Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Pavel Podbrdský

Jemné vlastnosti sobolevovských funkcí

Katedra:	**Katedra matematické analýzy**
Vedoucí diplomové práce:	**Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.**
Studijní program:	**Matematika**
Studijní obor:	**Matematická analýza**

Děkuji Prof. Janu Malému za trpělivé vedení práce a za mnoho cenných rad a připomínek, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout.

Děkuji také Mgr. Robertu Šámalovi za poskytnutí maker, která mi pomohla s elektronickou sazbou práce.

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16.4.2004

Pavel Podbrdský

Pavel Podbrdský

Obsah

Název práce: *Jemné vlastnosti sobolevovských funkcí*
Autor: *Pavel Podbrdský*
Katedra: *Katedra matematické analýzy*
Vedoucí diplomové práce: *Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.*
E-mailová adresa vedoucího: maly@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme bodovými vlastnostmi sobolevovských funkcí mezi metrickými prostory. Definujeme newtonovské prostory $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ funkcí definovaných na metrickém prostoru X s hodnotami v reálném Banachově prostoru $\mathbb{B}$ a s horním gradientem v Lorentzově prostoru $L_{p,q}(X)$ a zkoumáme jejich vlastnosti. Předpokládáme, že na metrickém prostoru X je dána doubling míra $\mathbf{m}$. Ukazujeme, že prostor $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ je Banachův a že za jistých dodatečných předpokladů je pro $p \geq q$ množina lipschitzovských funkcí z X do $\mathbb{B}$ hustou podmnožinou $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. V tomto případě dokazujeme odhad pro kapacitu množiny nelebesgueovských bodů funkcí z $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Ukazujeme pak, že funkce z prostoru $N^{1,L_{m,1}}(X,\mathbb{B})$ mají precizní reprezentanty a že tyto reprezentanty mají lebesgueovské body $\widehat{\mathcal{H}}_m$-skoro všude v X. Z platnosti $(1,p)$-Poincarého nerovnosti na prostoru X pro nějaké $p < m$ (resp. pro $p = m$ za dodatečných předpokladů na prostor X) odvozujeme m-coarea vlastnost pro precizně reprezentovaná zobrazení $u : \Omega \subset X \to Y$, která mají horní gradient v prostoru $L_{m,1}(\Omega)$. To zlepšuje výsledky z článku [M1]. Navíc jako důsledek dostáváme, že leží-li funkce u v prostoru $N^{1,L_{m,1}}$, pak existuje její precizní reprezentant a ten pak splňuje m-coarea vlastnost.

Klíčová slova: coarea vlastnost, Sobolevovy prostory na metrických prostorech, Lorentzovy prostory, horní gradient.

Title: *Fine Properties of Sobolev Functions*
Author: *Pavel Podbrdský*
Department: *Department of Mathematical Analysis*
Supervisor: *Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.*
Supervisor's e-mail address: maly@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this thesis, we investigate pointwise properties of Sobolev functions between metric spaces. We define the Newtonian spaces $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ of functions defined on the metric space X with values in some real Banach space $\mathbb{B}$ and with upper gradient in the Lorentz space $L_{p,q}(X)$, and study their properties. We assume that the metric space X is equipped with a doubling measure $\mathbf{m}$. We show that the space $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ is a Banach space and, under some additional assumptions, that the set of Lipschitz functions is dense in $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ for $p \geq q$. In this case we prove an estimate for the capacity of the set of non-Lebesgue points of functions from $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Further, we show that functions from the space $N^{1,L_{m,1}}(X,\mathbb{B})$ have precise representatives and that these representatives have Lebesgue points $\widehat{\mathcal{H}}_m$-almost everywhere in X. Assuming that the $(1,p)$-Poincaré inequality on the space X holds for some $p < m$ (or for $p = m$ under some additional hypotheses on the space X) we show that the m-coarea property is satisfied for precise represented mappings $u : \Omega \subset X \to Y$ with upper gradient in the space $L_{m,1}(\Omega)$. This improves results from the article [M1]. In addition we show as a consequence that any function u from the space $N^{1,L_{m,1}}$ has a precise representative and this representative satisfies the m-coarea property.

Keywords: coarea property, Sobolev spaces on metric spaces, Lorentz spaces, upper gradient.

1. Úvod

Věta o záměně proměnných v Lebesgueově integrálu je jedním ze základních nástrojů matematické analýzy. Připomeňme jednu z nejjednodušších verzí. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení (tj. zobrazení, které je spojitě diferencovatelné a jehož Jacobiho matice Ju je v každém bodě $x \in \Omega$ regulární). Pak u je C^1-difeomorfismus a $u(\Omega)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Je-li $g : u(\Omega) \to \mathbb{R}$ nezáporná lebesgueovsky měřitelná funkce, pak funkce $g \circ f$ je lebesgueovsky měřitelná na Ω a platí

$$\int_\Omega g \circ u(x)|Ju(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{u(\Omega)} g(y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů má smysl ($|Ju(x)|$ zde značí absolutní hodnotu determinantu Jacobiho matice funkce u v bodě x). Označíme-li $f = g \circ u$, můžeme vztah (1) přepsat na

$$\int_\Omega f(x)|Ju(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{u(\Omega)} f \circ u^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

Tato verze formule o záměně proměnných nám umožňuje zavést na otevřených podmnožinách $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ „křivé“ souřadnice a integrovat podle nich. Vztah (2) lze zobecnit v několika směrech. Cílem je zmírnit předpoklad prostoty a regularity zobrazení u a dovolit záměnu proměnných mezi prostory různých dimenzí.

Jedním ze zobecnění vztahu (2) je následující věta, kterou zde formulujeme pro lipschitzovskou záměnu proměnných a jejíž důkaz lze v této obecnosti najít v knize [F, 3.2.3].

Věta 1.1. (Area formule) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $E \subset \Omega$ lebesgueovsky měřitelná množina a $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $(d \geq n)$ lipschitzovské zobrazení. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{E \cap u^{-1}(y)} f(x) \right) \mathrm{d}\mathcal{H}_n(y) = \int_E f(x)|J_n u(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Zde $\mathcal{H}_n$ je Hausdorffova míra (jejíž definici uvádíme ve 2. kapitole) a $J_n u$ zde značí multivektor determinantů všech $n \times n$ minorů Jacobiho matice všech parciálních derivací zobrazení u. Připomeňme, že zobrazení u je lipschitzovské a je tedy skoro všude diferencovatelné. Výraz $|J_n u(x)|$ zde značí eukleidovskou normu multivektoru $J_n u$ v bodě x.

Vztah (3) nám umožňuje integrovat přes n-rozměrné „křivé“ podmnožiny d-rozměrného prostoru $(d \geq n)$, tedy např. počítat jejich n-rozměrnou míru (v případě $f = 1$).

Druhé významné zobecnění vztahu (2) je věta, kterou také formulujeme v obecnosti lipschitzovské záměny proměnných a jejíž důkaz v této obecnosti lze najít v knize [F, 3.2.12] (přičemž případ $d = n$ je zahrnut ve větě 1.1).

Věta 1.2. (Coarea formule) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $E \subset \Omega$ lebesgueovsky měřitelná množina a $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $(d \leq n)$ lipschitzovské zobrazení. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{E \cap u^{-1}(y)} f(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}_{n-d}(x) \right) \mathrm{d}y = \int_E f(x) |J_d u(x)| \, \mathrm{d}x, \tag{4}$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Vztah (4) nám umožňuje rozdělit n-rozměrnou integraci na množině E. Nejdříve integrujeme funkci f přes úrovňové množiny zobrazení u podle $(n-d)$-rozměrné míry a výsledek pak integrujeme podle d-rozměrné míry na oboru hodnot zobrazení u. Poznamenejme, že Fubiniova věta pro Lebesgueovu (n-rozměrnou) míru je speciálním případem vztahu (4), stačí volit zobrazení u jako kanonickou projekci $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$.

Další související tvrzení je nerovnost Eilenbergova typu, viz [E]. V našem obecném případě m nemusí být přirozené číslo. Důkaz následující věty plyne z [F, 2.10.25, 2.10.26]

Věta 1.3. (Eilenbergova nerovnost) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $E \subset \Omega$ lebesgueovsky měřitelná množina a $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ lipschitzovské zobrazení. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je nezáporná lebesgueovsky měřitelná funkce. Nechť $m \in [1, n]$ je reálné číslo. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{E \cap u^{-1}(y)} f(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}_{n-m}(x) \right) \mathrm{d}\mathcal{H}_m(y) \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} \int_E f(x) |\nabla u(x)|^m \, \mathrm{d}x, \tag{5}$$

kde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + s/2)}.$$

Přirozenou otázkou je, pro jakou třídu zobrazení u vztahy (3), (4) a (5) zůstávají v platnosti. Zajímáme se o sobolevovské funkce, tj. funkce, které mají všechny slabé parciální derivace (tj. parciální derivace ve smyslu distribucí) reprezentovatelné lokálně integrovatelnými funkcemi (a pro které tedy lze definovat Jacobiho matici a gradient pomocí těchto slabých derivací). Je dobře známo, že ověření platnosti vztahů (3), (4) a (5) lze redukovat na množiny E nulové míry. Pro $m = n \leq d$ dostáváme tzv. Luzinovu N-vlastnost: je-li $\mathcal{L}_n(E) = 0$, pak $\mathcal{H}_n(u(E)) = 0$. (Zde $\mathcal{L}_n(E)$ značí n-rozměrnou Lebesgueovu míru množiny E.) V obecném případě dostáváme tzv. m-coarea vlastnost. Nechť $1 \leq m \leq n$ je reálné číslo. Řekneme, že sobolevovská funkce $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ splňuje m-coarea vlastnost v Ω, pokud pro každou množinu $E \subset \Omega$ nulové Lebesgueovy míry a pro $\mathcal{H}_m$-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^d$ platí $\mathcal{H}_{n-m}(E \cap u^{-1}(y)) = 0$. Následující věta je dokázaná v [M1, 2. kapitola], je založena na výsledcích dokázaných v knize [F].

Věta 1.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $E \subset \Omega$ lebesgueovsky měřitelná množina a $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ sobolevovská funkce splňující m-coarea vlastnost. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je nezáporná lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

(a) je-li $m = n \leq d$, platí vztah (3).
(b) je-li $m = d \leq n$, platí vztah (4).
(c) je-li $m \in [1, n]$ reálné číslo, platí vztah (5).

Danou problematikou v $\mathbb{R}^n$ se kromě knihy [F] zabývají např. články [Ha1], [KKM], [M2], [MM], [MSZ] a [VP]. V obecnosti lipschitzovských zobrazení mezi metrickými prostory studuje danou problematiku článek [AK]. Roli měr na definičním oboru i oboru hodnot zobrazení u hrají Hausdorffovy míry daných dimenzí.

Jedním z cílů této práce je studovat danou problematiku v metrických prostorech pro sobolevovské funkce. Náš kontext je odlišný od článku [AK]. Důvodem je, že pro teorii Sobolevových prostorů je účelné studovat metrické prostory, na nichž je pevně daná referenční míra $\mathbf{m}$ (většinou s doubling vlastností) jako dodatečná struktura. To umožňuje aplikace pro váhové prostory, variety, Carnotovy-Carathéodoryovy prostory atd. (více o aplikacích v těchto prostorech viz [HaK]). Pro coarea vlastnost je pak přirozené uvažovat Hausdorffovy míry škálované kodimenzí. Jak je ukázáno v [M1, kapitola 13], vztahu (5) lze dát rozumný smysl (je potřeba najít interpretaci pro výraz $|\nabla f|$) a ukazuje se, že i v této obecnosti dostáváme zajímavé důsledky m-coarea vlastnosti.

Nastíněnou problematikou se zabývá článek [M1], kde jsou výsledky odvozeny za předpokladu platnosti $(1,1)$-Poincarého nerovnosti na definičním oboru funkce u a za předpokladu, že funkce u je precizně reprezentovaná (pro definice lze nahlédnout do 2. kapitoly). V této práci výsledky z článku [M1] odvozujeme za slabšího předpokladu platnosti $(1,p)$-Poincarého nerovnosti na definičním oboru funkce u pro některé $p < m$ (resp. pro $p = m$ za dodatečných požadavků na kvalitu metrického prostoru X). Navíc za jistých předpokladů ukazujeme existenci precizního reprezentantu funkce u, který pak m-coarea vlastnost splňuje.

Dalším z cílů této práce je zavést a zkoumat vlastnosti newtonovských prostorů funkcí definovaných na metrickém prostoru X, s hodnotami v obecném reálném Banachově prostoru a s horním gradientem ležícím v Lorentzově prostoru $L_{p,q}$. Newtonovské prostory tvoří jeden z možných přístupů k definici Sobolevových prostorů v metrických prostorech. Tento přístup se objevuje v článku [S], kde je však daná problematika studována pouze pro případ funkcí s hodnotami v $\mathbb{R}$ a s horním gradientem ležícím v Lebesgueově prostoru L_p. Newtonovskými prostory s hodnotami v Banachových prostorech a s horním gradientem ležícím v prostoru L_p se zabývá např. článek [HKST]. Většinu tvrzení lze použitím analogických metod zobecnit i na náš případ, zejména v případě $p \geq q$. Existuje několik dalších možností, jak definovat Sobolevovy prostory v metrických prostorech, viz např. [C], [Ha2], [HeK2]. Tyto možnosti obecně vedou k různým prostorům, nicméně za určitých dodatečných podmínek na metrický prostor X dávají stejný výsledek, viz [S].

Ve 2. kapitole zavádíme základní značení a uvádíme základní věty, které budeme používat. V oddílu 2.2. definujeme Lorentzovy prostory (s hodnotami v Banachově prostoru) a uvádíme základní tvrzení potřebná pro práci s nimi. Ve 3. kapitole se zabýváme newtonovskými prostory. Náš přístup zobecňuje přístup k dané problematice zvolený v článku [S]. V oddílu 3.1 definujeme slabý horní gradient funkce u; tento přístup k definici gradientu v metrických prostorech má původ v článku [HeK2]. V oddílu 3.2. zavádíme newtonovské prostory funkcí s hodnotami v reálném Banachově prostoru a s horním gradientem v Lorentzově prostoru $L_{p,q}$ a vyšetřujeme jejich základní vlastnosti. Dokazujeme, že tyto newtonovské prostory jsou Banachovy prostory. V oddílu 3.3. definujeme Poincarého nerovnosti pro zobrazení v metrických prostorech a diskutujeme některá tvrzení o Poincarého nerovnostech dokázaná v článcích [HeK1], [HKST] a [KZ]. V oddílu 3.4. dokazujeme hustotu lipschitzovských funkcí v jisté třídě newtonovských prostorů a jako důsledek existenci borelovsky měřitelných reprezentantů funkcí z těchto prostorů. Ve 4. kapitole se již zabýváme coarea vlastností. Přístup k řešení je podobný přístupu v článku [M1], za našich slabších předpokladů je však potřeba znění a důkazy některých tvrzení značně modifikovat. V oddílu 4.1. dokazujeme nerovnosti vycházející z odhadu pro Hausdorffovu míru úrovňových množin Rieszova potenciálu (viz věta 4.1 dokázaná v [M1]) a Poincarého nerovnosti. V oddílu 4.2. se zabýváme odhadem kapacity množiny nelebesgueovských bodů funkcí z newtonových prostorů $N^{1,L_{p,q}}$, $p \geq q$. Dále jako důsledek ukazujeme, že funkce z prostoru $N^{1,L_{m,1}}$ mají reprezentanty s lebesgueovými body $\widehat{\mathcal{H}}_m$-skoro všude. V oddílu 4.3. pak směřujeme k odvození finálního výsledku práce – platnosti m-coarea vlastnosti pro tyto „dobré“ reprezentanty funkcí z prostoru $N^{1,L_{m,1}}$.

2. Definice a značení

2.1. Základní definice a tvrzení

Mírou rozumíme vnější borelovsky regulární míru; pokud je navíc lokálně konečná, nazveme ji borelovskou mírou. V celé práci předpokládáme, že X je metrický prostor s doubling mírou $\mathbf{m}$, tj. předpokládáme, že $\mathbf{m}$ je borelovská míra a existuje konstanta D taková, že

$$\mathbf{m}(B(x,2r)) \le D\,\mathbf{m}(B(x,r)) \tag{6}$$

pro každý bod $x \in X$ a pro každé $r > 0$. Konstantu D nazýváme doubling konstantou míry $\mathbf{m}$. Vztah (6) budeme často používat bez zbytečného upozorňování. Dále předpokládáme, že

$$C_1 = \inf_{x \in X} \mathbf{m}(B(x,1)) > 0. \tag{7}$$

Jelikož na prostoru X existuje doubling míra $\mathbf{m}$, je prostor X separabilní. Dále v celé práci předpokládáme, že $\mathbb{B}$ je reálný Banachův prostor. Nebude-li výslovně řečeno jinak, budeme předpokládat, že $p \in [1,\infty)$ a $q \in [1,\infty]$, přičemž v případě, že $p = 1$, předpokládáme také $q = 1$.

Je-li Y metrický prostor, pak danou metriku na něm značíme d_Y. Budeme-li mluvit o otevřené kouli B v metrickém prostoru Y, budeme ji vždy chápat jako otevřenou kouli danou spolu s pevným středem a poloměrem (i když v obecném metrickém prostoru Y nemusí koule jednoznačně určovat tyto své parametry). Je-li $B = B(y,r)$ otevřená koule v metrickém prostoru Y, pro každé $K > 0$ značíme $KB = B(y,Kr)$.

Rieszovým potenciálem míry μ řádu α rozumíme

$$I_\alpha^R \mu(x) = \int_0^R \frac{\mu(B(x,r))}{\mathbf{m}(B(x,r))}\,\mathrm{d}r^\alpha.$$

Rieszův potenciál míry s hustotou g vzhledem k $\mathbf{m}$ (tj. $d\mu = g d\mathbf{m}$) značíme $I_\alpha^R g$ (zápis $I_\alpha^R g$ má tedy smysl pro každou nezápornou $\mathbf{m}$-měřitelnou funkci g).

Zavádíme také maximální operátor

$$M_\alpha^R \mu(x) = \sup_{0<r<R} \frac{r^\alpha \mu(B(x,r))}{\mathbf{m}(B(x,r))}.$$

Maximální operátor míry s hustotou g vzhledem k $\mathbf{m}$ (tj. $d\mu = g d\mathbf{m}$) značíme $M_\alpha^R g$ (zápis M_α^R má tedy smysl pro každou nezápornou $\mathbf{m}$-měřitelnou funkci g).

Vynecháme-li horní index u symbolu I nebo M, předpokládáme automaticky, že je nekonečný, tj. $I_\alpha = I_\alpha^\infty$, $M_\alpha = M_\alpha^\infty$. U symbolu M_α^R také často vynecháváme dolní index, je-li $\alpha = 0$, tedy $M^R = M_0^R$ a $M = M_0 = M_0^\infty$.

Je-li Y metrický prostor, definujeme m-rozměrnou Hausdorffovu míru $\mathcal{H}_m$ na Y předpisem

$$\mathcal{H}_m(E) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}_m^\delta(E),$$

kde

$$\mathcal{H}_m^\delta(E) = 2^{-m}\alpha_m \inf\left\{\sum_j \operatorname{diam}^m(E_j) : \operatorname{diam}(E_j) \le \delta, E \subset \bigcup_j E_j\right\},$$

$$\alpha_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(1+m/2)}.$$

Na metrickém prostoru X definujeme také sférickou Hausdorffovu míru kodimenze q předpisem

$$\widehat{\mathcal{H}}_q(E) = \lim_{\delta\to 0+} \widehat{\mathcal{H}}_q^\delta(E),$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_q^\delta(E) = \inf\left\{\sum_j r_j^{-q}\,\mathbf{m}(B(x_j,r_j)) : r_j \le \delta, E \subset \bigcup_j B(x_j,r_j)\right\}.$$

Budeme využívat následující verzi Vitaliovy pokrývací věty, jejíž důkaz lze najít např. v [He, 1.2] nebo [F, 2.8.4-6] (obecnější verze).

