Institute of Mathematics CAS, v.v.i.
Žitná 25, 115 67 Praha 1
Czech Republic

Posudek oponenta na diplomovou práci
Ondřej Outrata: Numerical Methods for Vortex Dynamics

Autor se v diplomové práci zabývá numerickým řešením úloh proudění nestlačitelné tekutiny. Tato úloha je popsána systémem Navierových-Stokesových rovnic doplněných o rovnici kontinuity. Pro diskretizaci úlohy je zvolena metoda konečných prvků. Autor je motivován dvěma zajímavými laboratorními experimenty s tekutým Heliem. Jedná se o výtok z trysky a oscilující hranol. Kromě testovacích případů autor směřuje k numerickým simulacím těchto experimentů ve dvou i třech dimenzích.

Z mého pohledu se jedná o velmi aktuální téma s přesahem do několika oblastí. Je známo, že vznikající soustavy rovnic je náročné řešit přímými metodami vzhledem k paměťové i časové náročnosti. Je tedy zřejmé, že řešení reálných úloh se neobejde bez paralelních implementací iteračních metod, zejména ve třech dimenzích, což je jedním z témat práce. Dalším studovaným tématem je problém identifikace a vizualizace vírů, což považuji rovněž za aktuální problematiku. Konečně jsou v práci popsány a porovnány dvě metody pro řešení úloh proudění s pohyblivou hranicí, které je třeba využít pro simulaci experimentu s oscilujícím hranolem.

Jedním ze základních výsledků práce je systematický popis a porovnání metody korekce tlaku s metodami pro iterační řešení sedlobodových úloh s předpodmiňovači *least-squares commutator (LSC)* a *pressure convection diffusion (PCD)*. První přístup, který elegantně převede řešení sedlobodové úlohy v každé časové vrstvě na řešení posloupnosti tří, resp. pěti menších úloh je známý svou vysokou efektivitou pro časově závislé úlohy. Není proto překvapivý závěr první kapitoly, kdy se tento přístup ukáže asi 4x výhodnější z hlediska výpočetního času než metody založené na řešení sdružené úlohy.

Další část práce se věnuje využití veličiny *pseudovorticity* pro vizualizaci vírů. Ačkoliv se z mého pohledu jedná o zajímavý problém, motivace pro zavedení této nové veličiny není v práci příliš diskutována a je zde uveden jen odkaz na publikaci v přípravě. V této části práce se mi popis jeví jako příliš stručný a výsledky ne zcela přesvědčivé.

Ve třetí a čtvrté kapitole se pak autor věnuje popisu dvou numerických metod pro řešení úloh s pohyblivou hranicí. *Fictitious Domain (FID)* metoda je zástupcem třídy metod s pevnou výpočetní sítí, do které je těleso vloženo, aniž by se tato síť upravovala. Zde je použita metoda ve velmi jednoduché formě, kdy se za náhradní oblast bere oblast složená z původních prvků sítě. Druhou použitou metodou je metoda *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)*, která je oproti tomu zástupcem metod se sítí uzpůsobenou vnořenému tělesu. Její aproximace hranice tělesa je přirozeně lepší, nevýhodou je však nemožnost velkých geometrických změn, které vedou na nevhodné výpočetní sítě. Toto úskalí se však v prezentovaných úlohách neprojeví a dá se říci, že metoda ALE je pro studovanou úlohu výhodnější než metoda FID, která vlivem proměnlivé aproximace hranice tělesa v čase vede na značné oscilace v silách ve vybraných bodech.

Práce je poněkud zvláštně členěna do pěti kapitol, přičemž všem jim předchází nečíslované "Introduction"s úvodem do problematiky a přehledem literatury. První číslovaná kapitola se věnuje popisu matematické úlohy - Navierovým-Stokesovým rovnicím a jejich diskretizaci pomocí metody konečných prvků. Druhá kapitola je nezvána "Vortex rings", ačkoliv se z větší části věnuje popisu numerických metod pro řešení časově zavislých úloh a jejich předpodmínění. Podkapitola 2.3 obsahuje první dávku numerických výsledků. Následující podkapitola 2.4 by si podle mě zasloužila být samostatnou kapitolou. Třetí číslovaná kapitola se věnuje popisu numerických metod pro úlohy s pohyblivou hranicí. Kapitola 4 pak ukazuje další dávku numerických výsledků. Poslední kapitola se věnuje diskusi a závěrům. Členění a názvy kapitol se mi jeví poněkud nekonzistentní a ne zcela šťastné.

Práce je psána v angličtině na velmi dobré úrovni. Narazil jsem jen na drobné množství chyb a překlepů. Po formální stránce jsem našel pár nedostatků, jako "Dedication"místo "Acknowledgement", špatné pořadí reference [M. Řehoř 2018], příliš detailů u reference [T.E. Tezduyar 1991] a také sazbu tabulek jako obrázků (viz 2.14 nebo 2.15). Nejsem si pak jistý, zda rovnice (2.38) odpovídá parabolickému profilu a zda ve spodní větvi (2.39) nemá být $1 < x$.

Shrnutí:

Předložená diplomová práce zasahuje hned do několika aktuálních oborů numerické matematiky pro simulace náročných úloh nestlačitelného proudění. Autor v ní prokázal schopnost porozumět, implementovat a využít pokročilé metody a softwarové nástroje pro tyto úlohy od popisu a porozumění matematickému modelu, přes několik verzí metody konečných prvků, až po implementaci a paralelní simulace včetně testů škálovatelnosti do 400 CPU jader. Široký záběr studovaného problému a množství různých využitých metod tak považuji za silnou stránku této práce.

