

Posudek vedoucího diplomové práce

Jakuba Fary

Modelování interakce mezi krví a disipující tepennou stěnou

Obsah práce

Diplomová práce se zabývá interakcí mezi tekoucí krví a deformující se tepennou stěnou, které jsou popsány jako nestlačitelná viskoelastická tekutina a nestlačitelná viskoelastická pevná látka. To lépe než klasické modely zachycuje realitu, neboť krev vykazuje různé nelineární jevy včetně relaxace napětí a stěna tepny disipuje energii během své deformace. K popisu je využíván jednotný viskoelastický rámec v Eulerovském popisu, ve kterém se jednotlivé komponenty liší hodnotami materiálových parametrů. Rozhraní mezi pevnou látkou a tekutinou je stopováno pomocí level-set metody. Tento nový přístup je použit k simulaci dvou problémů: pulzující proudění v tepně a FSI benchmark Turka a Hrona.

Diplomová práce se skládá ze čtyř částí, v první kapitole je shrnuta mechanika kontinua a bilanční rovnice v Eulerovském popisu, dále jsou představeny jednodimenzionální mechanické analogy rychlostního typu, konkrétně tekutinový Oldroydův element a pevnolátkový Kelvin-Voigtův element. Následně pomocí přístupu termodynamiky kontinua založeného na rozložení celkové deformace do čistě elastické části a zbytku jsou definovány dva skaláry – volná energie popisující elastickou část odezvy, a disipace popisující, jak se v tělese ztrácí energie, a je odvozen termodynamicky konzistentní viskoelastický model pro jednotný rámec. Tento jednotný model dává pro různé volby materiálových parametrů pět různých klasických modelů: tekutinový Navier-Stokes, Maxwell a Oldroyd-B a pevnolátkový neo-Hooke a Kelvin-Voigt.

Ve druhé kapitole diplomant popisuje způsob sledování rozhraní mezi dvěma látkami pomocí konzervativní level-set metody. Pokud je hodnota level-setu rovna nula, materiál se nachází v tekuté fázi, pokud jedna, pak v pevné fázi. Student dokumentuje nestabilitu dané metody a představuje reinicializaci, pomocí které po každém časovém kroku opravuje vzniklou nestabilitu.

Třetí kapitola popisuje slabou formulaci problému a metodu konečných prvků. Student odvozuje formální apriorní odhady a ukazuje souvislost s redukovanou termodynamickou identitou. Přesto tyto formální apriorní odhady neposkytují dostatek informací k tomu, v jakých funkčních prostorech hledat řešení, protože intergrály ve slabé formulaci nekonvergují. Na druhou stranu slabá formulace pro konečné prvky je smysluplná a řešení je hledáno v po částech lineárních prvcích pro p, \mathbb{B}, l a po částech kvadratických prvcích pro rychlost \mathbf{v} .

Poslední, čtvrtá, kapitola se týká numerického řešení daného jednotného modelu pro popis interakce mezi viskoelastickou tekutinou a pevnou látkou. Jako první je řešen Couetteův problém bez level-setu, kdy se předepisuje rychlost na spodní a horní desce. Pro tento problém lze nalézt časově závislé analytické řešení, které je srovnáváno s numerickým řešením. Je řešen jak plně nelineární problém pomocí Newtonovy metody, tak z důvodu zrychlení výpočtu i problém linearizovaný. Jako časové schéma je použito Crankovo-Nicolsonové schéma s pevným časovým krokem. Ukazuje se, že chyba řešení linearizovaného problému je velmi malá, podobná jako při použití Newtonovy metody. Také je studován vliv zvoleného časového schématu a časového kroku na chybu řešení. Další problémy zahrnují již neznámou level-set. Pro dobrý popis rozhraní je vhodné zjemnit síť v blízkosti přechodu mezi tekutinou a pevnou látkou, student proto implementuje adaptivitu sítě v prostředí Fenics. Druhý problém v diplomové práci se týká pulzujícího proudění v tepně. Celý problém je nejprve rozdělen na část popisující nestlačitelnost, bilanci

hybnosti, evoluci tenzoru napětí, a transportu level-setu. První část je řešena jednak jako plně nelineární, linearizovaná anebo linearizovaná s dodatečnou iterací. Student ukazuje, že rozdíl v řešení těchto variant je řádově jedno procento a nadále volí nejlevnější variantu linearizovanou bez iterací. Pro tu studuje vliv zvoleného časového kroku na změnu v řešení. V případě ostrého rozhraní se materiálové parametry skokově mění na rozhraní, v případě difuzního rozhraní, které se objevuje u level-set metody, se parametry mění spojitě. Student zkoumá kromě typicky využívané lineární tvarové funkce i tři nelineární závislosti, které umožní zaostřit rozhraní a v případě jedné z nich dokonce zaručit, že materiálový parametr nabývá požadované hodnoty i v případě, že level-set nemá hodnotu nula nebo jedna. Ukazuje se, že tato nelineární tvarová funkce je málo stabilní v porovnání s lineární tvarovou funkcí a není vhodná k numerickým simulacím. Jako poslední problém je studovaný benchmark Turka a Hrona, ve kterém dochází k interakci mezi proudící Navierovou-Stokesovou tekutinou obtékající elastický pásek připevněný k pevnému válci. Ačkoli je začátek simulace velmi slibný, po určité době dojde k odtržení kousku pásku. Důvodem je, že level-set nedosahuje v celé pevné látce hodnoty jedna, což činí pásek částečně tekutý.

Hodnocení práce

Věcná kvalita práce. Práce je obsahově velmi zdařilá. Vlastní výsledky studenta jsou následující. Nejprve student lehce modifikoval již známé výsledky, kdy provedl termodynamické odvození jednotného modelu a zpracoval jeho formální apriorní odhady. Dále student vše sám implementoval v konečněprvkovém kódu Fenics. Ten zvláště neobsahuje adaptivitu sítě a student ji musel sám napsat, aby získal dostatečně přesné rozlišení v blízkosti rozhraní. Studoval různé nelineární tvarové funkce a snažil se nalézt takovou, která mu umožní správně zaostřit rozhraní. Dále našel jednoduché analytické řešení komplexního problému, které použil jako benchmark pro ověření funkčnosti svého kódu a výběru způsobu řešení nelinearit. To pak použil k řešení dvou výše zmíněných problémů. Student samostatně řešil jednotlivé problémy, zvláště oceňuji implementaci adaptability sítě.

Formální kvalita práce. Po formální stránce má práce své nedostatky související především s jazykem práce. Některé části jsou hůře čitelné, ale věřím, že nebrání v porozumění práce. Navrhuji předloženou práci uznat jako diplomovou práci a doporučuji ji hodnotit stupněm výborně.

Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze

- Jedna z nelineárních tvarových funkcí, která nabývala krajních hodnot i pro levelset, jež nebyl přesně roven nule nebo jedné, nefungovala dobře. V čem konkrétně byl problém? Šlo by ji modifikovat, aby počítala dobře?
- V posledním problému (FSI benchmark Turek Hron) dochází z důvodu používání level-setu k odtrhávání kusu tenkého elastického proužku. Máte nějaký návrh, jak to opravit?



V Praze 6. září 2020

Karel Tůma

Matematický ústav Univerzity Karlovy