Věta 2.1. (5r-pokrývací věta) *Nechť X je metrický prostor, $E \subset X$, $R > 0$ a $\mathcal{B}$ systém otevřených koulí v X, který pokrývá množinu E takový, že každá koule ze systému $\mathcal{B}$ má poloměr menší než R. Pak existuje podsystém $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ po dvou disjunktních koulí takový, že*

$$E \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} 5B.$$

Je-li prostor X separabilní, pak je podsystém $\mathcal{B}'$ nejvýše spočetný.

Poznamenejme, že druhá část tvrzení věty 2.1 je zřejmá, protože každý systém po dvou disjunktních otevřených koulí v separabilním metrickém prostoru je nejvýše spočetný. Jelikož v celé naší práci předpokládáme, že metrický prostor X je vybaven doubling mírou $\mathbf{m}$ a tudíž separabilní, budeme vždy větu 2.1 bez dalšího upozornění používat ve verzi pro separabilní prostory.

Nyní připomeneme některá tvrzení o bochnerovské integraci v Banachových prostorech. Více detailů lze najít např. v knize [DU]. Nechť $u : X \to \mathbb{B}$ je funkce. Řekneme, že u je jednoduchá funkce, existují-li po dvou disjunktní $\mathbf{m}$-měřitelné množiny $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ a vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{B}$ takové, že

$$u = \sum_{i=1}^n v_i \chi_{E_i}.$$

Řekneme, že funkce u má esenciálně separabilní obraz, pokud existuje $Z \subset X$, $\mathbf{m}(Z) = 0$ a pokud $u(X \setminus Z)$ je separabilní (vzhledem k topologii dané normou na prostoru $\mathbb{B}$) podmnožina $\mathbb{B}$. Řekneme, že funkce u je slabě $\mathbf{m}$-měřitelná, pokud pro každé $\Lambda \in \mathbb{B}^*$ je funkce $\Lambda \circ u : X \to \mathbb{R}$ $\mathbf{m}$-měřitelná ($\mathbb{B}^*$ zde značí prostor duální k prostoru $\mathbb{B}$). Řekneme, že funkce u je (silně) $\mathbf{m}$-měřitelná, pokud existují jednoduché funkce u_n takové, že $u_n \to u$ bodově $\mathbf{m}$-skoro všude. Podle následující věty lze $\mathbf{m}$-měřitelnost funkce u definovat několika dalšími způsoby:

Věta 2.2. *Nechť $u : X \to \mathbb{B}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*
(1) Funkce u je $\mathbf{m}$-měřitelná.
(2) Funkce u má esenciálně separabilní obraz a $u^{-1}(U)$ je $\mathbf{m}$-měřitelná podmnožina X pro každou otevřenou množinu $U \subset X$.
(3) Funkce u má esenciálně separabilní obraz a je slabě $\mathbf{m}$-měřitelná.

Tato věta je dobře známa (ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) je tvrzením Pettisovy věty, viz např. [DU, II.§1.2], implikace (2) $\Rightarrow$ (3) je triviální, implikace (1) $\Rightarrow$ (2) je snadné cvičení).

Řekneme, že funkce $u : X \to \mathbb{B}$ je bochnerovsky integrovatelná, existuje-li posloupnost jednoduchých funkcí $u_n : X \to \mathbb{B}$ takových, že $||u_n||_{\mathbb{B}} \in L_1(X)$, $||u - u_n||_{\mathbb{B}} \in L_1(X)$ a

$$\int_X ||u(x) - u_n(x)||_{\mathbb{B}} \, \mathrm{d}x \to 0 \text{ pro } n \to \infty. \tag{8}$$

Definujeme pak pro každou $\mathbf{m}$-měřitelnou podmnožinu $E \subset X$ (Bochnerův) integrál

$$\int_E u(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_E u_n(x) \, \mathrm{d}x,$$

kde integrál jednoduché funkce u_n je definovaný přirozeným způsobem. Je jednoduché ověřit, že tato definice nezávisí na volbě posloupnosti u_n splňující (8) a tedy že definice je korektní.

Platí následující charakterizace bochnerovsky integrovatelných funkcí (viz např. [DU, II.§2.2]).

Věta 2.3. *Nechť funkce $u : X \to \mathbb{B}$ je $\mathbf{m}$-měřitelná funkce. Pak u je bochnerovsky integrovatelná právě tehdy, když $||u||_{\mathbb{B}} \in L_1(X)$.*

Nechť $M \subset X$ je $\mathbf{m}$-měřitelná množina a $u : M \to \mathbb{R}$ integrovatelná funkce (vzhledem k míře $\mathbf{m}$). Definujeme

$$u_M = ⨍_M u(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbf{m}(M)} \int_M u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Je-li $u : M \to \mathbb{B}$ bochnerovsky integrovatelná funkce, definujeme $u_M = ⨍_M u(x) \, \mathrm{d}x$ také vztahem (9), přičemž integrál na pravé straně chápeme jako Bochnerův.

Nechť Y je metrický prostor, $\Omega \subset X$ otevřená množina a $u : \Omega \to Y$ $\mathbf{m}$-měřitelné zobrazení. Bod $y \in Y$ nazveme lebesgueovskou limitou funkce u v bodě $z \in \Omega$, pokud

$$\lim_{r \to 0+} ⨍_{B(z,r)} d_Y(u(x), y) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\operatorname*{L-lim}_{x \to z} u(x) = y.$$

Řekneme, že bod $z \in \Omega$ je lebesgueovským bodem zobrazení u, pokud

$$\operatorname*{L-lim}_{y \to z} u(y) = u(z).$$

Řekneme, že zobrazení u je lebesgueovsky precizní, pokud

$$\operatorname*{L-lim}_{x \to z} u(x) = u(z)$$

pro každé $z \in \Omega$, pro které lebesgueovská limita zobrazení u v bodě z existuje.

V celé práci bude C značit obecnou konstantu, používanou ke zjednodušení zápisu, která se může měnit výraz od výrazu, dokonce na témže řádku. Závislost konstanty C na dalších parametrech bude vždy jasně specifikována v jednotlivých tvrzeních.

2.2. Lorentzovy prostory

Distribuční funkcí $\mathbf{m}$-měřitelné funkce $u : X \to \mathbb{B}$ rozumíme funkci $u_* : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definovanou předpisem

$$u_*(s) = \mathbf{m}(\{||u||_{\mathbb{B}} > s\}),\ s > 0.$$

Nerostoucím přerovnáním funkce u rozumíme funkci $u^* : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definovanou předpisem

$$u^*(t) = \inf\{s > 0 : u_*(s) \le t\},\ t > 0.$$

Základní vlastností nerostoucího přerovnání $\mathbf{m}$-měřitelné funkce u je vztah

$$\mathcal{L}^1(\{u^* > s\}) = \mathbf{m}(||u||_{\mathbb{B}} > s\}), \quad s > 0,$$

kde $\mathcal{L}^1$ značí Lebesgueovu míru na intervalu $(0,\infty)$, viz např. [BS, kapitola II., (1.22)]. Funkce u^* je nerostoucí a pro každé $\alpha > 0$ platí $(u^\alpha)^* = (u^*)^\alpha$. Tyto a několik dalších základních vlastností jsou dokázány v [BS, II.1.7]. Dále definujeme funkci $u^{**}(t)$ vztahem

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

Poznamenejme, že funkce u^{**} není totéž, co $(u^*)^*$ (je zřejmě $(u^*)^* = u^*$ pro každou funkci u). Jelikož funkce u^* je nerostoucí, platí pro každé $t > 0$ nerovnost $u^{**}(t) \ge u^*(t)$.

Pro $p \in [1,\infty)$ a $q \in [1,\infty]$ definujeme Lorentzův prostor

$$L_{p,q}(X,\mathbb{B}) = \{u : X \to \mathbb{B} : u \text{ je } \mathbf{m}\text{-měřitelná a } ||u||_{p,q} < \infty\},$$

kde

$$\begin{aligned} ||u||_{p,q} &= \left(\int_0^\infty t^{q/p-1}(u^*(t))^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q},\ q < \infty, \\ ||u||_{p,\infty} &= \sup_{0<t<\infty} t^{1/p}(u^*(t)). \end{aligned} \tag{10}$$

Jednoduchým výpočtem ověříme, že pro každou $\mathbf{m}$-měřitelnou podmnožinu $E \subset X$ je

$$||\chi_E||_{p,q} = (\mathbf{m}(E))^{1/p}. \tag{11}$$

Definujme dále

$$\begin{aligned} ||u||_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty t^{q/p-1}(u^{**}(t))^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q},\ q < \infty, \\ ||u||_{(p,\infty)} &= \sup_{0<t<\infty} t^{1/p}(u^{**}(t)). \end{aligned}$$

Podle [BS, IV.4.5] pro $p > 1$ pro každou $\mathbf{m}$-měřitelnou funkci u platí nerovnosti

$$||u||_{p,q} \le ||u||_{(p,q)} \le \frac{p}{p-1}||u||_{p,q}. \tag{12}$$

Označme

$$\begin{aligned} ||u||_{L_{p,q}} &= ||u||_{p,q},\ p \ge q \ge 1, \\ ||u||_{L_{p,q}} &= ||u||_{(p,q)},\ 1 < p < q. \end{aligned} \tag{13}$$

Pak v případě $p > 1$ nebo $p = q = 1$ je podle [BS, IV.4.3 a IV.4.5] $||\cdot||_{L_{p,q}}$ norma na Lorentzově prostoru $L_{p,q}(X,\mathbb{B})$ přičemž $L_{p,q}(X,\mathbb{B})$ spolu s normou $||\cdot||_{L_{p,q}}$ tvoří Banachův prostor. Poznamenejme, že pro $p \in [1,\infty)$ je

$$L_{p,p}(X,\mathbb{B}) = L_p(X,\mathbb{B}) \text{ a } ||u||_{L_{p,p}} = ||u||_p.$$

Řekneme, že $u \in L^{\mathrm{loc}}_{p,q}(X,\mathbb{B})$, pokud pro každé $x \in X$ existuje otevřená koule $B = B(x,r)$ taková, že $u\chi_B \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$. V případě, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$, značíme Lorentzovy prostory zkráceně $L_{p,q}(X,\mathbb{R}) = L_{p,q}(X)$ a $L^{\mathrm{loc}}_{p,q}(X,\mathbb{R}) = L^{\mathrm{loc}}_{p,q}(X)$.

Všimněme si, že Lorentzovy prostory jsou definovány pouze pomocí informace o normě $||u||_{\mathbb{B}}$. Je tedy vidět, že $u \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$ právě tehdy, když $||u||_{\mathbb{B}} \in L_{p,q}(X)$ a

$$||u||_{L_{p,q}} = ||(||u||_{\mathbb{B}})||_{L_{p,q}}$$

pro každou funkci $u \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$.

Platí následující zobecnění věty o lebesgueovských bodech.

Věta 2.4. *Nechť $u \in L^{\mathrm{loc}}_1(X,\mathbb{B})$. Pak* $\mathbf{m}$*-skoro každý bod $x \in X$ je lebesgueovský bod funkce u. Speciálně, pro každý lebesgueovský bod x funkce u vektory $u_{B(x,r_n)}$ konvergují v normě prostoru $\mathbb{B}$ k vektoru $u(x)$ kdykoliv $r_n \to 0$.*

Důkaz. Připomeňme, že každá funkce $u \in L^{\mathrm{loc}}_1(X,\mathbb{B})$ má esenciálně separabilní obraz a že míra $\mathbf{m}$ je doubling. Důkaz pak lze vést obdobně, jako v [F, 2.9.9]. □

Lemma 2.5. *Nechť $p,q \in [1,\infty)$ a $u \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$. Pak*

$$||u||^q_{p,q} = p\int_0^\infty s^{q-1}(u_*(s))^{q/p}\,\mathrm{d}s.$$

Důkaz. Nahradíme-li funkci u její normou v prostoru $\mathbb{B}$ v každém bodě $x \in X$, levá ani pravá strana dokazované rovnosti se nezmění. Můžeme zřejmě bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$. V tomto případě je tvrzení dokázáno např. v [KKM, 2.1]. □

Lemma 2.6. *Předpokládejme, že $p \geq q$ a že* $\mathbf{m}$*-měřitelné podmnožiny E_j prostoru X jsou po dvou disjunktní. Nechť $u \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$. Pak*

$$\sum_j ||u\chi_{E_j}||^p_{L_{p,q}} \leq ||u||^p_{L_{p,q}}.$$

Důkaz. Znovu lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$. V tomto případě dokazované tvrzení plyne z tvrzení dokázaném v [KK, 5.1.3] (volbou $\xi = 1$; poznamenejme, že v knize [KK] je norma $||\cdot||_{L_{p,q}}$ definována vztahem dokázaným v lemmatu 2.5). Zmíněné tvrzení v knize [KK] je formulované pouze pro případ $X = \mathbb{R}^n$ a míry absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře, nicméně argumenty v důkazu lze použít i v obecném případě – v důkazu je podstatná pouze informace o distribučních funkcích funkcí u a $u\chi_{E_j}$. □

Následující lemma je standardní a dobře známé tvrzení o nerovnostech mezi normami v Lorentzových prostorech.

Lemma 2.7. *Nechť $1 \le p \le P < \infty$ a $1 \le q \le Q \le \infty$. Pak existuje $C > 0$ tak, že pro každou $\mathbf{m}$-měřitelnou množinu $M \subset X$, $\mathbf{m}(M) < \infty$ a pro každou funkci $u \in L_{p,q}(X, \mathbb{B})$ platí*

$$||u||_{L_{p,Q}} \le C||u||_{L_{p,q}}$$

a

$$\frac{1}{(\mathbf{m}(M))^{1/p}}||u\chi_M||_{L_{p,1}} \le C\frac{1}{(\mathbf{m}(M))^{1/P}}||u\chi_M||_{L_{P,\infty}},$$

kde konstanta C nezávisí na funkci u.

Důkaz. První nerovnost plyne z [BS, IV.4.2], z nerovnosti (12) a definice (13) normy $||\cdot||_{L_{p,q}}$. Druhá nerovnost je v poznámce za [BS. IV.4.2] formulována bez explicitní závislosti konstanty C na $\mathbf{m}(M)$. Pro úplnost tedy nerovnost ověříme jednoduchým výpočtem. Označme $v = u\chi_M$. Zřejmě pro $t > \mathbf{m}(M)$ je $v^*(t) = 0$. Podle (10), (12) a (13) dostáváme

$$\begin{aligned}||v||_{L_{p,1}} \le & C\int_0^{\mathbf{m}(M)} t^{1/p}v^*(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = C\int_0^{\mathbf{m}(M)} t^{1/P}v^*(t)\cdot t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{P}}\frac{\mathrm{d}t}{t} \le \\ \le & C||v||_{L_{P,\infty}}\int_0^{\mathbf{m}(M)} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{P}}\frac{\mathrm{d}t}{t} = C||v||_{L_{P,\infty}}\mathbf{m}(M)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{P}}.\end{aligned}$$

□

Následující lemma je dobře známý odhad, viz [BS, III.3.8].

Lemma 2.8. *Nechť $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(X)$, $u \ge 0$. Potom existuje konstanta $C > 0$ závislá pouze na doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ taková, že pro všechna $t > 0$ platí*

$$(Mu)^*(t) \le Cu^{**}(t).$$

Definice. Nechť $u : X \to \mathbb{B}$ je $\mathbf{m}$-měřitelná funkce. Definujeme operátor

$$N_p u(x) = (M(||u||_{\mathbb{B}}^p)(x))^{1/p}.$$

Lemma 2.9. *Nechť $1 \le p < m$. Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou funkci $u \in L_{m,1}(X, \mathbb{B})$ je $N_p u \in L_{m,1}(X)$ a*

$$||N_p u||_{L_{m,1}} \le C||u||_{L_{m,1}}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu pochází od L. Picka. Problém lze řešit podobně, jako v [CPSS, 4.1], kde je zkoumána obecnější nerovnost. V našem konkrétním případě vystačíme s jednodušším postupem. Podle lemmatu 2.8 je

$$\begin{aligned}(N_p u)^*(t) = & ((M||u||_{\mathbb{B}}^p)^{1/p})^*(t) = ((M||u||_{\mathbb{B}}^p)^*)^{1/p}(t) \le (C(||u||_{\mathbb{B}}^p)^{**})^{1/p}(t) \le \\ \le & C\left(\frac{1}{t}\int_0^t (u^*)^p(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{14}$$

S pomocí nerovnosti (14), vztahů (10), a (13), lemmatu 2.7 a Fubiniovy věty dostáváme

$$\begin{aligned}||N_pu||_{L_{m,1}} &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-1}(N_pu)^*(t)\,\mathrm{d}t \le C\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-1}\left(\frac{1}{t}\int_0^t (u^*(s))^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\mathrm{d}t = \\ &= C\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}-1}||u^*||_{L_p([0,t])}\,\mathrm{d}t \le C\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}-1}||u^*||_{L_{p,1}([0,t])}\,\mathrm{d}t = \\ &= C\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^t s^{\frac{1}{p}-1}u^*(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = C\int\limits_{\{(s,t):0<s<t\}} t^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}-1}s^{\frac{1}{p}-1}u^*(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= C\int_0^\infty s^{\frac{1}{p}-1}u^*(s)\left(\int_s^\infty t^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = C\int_0^\infty s^{\frac{1}{p}-1}s^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}}u^*(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= C\int_0^\infty s^{\frac{1}{m}-1}u^*(s)\,\mathrm{d}s = C||u||_{L_{m,1}}.\end{aligned}$$

□

Z lemmatu 2.9 dostáváme jako důsledek následující tvrzení.