Na práci oceňuji zejména detailní porovnání metod korekce tlaku a metod pro iterační řešení Navierových-Stokesových rovnic se dvěma druhy předpodmínění. Dále oceňuji porovnání dvou velmi odlišných přístupů k úlohám s proměnou oblastí, metod FID a ALE. V těchto porovnáních vidím největší přínos práce.

Práce je napsána v anglickém jazyce na velmi dobré úrovni. Je doplněna řadou ilustrujících obrázků, tabulek a grafů. Čtení práce jsem si celkově užil a v několika směrech jsem si jím rozšířil znalosti. Mou jedinou drobnou výhradou je poněkud nešťastné strukturování práce.

Při čtení práce jsem narazil na několik dotazů a námětů, které uvádím níže.

Na základě předložené diplomové práce jsem přesvědčen, že Bc. Ondřej Outrata prokázal předpoklady pro udělení titulu Mgr. Témata práce a jejich zpracování jsou na vysoké úrovni. Předloženou diplomovou práci doporučuji k obhajobě. Zároveň bych chtěl předkladatele požádat o zodpovězení doplňujících dotazů uvedených níže.

Komentáře a dotazy k diplomové práci:

1. V první kapitole se v kontextu metod korekce tlaku několikrát mluví o problematice okrajových podmínek pro tlak a jeho jednoznačnost. Tato problematika je však poměrně uspokojivě řešena v přehledovém článku [Guermond, Minev, Shen 2005] metodou "Rotational incremental pressure correc-

tion scheme", kapitola 3.1. Zajímalo by mě, zda metoda z diplomové práce odpovídá slabé formulaci metody (3.14)-(3.16) z této reference. Pokud ne, jaké jsou důvody zabraňující jejímu využití? V této formulaci část hranice s přirozenou okrajovou podmínkou pro pohybovou rovnici přejde na homogenní Dirichletovu podmínku pro Poissonovu úlohu pro korektor tlaku a Dirichletova okrajová podmínka na rychlost v pohybové rovnici přejde na Neumannovu okrajovou podmínku v Poissonově úloze pro korektor tlaku. V případě Dirichletových okrajových podmínek pro rychlost na celé hranici přejde úloha pro korektor tlaku na ryze Neumannovu úlohu a řešení je třeba hledat např. v podprostoru funkcí ortogonálních na konstanty tak, jak je užito i v této diplomové práci. Tuto metodu jsme v kombinaci s ALE metodou využili v článku [J. Šístek and F. Cirak. Parallel iterative solution of the incompressible Navier-Stokes equations with application to rotating wings. Comput. & Fluids, 122:165-183, 2015.], jehož některé části by mohly být pro předkladatele diplomové práce zajímavé.

2. Jaká je motivace pro zavedení a využití veličiny *pseudovorticity*? Uvedená definice (2.40) naznačuje odvození z posunů častic v proudovém poli v rámci experimentu. Pokud se nepletu, na podobném principu funguje experimentální metoda *particle image velocimetry (PIV)*, ze které je možné určit rychlostní pole. Jak se tyto metody liší? Přirozená metoda by pak podle mě byla numerickým derivováním z něj získat gradient vektoru rychlosti v každém bodě, který je vstupem pro metody identifikace vírů, např. pro zjištění tzv. reziduální vířivosti [V. Kolář. Vortex identification: New requirements and limitations. International Journal of Heat and Fluid Flow, 28:638-652, 2007.]. Je celkem známé, že magnituda vířivosti není vhodný nástroj pro zobrazování složitějších vírů, protože nerozlišuje mezi tzv. rigidní rotací a smykem. Vířivost je proto velmi vysoká i v mezních vrstvách, kde se nejedná o víry, ale o smyk vrstev tekutiny. Úkolem pokročilých veličin pro identifikaci vírů je tak odlišení rotace a smyku. Předpokládám, že i "pseudovířivost"bude mít tento neduh z pohledu vizualizace, např. v obrázku 2.13.

3. S tím souvisí i má další otázka: Jaká je motivace pro podmínku $\mathbf{T} > 0.1\mathbf{T}_{max}$ na pomezí stran 26 a 27? Předpokládám, že $\mathbf{T}$ může nabývat kladných i záporných hodnot. Proto mi tento posun nulové hladiny není jasný.

4. Jaká je motivace pro volbu stabilizačního parametru dle (3.19)? Není zde ani odkaz na související literaturu.

5. Proč je v popisu úlohy na obr. 4.1 na pravé straně *do-nothing* a ne Dirichletova okrajová podmínka jako na levé straně?

6. Jak definujete a jaká jsou Reynoldsova čísla v úlohách v kapitole 4? Ze zadaných hodnot se mi zdají Reynoldsova čísla poměrně nízká, cca do 100. Čekal bych, že pro takto nízká Re by neměla být stabilizace třeba. Zkoušel jste tyto úlohy počítat bez stabilizace?

7. Dovolil bych si nesouhlasit se závěrem, že nestability v numerickém řešení mohou být zapříčiněny neadekvátností Navierových-Stokesových rovnic v diskusi na začátku strany 49. Sám jste ukázal, že vhodnou volbou komponent numerických metod (Eulerovo zpětné scvhéma v čase, symetrická síť, atd.) jste schopen získat věrohodné numerické řešení. Není tak otázka adekvátnosti Vámi užitého modelu spíše otázkou na shodu získaného numerického řešení s experimentem?

V Praze dne 9. 9. 2020

Ing. Jakub Šístek, Ph.D.
Matematický ústav AV ČR