

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Stein-Weissovy gradienty

Autor: Marek Malý

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Hlavním tématem práce je konstrukce třídy parciálních diferenciálních operátorů D , které působí mezi prostory funkcí definovaných na Eukleidovském prostoru s hodnotami v reprezentacích dané grupy symetrie, a které komutují s akcí této grupy na definičních oborech, resp. oborech hodnot operátoru D . Celé toto téma je speciální částí harmonické analýzy pro vektor-hodnotové funkce maticového argumentu, který byl intenzivně zkoumán od 60-tých let minulého století.

Grupou symetrií je v této práci grupa rotací $G = SO(n)$, resp. její dvojnásobné nakrytí $G = Spin(n)$. Práce proto začíná připomenutím definic těchto dvou grup a podrobným rozбором rozkladu jejich fundamentálních reprezentací na jednotlivé váhové podprostory. Další část první kapitoly je věnována problému rozkladu tenzorového součinu reprezentací na ireducibilní části. Je podrobně popsán Klimykův algoritmus pro explicitní výpočet rozkladu, který je pak ilustrován na základních příkladech součinu definující reprezentace s fundamentálními reprezentacemi grupy G .

Druhá kapitola je věnována konstrukci parciálních diferenciálních operátorů invariantních vůči akci grupy G . Je dokázáno základní tvrzení, že gradient ∇ je invariantní operátor a je popsána konstrukce vyvinutá Steinem a Weissem, která pro každou ireducibilní reprezentaci V grupy G sestrojí invariantní operátor D působící na prostoru funkcí s hodnotami v prostoru V . Druhá kapitola práce končí popisem speciálních případů, pro které vede Stein-Weissova konstrukce k definici Dirakova operátoru na prostoru spinor-hodnotových funkcí a Hodge-de Rhamova operátoru na prostoru diferenciálních forem.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Téma práce patří do moderní oblasti matematické analýzy spojené s grupami symetrií diferenciálních rovnic. Vyžaduje proto použití mnoha pojmů a postupů z oblasti teorie reprezentací Lieových grup, které nepatří mezi standardní nástroje v matematické analýze. Je to proto téma náročné pro studenty bakalářského studia. Předkládaná práce ukazuje, že M. Malý dobře zvládl základní postupy teorie konečně dimenzionálních reprezentací jednoduchých Lieových grup a zřejmě splnil zadání práce.

Hodnocení náročnosti a přiměřenosti tématu. Bylo téma zpracováno tak, aby bylo splněno zadání práce?

Vlastní příspěvek. Netriviální přínos práce spočívá v podrobném a srozumitelném zpracování Stein-Weissovy konstrukce jisté třídy invariantních diferenciálních operátorů na Eukleidovském prostoru a její aplikaci v základních případech prostorů spinorových funkcí a diferenciálních forem. Všechny podrobnosti konstrukce jsou rozebrány do detailů, práce obsahuje úplné důkazy potřebných tvrzení a explicitní a podrobné výpočty, které nejsou obsaženy v originálních člancích. Všechny části konstrukce jsou popsány systematicky, srozumitelně a přehledně, se všemi detaily.

Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? V čem tento příspěvek spočívá? Je v práci dostatečně specifikován?

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je velmi dobrá. Prezentace výsledků je přesná, používaný jazyk je matematicky korektní a srozumitelný. Práce obsahuje jen několik málo drobných nepřesností. Jsou popsány níže v 'Připomínkách a otázkách', nejsou zásadního rázu a nesnižují srozumitelnost textu.

Jaká je matematická úroveň práce? Obsahuje práce rigorózně a korektně zformulovaný matematický text?

Práce se zdroji. Zdroje používané v práci jsou uvedeny v citacích na konci práce standardním způsobem, jsou úplné a řádně citované. Jsou prezentovány s porozuměním a tam, kde je to užitečné jsou doplněny dalšími podrobnostmi.

Jsou zdroje správně citovány? Neobsahuje práce doslova zkopírované nebo otrocky přeložené pasáže?

Formální úprava. Hodnocení formální úpravy práce. Formální úprava práce je standardní, taková jaká je u dobrého matematického textu očekávána. Práce obsahuje jen minimum překlepů (našel jsem jen jeden).

PŘIPOMÍNKY

1. Strana 3, řádek 5: Grupa $SO(n)$ je souvislá, ale není jednoduše souvislá.
2. Strana 4, řádek 1: Proč a v jakém smyslu se předpokládá, že φ homomorfismus (φ je zřejmě lineární zobrazení mezi dvěma reprezentacemi G).
3. Strana 7, řádek 3 zdola: Reprezentace Λ^k je reducibilní jen pro $n = 2k$.

ZÁVĚR

Práci považuji za vynikající a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.
Návrh klasifikace vedoucí/oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

prof. Vladimír Souček, DrSc.

Matematický ústav

Datum 3.9.2020