Důsledek 2.10. *Nechť* $1 \le p < m$, $1 \le q \le m$. *Pak existuje konstanta* $C > 0$ *taková, že pro každou funkci* $u \in L_{m,q}(X, \mathbb{B})$ *je* $N_pu \in L_{m,q}(X)$ *a*

$$||N_pu||_{L_{m,q}} \le C||u||_{L_{m,q}}. \tag{15}$$

Důkaz. Nahradíme-li funkci $u : X \to \mathbb{B}$ její normou v prostoru $\mathbb{B}$, žádná ze stran nerovnosti (15) se nezmění. Můžeme tedy předpokládat, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ a že $u \ge 0$. Nejprve uvažume případ $q < m$. Podle Hölderovy nerovnosti a definice N_p je zřejmé, že $N_{p'}u(x) \ge N_pu(x)$ pro každé $x \in X$ kdykoliv $p' > p$. Odtud vidíme, že nerovnost (15) stačí dokázat pro $q \le p < m$. Jelikož $q < m$, z definice (10) a (13) normy $||\cdot||_{L_{m,q}}$ je zřejmé, že pro každou **m**-měřitelnou reálnou funkci g je

$$||g||^q_{L_{m,q}} = ||g^q||_{L_{m/q,1}}.$$

S pomocí lemmatu 2.9 (jelikož $1 \le p/q < m/q$) dostáváme

$$\begin{aligned}||N_pu||^q_{L_{m,q}} &= ||(Mu^p)^{1/p}||^q_{L_{m,q}} = ||(Mu^p)^{q/p}||_{L_{m/q,1}} = ||(M(u^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{q}{p}}||_{L_{m/q,1}} = \\ &= ||N_{\frac{p}{q}}u^q||_{L_{m/q,1}} \le C||u^q||_{L_{m/q,1}} = C||u||^q_{L_{m,q}},\end{aligned}$$

čímž je ověřena nerovnost (15). Zbývá případ $1 \le p < m = q$. Pak pro $p = 1$ je $N_pu = Mu$ a nerovnost (15) plyne přímo z dobře známé Hardyho-Littlewoodovy maximální věty (viz např. [BS, III.3.10] nebo [He, 2.2]). Pro $1 < p < m$ (s využitím tvrzení pro $p = 1$) dostáváme

$$||N_pu||^p_{L_m} = ||(Mu^p)^{1/p}||^p_{L_m} = ||Mu^p||_{L_{m/p}} \le C||u^p||_{L_{m/p}} = C||u||^p_{L_m}.$$

Tím jsme ověřili nerovnost (15) ve všech případech. □

3. Newtonovské prostory

3.1. Horní gradient

Křivkou γ v X rozumíme spojité zobrazení $\gamma : I \to X$, kde I je kompaktní reálný interval. Obraz $\gamma(I) =: |\gamma| \subset X$ nazýváme také křivkou v X. Koncovými body křivky $\gamma : I = [a, b] \to X$ rozumíme body $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Říkáme, že křivka γ je prostá, pokud zobrazení $\gamma : I \to X$ je prosté. Délkou křivky $\gamma : [a, b] \to X$ rozumíme číslo

$$l(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d_X(\gamma(a_{i-1}), \gamma(a_i)) : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b\right\}.$$

Pokud $l(\gamma) < \infty$, říkáme, že křivka γ je rektifikovatelná. Označme Γ_{rect} je množina všech nekonstantních prostých rektifikovatelných křivek v X. Nechť $E \subset X$. Symbolem Γ_E budeme značit množinu všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ takových, že $|\gamma| \cap E$ je neprázdná množina. Symbolem Γ_E^+ budeme značit množinu všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ takových, že $\mathcal{H}_1(|\gamma| \cap E) > 0$. Nechť $\gamma : I \to X$, $I = [a, b]$, $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$. Pak lze definovat rostoucí funkci $s_\gamma : I \to [0, l(\gamma)]$ předpisem

$$s_\gamma(c) = l(\gamma|_{[a,c]}), \ \ c \in [a, b].$$

Řekneme, že křivka $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ je parametrizovaná obloukem, pokud definiční obor křivky γ je interval $[0, l(\gamma)]$ a pokud zobrazení s_γ je identita na intervalu $[0, l(\gamma)]$. Je zřejmé, že každou křivku $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ lze parametrizovat obloukem, přesněji zobrazení

$$\gamma \circ s_\gamma^{-1}$$

je parametrizace obloukem křivky γ.

Definice. Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ a nechť $g : X \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Označme γ' parametrizaci obloukem křivky γ. Definujeme křivkový integrál $\int_\gamma g$ vztahem

$$\int_\gamma g = \int_0^{l(\gamma)} g \circ \gamma'(t)\, \mathrm{d}t,$$

má-li integrál na pravé straně smysl (tj. je-li kladná nebo záporná část funkce $g \circ \gamma'$ integrovatelná na intervalu $[0, l(\gamma)]$; všimněme si, že pro nezápornou borelovsky měřitelnou funkci g má integrál na pravé straně vždy smysl). Je zřejmé, že křivkový integrál je definovaný nezávisle na parametrizaci křivky γ. Poznamenejme, že podle [F, 2.10.13] platí

$$\int_\gamma g = \int_{|\gamma|} g(x)\, \mathrm{d}\mathcal{H}_1(x) \text{ a}$$

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 = \mathcal{H}_1(|\gamma|).$$

Pro více informací o křivkovém integrálu v metrických prostorech lze nahlédnout např. do knihy [F].

Definice. Nechť $\Gamma \subset \Gamma_{\text{rect}}$ je množina křivek v X. Definujeme $L_{p,q}$-modul množiny Γ, který značíme $\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma$, jako číslo

$$\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma = \inf_{\varrho} ||\varrho||^p_{L_{p,q}}$$

přičemž infimum je počítáno přes všechny nezáporné borelovsky měřitelné funkce ϱ takové, že pro všechny křivky $\gamma \in \Gamma$ platí

$$\int_\gamma \varrho \geq 1. \tag{16}$$

Nezáporné borelovsky měřitelné funkce ϱ, které nerovnost (16) splňují pro každou křivku $\gamma \in \Gamma$ se nazývají přípustné pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny Γ. Řekneme, že daná vlastnost je splněna pro $L_{p,q}$-skoro všechny křivky v X, pokud množina všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$, které danou vlastnost nesplňují má nulový $L_{p,q}$-modul. Přímo z definice modulu množiny je zřejmé, že kdykoliv je $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, tak je $\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_1 \leq \operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_2$.

Lemma 3.1. *Nechť $\Gamma_n \subset \Gamma_{\text{rect}}$, $n = 1, 2, \dots$ a $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Pak*

$$(\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_n)^{1/p}.$$

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce ϱ_n přípustná pro odhad modulu množiny Γ_n taková, že

$$||\varrho_n||_{L_{p,q}} \leq (\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_n)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Funkce $\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$ je zřejmě přípustná pro odhad modulu množiny Γ. Jelikož $|| \cdot ||_{L_{p,q}}$ je norma na prostoru $L_{p,q}(X)$, je

$$||\varrho||_{L_{p,q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\varrho_n||_{L_{p,q}}.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}(\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma)^{1/p} \leq ||\varrho||_{L_{p,q}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\varrho_n||_{L_{p,q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left((\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_n)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Mod}_{p,q}\Gamma_n)^{1/p} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostáváme výsledek. □

Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ je křivka a x a y dva různé body $|\gamma|$. Pak existují jednoznačně určené body t_x a t_y z definičního oboru křivky γ takové, že $\gamma(t_x) = x$ a $\gamma(t_y) = y$. Symbolem γ_{xy} budeme značit restrikci křivky γ na podinterval s krajními body t_x a t_y. Křivku γ_{xy} budeme nazývat podkřivkou křivky γ s krajními body x a y.

Nechť Y je metrický prostor a $I \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval. Řekneme, že zobrazení $v : I \to Y$ je absolutně spojité, pokud existuje funkce $g \in L_1(I)$ taková, že pro každý podinterval $[c, d] \subset I$ platí

$$d_Y(u(c), u(d)) \leq \int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Zobrazení $u : X \to Y$ nazveme absolutně spojitým na $L_{p,q}$-skoro každé křivce (značíme $u \in ACC_{p,q}$), zobrazení pokud $u \circ \gamma$ je absolutně spojité na $[0, l(\gamma)]$ pro $L_{p,q}$-skoro všechny křivky $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ v X, které jsou parametrizované obloukem.

Definice. Nechť Y je metrický prostor a nechť $u : X \to Y$ je zobrazení. Nezápornou borelovsky měřitelnou funkci ϱ nazveme horním gradientem zobrazení u, pokud pro všechny křivky $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ platí nerovnost

$$d_Y(u(x), u(y)) \leq \int_\gamma \varrho, \tag{17}$$

kde x a y jsou koncové body křivky γ. Řekneme, že ϱ je $L_{p,q}$-slabým horním gradientem (nebo jen slabým horním gradientem, pokud nemůže dojít k nedorozumění) zobrazení u, pokud je nerovnost (17) splněna pro $L_{p,q}$-skoro všechny křivky $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ v X. Nechť $\Omega \subset X$ je otevřená množina, $u : \Omega \to Y$ zobrazení a $g : \Omega \to \mathbb{R}$ nezáporná borelovsky měřitelná funkce. Řekneme, že g je horní (resp. $L_{p,q}$-slabý horní) gradient zobrazení u v Ω, pokud je nerovnost (17) splněna pro všechny (resp. $L_{p,q}$-skoro všechny) křivky $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ takové, že $|\gamma| \subset \Omega$.

Lemma 3.2. *Nechť Γ je množina křivek v X. Potom $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0$ právě tehdy, když existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce $\varrho \in L_{p,q}(X)$ taková, že pro každé $\gamma \in \Gamma$ platí*

$$\int_\gamma \varrho = \infty.$$

Důkaz. Nechť je $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0$. Potom pro každé n existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce ϱ_n taková, že

$$||\varrho_n||_{L_{p,q}} \leq 2^{-n}$$

a pro každé $\gamma \in \Gamma$ platí

$$\int_\gamma \varrho_n \geq 1.$$

Pak zřejmě funkce

$$\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$$

je nezáporná, borelovsky měřitelná a platí

$$\varrho \in L_{p,q}(X) \text{ a } \int_\gamma \varrho = \infty \text{ pro každou křivku } \gamma \in \Gamma.$$

Nechť naopak existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce $\varrho \in L_{p,q}(X)$ taková, že pro každou křivku $\gamma \in \Gamma$ platí

$$\int_\gamma \varrho = \infty.$$

Pak jsou zřejmě funkce $\varrho_n = 1/n \cdot \varrho$ přípustné pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny Γ a jelikož

$$||\varrho_n||_{L_{p,q}} \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

je zřejmě

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0.$$

□

Poznámka. Jednoduchým důsledkem lemmatu 3.2 je pozorování, má-li zobrazení u $L_{p,q}$-slabý horní gradient $\varrho \in L_{p,q}$ a je-li $\varepsilon > 0$, pak má zobrazení u také (silný) horní gradient $\varrho' \in L_{p,q}$ splňující

$$||\varrho'||_{L_{p,q}} \leq ||\varrho||_{L_{p,q}} + \varepsilon.$$

Lemma 3.3. *Nechť $u_n : X \to \mathbb{R}$ je posloupnost $\mathbf{m}$-měřitelných funkcí a nechť $g \in L_{p,q}(X)$ je jejich společný $L_{p,q}$-slabý horní gradient. Označme*

$$\begin{aligned} u(x) =& \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x), \\ E =& \{x \in X : u(x) = \infty\} \end{aligned}$$

a předpokládejme, že $\mathbf{m}(E) = 0$. Pak funkce g je také $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce u.

Důkaz. Nechť $\Gamma_n \subset \Gamma_{\text{rect}}$ je množina všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$, pro které neplatí nerovnost $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \int_\gamma g$ (kde x a y jsou koncové body křivky γ) a nechť $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$. Pak $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_n = 0$ pro každé n a podle lemmatu 3.1 je také $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0$. Nechť Γ_1 je množina křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$, které mají podkřivku v Γ. Pak každá funkce ϱ přípustná pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny Γ je přípustná i pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny Γ_1 a

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_1 \leq \operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0.$$

Nechť Γ_2 je množina všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ takových, že

$$\int_\gamma g = \infty.$$

Jelikož $g \in L_{p,q}(X)$, podle lemmatu 3.2 je $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_2 = 0$. Každá křivka $\gamma \in \Gamma_E^+$ protíná E v množině kladné jednodimenzionální Hausdorffovy míry a tedy funkce $\infty \cdot \chi_E$ je přípustná pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny Γ_E^+. Jelikož $\mathbf{m}(E) = 0$, je $||\infty \cdot \chi_E||_{L_{p,q}} = 0$ a $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_E^+ = 0$. Označme $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_E^+$. Pak podle lemmatu 3.1 je $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_0 = 0$. Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_0$ a nechť x a y jsou koncové body křivky γ. Poznamenejme nejdříve, že zřejmě také každá podkřivka křivky γ leží v množině $\Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_0$. Uvažme prvně případ $u(x) < \infty$. Pak pro každé n je

$$u_n(y) \leq u_n(x) + \int_\gamma g \leq u(x) + \int_\gamma g.$$

Přechodem k supremu přes všechna $n \in \mathbb{N}$ na levé straně dostáváme

$$u(y) \leq u(x) + \int_\gamma g < \infty$$

a odtud navíc

$$u(y) - u(x) \leq \int_\gamma g.$$

Jelikož již víme, že $u(y) < \infty$, můžeme stejnou úvahu provést se zaměněnými rolemi bodů x a y. Dostaneme $u(x) - u(y) \leq \int_\gamma g$ a dohromady

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g.$$

Ukážeme, že případ $u(x) = \infty$ není možný. Jelikož křivka γ protíná množinu E v množině nulové jednodimenzionální Hausdorffovy míry, existuje bod $z \in |\gamma| \setminus E$. Je tedy $u(z) < \infty$. Jelikož $\gamma_{xz} \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_0$ a $u(z) < \infty$, můžeme předchozí úvahu použít na křivku γ_{xz} a dostaneme $u(x) < \infty$. Tím je důkaz hotov. $\square$

3.2. Newtonovské prostory

Definice. Označme $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ množinu všech funkcí $u \in L_{p,q}(X,\mathbb{B})$, které mají $L_{p,q}$-slabý horní gradient $\varrho \in L_{p,q}(X)$.

Množina $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ je zřejmě vektorový prostor, protože jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $u_1, u_2 \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ po řadě s $L_{p,q}$-slabými horními gradienty ϱ_1 a ϱ_2, pak funkce $|\alpha|\varrho_1 + |\beta|\varrho_2$ je $L_{p,q}$-slabým horním gradientem funkce $\alpha u_1 + \beta u_2$. Pro funkci $u \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ označme

$$||u||_{\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}} = ||u||_{L_{p,q}} + \inf_{\varrho} ||\varrho||_{L_{p,q}},$$

kde infimum uvažujeme přes množinu všech $L_{p,q}$-slabých horních gradientů ϱ funkce u. (Podle poznámky za lemmatem 3.2 infimum vyjde stejně, uvažujeme-li ho přes množinu všech (silných) horních gradientů ϱ funkce u.) Není těžké si uvědomit, že $||\cdot||_{\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}}$ je seminorma na množině $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$.

Jsou-li $u, v \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$, označíme $u \sim v$, pokud $||u-v||_{\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}} = 0$. Je snadné pozorování, že $\sim$ je ekvivalence na množině $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$.

Definice. Newtonovským prostorem odpovídajícím prostoru $L_{p,q}(X,\mathbb{B})$ rozumíme normovaný lineární prostor $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})/\sim$ a značíme ho $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Tento prostor $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ je vybaven normou

$$||u||_{N^{1,L_{p,q}}} = ||u||_{\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}}.$$

V případě, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$, zapisujeme zkráceně $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{R}) = N^{1,L_{p,q}}(X)$. Jsou-li funkce u a v ve stejné třídě ekvivalence prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$, říkáme, že funkce v je reprezentantem funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$.

Tvrzení 3.4. *Je-li funkce $u \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$, potom $u \in ACC_{p,q}$.*

Důkaz. Z definice prostoru $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ víme, že funkce u má $L_{p,q}$-slabý horní gradient $\varrho \in L_{p,q}(X)$. Nechť Γ je množina všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{rect}}$, pro které neplatí nerovnost (17). Pak z definice $L_{p,q}$-slabého horního gradientu je zřejmě $\mathrm{Mod}_{p,q}\,\Gamma = 0$. Nechť Γ_1 je množina křivek $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{rect}}$ jejichž některá podkřivka leží v Γ. Pak každá funkce přípustná pro odhad $L_{p,q}$-modulu Γ je přípustná i pro odhad $L_{p,q}$-modulu Γ_1 a tedy

$$\mathrm{Mod}_{p,q}\,\Gamma_1 \le \mathrm{Mod}_{p,q}\,\Gamma = 0.$$

Nechť Γ_2 je množina křivek $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{rect}}$ takových, že

$$\int_\gamma \varrho = \infty.$$

Jelikož $\varrho \in L_{p,q}(X)$, je podle lemmatu 3.2 $\mathrm{Mod}_{p,q}\,\Gamma_2 = 0$. Celkem podle lemmatu 3.1 dostáváme $\mathrm{Mod}_{p,q}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$. Je-li $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{rect}} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, pak γ nemá žádnou podkřivku v Γ a tedy pro každé $x, y \in |\gamma|$ platí

$$||u(x) - u(y)||_{\mathbb{B}} \le \int_{\gamma_{xy}} \varrho < \infty.$$

Funkce u je tedy absolutně spojitá na každé křivce $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{rect}} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. $\square$

Lemma 3.5. *Nechť funkce $u \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ splňuje $||u||_{L_{p,q}} = 0$ (tj. $u(x) = 0$ pro* **m***-skoro všechna $x \in X$). Potom množina křivek*

$$\Gamma = \{\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} : u(x) \neq 0 \text{ pro některé } x \in |\gamma|\}$$

má nulový $L_{p,q}$-modul.

Důkaz. Množina $E = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$ má nulovou míru. Je

$$\Gamma = \Gamma_E = \Gamma_E^+ \cup (\Gamma_E \setminus \Gamma_E^+).$$

Pro množinu Γ_E^+ máme snadný odhad

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_E^+ \leq ||\infty \cdot \chi_E||^p_{L_{p,q}} = 0.$$

Křivky $\gamma \in (\Gamma_E \setminus \Gamma_E^+)$ protínají E v množině, která je neprázdná, ale jejíž $\mathcal{H}_1$ míra je nulová. Funkce u zřejmě není spojitá (a tím spíše ani absolutně spojitá) na žádné takové křivce γ. Podle tvrzení 3.4 je

$$\operatorname{Mod}_{p,q}(\Gamma_E \setminus \Gamma_E^+) = 0.$$

Celkem tedy s využitím lemmatu 3.1 dostáváme

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0.$$

□

Snadným důsledkem lemmatu 3.5 je následující tvrzení:

Důsledek 3.6. *Pokud u_1 a u_2 jsou funkce z $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ takové, že $||u_1 - u_2||_{L_{p,q}} = 0$ (tj. takové, že $u_1 = u_2$* **m***-skoro všude), pak u_1 a u_2 patří do stejné třídy ekvivalence v $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ (tj. $||u_1 - u_2||_{\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}} = 0$).*

Důkaz. Podle lemmatu 3.5 je funkce $g = 0$ $L_{p,q}$-slabým horním gradientem funkce $u_1 - u_2$. Je tedy

$$||u_1 - u_2||_{N^{1,L_{p,q}}} = 0.$$

□

Poznámka. Z důsledku 3.6 vidíme, že shodují-li se dvě funkce $u_1, u_2 \in N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ **m**-skoro všude v prostoru X, pak už nutně leží ve stejné třídě ekvivalence prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Důležitým předpokladem však bylo, že obě funkce u_1 a u_2 leží v prostoru $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Je-li $u_1 \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ a $u_2 = u_1$ **m**-skoro všude v X, pak nemáme zaručeno, že $u_2 \in \widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Funkce z prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ nelze měnit na libovolné množině nulové míry. Jak uvidíme níže, každé dvě funkce z dané třídy ekvivalence prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ se shodují na množině nulové kapacity (viz níže definice kapacity, důsledek 3.10 a poznámka za ním). Tato vlastnost tvoří dosti podstatný rozdíl newtonovských prostorů oproti klasicky definovaným Sobolevovým prostorům v případě $X = \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{B} = \mathbb{R}$. Definice newtonovských prostorů je v tomto smyslu restriktivnější.

Ve zbytku práce nebudeme explicitně rozlišovat mezi funkcemi z $\widetilde{N}^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ a jejich třídami ekvivalence v $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$.

