytváří slovní úlohy vedoucí k násobení dvojciferného čísla jednociferným a dělení dvojciferného čísla jednociferným*
- *řeší slovní úlohy vedoucí k užití vztahů n – krát více, n – krát méně.*

ZŠ Zelená

Ve školním vzdělávacím programu ZŠ Zelená v úvodu najdeme mnoho výchovných a vzdělávacích strategií, které slouží k naplnění klíčových kompetencí. Tyto strategie jsou popsány obecně pro všechny předměty a poté jsou konkretizovány u jednotlivých vzdělávacích oblastí. Mnoho strategií, které jsou v obecném přehledu, v konkrétní vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* chybí, přitom je lze například při práci se slovními úlohami využít.

<u>Kompetence k učení</u>

- *použijeme vzorového modelu pro aplikaci obdobných úloh – zdokonalujeme rychlé čtení, orientaci v daných úlohách*
- *povzbuzujeme žáka kladným hodnocením a snažíme se podpořit víru v jeho schopnosti*

<u>Kompetence k řešení problémů</u>

- *problémové úkoly řešíme rozborem, diskusí*
- *provádíme zkoušky řešení, snažíme se odhalit chybu, cvičíme vytrvalost, aby se žák nenechal odradit*
- *dáváme žákům prostor pro vlastní netradiční řešení*

<u>Kompetence komunikativní</u>

- *navozujeme situace k diskusi o řešení úloh z praxe*
- *vytváříme ovzduší k naslouchání názorů spolužáků*

- *umožňujeme – vzájemné opravy testů a vyhodnocení řešení – žáci obhájí vlastní způsob řešení úlohy*

Kompetence občanská

- *umožňujeme společný rozbor konfliktních situací*

Kompetence sociální a personální

- *vytváříme prostor pro sebehodnocení – zpětná vazba*
- *navozujeme situace tak, aby žáci vnímali učitele jako rádce*
- *vytváříme prostor žákům vést část hodiny – hodnotíme schopnost žáka vysvětlit problém spolužákům*

Kompetence pracovní

- *nabízíme slovní úlohy zaměřené na práci s penězi, nakupování, porovnávání cen, převody jednotek*
- *sledujeme u zadaných prací precizní zapisování postupů*

ZŠ Zelená má velmi detailně rozpracované veškeré strategie, které by měl učitel aplikovat, aby bylo u žáka dosaženo klíčových kompetencí.

ŠVP dále vymezuje očekávané výstupy pro jednotlivé ročníky. Pro třetí ročník jsou zde výstupy, které popisují práci se slovními úlohami v tematickém okruhu *Číslo a početní operace*, následující:

b) *používá sčítání a odčítání v oboru přirozených čísel při řešení praktických úloh*
c) *řeší a zapisuje slovní úlohy na porovnávání dvou trojciferných čísel, sčítání a odčítání dvou trojciferných čísel, na vztahy o n-více (méně)*
d) *řeší, zapisuje a vytváří slovní úlohy*

Slovní úlohy se také objevují v učivu tohoto tematického okruhu:

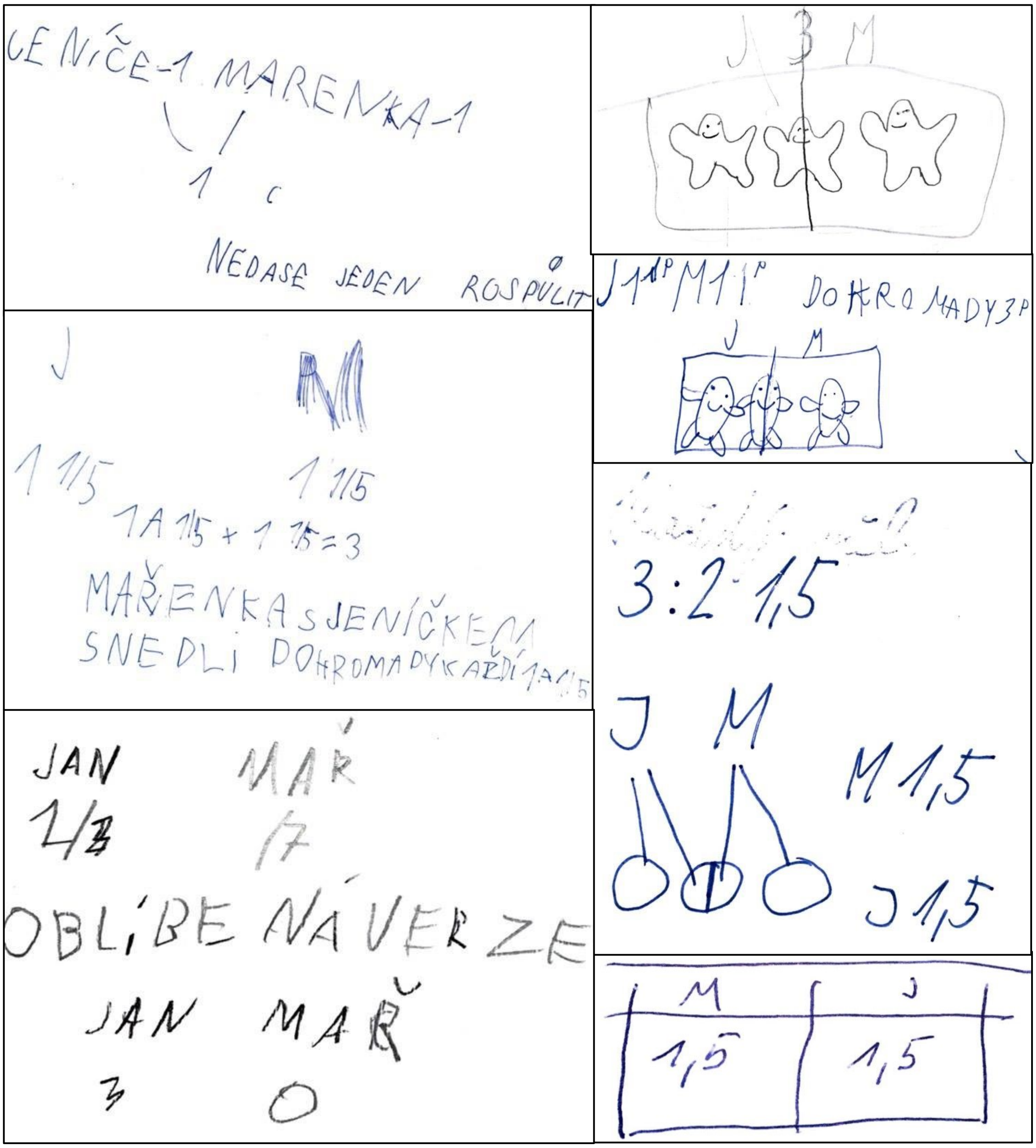
e) *řešení, zapisování a vytváření slovních úloh se dvěma různými početními výkony*

Nestandartní aplikační úlohy a problémy jsou zařazené od čtvrtého ročníku. Konkrétně úlohy s více řešeními se v ŠVP nevyskytují.