Lemma 3.7. *Nechť $\{\varrho_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost borelovsky měřitelných funkcí v $L_{p,q}(X)$, která konverguje k 0 v $L_{p,q}$-normě. Pak existuje její podposloupnost $\{\varrho_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a množina $\Gamma \subset \Gamma_{\text{rect}}$ s nulovým $L_{p,q}$-modulem taková, že pro každou křivku $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma$ platí*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma \varrho_{i_k} = 0.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce ϱ_i jsou nezáporné. Z posloupnosti $\{\varrho_i\}$ vybereme podposloupnost (kterou budeme značit stejně), pro kterou platí

$$||\varrho_i||_{L_{p,q}} \le 2^{-i}.$$

Označme

$$\Gamma_{m,n} = \{\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} : \text{ existuje } i \ge m : \int_\gamma \varrho_i \ge 1/n\}.$$

Funkce

$$\varrho_{m,n} = n\left(\sum_{i=m}^{\infty} \varrho_i\right)$$

je zřejmě přípustná pro odhad $L_{p,q}$-modulu množiny $\Gamma_{m,n}$. Je tedy

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_{m,n} \le ||\varrho_{m,n}||_{L_{p,q}}^p \le n^p \left(\sum_{i=m}^{\infty} ||\varrho_i||_{L_{p,q}}\right)^p \le n^p 2^{-p(m-1)}. \tag{18}$$

Označme

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_{m,n}.$$

Z nerovnosti (18) a z lemmatu 3.1 je zřejmé, že

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma = 0.$$

Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma$. Pak zřejmě pro každé $n \ge 1$ existuje $m \ge 1$ takové, že $\gamma \notin \Gamma_{m,n}$. Pro každé $i \ge m$ tedy platí

$$\int_\gamma \varrho_i < 1/n.$$

Dokázali jsme z definice limity, že

$$\lim_{i\to\infty} \int_\gamma \varrho_i = 0.$$

□

Poznámka. Podle lemmatu 3.7 platí následující tvrzení: Je-li $\{\varrho_i\}_{i=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost nezáporných borelovsky měřitelných funkcí v $L_{p,q}(X)$ konvergující k ϱ v $L_{p,q}$-normě, pak existuje podposloupnost $\{\varrho_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že pro $L_{p,q}$-skoro všechny křivky $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma \varrho_{i_k} = \int_\gamma \varrho < \infty.$$

Definice. Nechť $E \subset X$ je množina. Definujeme množinu funkcí přípustných pro testování kapacity

$$\mathcal{P}_{p,q}(E) = \{u \in N^{1,L_{p,q}}(X), u(x) \geq 1 \text{ pro každé } x \in E\}$$

a definujeme kapacitu množiny $E \subset X$ vzhledem k prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X)$:

$$\operatorname{Cap}_{p,q} E = \inf_{u \in \mathcal{P}_{p,q}(E)} ||u||^p_{N^{1,L_{p,q}}}$$

(přičemž definujeme $\operatorname{Cap}_{p,q} E = \infty$, je-li $\mathcal{P}_{p,q}(E) = \emptyset$).

Poznámka. Přímo z definice kapacity je zřejmé, že je-li $E_1 \subset E_2$, pak $\operatorname{Cap}_{p,q} E_1 \leq \operatorname{Cap}_{p,q} E_2$. Dále je vidět, že je-li $\operatorname{Cap}_{p,q} E = 0$, je i $\mathbf{m}(E) = 0$. Pro každou funkci $u \in \mathcal{P}_{p,q}(E)$ je totiž (využíváme (11), (12) a (13))

$$||u||^p_{N^{1,L_{p,q}}} \geq ||u||^p_{L_{p,q}} \geq ||\chi_E||^p_{L_{p,q}} \geq C\,\mathbf{m}(E).$$

Lemma 3.8. *Nechť $E_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak*

$$(\operatorname{Cap}_{p,q} E)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p}.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} < \infty$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $u_n \in N^{1,L_{p,q}}(X)$ taková, že $u_n \in \mathcal{P}_{p,q}(E_n)$, $u_n \geq 0$ a

$$||u_n||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq (\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Nechť dále $g_n \geq 0$ je $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce u_n takový, že

$$||u_n||_{L_{p,q}} + ||g_n||_{L_{p,q}} \leq ||u_n||_{N^{1,L_{p,q}}} + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Označme $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pak g je společný $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkcí $v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Je zřejmě

$$\begin{aligned}||g||_{L_{p,q}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||g_n||_{L_{p,q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(||u_n||_{N^{1,L_{p,q}}} + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left((\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + 2\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + 2\varepsilon < \infty.\end{aligned}$$

Označme

$$u = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Jelikož

$$\begin{aligned}||u||_{L_{p,q}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{L_{p,q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left((\operatorname{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Cap} E_n)^{1/p} + \varepsilon < \infty,\end{aligned}$$

je zřejmě $\mathbf{m}(\{x \in X : u(x) = \infty\}) = 0$ a podle lemmatu 3.3 je g také $L_{p,q}$-slabým horním gradientem funkce u. Je zřejmě $u \geq 1$ na E. Dostáváme

$$\begin{aligned} ||u||_{N^{1,L_{p,q}}} &\leq ||u||_{L_{p,q}} + ||g||_{L_{p,q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (||u_n||_{L_{p,q}} + ||g_n||_{L_{p,q}}) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (||u_n||_{N^{1,L_{p,q}}} + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left((\mathrm{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + 2\frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + 2\varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Je tedy $u \in \mathcal{P}_{p,q}(E)$ a

$$(\mathrm{Cap}_{p,q} E)^{1/p} \leq ||u||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Cap}_{p,q} E_n)^{1/p} + 2\varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostáváme výsledek. □

Lemma 3.9. *Nechť $F \subset X$ je množina taková, že $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$. Pak*

$$\mathrm{Mod}_{p,q} \Gamma_F = 0.$$

Důkaz. Jelikož $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$, existuje pro každé $i > 0$ funkce $v_i \in N^{1,L_{p,q}}(X)$ taková, že $||v_i||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-i}$ a $v_i \geq 1$ na F. Funkce v_i má zřejmě horní gradient ϱ_i, který splňuje

$$||\varrho_i||_{L_{p,q}} \leq 2^{-i}.$$

Označme

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} |v_i|.$$

Je zřejmě $u_n \in N^{1,L_{p,q}}(X)$ pro každé n, $u_n(x)$ je rostoucí pro každé pevné $x \in X$ a pro $m \leq n$ je

$$||u_n - u_m||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||v_i||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-m} \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X)$ a tedy i v prostoru $L_{p,q}(X)$. Existuje tedy funkce $\tilde{u} \in L_{p,q}(X)$, ke které posloupnost u_n konverguje v $L_{p,q}$ normě a také bodově $\mathbf{m}$-skoro všude. Je zřejmě

$$||u_i - \tilde{u}||_{L_{p,q}} \leq 2^{-i}.$$

Označme

$$g_i = \sum_{k=1}^{i} \varrho_i.$$

Pak zřejmě g_i je horní gradient funkce u_i. Pro $m \leq n$ je

$$||g_n - g_m||_{L_{p,q}} \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||\varrho_i||_{L_{p,q}} \leq 2^{-m} \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy také cauchyovská v prostoru $L_{p,q}(X)$ a konverguje v $L_{p,q}$ normě i bodově $\mathbf{m}$-skoro všude k nezáporné borelovsky měřitelné funkci g. Definujme funkci

$$u(x) = \lim_{i\to\infty} u_i(x)$$

(jelikož posloupnost $u_i(x)$ je pro každé $x \in X$ rostoucí, limita – konečná či nekonečná – existuje pro každé $x \in X$). Jelikož $u_i(x) \to \tilde{u}(x)$ $\mathbf{m}$-skoro všude, je $u(x) = \tilde{u}(x)$ $\mathbf{m}$-skoro všude a tedy $u \in L_{p,q}(X)$. Označme

$$E = \{x \in X : u(x) = \infty\}.$$

Jelikož $u \in L_{p,q}(X)$, je zřejmě $\mathbf{m}(E) = 0$. Pro každé $x \in F$ je

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |v_i(x)| \geq n,$$

takže je zřejmě $F \subset E$. Označme Γ_1 množinu všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ takových, že $\int_\gamma g = \infty$ nebo

$$\lim_{i\to\infty} \int_\gamma g_i \neq \int_\gamma g.$$

Podle lemmatu 3.7 a poznámky za ním (uvědomíme-li si, že $||g - g_m||_{L_{p,q}} \leq 2^{-m}$) je $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_1 = 0$. Jelikož $\mathbf{m}(E) = 0$, je také $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_E^+ = 0$. Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_E^+)$ je libovolná křivka. Jelikož $\gamma \notin \Gamma_E^+$, existuje bod $y \in |\gamma|$ takový, že $y \notin E$ a tedy $u(y) < \infty$. Pro každý bod $x \in |\gamma|$ pak dostáváme

$$|u_i(x)| - |u_i(y)| \leq |u_i(x) - u_i(y)| \leq \int_\gamma g_i,$$

jelikož g_i je horní gradient funkce u_i. Je tedy

$$|u_i(x)| \leq |u_i(y)| + \int_\gamma g_i.$$

Uvážením limit na obou stranách a užitím faktu, že $y \notin E$ a $\gamma \notin \Gamma_1$ dostáváme

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_\gamma g < \infty.$$

Vidíme tedy, že $x \notin E$ a tedy $\gamma \notin \Gamma_E$. Ukázali jsme, že $\Gamma_E \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_E^+$ a je tedy

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_E = 0.$$

Jelikož $F \subset E$ a $\Gamma_F \subset \Gamma_E$, je i

$$\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_F = 0.$$

□

Snadným důsledkem lemmatu 3.9 je následující tvrzení:

Důsledek 3.10. *Nechť $u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ a nechť $\tilde{u} : X \to \mathbb{B}$ je funkce taková, že*

$$\operatorname{Cap}_{p,q}\{x \in X : u(x) - \tilde{u}(x) \neq 0\} = 0.$$

Pak $\tilde{u} \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ a $\tilde{u}$ je reprezentant funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$.

Důkaz. Označme $F = \{x \in X : u(x) - \tilde{u}(x) \neq 0\}$. Jelikož $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$, je i $\mathbf{m}(F) = 0$. Funkce $\tilde{u}$ je tedy $\mathbf{m}$-měřitelná a $||u - \tilde{u}||_{L_{p,q}} = 0$. Na každé křivce $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_F$ je funkce $u - \tilde{u}$ identicky nulová. Jelikož podle lemmatu 3.9 je $\mathrm{Mod}_{p,q} \Gamma_F = 0$, je zřejmě funkce $\varrho = 0$ je $L_{p,q}$-slabým horním gradientem funkce $u - \tilde{u}$. Je tedy $\tilde{u} \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ a

$$||u - \tilde{u}||_{N^{1,L_{p,q}}} = 0.$$

□

Poznámka. Tvrzení v důsledku 3.10 lze snadno obrátit. Je-li $u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ a je-li $\tilde{u}$ reprezentant funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ a

$$F = \{x \in X : u(x) \neq \tilde{u}(x)\},$$

pak $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$. Množinu F lze napsat jako sjednocení množin

$$F_n = \{x \in X : ||u(x) - \tilde{u}(x)||_{\mathbb{B}} \geq 1/n\},$$

přičemž je zřejmě $n||u(x) - \tilde{u}(x)||_{\mathbb{B}} \in \mathcal{P}_{p,q}(F_n)$ a tedy $\mathrm{Cap}_{p,q} F_n = 0$. Použitím lemmatu 3.8 dostáváme $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$.

Věta 3.11. *Prostor $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$ je Banachův.*

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$. Abychom ukázali, že tato posloupnost je konvergentní v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$, stačí ukázat, že některá její podposloupnost je konvergentní v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B})$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$||u_k - u_{k+1}||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-2k}$$

a

$$||\varrho_k||_{L_{p,q}} \leq 2^{-k},$$

kde ϱ_k je vhodný horní gradient funkce $u_k - u_{k+1}$. Označme

$$E_k = \{x \in X : ||u_k(x) - u_{k+1}(x)||_{\mathbb{B}} \geq 2^{-k}\}.$$

Je zřejmě $2^k ||u_k - u_{k+1}||_{\mathbb{B}} \in \mathcal{P}_{p,q}(E_k)$. Je tedy

$$(\mathrm{Cap}_{p,q} E_k)^{1/p} \leq 2^k ||u_k - u_{k+1}||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-k}.$$

Označíme-li $F_j = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k$, podle lemmatu 3.8 dostáváme

$$(\mathrm{Cap}_{p,q} F_j)^{1/p} \leq \sum_{k=j}^{\infty} (\mathrm{Cap}_{p,q} E_k)^{1/p} \leq 2^{-j+1}.$$

Pro množinu $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ tedy platí $\mathrm{Cap}_{p,q} F = 0$. Speciálně je také $\mathbf{m}(F) = 0$. Je-li $x \in X \setminus F$, existuje $j \geq 1$ takové, že $x \notin F_j = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k$, tedy pro $k \geq j$ platí nerovnost

$$||u_k(x) - u_{k+1}(x)||_{\mathbb{B}} \leq 2^{-k}.$$

Odtud vidíme, že pro každé pevné $x \in X \setminus F$ je posloupnost $\{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\mathbb{B}$. Pro každé $x \in X \setminus F$ proto můžeme definovat

$$u(x) = \lim_{i\to\infty} u_i(x)$$

(pro ostatní x můžeme funkci u dodefinovat libovolně, např. nulou). Poznamenejme, že posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je cauchyovská (a tedy konvergentní) také v prostoru $L_{p,q}(X,\mathbb{B})$ a jelikož $u_i(x) \to u(x)$ pro **m**-skoro všechna $x \in X$, je také

$$\lim_{i\to\infty} ||u - u_k||_{L_{p,q}} = 0.$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in X \setminus F$ zřejmě platí

$$u(x) = u_k(x) + \sum_{i=k}^{\infty}(u_{i+1}(x) - u_i(x)), \tag{19}$$

Označme

$$g_k = \sum_{i=k}^{\infty} \varrho_i.$$

Uvažujme libovolnou křivku $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_F$. Zřejmě $|\gamma|$ má s množinou F prázdný průnik a pro každé $x \in |\gamma|$ platí rovnost (19). Označíme-li x a y koncové body γ, dostáváme

$$(u(x) - u_k(x)) - (u(y) - u_k(y)) = \sum_{i=k}^{\infty}(u_{i+1}(x) - u_i(x)) - (u_{i+1}(y) - u_i(y))$$

a tedy

$$\begin{aligned}||(u(x) - u_k(x)) - (u(y) - u_k(y))||_{\mathbb{B}} \leq & \sum_{i=k}^{\infty} ||(u_{i+1}(x) - u_i(x)) - (u_{i+1}(y) - u_i(y))||_{\mathbb{B}} \leq \\ \leq & \sum_{i=k}^{\infty} \int_\gamma \varrho_i = \int_\gamma g_k.\end{aligned}$$

Jelikož podle lemmatu 3.9 je $\mathrm{Mod}_{p,q}\Gamma_F = 0$, vidíme, že funkce g_k je $L_{p,q}$-slabým horním gradientem funkce $u - u_k$. Ukázali jsme, že $u \in N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$. Dále platí

$$\begin{aligned}||u - u_k||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq & ||u - u_k||_{L_{p,q}} + ||g_k||_{L_{p,q}} \leq ||u - u_k||_{L_{p,q}} + \sum_{i=k}^{\infty} ||\varrho_i||_{L_{p,q}} \leq \\ \leq & ||u - u_k||_{L_{p,q}} + \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = ||u - u_k||_{L_{p,q}} + 2^{-k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Posloupnost $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ tedy konverguje v normě prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X,\mathbb{B})$ k funkci u. Tím je důkaz hotov. $\square$

3.3. Poincarého nerovnost

Definice. Nechť Y je metrický prostor a nechť $\mathcal{S}$ je třída zobrazení $u : \Omega \subset X \to Y$ definovaných na nějaké otevřené podmnožině $\Omega \subset X$. Řekneme, že trojice $(X, \mathbf{m}, Y)$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost pro třídu $\mathcal{S}$, pokud existují konstanty $P > 0$ a $\tau \geq 1$ takové, že pro každé $x \in X$, $r > 0$, pro každé zobrazení $u : B(x, \tau r) \to Y$, $u \in \mathcal{S}$ a pro každý jeho horní gradient $g : B(x, \tau r) \to \mathbb{R}$ v $B(x, \tau r)$, je splněna nerovnost

$$⨍_{B(x,r)} ⨍_{B(x,r)} d_Y(u(y), u(z))\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \leq Pr \frac{1}{\mathbf{m}(B(x, \tau r))^{1/p}} ||\varrho||_{L_{p,q}(B(x,\tau r))}. \tag{20}$$

Řekneme, že trojice $(X, \mathbf{m}, Y)$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost (bez udání konkrétní třídy funkcí), pokud ji splňuje pro třídu všech $\mathbf{m}$-měřitelných zobrazení. Řekneme, že dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost pro třídu zobrazení $\mathcal{S}$, pokud existují konstanty $P > 0$ a $\tau \geq 1$ takové, že pro každý metrický prostor Y trojice $(X, \mathbf{m}, Y)$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost s konstantami P a τ pro třídu funkcí $\mathcal{S}$. (Konstanty P a τ nezávisejí na prostoru Y).

Poznámka. Z poznámky za lemmatem 3.2 je zřejmé, že je-li pro zobrazení u nerovnost (20) splněna pro všechny horní gradienty ϱ zobrazení u v $B(x, \tau r)$, je splněna také pro všechny $L_{p,q}$-slabé horní gradienty ϱ zobrazení u v $B(x, \tau r)$. Definice $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnosti tedy zůstane ekvivalentní, zaměníme-li horní gradient $L_{p,q}$-slabým horním gradientem.

Poznámka. V případě $p = q$ zápis $(1, L_{p,p})$-Poincarého nerovnost zkracujeme na $(1, p)$-Poincarého nerovnost. Nerovnost (20) pak lze zapsat ve tvaru

$$⨍_{B(x,r)} ⨍_{B(x,r)} d_Y(u(y), u(z))\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \leq Pr \left(⨍_{B(x,\tau r)} \varrho^p(y)\, \mathrm{d}y \right)^{1/p}. \tag{21}$$

Snadným důsledkem lemmatu 2.7 je následující tvrzení:

Důsledek 3.12. *Nechť $1 \leq p \leq P < \infty$ a $1 \leq q \leq Q \leq \infty$. Splňuje-li trojice $(X, \mathbf{m}, Y)$ $(1, L_{p,Q})$-Poincarého nerovnost pro třídu zobrazení $\mathcal{S}$, pak splňuje i $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost pro třídu zobrazení $\mathcal{S}$. Splňuje-li $(1, L_{p,1})$-Poincarého nerovnost pro třídu zobrazení $\mathcal{S}$, pak splňuje i $(1, L_{P,\infty})$-Poincarého nerovnost pro třídu zobrazení $\mathcal{S}$.*

Následující věta snadno plyne z věty dokázané v [HKST, 4.3] a z lemmatu 3.19 formulovaného níže v oddílu 3.4.

Věta 3.13. *Nechť $1 \leq p < \infty$ a nechť trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost s konstantami P a τ. Pak dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost s konstantami P' a τ', které závisí pouze na konsantách P, τ, doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ a p.*

Je tedy vidět, že pro ověření platnosti $(1, p)$-Poincarého nerovnosti pro dvojici $(X, \mathbf{m})$ stačí zkoumat pouze reálné funkce na X.

Definice. Řekneme, že metrický prostor Y je omezeně kompaktní, pokud jeho uzavřené omezené množiny jsou kompaktní. Je vidět, že každý omezeně kompaktní metrický prostor Y je úplný. Řekneme, že metrický prostor Y je kvazikonvexní, pokud existuje konstanta $b \geq 1$ taková, že pro každé dva body $x, y \in Y$ existuje rektifikovatelná křivka $\gamma : I \to Y$ s koncovými body x a y taková, že $l(\gamma) \leq b d_Y(x, y)$.

Následující věta je dokázaná v [HeK1, 1.1].

Věta 3.14. *Nechť X je omezeně kompaktní kvazikonvexní metrický prostor. Pak trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost pro třídu všech lipschitzovských zobrazení právě tehdy, když ji splňuje pro třídu všech měřitelných zobrazení. Konstanty vystupující v jednotlivých $(1, p)$-Poincarého nerovnostech závisejí pouze na ostatních těchto konstantách, na doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ a na konstantě p.*

Poznámka. Podle věty 3.14 lze tedy v jisté třídě metrických prostorů X testovat platnost $(1, p)$-Poincarého nerovnosti pro trojici $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ pouze pomocí lipschitzovských zobrazení. Pomocí věty 3.13 dostáváme analogické tvrzení pro platnost $(1, p)$-Poincarého nerovnosti pro dvojici $(X, \mathbf{m})$, tedy nezávisle na cílovém prostoru.

Následující věta je dokázaná v [KZ, 1.0.1].

Věta 3.15. *Nechť metrický prostor X je úplný, $p > 1$ a nechť trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost pro třídu všech lipschitzovských zobrazení s konstantami P a τ. Potom existují konstanty $P' > 0$, $\tau' \geq 1$ a $\varepsilon > 0$ závislé pouze na konstantách P, τ, p a na doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ takové, že trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ splňuje $(1, p - \varepsilon)$-Poincarého nerovnost pro třídu všech lipschitzovských zobrazení s konstantami P' a τ'.*

Poznámka. V [KZ] užívají odlišnou definici $(1, p)$-Poincarého nerovnosti, než v této práci (roli horního gradientu hraje lokální lipschitzovská konstanta zobrazení u). Nicméně ukazují, že jejich definice se shoduje s naší v případě, že metrický prostor X je úplný, viz [KZ, 1.2]. Při definici z [KZ] zůstane věta 3.15 v platnosti i bez předpokladu úplnosti metrického prostoru X. V našem případě je však tento předpoklad nezbytný.

Je-li metrický prostor X omezeně kompaktní a kvazikonvexní, kombinováním tvrzení vět 3.13, 3.14 a 3.15 dostáváme následující větu.

Věta 3.16. *Nechť X je omezeně kompaktní kvazikonvexní metrický prostor a nechť $p > 1$. Nechť dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost s konstantami P a τ. Pak existují konstanty $\varepsilon > 0$, P' a τ' závislé pouze na konstantách P, τ, doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ a na konstantě p takové, že dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1, p - \varepsilon)$-Poincarého nerovnost s konstantami P' a τ'.*

3.4. Hustota lipschitzovských funkcí

Definice. Nechť $u : X \to \mathbb{B}$ je $\mathbf{m}$-měřitelná funkce. Definujeme centrovaný a necentrovaný maximální operátor funkce u příslušný prostoru $L_{p,q}$ jako

$$M(u, L_{p,q}, x) = \sup_{r>0} \frac{||u\chi_{B(x,r)}||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B(x,r))},$$
$$\widetilde{M}(u, L_{p,q}, x) = \sup_{B:x\in B} \frac{||u\chi_B||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B)}.$$

Poznámka. Tato definice není ve sporu s definicí uvedenou ve 2. kapitole, pouze ji rozšiřuje.

Lemma 3.17. *Nechť $u \in L_{p,q}(X, \mathbb{B})$. Pak*

$$M(u, L_{p,q}, x) \le \widetilde{M}(u, L_{p,q}, x) \le CM(u, L_{p,q}, x)$$

a pro $p \ge q$ je

$$\lim_{s\to\infty} s\,\mathbf{m}(\{x : M(u, L_{p,q}, x) > s\}) = 0.$$

Důkaz. Nerovnost $M(u, L_{p,q}, x) \le \widetilde{M}(u, L_{p,q}, x)$ je zřejmá z definice. Pro důkaz druhé nerovnosti si uvědomme, že každá koule $B = B(z, r) : x \in B$ je obsažena v kouli $B' = B(x, 2r)$. Jelikož míra $\mathbf{m}$ je doubling a $B' \subset 3B$, dostáváme nerovnost

$$\frac{||u\chi_B||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B)} \le \frac{\mathbf{m}(B')}{\mathbf{m}(B)} \cdot \frac{||u\chi_{B'}||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B')} \le C\frac{||u\chi_{B'}||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B')} \le CM(u, L_{p,q}, x).$$

Přechodem k supremu přes všechny koule B, $x \in B$ na levé straně nerovnosti dostáváme

$$\widetilde{M}(u, L_{p,q}, x) \le CM(u, L_{p,q}, x).$$

Tím je dokázáno první tvrzení. Pro důkaz druhého tvrzení zvolme pevně $R > 0$ a označme

$$M^R(u, L_{p,q}, x) = \sup_{r\in(0,R)} \frac{||u\chi_{B(x,r)}||^p_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B(x,r))},$$
$$G^R_s = \{x : M^R(u, L_{p,q}, x) > s\},$$
$$G_s = \{x : M(u, L_{p,q}, x) > s\}.$$

Pro každý bod $x \in G^R_s$ najdeme kouli $B_x = B(x, r_x)$, $r_x \in (0, R)$ takovou, že

$$||u\chi_{B_x}||^p_{L_{p,q}} \ge s\,\mathbf{m}(B_x).$$

Podle věty 2.1 vybereme ze systému koulí $\{B_x : x \in G^R_s\}$ nejvýše spočetný podsystém po dvou disjunktních koulí $\{B_i = B(x_i, r_i) : i \in I\}$ takový, že systém koulí $\{B(x_i, 5r_i) : i \in I\}$ pokrývá G^R_s. Označme ještě

$$H^R_s = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Dostáváme (v poslední nerovnosti využíváme lemma 2.6)

$$\begin{aligned} s\,\mathbf{m}(G_s^R) \leq & s\sum_{i\in I}\mathbf{m}(B(x_i,5r_i)) \leq Cs\sum_{i\in I}\mathbf{m}(B_i) \leq C\sum_{i\in I}||u\chi_{B_i}||_{L_{p,q}}^p \leq \\ \leq & C||u\chi_{H_s^R}||_{L_{p,q}}^p. \end{aligned} \tag{22}$$

Z nerovnosti (22) navíc máme

$$s\,\mathbf{m}(H_s^R) = s\sum_{i\in I}\mathbf{m}(B_i) \leq ||u\chi_{H_s^R}||_{L_{p,q}}^p \leq ||u||_{L_{p,q}}^p. \tag{23}$$

Definujme funkci $v_s : (0,\infty) \to (0,\infty)$ předpisem

$$v_s(t) = \min\left\{u_*(t), \frac{||u||_{L_{p,q}}^p}{s}\right\}.$$

Pak z nerovnosti (23) vyplývá

$$(u\chi_{H_s^R})_* \leq v_s$$

a podle lemmatu 2.5 je

$$||u\chi_{H_s^R}||_{L_{p,q}}^q = p\int_0^\infty t^{q-1}((u\chi_{H_s^R})_*(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t \leq p\int_0^\infty t^{q-1}(v_s(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Z nerovnosti (22) a (24) dostáváme

$$s\,\mathbf{m}(G_s^R) \leq C\left(\int_0^\infty t^{q-1}(v_s(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t\right)^{p/q}. \tag{25}$$

Jelikož $\mathbf{m}(G_s) = \sup_{R>0}\mathbf{m}(G_s^R)$ a jelikož pravá strana nerovnosti (25) nezávisí na R, dostáváme

$$s\,\mathbf{m}(G_s) \leq C\left(\int_0^\infty t^{q-1}(v_s(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t\right)^{p/q}. \tag{26}$$

Funkce v_s z definice bodově konvergují k nulové funkci pro $s \to \infty$. Jelikož $v_s(t) \leq u_*(t)$ pro každé s a t a jelikož podle lemmatu 2.5 je

$$\int_0^\infty t^{q-1}(u_*(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t = ||u||_{L_{p,q}}^q < \infty,$$

je funkce $t^{q-1}(u_*(t))^{q/p}$ společnou integrovatelnou majorantou funkcí $t^{q-1}(v_s(t))^{q/p}$ na intervalu $(0,\infty)$ a podle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty t^{q-1}(v_s(t))^{q/p}\,\mathrm{d}t = 0,$$

což spolu s nerovností (26) dává

$$\lim_{s\to\infty} s\,\mathbf{m}(G_s) = 0.$$

□

Lemma 3.18. *Předpokládejme, že $u : X \to \mathbb{B}$ je $ACC_{p,q}$ funkce, pro kterou existuje otevřená množina $O \subset X$ taková, že $u = 0$ **m**-skoro všude v množině $X \setminus O$. Pak je-li g horní gradient funkce u, je i $g\chi_O$ $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce u.*

Důkaz. Označme

$$E = \{x \in O : u(x) \neq 0\}.$$

Pak $\mathbf{m}(E) = 0$. Je tedy $\mathrm{Mod}_{p,q}(\Gamma_E^+) = 0$ (funkce $\infty \cdot \chi_E$ je přípustná pro odhad $L_{p,q}$-modulu této množiny). Označme Γ_0 množinu všech křivek $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}}$ na kterých není u absolutně spojitá. Je také $\mathrm{Mod}_{p,q}\Gamma_0 = 0$ a podle lemmatu 3.1 je $\mathrm{Mod}_{p,q}(\Gamma_E^+ \cup \Gamma_0) = 0$. Nechť křivka $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus (\Gamma_E^+ \cup \Gamma_0)$ spojuje dva body $x, y \in X$. Pokud celá křivka γ leží v množině $O \cup E$, pak zřejmě

$$||u(x) - u(y)||_{\mathbb{B}} \leq \int_\gamma g = \int_\gamma g\chi_O$$

(poslední rovnost plyne z toho, že γ protíná množinu E pouze v $\mathcal{H}_1$-nulové množině). Pokud body x ani y neleží v množině $O \cup E$, pak jednoduše $u(x) = u(y) = 0$ a

$$||u(x) - u(y)||_{\mathbb{B}} = 0 \leq \int_\gamma g\chi_O.$$

Zbývá případ, kdy $x \in O \cup E$ a křivka γ neleží celá v $O \cup E$. Množina $(u \circ \gamma)^{-1}(0)$ je kompaktní podmnožinou definičního oboru $[a, b]$ křivky γ a má tedy dolní mez a_0 a horní mez b_0 přičemž $u \circ \gamma(a_0) = u \circ \gamma(b_0) = 0$. Je tedy

$$||u(x) - u(y)||_{\mathbb{B}} \leq ||u(x) - 0||_{\mathbb{B}} + ||0 - u(y)||_{\mathbb{B}} \leq \int_{\gamma|_{[a,a_0]}} g + \int_{\gamma|_{[b_0,b]}} g \leq \int_\gamma g\chi_0$$

jelikož křivky $\gamma|_{[a,a_0]}$ a $\gamma|_{[b_0,b]}$ protínají $E \cup (X \setminus O)$ jen v $\mathcal{H}_1$-nulové množině. Ve všech třech případech jsme dokázali požadovanou nerovnost. $\square$

Definice. Nechť Y je metrický prostor. Symbolem $\mathbb{B}(Y)$ budeme značit Banachův prostor všech omezených funkcí $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ vybavený supremovou normou

$$||\varphi||_{\mathbb{B}(Y)} = \sup_{y \in Y} |\varphi(y)|.$$

Jako dobře známý fakt uvádíme platnost následujícího lemmatu.

Lemma 3.19. *Každý metrický prostor Y lze isometricky vnořit do Banachova prostoru $\mathbb{B}(Y)$.*

Poznámka. Nechť $y_0 \in Y$. Jako vhodné isometrické zobrazení v lemmatu 3.19 může posloužit např zobrazení $\Phi_{y_0} : Y \to \mathbb{B}(Y)$ které prvku $y \in Y$ přiřadí funkci $\varphi_y : Y \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\varphi_y(z) = d_Y(y, z) - d_Y(y_0, z), \ z \in Y.$$

Zobrazení Φ_{y_0} budeme dále nazývat kanonickým vnořením metrického prostoru Y do Banachova prostoru $\mathbb{B}(Y)$ (příslušným bodu y_0). Je-li metrický prostor Y separabilní, pak lze Y obdobným způsobem isometricky vnořit do separabilního Banachova prostoru $\mathbb{B}(H)$, kde H je hustá spočetná podmnožina Y. Prostor $\mathbb{B}(H)$ je zřejmě isomorfní separabilnímu prostoru l_∞.

Lemma 3.20. *Nechť Y je metrický prostor, $M \subset X$ a $L \geq 0$. Nechť $u : M \to \mathbb{B}(Y)$ je L-lipschitzovské zobrazení. Pak existuje L-lipschitzovské zobrazení $\tilde{u} : X \to \mathbb{B}(Y)$, které rozšiřuje u, tj. $u = \tilde{u}|_M$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že množina M je neprázdná. Pro případ L-lipschitzovských funkcí $u : M \to \mathbb{R}$ je existence L-lipschitzovského rozšíření u na celý prostor X dobře známa (viz [MS]). V našem případě nejdříve zvolme pevné $y \in Y$. Pak funkce $u_y : M \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$u_y(x) = u(x)(y)$$

je zřejmě L-lipschitzovská a tedy existuje její L-lipchitzovské rozšíření $\tilde{u}_y : X \to \mathbb{R}$. Definujeme-li zobrazení $\tilde{u}$, které prvku $x \in X$ přiřadí funkci $\varphi_x : Y \to \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$\varphi_x(y) = \tilde{u}_y(x),$$

lze velmi jednoduše přímo z definic ověřit, že $\tilde{u}$ zobrazuje X do $\mathbb{B}(Y)$ a je hledaným L-lipschitzovským rozšířením funkce u. $\square$

Lemma 3.21. *Nechť Y je metrický prostor, $L, T \geq 0$ a nechť $u : X \to \mathbb{B}(Y)$ je L-lipschitzovské zobrazení. Pak zobrazení $\tilde{u}$ definované předpisem*

$$\tilde{u}(x)(y) = \max\{-T, \min\{T, u(x)(y)\}\}$$

je také L-lipschitzovským zobrazením z X do $\mathbb{B}(Y)$.

Důkaz. Jsou-li $x, x' \in X$ a $y \in Y$, pak nerovnosti

$$|\tilde{u}(x)(y)| \leq |u(x)(y)|,$$
$$|\tilde{u}(x)(y) - \tilde{u}(x')(y)| \leq |u(x)(y) - u(x')(y)|.$$

jsou zřejmé z definice zobrazení $\tilde{u}$. Odtud snadno plyne výsledek. $\square$

Věta 3.22. *Nechť Y je metrický prostor a nechť $p \geq q$. Nechť $(X, \mathbf{m}, \mathbb{B}(Y))$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost. Pak množina lipschitzovských funkcí $X \to \mathbb{B}(Y)$ je hustá v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$.*

Důkaz. Nechť u je funkce z $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ a nechť $g \in L_{p,q}(X)$ je její horní gradient. Označme

$$E_\lambda = \{x \in X : \widetilde{M}(g, L_{p,q}, x) > \lambda^p\}$$

(E_λ je zřejmě otevřená množina). Podle lemmatu 3.17 je

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^p \cdot \mathbf{m}(E_\lambda) = 0.$$

Nechť $x \in X \setminus E_\lambda$. Jelikož $(X, \mathbf{m}, \mathbb{B}(Y))$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost, pro každé $r > 0$ je

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} ||u - u_{B(x,r)}||_{\mathbb{B}(Y)} &= \fint_{B(x,r)} \Big|\Big| \fint_{B(x,r)} u(z) - u(y)\,\mathrm{d}y \Big|\Big|_{\mathbb{B}(Y)} \mathrm{d}z \leq \\
&\leq \fint_{B(x,r)} \fint_{B(x,r)} ||u(z) - u(y)||_{\mathbb{B}(Y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leq \\
&\leq Cr \frac{||g\chi_{B(x,\tau r)}||_{L_{p,q}}}{\mathbf{m}(B(x,\tau r))^{1/p}} \leq Cr(\widetilde{M}(g, L_{p,q}, x))^{1/p} \leq Cr\lambda.
\end{aligned}$$

Pro $s \in [r/2, r]$ dostáváme

$$\begin{aligned}||u_{B(x,s)} - u_{B(x,r)}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq & \fint_{B(x,s)} ||u - u_{B(x,r)}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \\ \leq & \frac{\mathbf{m}(B(x,r))}{\mathbf{m}(B(x,s))} \fint_{B(x,r)} ||u - u_{B(x,r)}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq C\lambda r.\end{aligned} \tag{27}$$

Pro obecné $s \in (0, r)$ najdeme $k \geq 1$ takové, že $2^{-k}r \leq 2s < 2^{-k+1}r$. Dostáváme

$$\begin{aligned}||u_{B(x,s)} - u_{B(x,r)}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq & ||u_{B(x,s)} - u_{B(x,2^{-k}r)}||_{\mathbb{B}(Y)} + \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} ||u_{B(x,2^{-i-1}r)} - u_{B(x,2^{-i}r)}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq C\lambda \sum_{i=0}^{k} 2^{-i}r \leq C\lambda r.\end{aligned}$$

Pro libovolnou posloupnost $r_i \searrow 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, vidíme, že posloupnost $u_{B(x,r_i)}$ je cauchyovská v $\mathbb{B}(Y)$ a tedy má limitu. Pro každé $x \in X \setminus E_\lambda$ můžeme definovat

$$u_\lambda(x) = \lim_{r \to \infty} u_{B(x,r)}.$$

Poznamenejme, že pro každý lebesgueovský bod $x \in X \setminus E_\lambda$ funkce u je $u_\lambda(x) = u(x)$. Podle věty 2.4 tedy rovnost $u_\lambda(x) = u(x)$ platí $\mathbf{m}$-skoro všude v množině $X \setminus E_\lambda$. Pro body $x, y \in X \setminus E_\lambda$ uvažujme následující posloupnost koulí $\{B_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$:

$$B_i = B(x, 2^{1+i} d_X(x,y)),\ i \leq 0, \quad B_i = B(y, 2^{1-i} d_X(x,y)),\ i > 0.$$

Pro každé $i \in \mathbb{Z}$ platí

$$||u_{B_i} - u_{B_{i+1}}|| \leq C\lambda \frac{d_X(x,y)}{2^{|i|}}, \tag{28}$$

přičemž konstanta C nezávisí na i. Pro $i \neq 0$ plyne (28) přímo ze vztahu (27). Pro $i = 0$ lze (28) dokázat stejně jako vztah (27), jen si je potřeba uvědomit, že $B(x, 2d_X(x,y)) \subset B(y, 3d_X(x,y))$ a

$$\frac{\mathbf{m}(B(x, 2d_X(x,y)))}{\mathbf{m}(B(y, d_X(x,y))} \leq \frac{\mathbf{m}(B(y, 3d_X(x,y))}{\mathbf{m}(B(y, d_X(x,y)))} \leq D^2.$$

Z definice funkce u_λ a vztahu (28) dostáváme

$$||u_\lambda(x) - u_\lambda(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} ||u_{B_i} - u_{B_{i+1}}||_{\mathbb{B}(Y)} \leq C\lambda d_X(x,y).$$

Ukázali jsme, že funkce u_λ je $C\lambda$-lipschitzovská na uzavřené množině $X \setminus E_\lambda$. Ukážeme, že pro dostatečně velká λ je funkce $||u_\lambda(x)||_{\mathbb{B}(Y)}$ na množině $X \setminus E_\lambda$ shora omezená konstantou $2C\lambda$. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není. Připomeňme, že podle vztahu (7) je

$$C_1 = \inf_{x \in X} \mathbf{m}(B(x,1)) > 0.$$

Zvolme λ dostatečně velké tak, aby $\mathbf{m}(E_\lambda) < C_1/2$ a aby navíc platila nerovnost $\lambda > (2/C_1)^{1/p} \frac{||u||_{L_{p,q}}}{C}$. Existuje tedy nějaké $z \in X \setminus E_\lambda$ takové, že $u_\lambda(z) > 2C\lambda$. Jelikož funkce u_λ je $C\lambda$-lipschitzovská na množině $X \setminus E_\lambda$, platí pro každé $x \in B(z,1) \setminus E_\lambda$ nerovnost

$$||u_\lambda(x)||_{\mathbb{B}(Y)} > C\lambda.$$

Jelikož $\mathbf{m}(B(z,1)) \geq C_1$, $\mathbf{m}(E_\lambda) < C_1/2$ a $u_\lambda = u$ $\mathbf{m}$-skoro všude v množině $X \setminus E_\lambda$, dostáváme s pomocí (11)

$$||u||_{L_{p,q}} \geq ||u\chi_{B(z,1)\setminus E_\lambda}||_{L_{p,q}} = ||u_\lambda \chi_{(B(z,1)\setminus E_\lambda)}||_{L_{p,q}} \geq C\lambda \cdot (C_1/2)^{1/p} > ||u||_{L_{p,q}}.$$

Tím jsme dostali kýžený spor.