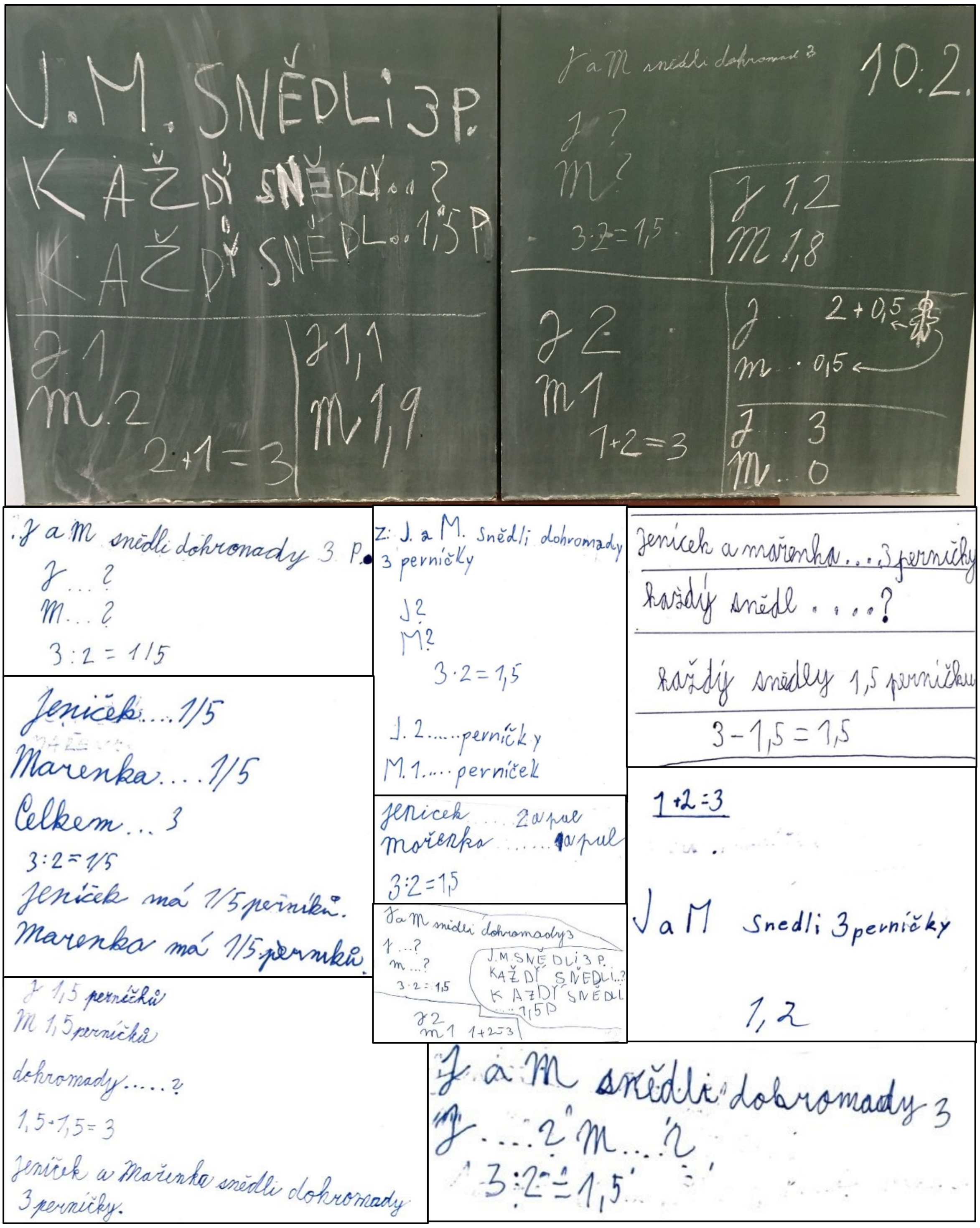
Souhrn analýzy ŠVP

Jak bylo vysvětleno, slovní úlohy mají ve vyučování nezastupitelný význam, což dokládají i ŠVP škol z výzkumu. U dvou ze tří škol, jsou dokonce označeny za učivo, přestože je RVP takto nevymezuje. Slovní úlohy s více řešeními se v dokumentech neobjevují. Je možné je zařadit do *Nestandartních aplikačních úloh a problémů*, které RVP zařazuje do 2. období, tedy od 4. třídy. *„(...) Řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto* *úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání.“* (RVP ZV 2017, s. 30). Analýza dokumentů doložila, že i pomocí slovních úloh lze nabývat klíčových kompetencí a učitelé je mohou využít i ve svých výchovných a vzdělávacích strategiích. Mnoho strategií, které se objevovaly v obecných přehledech ŠVP a souvisely s cíli slovních úloh (s více řešeními), nebyly poté zařazeny do strategií konkrétně pro Matematiku. Je tedy otázkou, zda si vedení školy a učitelé význam slovních úloh uvědomují.