Funkci u_λ tedy můžeme podle lemmatu 3.20 a lemmatu 3.21 rozšířit na funkci $\tilde{u}_\lambda : X \to \mathbb{B}(Y)$ tak, aby $\tilde{u}_\lambda$ zůstala $C\lambda$-lipschitzovská a aby $||\tilde{u}_\lambda(x)||_{\mathbb{B}} \leq 2C\lambda$ na celém X.

Nyní dostáváme

$$\begin{aligned} ||u - \tilde{u}_\lambda||_{L_{p,q}} =&||(u - \tilde{u}_\lambda)\chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} \leq ||u\chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} + ||\tilde{u}_\lambda \chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} \leq \\ \leq&||u\chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} + 2C\lambda\, \mathbf{m}(E_\lambda)^{1/p} \to 0 \text{ pro } \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\tilde{u}_\lambda \xrightarrow{L_{p,q}} u$ pro $\lambda \to \infty$. Podle tvrzení 3.4 je $u \in ACC_{p,q}$. Je také $\tilde{u}_\lambda \in ACC_{p,q}$, jelikož funkce $\tilde{u}_\lambda$ je lipschitzovská. Navíc funkce $u - \tilde{u}_\lambda$ nabývá nenulových hodnot pouze v množině $E_\lambda \cup L$, kde L je množina nelebesgueovských bodů funkce u, $\mathbf{m}(L) = 0$. Připomeňme, že množina E_λ je otevřená. Odtud s pomocí lemmatu 3.18 vidíme, že funkce $(C\lambda + g)\chi_{E_\lambda}$ je $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce $u - \tilde{u}_\lambda$. Funkce $u - \tilde{u}_\lambda$ a také $\tilde{u}_\lambda$ jsou tedy v $N^{1,L_{p,q}}(X)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} ||C\lambda\chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} &= C\lambda(\mathbf{m}(E_\lambda))^{1/p} \to 0 \text{ pro } \lambda \to \infty. \\ ||g\chi_{E_\lambda}||_{L_{p,q}} &\to 0 \text{ pro } \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že lipschitzovské funkce $\tilde{u}_\lambda$ konvergují v normě $N^{1,L_{p,q}}(X)$ k funkci u pro $\lambda \to \infty$. □

Věta 3.23. *Nechť Y je metrický prostor, $p \geq q$, $u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ a nechť trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{B}(Y))$ splňuje $(1, L_{p,q})$-Poincarého nerovnost. Pak existuje borelovsky měřitelná funkce $\tilde{u}$ která je reprezentantem funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$.*

Důkaz. Podle věty 3.22 existuje posloupnost $u_k \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ lipschitzovských funkcí, které konvergují k u v normě prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$. Navíc můžeme předpokládat

$$\begin{aligned} ||u - u_k||_{N^{1,L_{p,q}}} <&2^{-2k}, \\ ||u_k - u_{k+1}||_{N^{1,L_{p,q}}} <&2^{-2k}. \end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned} E_k =&\{x \in X : ||u(x) - u_k(x)||_{\mathbb{B}(Y)} > 2^{-k}\}, \\ G_k =&\{x \in X : ||u_k(x) - u_{k+1}(x)||_{\mathbb{B}(Y)} > 2^{-k}\}. \end{aligned}$$

Jelikož funkce $u_k - u_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou spojité, jsou množiny G_k otevřené. Je zřejmě

$$\begin{aligned} 2^k||u - u_k||_{\mathbb{B}(Y)} \in&\mathcal{P}_{p,q}(E_k), \\ 2^k||u_k - u_{k+1}||_{\mathbb{B}(Y)} \in&\mathcal{P}_{p,q}(G_k). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} (\mathrm{Cap}_{p,q} E_k)^{1/p} \leq&2^k||u - u_k||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-k}, \\ (\mathrm{Cap}_{p,q} G_k)^{1/p} \leq&2^k||u_k - u_{k+1}||_{N^{1,L_{p,q}}} \leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

Označme $F_j = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k$, $F = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j$, $H_j = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} G_k$, $H = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} H_j$. Množiny H_j, $j = 1, 2, \dots$ jsou zřejmě otevřené. S využitím lemmatu 3.8 dostáváme

$$\begin{aligned} (\mathrm{Cap}_{p,q} F_j)^{1/p} &\leq 2^{-j+1}, \quad \mathrm{Cap}_{p,q} F = 0, \\ (\mathrm{Cap}_{p,q} H_j)^{1/p} &\leq 2^{-j+1}, \quad \mathrm{Cap}_{p,q} H = 0. \end{aligned}$$

Nechť $j \geq 1$. Pro každé $x \in X \setminus F_j$ a $k \geq j$ platí

$$||u(x) - u_k(x)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq 2^{-k}.$$

Posloupnost funkcí u_k tedy bodově konverguje k funkci u na množině $X \setminus F$. Pro každé $x \in X \setminus H_j$ a $k \geq j$ platí

$$||u_k(x) - u_{k+1}(x)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq 2^{-k}. \tag{29}$$

Pro $j \geq 1$ definujme funkci

$$\tilde{u}_j(x) = \begin{cases} u_j(x) & x \in X \setminus H_j, \\ 0 & x \in H_j. \end{cases}$$

Jelikož množiny H_j jsou otevřené a funkce $u_j(x)$ je na množině $X \setminus H_j$ spojitá, je funkce $\tilde{u}_j$ borelovsky měřitelná. Pro každé $x \in X$ můžeme definovat

$$\tilde{u}(x) = \lim_{j \to \infty} \tilde{u}_j(x).$$

Tato limita existuje pro $x \in X \setminus H$ vzhledem ke vztahu (29) a je nulová pro $x \in H$. Funkce $\tilde{u}$ je borelovsky měřitelná. Zřejmě pro $x \in X \setminus (F \cup H)$ je $\tilde{u}(x) = u(x)$. Podle lemmatu 3.8 je $\mathrm{Cap}_{p,q}(F \cup H) = 0$ a tedy podle lemmatu 3.10 je $\tilde{u}$ reprezentantem funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$.

□

Poznámka. Věty 3.22 a 3.23 lze použít i na případ prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X) = N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{R})$ $(p \geq q)$, jelikož prostor $\mathbb{R}$ chápán jako Banachův je isomorfní prostoru $\mathbb{B}(Y)$ pro každý jednobodový metrický prostor Y.

4. Coarea vlastnost

4.1. Poincarého nerovnost a Rieszův potenciál

V článku [M1] je dokázána následující věta [M1, 7.1] a lemma [M1, 8.2] (analogické lemmatu 3.18 pro případ silných horních gradientů).

Věta 4.1. *Nechť $m > 1$, $\alpha > 0$, $E \subset X$ a nechť $g \geq 0$ je* $\mathbf{m}$*-měřitelná funkce na X. Předpokládejme, že $I_\alpha^R g \geq b$ na E. Pak*

$$b^m \widehat{\mathcal{H}}_{\alpha m}^{10R}(E) \leq C ||g||_{L_{m,1}}^m .$$

Lemma 4.2. *Předpokládejme, že Y je metrický prostor, $u : Y \to \mathbb{R}$ je* $\mathbf{m}$*-měřitelná funkce a g je její horní gradient. Nechť $G \subset Y$ je otevřená množina a nechť $\{u \neq 0\} \subset G$. Pak funkce $g\chi_G$ je také horní gradient funkce u.*

V celém zbytku kapitoly budeme předpokládat, že Ω je otevřená podmnožina X a že dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost (podle věty 3.13 stačí předpokládat, že trojice $(X, \mathbf{m}, \mathbb{R})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost) s konstantami P a τ.

Lemma 4.3. *Nechť $\kappa > 0$. Předpokládejme, že $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je* $\mathbf{m}$*-měřitelná funkce a nechť g je její horní gradient v Ω. Nechť $B(z, \tau r) \subset \Omega$. Předpokládejme, že $a < b$ a*

$$\mathbf{m}(B(z,r) \cap \{u \geq b\}) \geq \kappa\, \mathbf{m}(B(z,r)),$$

$$\mathbf{m}(B(z,r) \cap \{u \leq a\}) \geq \kappa\, \mathbf{m}(B(z,r)).$$

Pak

$$(b-a)^p\, \mathbf{m}(B(z,\tau r)) \leq C r^p \int_{B(z,\tau r) \cap \{a<u<b\}} g^p(x)\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Definujeme funkci

$$w = \begin{cases} a & \text{na množině } \{v \leq a\}, \\ b & \text{na množině } \{v \geq b\}, \\ v & \text{jinde.} \end{cases}$$

Pak g je zřejmě horní gradient funkce w. Nechť G_a a G_b jsou po řadě otevřené množiny obsahující množiny $\{v > a\}$ a $\{v < b\}$. Podle lemmatu 4.2 je funkce $g\chi_{G_a}$ horním gradientem funkce $w - a$ a tedy i funkce $w - b$. Použijeme-li lemma 4.2 ještě jednou, dostaneme, že funkce $g\chi_{G_a \cap G_b}$ je horním gradientem funkce $w - b$ a tedy i funkce w. Ze vztahu (21) dostáváme

$$\begin{aligned}(b-a)^p\, \mathbf{m}(B(z,r)) \leq & C\, \mathbf{m}(B(z,r)) \left(\fint_{B(z,r)} \fint_{B(z,r)} |w(x) - w(x')\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x'| \right)^p \\ \leq & C r^p \int_{B(z,\tau r) \cap G_a \cap G_b} g^p(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Uvážením infima přes všechny množiny $G_a \supset \{v > a\}$ a $G_b \supset \{v > b\}$ dostáváme dokazovaný výsledek. □

Lemma 4.4. *Nechť g je nezáporná $\mathbf{m}$-měřitelná funkce na X, $z \in X$ a $\xi > 0$. Potom*

$$\left(\fint_{B(z,\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C \fint_{B(z,\xi)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Využijeme doubling vlastnosti míry $\mathbf{m}$.

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B(z,\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} &= \fint_{B(z,\xi)} \left(\fint_{B(z,\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \mathrm{d}y = \\
&= \fint_{B(z,\xi)} (\mathbf{m}(B(z,\xi)))^{-1/p} \left(\int_{B(z,\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \mathrm{d}y \le \\
&\le \fint_{B(z,\xi)} (\mathbf{m}(B(z,\xi)))^{-1/p} \left(\int_{B(y,2\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \mathrm{d}y \le \\
&\le \fint_{B(z,\xi)} \left(\frac{\mathbf{m}(B(y,2\xi))}{\mathbf{m}(B(z,\xi))}\right)^{1/p} \left(\fint_{B(y,2\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \mathrm{d}y \le \\
&\le C \fint_{B(z,\xi)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.5. *Nechť Y je metrický prostor, $u : \Omega \to Y$ $\mathbf{m}$-měřitelná funkce a g horní gradient u v Ω, přičemž $g(x) = 0$ pro každé $x \in X \setminus \Omega$. Nechť $B(z, 2\tau r) \subset \Omega$. Nechť $0 < s \le t \le r$ a $\varepsilon > 0$. Pak*

$$\fint_{B(z,s)} \fint_{B(z,t)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \le C I_1^{2\tau t}(N_p g)(z).$$

Důkaz. Nechť $\xi > 0$. Najdeme k takové, že $2^{-k-1}t < s \le 2^{-k}t$. Pomocí (21) a s využitím lemmatu 4.4 dostáváme

$$\begin{aligned}
&\fint_{B(z,s)} \fint_{B(z,t)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \le \\
\le &\fint_{B(z,s)} \fint_{B(z,2^{-k}t)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' + \\
+ &\sum_{j=0}^{k-1} \fint_{B(z,2^{-j-1}t)} \fint_{B(z,2^{-j}t)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \le \\
\le &C \sum_{j=0}^{k} \fint_{B(z,2^{-j}t)} \fint_{B(z,2^{-j}t)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \le \\
\le &C \sum_{j=0}^{k} 2^{-j}t \left(\fint_{B(z,2^{-j}\tau t)} g^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C \int_0^{2\tau t} \left(\fint_{B(z,\xi)} g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \mathrm{d}\xi \le \\
\le &C \int_0^{2\tau t} \fint_{B(z,\xi)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi = C I_1^{2\tau t}(N_p g)(z).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.6. *Nechť Y je metrický prostor, $u : \Omega \to Y$ $\mathbf{m}$-měřitelná funkce a $g : \Omega \to \mathbb{R}$ její horní gradient v Ω. Předpokládejme, že $z \in \Omega$ a*

$$\lim_{r\to 0+} M_p^r g^p(z) = 0.$$

Pak existuje $\{y_r : r > 0\} \subset Y$ tak, že

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), y_r)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Zvolme posloupnost $r_k \searrow 0$ takovou, že $B(z, \tau r_1) \subset \Omega$ a

$$P^p r^p \fint_{B(z,\tau r)} g^p(x) < 2^{-(k+1)p},\ 0 < r < r_k.$$

Jelikož dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost, podle (21) pro $0 < r < r_k$ dostáváme

$$\fint_{B(z,r)} \fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' < 2^{-(k+1)}.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{m}\Big\{x' \in B(z,r) : \fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x > 2^{-k}\Big\} &\leq \\ \leq 2^k \int_{B(z,r)} \fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' &\leq \\ \leq 2^{-1}\,\mathbf{m}(B(z,r)).\end{aligned}$$

Zřejmě tedy musí existovat $x' = x'_r \in B(z,r)$ takové, že

$$\fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), u(x'_r))\,\mathrm{d}x < 2^{-k}.$$

Můžeme tedy volit $y_r = u(x'_r)$ pro $r_{k+1} \leq r < r_k$. □

Věta 4.7. *Nechť $m > 1$. Nechť $a < b$, $R > 0$. Nechť $v : \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathbf{m}$-měřitelná funkce s horním gradientem $g : \Omega \to \mathbb{R}$ v Ω. Nechť $E \subset \Omega$ a předpokládejme, že pro každé $z \in E$ existují r_z, R_z tak, že $0 < r_z < R_z \leq R$, $B(z, 2\tau R_z) \subset \Omega$,*

$$\mathbf{m}\,(B(z, R_z) \cap \{v > a\}) \leq \frac{1}{2}\,\mathbf{m}(B(z, R_z)),$$

$$\mathbf{m}\,(B(z, r_z) \cap \{v > b\}) > \frac{1}{2}\,\mathbf{m}(B(z, r_z)).$$

Pak

$$(b-a)^m \widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau R}(E) \leq C||g||^m_{L_{m,1}(\Omega)}$$

Důkaz. Funkci g dodefinujeme nulou mimo Ω. Podle lemmatu 4.5 pro každé $z \in E$ platí

$$(b-a) \leq C \fint_{B(z,r_z)} \fint_{B(z,R_z)} |v(x) - v(x')|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \leq C I_1^{2\tau R_z}(N_p g)(z) \leq C I_1^{2\tau R}(N_p g)(z).$$

Použitím věty 4.1 (pro $\alpha = 1$) a lemmatu 2.9 dostaneme

$$(b-a)^m \widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau R}(E) \leq C||N_p g||^m_{L_{m,1}} \leq C||g||^m_{L_{m,1}} = C||g||^m_{L_{m,1}(\Omega)}.$$

□

4.2. Lebesgueovské body

Lemma 4.8. *Nechť Y je metrický prostor, $u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ a nechť $\phi : X \to \mathbb{R}$ je L-lipschitzovská funkce, $|\phi(x)| \leq K$ pro každé $x \in X$. Nechť $g \in L_{p,q}(X)$ je $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce u. Pak*

$$\phi u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$$

a $h(x) = L||\tilde{u}(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + Kg(x)$ je její $L_{p,q}$-slabý horní gradient, kde $\tilde{u}$ je borelovsky měřitelný reprezentant funkce u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ (který existuje podle věty 3.23).

Důkaz. Zřejmě je $\phi u \in L_{p,q}(X, \mathbb{B}(Y))$. Označme $F \subset X$ množinu všech bodů $x \in X$ pro které je $u(x) \neq \tilde{u}(x)$. Jelikož $\tilde{u}$ je reprezentant u v prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$, je podle poznámky za důsledkem 3.5 $\operatorname{Cap}_{p,q} F = 0$ a podle lemmatu 3.9 také $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_F = 0$. Podle tvrzení 3.4 existuje množina $\Gamma_1 \subset \Gamma_{\text{rect}}$, $\operatorname{Mod}_{p,q} \Gamma_1 = 0$ taková, že pro každou obloukově parametrizovanou křivku $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus \Gamma_1$ je funkce u absolutně spojitá na γ a navíc

$$||u(x) - u(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \int_{\gamma_{xy}} g < \infty \text{ pro každé } x, y \in |\gamma|. \tag{30}$$

Celkem je podle lemmatu 3.1 $\operatorname{Mod}_{p,q}(\Gamma_1 \cup \Gamma_F) = 0$. Označme

$$h(x) = L||\tilde{u}(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + Kg(x).$$

Pak h je borelovsky měřitelná nezáporná funkce, $h \in L_{p,q}(X)$. Nechť $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_F)$ je parametrizovaná obloukem. Funkce $\phi \circ \gamma$ je zřejmě také L-lipschitzovská. Pro každé $x, y \in [0, l(\gamma)]$, $x \leq y$ platí (využíváme trojúhelníkovou nerovnost, vztah (30) a definici křivkového integrálu)

$$\begin{aligned} ||(\phi u) \circ \gamma(x) - (\phi u) \circ \gamma(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq & |\phi \circ \gamma(x) - \phi \circ \gamma(y)| \cdot ||u \circ \gamma(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + \\ & + |\phi \circ \gamma(y)| \cdot ||u \circ \gamma(x) - u \circ \gamma(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \\ \leq & L(y - x)||u \circ \gamma(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + K \int_x^y g \circ \gamma(t) \, dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Nyní nechť $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $x_i = \frac{l(\gamma)}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. S pomocí vztahu (31) dostáváme

$$\begin{aligned} ||(\phi u) \circ \gamma(l(\gamma)) - (\phi u) \circ \gamma(0)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq & \sum_{i=1}^{n} ||(\phi u) \circ \gamma(x_i) - (\phi u) \circ \gamma(x_{i-1})||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \\ \leq & \sum_{i=1}^{n} L(x_i - x_{i-1})||u \circ \gamma(x_{i-1})||_{\mathbb{B}(Y)} + \\ & + K \int_0^{l(\gamma)} g \circ \gamma(t) \, dt. \end{aligned} \tag{32}$$

Jelikož funkce $u \circ \gamma$ je na intervalu $[0, l(\gamma)]$ spojitá, platí

$$\sum_{i=1}^{n} L(x_i - x_{i-1})||u \circ \gamma(x_{i-1})||_{\mathbb{B}(Y)} \to L \int_0^{l(\gamma)} ||u \circ \gamma(t)||_{\mathbb{B}(Y)} \, dt \text{ pro } n \to \infty.$$

Celkem dohromady s nerovností (32) dostáváme

$$||(u\phi) \circ \gamma(l(\gamma)) - (u\phi) \circ \gamma(0)||_{\mathbb{B}(Y)} \leq \int_0^{l(\gamma)} (L||u||_{\mathbb{B}(Y)} + Kg) \circ \gamma(t) \, dt.$$

Vzhledem k definici křivkového integrálu a vzhledem k tomu, že $u = \tilde{u}$ na každé křivce $\gamma \in \Gamma_{\text{rect}} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_F)$ jsme dokázali, že borelovsky měřitelná funkce $h(x) = L||\tilde{u}(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + Kg(x)$ je $L_{p,q}$-slabý horní gradient funkce ϕu. Jelikož $h \in L_{p,q}(X)$, je $\phi u \in N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$. $\square$

Definice. Nechť $r > 0$. Pak existuje konstanta $c > 1$ závislá pouze na doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ a nejvýše spočetná posloupnost $\{x_i\}$ (v závislosti na r) taková, že $B_i = B(x_i, r)$ pokrývají X a pro každé $x \in X$ platí

$$\sum_i \chi_{B(x_i, 6r)}(x) \leq c. \tag{33}$$

Dále existují c/r-lipschitzovské funkce $\phi_i : X \to [0,1]$ (v závislosti na r) takové, že $\phi_i(x) = 0$ pro $x \neq B(x_i, 6r)$ a $\phi_i(x) \geq 1/c$ pro $x \in B(x_i, 3r)$ a pro každé $x \in X$ platí

$$\sum_i \phi_i(x) = 1$$

(přičemž podle vztahu (33) součet obsahuje nejvýše c nenulových členů pro každé $x \in X$). Existence posloupnost x_i a funkcí ϕ_i je dokázána v článku [KL, 3. kapitola]. Nechť $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(X)$. Definujeme funkci $u_r : X \to \mathbb{R}$ vztahem

$$u_r(x) = \sum_i \phi_i(x) u_{B(x_i, 3r)}.$$

(bodová konvergence součtu plyne z faktu, že pro každé $x \in X$ obsahuje součet nejvýše c nenulových členů). Pro funkci $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(X, \mathbb{B})$ definujeme funkci $M^*u : X \to \mathbb{R}$ vztahem

$$M^*u(x) = \sup_{r>0, r\in\mathbb{Q}} (||u||_{\mathbb{B}})_r(x).$$

Důkaz následujícího lemmatu lze nalézt v [KL, 3.1]:

Lemma 4.9. *Existuje konstanta C závislá pouze na doubling konstantě D míry $\mathbf{m}$ taková, že pro každou nezápornou funkci $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(X)$ a pro každé $x \in X$ platí*

$$C^{-1} Mu(x) \leq M^*u(x) \leq CMu(x).$$

Nyní dokážeme další lemma:

Lemma 4.10. *Nechť $1 \leq p < m$, $1 \leq q \leq m$, $u \in N^{1,L_{m,q}}(X)$ a nechť $g \in L_{m,q}(X)$ je $L_{m,q}$-slabý horní gradient u. Pak existuje množina $E \subset X$, $\mathbf{m}(E) = 0$, $C > 0$ nezávislá na funkcích u a g a funkce $h \in L_{m,q}(X)$ tak, že pro každé $r > 0$ je $u_r \in N^{1,L_{m,q}}(X)$, h je $L_{m,q}$-slabý horní gradient u,*

$$h(x) \leq C(g(x) + N_p g(x)),\ x \in X \setminus E$$

a

$$||u_r||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C||u||_{N^{1,L_{m,q}}}.$$

Důkaz. Jelikož definice funkce u_r nezávisí na změně funkce u na množině nulové míry, a tedy nezávisí na výběru reprezentantu funkce u v prostoru $N^{1,L_{m,q}}(X)$, můžeme podle věty 3.23 bez újmy na obecnosti předpokládat, že funkce u je borelovsky měřitelná. Množinu E zvolíme jako množinu všech bodů $x \in X$, které nejsou lebesgueovskými body funkce u. Podle věty 2.4 je $\mathbf{m}(E) = 0$. Podle definice funkce u_r je

$$u_r(x) = \sum_i \phi_i(x) u_{B(x_i,3r)} = u(x) + \sum_i \phi_i(x)(u_{B(x_i,3r)} - u(x)).$$

Jelikož funkce $\phi_i \leq 1$ jsou c/r-lipschitzovské a nulové na množině $X \setminus B(x_i, 6r)$, je podle lemmatu 4.8 a 3.18 funkce

$$\left(\frac{c}{r}\left|u - u_{B(x_i,3r)}\right| + g\right) \chi_{B(x_i,6r)}$$

$L_{m,q}$-slabým horním gradientem funkce $\phi_i(u_{B(x_i,3r)} - u)$. Odtud dostáváme, že funkce

$$g + \sum_i \left(\frac{c}{r}\left|u - u_{B(x_i,3r)}\right| + g\right) \chi_{B(x_i,6r)} \tag{34}$$

je $L_{m,q}$-slabým horním gradientem funkce $u_r(x)$. Pro každé $x \in B(x_i, 6r)$ je $B(x_i, 3r) \subset B(x, 9r)$ a

$$\left|u(x) - u_{B(x_i,3r)}\right| \leq \left|u(x) - u_{B(x,9r)}\right| + \left|u_{B(x,9r)} - u_{B(x_i,3r)}\right|. \tag{35}$$

Dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost, druhý člen na pravé straně nerovnosti (35) tedy můžeme odhadnout:

$$\begin{aligned}
\left|u_{B(x,9r)} - u_{B(x_i,3r)}\right| \leq &\fint_{B(x_i,3r)} \left|u - u_{B(x,9r)}\right| \, d\mathbf{m} \leq \\
\leq &C \fint_{B(x,9r)} \left|u - u_{B(x,9r)}\right| \leq Cr \left(\fint_{B(x,9\tau r)} g^p \, d\mathbf{m}\right)^{1/p} \leq \\
\leq &CrN_p g(x).
\end{aligned} \tag{36}$$

Pro $x \in X \setminus E$ je x lebesgueovský bod funkce u a platí

$$\begin{aligned}
\left|u(x) - u_{B(x,9r)}\right| \leq &\sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{B(x,3^{2-j}r)} - u_{B(x,3^{1-j}r)}\right| \leq \\
\leq &\sum_{j=0}^{\infty} \fint_{B(x,3^{1-j}r)} \left|u - u_{B(x,3^{2-j}r)}\right| \, d\mathbf{m} \leq \\
\leq &C \sum_{j=0}^{\infty} \fint_{B(x,3^{2-j}r)} \left|u - u_{B(x,3^{2-j}r)}\right| \, d\mathbf{m} \leq \\
\leq &C \sum_{j=0}^{\infty} 3^{2-j} r \left(\fint_{B(x,3^{2-j}\tau r)} g^p \, d\mathbf{m}\right)^{1/p} \leq CrN_p g(x).
\end{aligned} \tag{37}$$

Dosazením nerovností (36) a (37) do (35) dostáváme pro každé $x \in X \setminus E$.

$$\left|u(x) - u_{B(x_i,3r)}\right| \leq CrN_p g(x).$$

Odtud a ze vztahu (33) a (34) dostáváme, že funkce

$$h(x) = \begin{cases} C(g(x) + N_p g(x)), & x \in X \setminus E, \\ \infty, & x \in E, \end{cases} \tag{38}$$

je $L_{m,q}$-slabým horním gradientem funkce $u_r(x)$ a nezávisí na r. Jelikož $\mathbf{m}(E) = 0$ a $g \in L_{m,q}(X)$ a $p < m$, je podle důsledku 2.10 i $N_p g \in L_{m,q}(X)$ a tedy i $h \in L_{m,q}(X)$, navíc $||h||_{L_{m,q}} \leq C||g||_{L_{m,q}}$. Podle lemmatu 4.9 a důsledku 2.10 je také

$$||u_r||_{L_{m,q}} \leq ||M^*u||_{L_{m,q}} \leq C||Mu||_{L_{m,q}} \leq C||N_1 u||_{L_{m,q}} \leq C||u||_{L_{m,q}}. \tag{39}$$

Je tedy $u_r \in N^{1,L_{m,q}}(X)$ a

$$||u_r||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C||u||_{N^{1,L_{m,q}}},$$

přičemž konstanta C nezávisí na r. □

Věta 4.11. *Nechť $1 \leq p < m$, $1 \leq q \leq m$. Pak existuje $C > 0$ tak, že pro každou funkci $u \in N^{1,L_{m,q}}(X, \mathbb{B})$ je $M^*u \in N^{1,L_{m,q}}(X)$ a*

$$||M^*u||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C||u||_{N^{1,L_{m,q}}}$$

Důkaz. Označme $\tilde{u} = ||u||_{\mathbb{B}}$, pak $\tilde{u} \geq 0$, $\tilde{u} \in N^{1,L_{m,q}}(X)$, $||\tilde{u}||_{N^{1,L_{m,q}}} = ||u||_{N^{1,L_{m,q}}}$ a $M^*(\tilde{u}) = M^*u$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ a $u \geq 0$. Podle vztahu (39) dokázaného v lemmatu 4.10 je $M^*u \in L_{m,q}(X)$ a platí

$$||M^*u||_{L_{m,q}} \leq C||u||_{L_{m,q}} < \infty. \tag{40}$$

Podle lemmatu 4.10 jsou pro každé $r > 0$ funkce $u_r \in N^{1,L_{m,q}}(X)$ a mají společný $L_{m,q}$-slabý horní gradient $h \in L_{m,q}(X)$ definovaný vztahem (38). Platí navíc

$$||h||_{L_{m,q}} \leq C||u||_{N^{1,L_{m,q}}},$$

kde konstanta C nezávisí na r. Jelikož je $h \in L_{m,q}(X)$ je společný gradient funkcí u_r a podle (40) snadno odvodíme $\mathbf{m}(\{x \in X : M^*u(x) = \infty\}) = 0$, má funkce $M^*u = \sup_{r>0, r\in\mathbb{Q}} u_r$ podle lemmatu 3.3 také $L_{m,q}$-slabý horní gradient h. Celkem tedy dostáváme $M^*u \in N^{1,L_{m,q}}(X)$ a

$$||M^*u||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C||u||_{N^{1,L_{m,q}}}.$$

□

Definice. Nechť Y je metrický prostor a $y \in Y$. Řekneme, že zobrazení $u : X \to Y$ je prvkem prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, Y, y)$, pokud funkce $\Phi_y \circ u : X \to \mathbb{B}(Y)$ je prvkem prostoru $N^{1,L_{p,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$, kde Φ_y je kanonické vnoření metrického prostoru Y do Banachova prostoru $\mathbb{B}(Y)$ příslušné bodu y.

Věta 4.12. *Nechť Y je metrický prostor, $y \in Y$, $1 \leq p < m$, $1 \leq q \leq m$ a nechť $u \in N^{1,L_{m,q}}(X, Y, y)$. Pak existuje množina $F \subset X$, $\operatorname{Cap}_{m,q} F = 0$ taková, že každý bod $x \in X \setminus F$ je lebesgueovský bod zobrazení u.*

Důkaz. Nechť $v = \Phi_y \circ u$, kde Φ_y je kanonické vnoření prostoru Y do prostoru $\mathbb{B}(Y)$. Pak $v \in N^{1,L_{m,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ a x je lebesgueovský bod zobrazení u právě tehdy, když x je lebesgueovský bod funkce v. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Označme

$$N_\varepsilon = \{x \in X : \limsup_{r \to 0+} \fint_{B(x,r)} ||v(x) - v(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \, dy > \varepsilon\}.$$

Jelikož dvojice $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost a $m > p$, splňuje podle důsledku 3.12 i $(1, L_{m,q})$-Poincarého nerovnost. Podle věty 3.22 existuje lipschitzovská funkce $v_\delta \in N^{1,L_{m,q}}(X, \mathbb{B}(Y))$ taková, že pro funkci $w_\delta = v - v_\delta$ platí

$$||w_\delta||_{N^{1,L_{m,q}}} < \delta.$$

Označme

$$N_{\varepsilon,\delta} = \{x \in X : M||w_\delta||_{\mathbb{B}}(x) > \varepsilon\} \cup \{x \in X : ||w_\delta(x)||_{\mathbb{B}(Y)} > \varepsilon\}.$$

Pro každé $x \in X \setminus N_{\varepsilon,\delta}$ můžeme najít díky spojitosti funkce v_δ takové $\varrho > 0$, že platí $||v_\delta(x) - v_\delta(y)||_{\mathbb{B}(Y)} < \varepsilon$ pro každé $y \in B(x, \varrho)$. Pro $r \in (0, \varrho)$ pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} ||v(x) - v(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \, dy \leq & \fint_{B(x,r)} ||v_\delta(x) - v_\delta(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \, dy + \\
& + \fint_{B(x,r)} ||w_\delta(x) - w_\delta(y)||_{\mathbb{B}(Y)} \, dy \leq \\
& \leq \varepsilon + \fint_{B(x,r)} ||w_\delta(x)||_{B(Y)} \, dy + \fint_{B(x,r)} ||w_\delta(y)||_{B(Y)} \, dy \leq \\
& \leq \varepsilon + ||w_\delta(x)||_{\mathbb{B}(Y)} + M||w_\delta||_{\mathbb{B}}(x) \leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vidíme, že $N_{3\varepsilon} \subset N_{\varepsilon,\delta}$ pro každé $\delta > 0$. Podle věty 4.11 je

$$||M^* w_\delta||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C||w_\delta||_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C\delta.$$

Jelikož podle lemmatu 4.9 je $CM^* w_\delta \geq M w_\delta$, je

$$\frac{1}{\varepsilon}(CM^* w_\delta + ||w_\delta||_{\mathbb{B}(Y)}) \in \mathcal{P}_{m,q}(N_{\varepsilon,\delta}).$$

Dostáváme

$$\operatorname{Cap}_{m,q} N_{3\varepsilon} \leq \operatorname{Cap}_{m,q} N_{\varepsilon,\delta} \leq \left|\left|\frac{1}{\varepsilon}(CM^* w_\delta + ||w_\delta||_{\mathbb{B}(Y)})\right|\right|^m_{N^{1,L_{m,q}}} \leq C\frac{\delta^m}{\varepsilon^m}.$$

Limitním přechodem $\delta \to 0$ dostáváme

$$\operatorname{Cap}_{m,q} N_{3\varepsilon} = 0.$$

Zvolme

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{1/k}.$$

Pak podle lemmatu 3.8 je $\operatorname{Cap}_{m,q} F = 0$ a každý bod $x \in X \setminus F$ je lebesgueovským bodem funkce v a tedy i zobrazení u. $\square$

Lemma 4.13. *Předpokládejme, že Y je úplný metrický prostor, $u : \Omega \to Y$ $\mathbf{m}$-měřitelné zobrazení a g jeho horní gradient v Ω, přičemž $g(x) = 0$ pro $x \in X \setminus \Omega$. Nechť je $z \in \Omega$ a $R > 0$ takové, že $B(z, 2\tau R) \subset \Omega$ a*

$$I_1^{2\tau R} N_p g(z) < \infty. \tag{41}$$

Pak u má v bodě z lebesgueovskou limitu y a platí

$$\fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), y)\,\mathrm{d}x \le C I_1^{2\tau r} N_p g(z). \tag{42}$$

Důkaz. Podle (41) je

$$\lim_{r\to 0+} I_1^r N_p g(z) = 0. \tag{43}$$

Dostáváme podle lemmatu 4.4

$$\begin{aligned} M_p^R g^p(z) &= \sup_{0<r<R} r^p \fint_{B(z,r)} g^p(x)\,\mathrm{d}x \le C \sup_{0<r<R} r^p \left(\fint_{B(z,r)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y\right)^p = \\ &= C\left(\sup_{0<r<R} r \fint_{B(z,r)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y\right)^p. \end{aligned}$$

Pro každé $r \in (0, R)$ je

$$r \fint_{B(z,r)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y \le C \int_r^{2r} \fint_{B(z,\xi)} N_p g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \le C I_1^{2r} N_p g(z) \le C I_1^{2R} N_p g(z).$$

Celkem tedy vidíme, že

$$\lim_{r\to 0+} M_p^r g^p(z) \le C\left(\lim_{r\to 0+} I_1^{2r} N_p g(z)\right)^p = 0.$$

Podle lemmatu 4.6 a (43) existuje posloupnost $r_k \searrow 0$, $r_k \le 1$ a $y_k \in Y$ tak, že

$$\begin{aligned} \fint_{B(z,r_k)} d_Y(u(x), y_k)\,\mathrm{d}x &< 2^{-k}, \\ I_1^{2\tau r_k} N_p g(z) &< 2^{-k}. \end{aligned} \tag{44}$$

Pro $k < j$ dostaneme

$$d_Y(y_k, y_j) \le d_Y(y_k, u(x)) + d_Y(u(x), u(x')) + d_Y(u(x'), y_j), \quad x \in B(z, r_k),\ x' \in B(z, r_j).$$

Integrací podle x a x' s použitím (44) a lemmatu 4.5 dostaneme

$$\begin{aligned} d_Y(y_k, y_j) \le &\fint_{B(z,r_k)} d_Y(y_k, u(x))\,\mathrm{d}x + \fint_{B(z,r_k)}\fint_{B(z,r_j)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x + \\ &+ \fint_{B(z,r_j)} d_Y(u(x'), y_j)\,\mathrm{d}x' \le 2^{-k+1} + C I_1^{2\tau r_k} N_p g(z) \le C 2^{-k}. \end{aligned} \tag{45}$$

Posloupnost $\{y_k\}$ je tedy cauchyovská v Y a jelikož Y je úplný metrický prostor, existuje $y \in Y$ tak, že

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Pro $0 < r_k < r \le R$ nyní s pomocí lemmatu 4.5, (44) a (45) dostaneme

$$\begin{aligned} \fint_{B(z,r)} d_Y(u(x), y)\,\mathrm{d}x \le &\fint_{B(z,r)}\fint_{B(z,r_k)} d_Y(u(x), u(x'))\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x + \\ &+ \fint_{B(z,r_k)} d_Y(u(x'), y_k)\,\mathrm{d}x' + d_Y(y_k, y) \le C(I_1^{2\tau r} N_p g(z) + 2^{-k}). \end{aligned}$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ dostaneme (42). □

Věta 4.14. *Nechť $m > 1$. Nechť Y je úplný metrický prostor, $u : \Omega \to Y$* **m**-*měřitelné zobrazení a $g \in L_{m,1}(\Omega)$ je horní gradient u v Ω. Pak pro $\widehat{\mathcal{H}}_m$-skoro všechna $x \in \Omega$ existuje lebesguovská limita zobrazení u v bodě x.*

Důkaz. Funkci g dodefinujeme nulou mimo Ω. Zvolme $R > 0$ pevně. Označme $\Omega_R = \{x \in \Omega : B(x,R) \subset \Omega\}$. Nyní pro $0 < r < R$ označme

$$E_{k,r} = \{x \in \Omega_R : I_1^{2\tau r} N_p g(x) > k\}.$$

Označme L množinu lebesgueovských bodů zobrazení u v Ω a $L_R = L \cap \Omega_R$. Podle lemmatu 4.13 je zřejmě

$$\Omega_R \setminus L_R \subset \bigcap_{r \in (0,R)} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,r}.$$