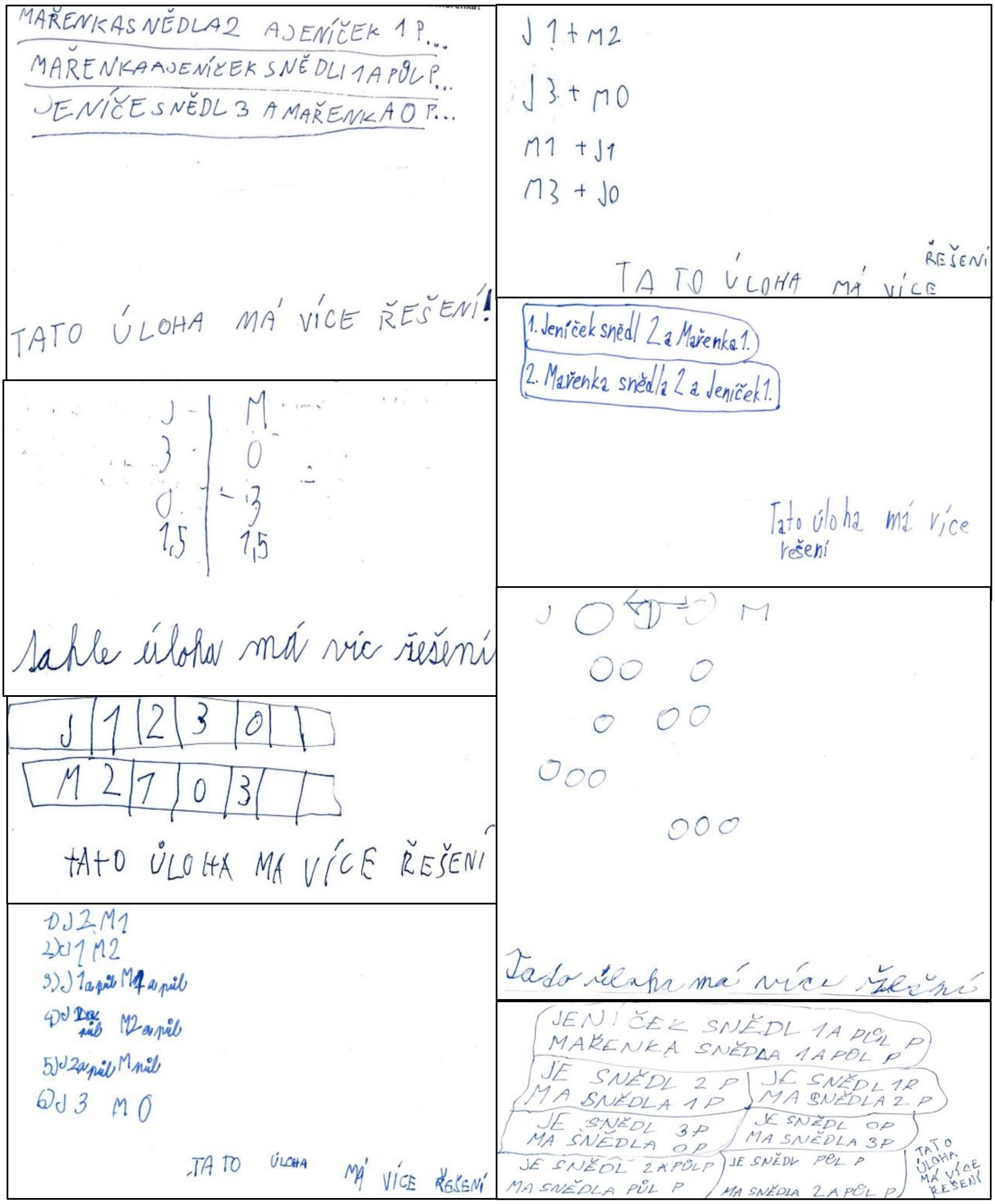
Příloha 2 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Bílé



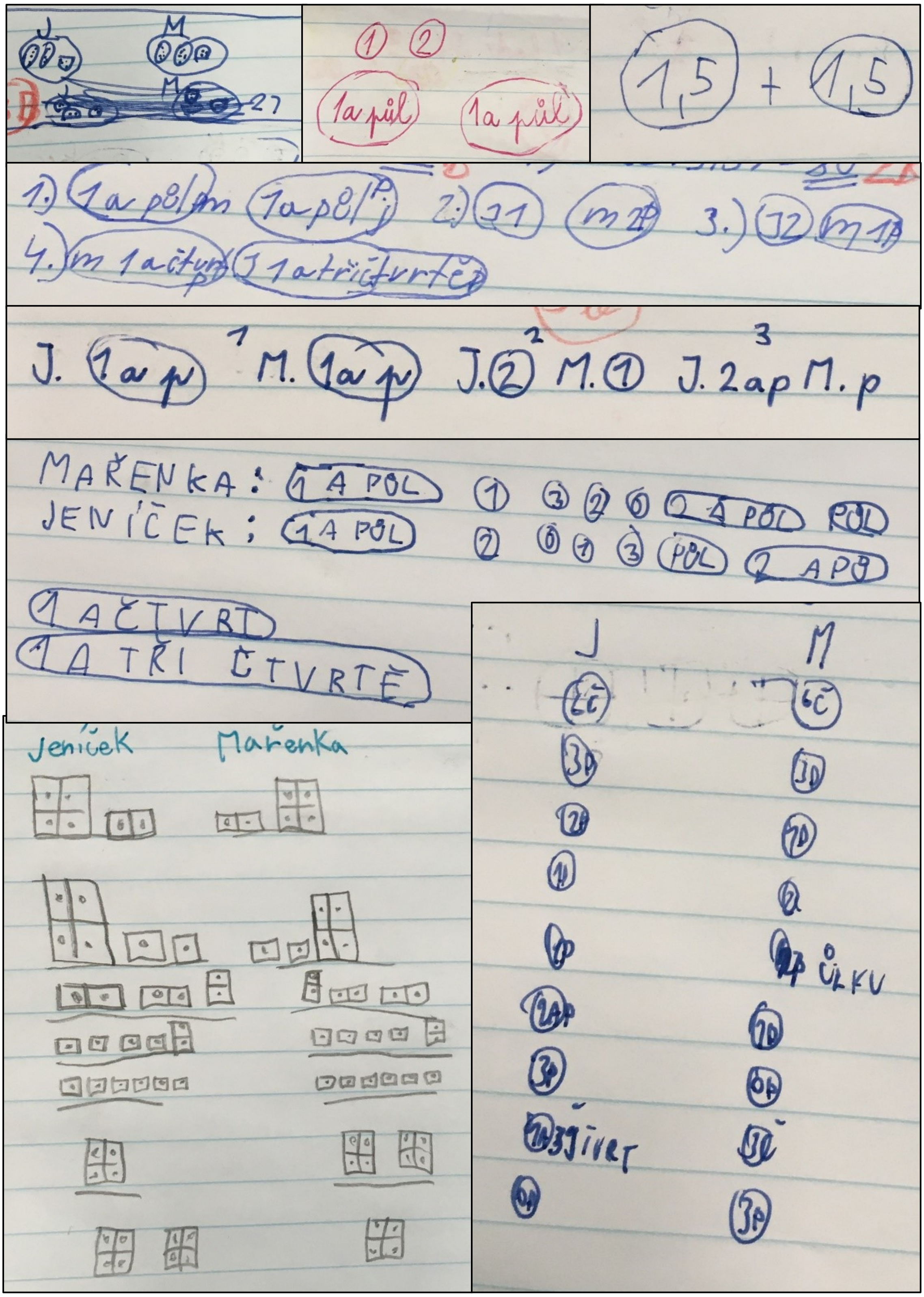
Příloha 3 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Modré