Podle věty 4.5 (pro $\alpha = 1$) a lemmatu 2.9 je však pro každé $r \in (0,R)$

$$\widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau r}(E_{k,r}) \le C\frac{||N_p g||_{L_{m,1}}^m}{k^m} \le C\frac{||g||_{L_{m,1}}^m}{k^m}.$$

Odtud dostáváme

$$\widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau r}(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,r}) = 0.$$

a tedy i

$$\widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau r}(\Omega_R \setminus L_R) = 0.$$

Limitním přechodem $r \to 0$ dostáváme

$$\widehat{\mathcal{H}}_m(\Omega_R \setminus L_R) = 0.$$

Nyní, jelikož je

$$\Omega \setminus L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_{1/n} \setminus L_{1/n}),$$

již snadno odhadneme

$$\widehat{\mathcal{H}}_m(\Omega \setminus L) \le \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mathcal{H}}_m(\Omega_{1/n} \setminus L_{1/n}) = 0.$$

□

Věta 4.15. *Nechť Y je úplný metrický prostor, $y \in Y$, $m > p \ge 1$ a nechť $u \in N^{1,L_{m,1}}(X,Y,y)$. Pak existuje lebesgueovsky precizní reprezentant $\tilde{u} \in N^{1,L_{m,1}}(X,Y,y)$ zobrazení u. Navíc $\widehat{\mathcal{H}}_m$-skoro každý bod $x \in X$ je lebesgueovským bodem každé takového zobrazení $\tilde{u}$.*

Důkaz. Označme $v = \Phi_y \circ u$ a $Z = \Phi_y(Y)$, kde Φ_y je kanonické vnoření prostoru Y do prostoru $\mathbb{B}(Y)$. Podle věty 4.12 (pro $q = 1$) existuje množina $F \subset X$, $\mathrm{Cap}_{m,1} F = 0$ (a tedy i $\mathbf{m}(F) = 0$) taková, že každý bod $x \in X \setminus F$ je lebesgueovským bodem funkce v. Podle věty 4.14 existuje množina $H \subset F$, $\widehat{\mathcal{H}}_m(H) = 0$ taková, že pro každé $x \in X \setminus H$ existuje lebesgueovská limita funkce v v bodě x. Definujme tedy

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} \operatorname*{L-lim}_{y \to x} v(y), & x \in X \setminus H, \\ 0, & x \in H. \end{cases}$$

Pak zřejmě $\tilde{v}(x) = v(x)$ pro každé $x \in X \setminus F$. Funkce $\tilde{v}$ a v se liší nejvýše na množině F, $\mathbf{m}(F) = 0$, takže mají stejné lebesgueovské limity v každém bodě. Speciálně každý bod $x \in X \setminus H$ je lebesgueovským bodem funkce $\tilde{v}$ a funkce $\tilde{v}$ je lebesgueovsky precizní. Jelikož je $\mathrm{Cap}_{m,1} F = 0$, tak podle důsledku 3.10 je $\tilde{v}$ reprezentant funkce v v prostoru $N^{1,L_{m,1}}(X, \mathbb{B}(Y))$. Ukážeme, že pro každé $x \in X$ je $\tilde{v}(x) \in Z$. Pro $x \in X \setminus F$ a pro $x \in H$ je to zřejmé z definice funkce $\tilde{v}$ (je $0 = \Phi_y(y) \in Z$). Mějme tedy $x \in F \setminus H$. Bod x je lebesgueovským bodem funkce $\tilde{v}$ a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $r > 0$ tak, že

$$\fint_{B(x,r)} ||\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)||_{B(Y)} \,\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

Je tedy

$$\mathbf{m}(\{y \in B(x,r) : ||\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)||_{\mathbb{B}(Y)} < 2\varepsilon\}) > \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,r)) > 0.$$

Jelikož $\mathbf{m}(F) = 0$, existuje $y \in B(x,r) \setminus F$ takové, že

$$||\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)||_{\mathbb{B}(Y)} < 2\varepsilon$$

přičemž pro $y \notin F$ je $\tilde{v}(y) = v(y) \in Z$. Ukázali jsme, že pro každé $x \in F \setminus H$ je $\tilde{v}(x) \in \overline{Z}$. Jelikož Z je isometrickým obrazem úplného metrického prostoru Y, je Z uzavřená podmnožina $\mathbb{B}(Y)$. Ukázali jsme tedy, že pro každé $x \in X$ je $\tilde{v}(x) \in Z$. Můžeme definovat

$$\tilde{u} = \Phi_y^{-1} \circ \tilde{v}$$

a vidíme, že zobrazení $\tilde{u}$ je hledaný reprezentant zobrazení u v prostoru $N^{1,L_{m,1}}(X, Y, y)$.

□

4.3. Coarea vlastnost

Definice. Řekneme, že zobrazení $u : \Omega \to Y$ splňuje m-coarea vlastnost v Ω, pokud pro každou $\mathbf{m}$-nulovou množinu $E \subset \Omega$ a pro $\mathcal{H}_m$-skoro všechna $y \in Y$ platí

$$\widehat{\mathcal{H}}_m(E \cap u^{-1}(y)) = 0.$$

Nechť $u : \Omega \subset X \to Y$ je $\mathbf{m}$-měřitelné zobrazení. Množinu všech lebesgueovských bodů zobrazení u budeme označovat $\mathcal{L}_u$. Pro $z \in X$ a $r > 0$ budeme značit

$$G_u(z,r) = B(z,r) \cap u^{-1}(B(u(z),r)).$$

Lemma 4.16. *Nechť $m > 1$. Nechť $u : \Omega \to Y$ je $\mathbf{m}$-měřitelné zobrazení s horním gradientem g v Ω. Nechť je $z \in \Omega$ a $R > 0$ takové, že $B(z, 3\tau R) \subset \Omega$. Pak*

$$R^m \widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau R}(G_u(z,R) \cap \mathcal{L}_u) \le C||(1 + g\chi_{G_u(z,3\tau R)})||^m_{L_{m,1}}.$$

Důkaz. Označme

$$v(x) = (2R - d_Y(u(x), u(z)))^+ \,, \; x \in \Omega$$

a uvažme otevřenou množinu $G \supset \{v > 0\}$. Pak g je horní gradient funkce v v Ω a podle lemmatu 4.2 je funkce $g\chi_G$ také horním gradientem funkce v v Ω. Předpokládejme nejdříve, že pro každé $x \in B(z,R)$ platí

$$\mathbf{m}(B(x,R) \cap G_u(z,2R)) \le \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,r)).$$

Pro každý lebesgueovský bod zobrazení u (a tedy i funkce v) $x \in G_u(z,R)$ zřejmě existuje $r_x \in (0,R)$ tak, že

$$\mathbf{m}(B(x,r_x) \cap \{|u - u(x)| < R\}) > \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,r_x)).$$

Tedy pro každé $x \in G_u(z,r) \cap \mathcal{L}_u$ dostáváme

$$\mathbf{m}(B(x,R) \cap \{v > 0\}) \le \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,R)$$
$$\mathbf{m}(B(x,r_x) \cap \{v > R\})) > \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,r_x))$$

Pomocí věty 4.7 a uvážením infima přes všechny množiny $G \supset \{v > 0\}$ dostáváme

$$R^m \widehat{\mathcal{H}}_m^{20\tau R}(G_u(z,R) \cap \mathcal{L}_u) \le C||g\chi_{G_u(z,3\tau R)}||^m_{L_{m,1}}.$$

Nyní předpokládejme, že existuje $x \in B(z,R)$ tak, že

$$\mathbf{m}(B(x,R) \cap G_u(z,2R)) > \frac{1}{2}\mathbf{m}(B(x,r)).$$

V tomto případě odhadneme Hausdorffovu míru množiny $G_u(z,R) \cap \mathcal{L}_u$ pomocí pokrytí koulí $B(z,R)$. Dostáváme

$$R^m \widehat{\mathcal{H}}_m^R(G_u(z,R) \cap \mathcal{L}_u) \le \mathbf{m}(B(z,R)) \le D\,\mathbf{m}(B(x,R)) \le 2D\,\mathbf{m}(G_u(z,2R)) \le$$
$$\le 2D||\chi_{G_u(z,2R)}||^m_{L_{m,1}}.$$

V obou případech platí dokazovaný výsledek. □

Definice. Nechť Y je metrický prostor. Pro $m \geq 0$ a $\delta > 0$ definujeme funkcionály

$$\Lambda_m^\delta : f \mapsto \inf \left\{ \sum_j \gamma_j \operatorname{diam}^m A_j : \gamma_j \geq 0, \ \operatorname{diam} A_j \leq \delta, \ f \leq \sum_j \gamma_j \chi_{A_j} \right\},$$

definované na nezáporných funkcích $f : Y \to \mathbb{R}$. Podle [F, 2.10.24] platí

$$\int_Y^* f \, d\mathcal{H}_m = \lim_{\delta \to 0+} \Lambda_m^\delta(f) \tag{46}$$

pro každou takovou funkci f, je-li prostor Y omezeně kompaktní.

Věta 4.17. *Předpokládejme, že X je metrický prostor s doubling mírou $\mathbf{m}$, $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1,p)$-Poincarého nerovnost, $1 \leq p < m$ a nechť Y je omezeně kompaktní metrický prostor. Nechť $u : \Omega \subset X \to Y$ lebesgueovsky precizní $\mathbf{m}$-měřitelné zobrazení s horním gradientem $g \in L_{m,1}(\Omega)$ v Ω. Pak u má m-coarea vlastnost v Ω.*

Důkaz. Poté, co jsme dokázali lemma 4.16 již důkaz přímo sleduje důkaz analogické věty z [M1, 12.3]. Pro úplnost ho zde také uvádíme.

Nechť $E \subset \Omega$ je $\mathbf{m}$-nulová množina. Prostor Y je omezeně kompaktní a tedy úplný. Podle věty 4.14 můžeme předpokládat, že E obsahuje pouze lebesgueovské body zobrazení u. V kartézském součinu $X \times Y$ budeme užívat „koule“ $B([x,y],r) := B(x,r) \times B(y,r)$. Poznamenejme, že pro tento typ „koulí“ také platí věta vitaliovského typu (analogická větě 2.1). Nechť je dané $\varepsilon > 0$. Najdeme otevřenou množinu $G \subset \Omega$ tak, že

$$E \subset G \text{ a } ||(1+g)\chi_G||_{L_{m,1}}^m < \varepsilon.$$

Nechť $\delta > 0$. Uvážíme rozklad

$$E = E' \cup E'',$$

kde

$$\begin{aligned} E'' = E''_\varepsilon = &\{x \in E : \text{existuje } t_{x,j} \to 0 \text{ tak, že} \\ &\widehat{\mathcal{H}}_m^\varepsilon(E \cap u^{-1}(u(x)) \cap B(x, 5t_{x,j})) \leq \mathbf{m}(B(x, t_{x,j}))\}, \\ E' = E'_\varepsilon = &E \setminus E''_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nechť $y \in Y$. Pomocí věty vitaliovského typu najdeme nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních koulí $B(x'_i, t'_i)$ vybraných ze systému $\{B(x, t_{x,j})\}$ tak, že $5t'_i < \varepsilon$, $B(x'_i, t'_i) \subset G$ a $\bigcup B(x'_i, 5t'_i)$ pokrývá $E'' \cap u^{-1}(y)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_m^\varepsilon(E'' \cap u^{-1}(y)) &\leq \sum_i \widehat{\mathcal{H}}_m^\varepsilon(E'' \cap u^{-1}(y) \cap B(x'_i, 5t'_i)) \leq \\ &\leq \sum_i \mathbf{m}(B(x'_i, t_i)) \leq \mathbf{m}(G) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme

$$\widehat{\mathcal{H}}_m(E'' \cap u^{-1}(y)) = 0. \tag{47}$$

Nyní uvažujme $x \in E'$. Zvolme $r_{x,0} > 0$ tak, že

$$15\tau r_{x,0} < \delta/2, \quad B(x, 3\tau r_{x,0}) \subset G,$$

a označme $r_{x,i} = (15\tau)^{-i} r_{x,0}$. Všimněme si, že pro každou posloupnost $\{a_i\}$ kladných reálných čísel, která nekonverguje do nekonečna, existuje index i takový, že $a_{i+1} < 2a_i$. Použijeme toto pozorování na posloupnost

$$a_i = \frac{\mathbf{m}(B(x, r_{x,i}))}{\widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E \cap G_u(x, r_{x,i}))}$$

a užitím doubling vlastnosti míry $\mathbf{m}$ najdeme poloměr r_x mezi poloměry $3\tau r_{x,i}$ takový, že

$$\widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E \cap G_u(x, 5r_x)) \leq C\widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E \cap G_u(x, r_x/(3\tau))). \tag{48}$$

Systém $\{B([x, u(x), r_x])\}$ tvoří vitaliovské pokrytí grafu u na množině E'. Pomocí věty vitaliovského typu z tohoto systému vybereme nejvýše spočetný podsystém $\{B_j\}$ po dvou disjunktních „koulí“ $B_j = B([x_j, u(x_j)], r_j)$ tak, že $x_j \in E'$, $r_j = r_{x_j}$ a

$$\{[x, u(x)] : x \in E'\} \subset \bigcup_i B([x_j, u(x_j), 5r_j]). \tag{49}$$

Označme

$$\begin{aligned} A_j =& B(u(x_j), 5r_j), \\ \gamma_j =& \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap B(x_j, 5r_j) \cap u^{-1}(A_j)\right) = \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap G_u(x_j, 5r_j)\right). \end{aligned}$$

Pak pro každé $y \in Y$ s pomocí (49) dostáváme

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E' \cap u^{-1}(y)) \leq& \sum_j \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap B(x_j, 5r_j) \cap u^{-1}(y)\right) \chi_{A_j}(y) = \\ =& \sum_j \gamma_j \chi_{A_j}(y) \end{aligned}$$

Označíme-li

$$f_\varepsilon(y) = \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E'_\varepsilon \cap u^{-1}(y)),$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \Lambda^{\delta}_m(f_\varepsilon) \leq& \sum_j \gamma_j \operatorname{diam}(A_j)^m \leq \\ \leq& C \sum_j \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap G_u(x_j, 5r_j)\right) \operatorname{diam}(A_j)^m. \end{aligned} \tag{50}$$

Podle lemmatu 4.16 a (48) dostáváme

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap G_u(x_j, 5r_j)\right) \operatorname{diam}(A_j)^m \leq \\ &\leq C r_j^m \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m\left(E \cap G_u(x_j, r_j/(3\tau))\right) \leq \\ &\leq C ||(1+g)\chi_{G_u(x_j, r_j)}||^m_{L_{m,1}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Jelikož množiny $G_u(x_j, r_j)$ jsou po dvou disjunktní a všechny obsažené v G, dostáváme podle lemmatu 2.6, (51) a (50)

$$\Lambda^{\delta}_m(f_\varepsilon) \leq C||(1+g)\chi_G||^m_{L_{m,1}} \leq C\varepsilon.$$

Limitním přechodem pro $\delta \to 0$ podle (46) dostaneme

$$\int_Y^* \widehat{\mathcal{H}}^{\varepsilon}_m(E'_\varepsilon \cap u^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}_m(y) \leq C\varepsilon.$$

Pro $\varepsilon \to 0$ tedy dostaneme

$$\int_Y^* \widehat{\mathcal{H}}_m(E'_\varepsilon \cap u^{-1}(y))\, \mathrm{d}\mathcal{H}_m(y) = 0.$$

Spolu s (47) pro $\mathcal{H}_m$-skoro všechna $y \in Y$ dostáváme

$$\widehat{\mathcal{H}}_m(u^{-1}(y)) = \widehat{\mathcal{H}}_m(E'' \cap u^{-1}(y)) + \widehat{\mathcal{H}}_m(E' \cap u^{-1}(y)) = 0.$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Jako důsledek věty 4.17 a 4.15 dostáváme následující větu:

Věta 4.18. *Předpokládejme, že X je metrický prostor s doubling mírou $\mathbf{m}$, $(X, \mathbf{m})$ splňuje $(1, p)$-Poincarého nerovnost, $1 \leq p < m$, Y je omezeně kompaktní metrický prostor a $y \in Y$. Nechť $u \in N^{1,L_{m,1}}(X, Y, y)$. Pak existuje precizní repezentant $\tilde{u}$ zobrazení u v prostoru $N^{1,L_{m,1}}(X, Y, y)$. Navíc $\widehat{\mathcal{H}}_m$-skoro každý bod $x \in X$ je lebesgueovský bod zobrazení $\tilde{u}$ a $\tilde{u}$ splňuje m-coarea vlastnost.*

Důkaz. Reprezentant $\tilde{u}$ zobrazení u v prostoru $N^{1,L_{m,1}}(X, Y, y)$ s požadovanými vlastnostmi existuje podle věty 4.15. Navíc tento reprezentant $\tilde{u}$ splňuje předpoklady věty 4.17. $\square$

Poznámka. Je-li metrický prostor X navíc omezeně kompaktní a kvazikonvexní, pak podle věty 3.16 zůstává závěr věty 4.17 a 4.18 v platnosti i v případě $p = m$.

5. Literatura

[AK] L. Ambrosio, B. Kirchheim: *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math. Ann. **318,3** (2000), 527–555.

[BS] C. Bennett, R.C. Sharpley: *Interpolation of operators*, Academic Press Inc., London, 1988.

[CPSS] M. Carro, L. Pick, J. Soria, V.D. Stepanov: *On embeddings between classical Lorentz spaces*, Math. Inequal. Appl. **4** (2001), 397–428.

[C] J. Cheeger: *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 428–517.

[DU] J. Diestel, J.J. Uhl: *Vector measures*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[E] S. Eilenberg: *On φ measures*, Ann. Soc. Pol. de Math. **17** (1938), 251–252.

[F] H. Federer: *Geometric measure theory*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Ha1] P. Hajłasz: *Sobolev mappings, co-area formula and related topics*, Proceedings on Analysis and Geometry, Sobolev Institute Press, Novosibirsk (2000), 227–254.

[Ha2] P. Hajłasz: *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, J. Potential Anal. **5** (1995), 403–415.

[HaK] P. Hajłasz, P. Koskela: *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. **145**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[He] J. Heinonen: *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 2001.

[HeK1] J. Heinonen, P. Koskela: *A note on Lipschitz functions, upper gradients, and the Poincaré inequality*, New Zealand J. Math. **28** (1999), 37–42.

[HeK2] J. Heinonen, P. Koskela: *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. **181** (1998), 1–61.

[HKST] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J.T. Tyson: *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math. **85** (2001), 87–139.

[KKM] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý: *On functions with derivatives in a Lorentz space*, Manuscripta Math. **100,1** (1999), 87–101.

[KZ] S. Keith, X. Zhong: *The Poincaré inequality is an open ended property*, preprint (2003).

[KL] J. Kinnunen, V. Latvala: *Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **18**, (2002), 105–132.

[KK] V. Kokilashvili, M. Krbec: *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1991.

[M1] J. Malý: *Coarea integration in metric spaces*, Proceedings of the Spring School held in Prague July 17–22, 2002, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications **7**, (2003), 142–192.

[M2] J. Malý: *Suffitient conditions for change of variables in integral*, Proceedings on Analysis and Geometry, Sobolev Institute Press, Novosibirsk (2000), 370–386.

[MM] M. Marcus, V.J. Mizel: *Transformations by functions in Sobolev space and lower semicontinuity for parametric variational problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** no. 4 (1973), 790–795.

[MS] E.J. McShane: *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, (1934), 837–842.

[MS] J. Malý, D. Swanson, W.P. Ziemer: *The co-area formula for Sobolev mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 477–492.

[S] N. Shanmugalingam: *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 243–279.

[VP] R. Van der Putten: *On the critical-values lemma and the coarea formula* (italsky), Boll. Un. Mat. Ital. B **6,3** (1992), 561–572.