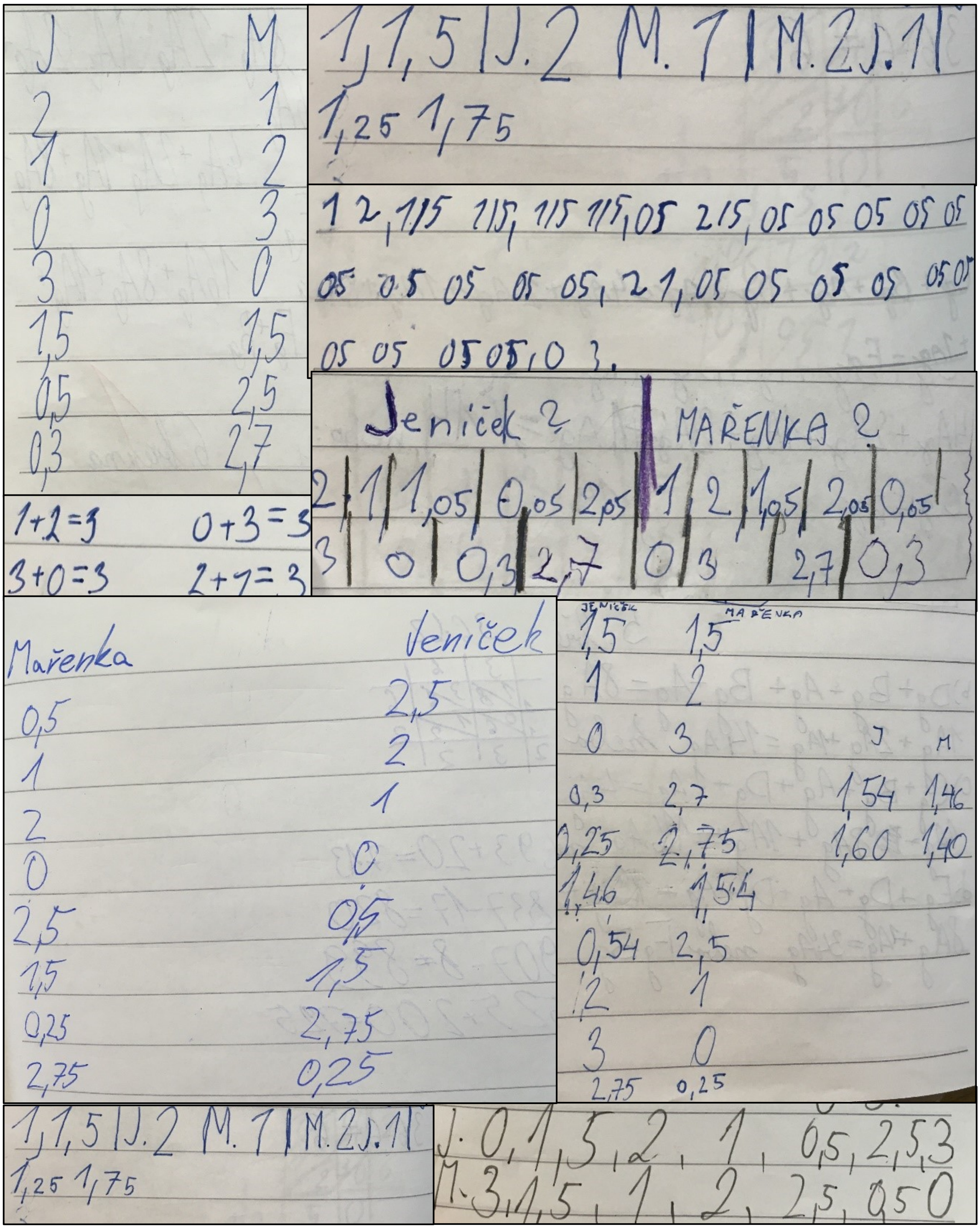
Příloha 4 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Světlé



Příloha 5 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Tmavé



Příloha 6 – Ukázka řešení žáků třídy učitelky Syté



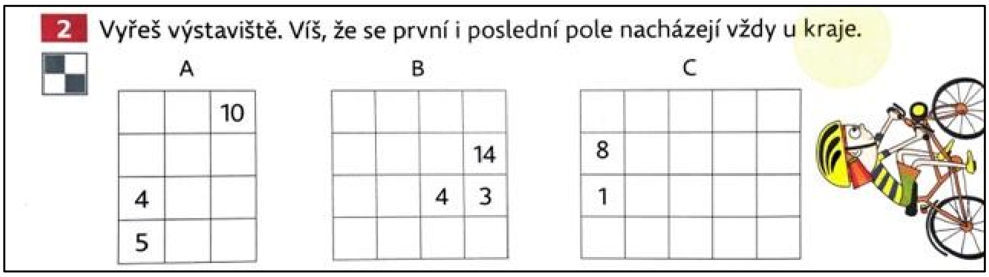
Příloha 7 – Úloha s více řešeními, Alter[22]

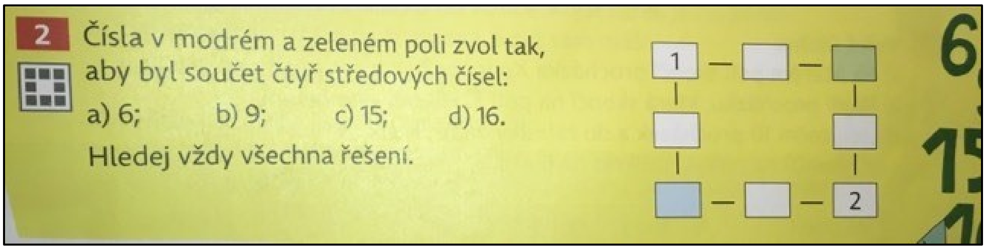
NAKUPUJEME HRAČKY

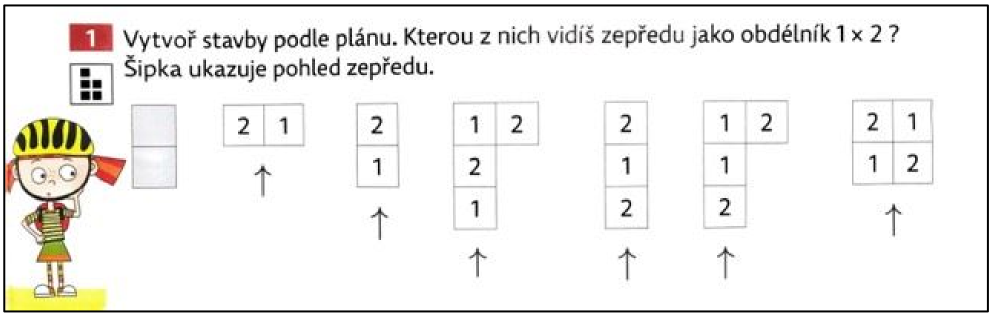
1. Lucka chtěla pomáhat rodičům prodávat hračky.
   Tatínek ji zkoušel:
   „Vyber hračky, které si může zákazník koupit, jestliže má 50 Kč (100 Kč). Kolik korun bys mu vrátila, pokud by kupoval vždy pouze jednu hračku?“
   Lucka spočítala všechno správně. Dokážeš to také?
2. Soutěž pro celou třídu:
   Vyber hračky tak, aby se jejich cena přiblížila co nejvíce částce 30 Kč (40 Kč, 50 Kč, 60 Kč, 70 Kč, 80 Kč, 90 Kč, 100 Kč)
   Vyhrává ten žák, jehož odhad byl nejpřesnější.
3. Ceny hraček zaokrouhli na desítky. Odhaduj přibližné ceny 2 (3, 4, 5) kusů jednotlivých druhů hraček. (Viz str. 54, 55)

[22] VAŇUROVÁ, Milena, Květoslava MATOUŠKOVÁ, Hana STAUDKOVÁ a Růžena BLAŽKOVÁ, 1995a. *Matematika pro 3. ročník základních škol. Díl 1.* Vyd. 2., upr. Všeň: Alter, s. 46. ISBN 80-85775-35-2.

Příloha 8 – Úlohy s více řešeními, Fraus[23]







[23]JIROTKOVÁ, Darina, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Milan HEJNÝ, 2009. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, s. 42, 58, 59, 63. ISBN 978-80-7238-824-0.

Příloha 9 – Úlohy s více řešeními, H-mat[24]

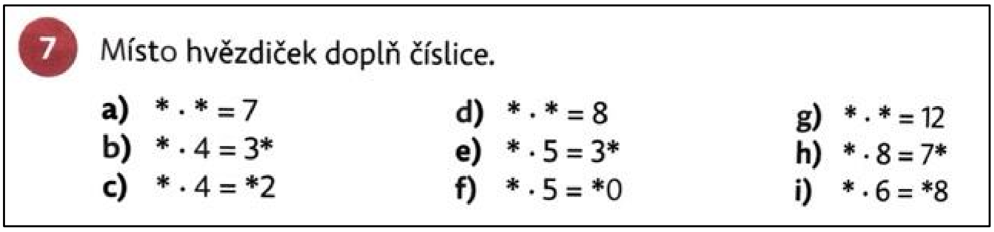

8 Již známe tyto parkety:

3/11

čtyřka 3l mono duo elko růžek

Na podlaze 3 × 5 nebo 5 × 3 je vždy umístěna parketa čtyřka.
Pokryj podlahy čtyřmi různými typy parket.


15 Ariana si pomocí kamenů a tabulky zapsala číslo 102. Jaké jiné číslo lze vytvořit pomocí 3 kamenů?


7 Místo hvězdiček doplň číslice.

a) * . * = 7
b) * · 4 = 3*
c) * · 4 = *2

d) * . * = 8
e) * · 5 = 3*
f) * · 5 = *0

g) * . * = 12
h) * · 8 = 7*
i) * · 6 = *8

[24] HEJNÝ, Milan a kol. H-mat, o. p. s., 2020. *Matematika pro 3. ročník*. Praha: H-mat, o. p. s., s. 6, 12, 15. ISBN 978-80-88247-21-0.