MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

ERRATA K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Klára Karasová

Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Obsah

1. Přepracované Lemma 19 a Důsledek 20

Následující tři tvrzení z původní práce budeme potřebovat v důkazu. Jde o Pozorování 9, Pozorování 10 a Lemma 17 z původní práce.

Výsledky v této kapitole jsou inspirovány článkem [1], kromě Lemmatu 3, které vychází z práce [2] (podrobněji viz původní práce).

Pozorování 1. *Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$, $A \subseteq [0,1]$ a $u, v \in [0,1]$ jsou po sobě jdoucí v $f^{-1}(A)$. Pak $f(u), f(v)$ jsou po sobě jdoucí v A.*

Pozorování 2. *Nechť $0, 1 \in A \subseteq [0,1]$ je uzavřená a $x \in [0,1]$. Pak existují u, v po sobě jdoucí v A takové, že $x \in [u, v]$. Navíc pokud $x \notin A$, pak jsou tyto body určeny jednoznačně (až na pořadí).*

Lemma 3 (Mountain climbing theorem pro po částech lineární nekonstantní funkce)**.** *Nechť $a, b, c, d, u, v \in [0,1]$ splňují $a \neq b$, $c \neq d$ a $u \neq v$. Nechť $f : [a,b] \to [0,1]$ a $g : [c,d] \to [0,1]$ jsou po částech lineární nekonstantní funkce takové, že intervaly $f([a,b])$, $[f(a), f(b)]$, $g([c,d])$ a $[g(c), g(d)]$ splývají (a $f(a) = g(c)$). Pak existují po částech lineární nekonstantní funkce $h : [u,v] \to [a,b]$ a $j : [u,v] \to [c,d]$ splňující $fh = gj$ a $h(u) = a$, $h(v) = b$, $j(u) = c$, $j(v) = d$.*

Následující lemma je přepracované Lemma 19 z původní práce. Oproti původní práci byly upraveny důkaz i znění. V důsledku úpravy znění lemmatu bylo nutné důkaz doplnit o předpoklady indukce (cca první půl strany v důkazu) a také důkaz bodů (i) - (vii) ze znění Lemmatu 4 (cca poslední třetina strany v důkazu). Tyto části jsou tedy nové. Kromě toho byl důkaz lemmatu doplněn o některé detaily, zejména bylo nutné ošetřit případ, kdy množina A_i (viz 1.2) je prázdná.

Lemma 4. *Nechť A je* ***konečná*** *podmnožina $[0,1]$ a nechť $f, g : A \to A$ jsou funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující 0 a 1. Dále předpokládejme, že*

- *pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$,*
- *pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$.*

Pak existují množiny $A_n \subseteq [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a spojité funkce $\bar{f}$, $\bar{g}$ z $[0,1]$ na $[0,1]$ takové, že platí:

(i) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je množina A_n uzavřená a dále platí $A_0 = f(A)$.

(ii) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a u, v po sobě jdoucí v A_n platí $|u - v| \leq (1/3)^{n-1}$ a $0, 1 \in A_n$.

(iii) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $u \in A_n$ platí, že $\bar{f}(u), \bar{g}(u) \in A_{n-1}$.

(iv) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A_n platí, že buď $\bar{f}(u) \neq \bar{f}(v)$, nebo $\bar{g}(u) \neq \bar{g}(v)$.

(v) Pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in [0,1], a \neq b$ platí $[a,b] \subseteq A_n$, pak $\bar{f}$ je nekonstantní na $[a,b]$ nebo $\bar{g}$ je nekonstantní na $[a,b]$.

(vi) $\bar{f}|_A = f$, $\bar{g}|_A = g$.

(vii) $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$.

Důkaz. Indukcí najdeme množiny $A_n \subseteq [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a funkce $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, splňující:

1. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí ${f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každé u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$:
$$[f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = f_n([g_n(u), g_n(v)]) =$$
$$= g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)],$$
a zároveň $f_n g_n(u) = g_n f_n(u)$, tj. funkce f_n a g_n komutují na ${f_n}^{-1}(A_n)$.
3. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí, že f_n, g_n jsou po částech lineární a A_n je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených intervalů.
4. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$ platí, že $f_n(u) \neq f_n(v)$ nebo $g_n(u) \neq g_n(v)$.
5. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A_n platí, že každá z funkcí f_n, g_n je buď konstantní, nebo po částech lineární nekonstantní na $[u, v]$, přičemž alespoň jedna z nich je po částech lineární nekonstantní na $[u, v]$, a tedy lokálně nekonstantní na $[u, v]$.
6. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $A_n \subseteq {f_n}^{-1}(A_n)$.
7. $\forall n \in \mathbb{N}$:
   - $A \subseteq A_n$,
   - $A_n = {f_{n-1}}^{-1}(A_{n-1})$,
   - pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí $|u - v| \leq (1/3)^{n-1}$,
   - pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí $f_n([u, v]) = [f_n(u), f_n(v)]$ a $g_n([u, v]) = [g_n(u), g_n(v)]$,
   - $f_n|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$ a $f_n|_A = f$,
   - $g_n|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$ a $g_n|_A = g$,
   - $f_{n-1} g_n = g_{n-1} f_n$.

Položme $A_0 := f(A) = g(A)$, $f_0 := f*$, $g_0 := g*$ (můžeme, neboť z předpokladů $0, 1 \in f(A) \subseteq A$).

Z toho, že funkce f a g jsou z A do A a bez skoků, dostáváme

$${f_0}^{-1}(A_0) = {g_0}^{-1}(A_0) = A \text{ (bod 1).}$$

Pro ověření bodu 2 předpokládejme, že u a v jsou po sobě jdoucí v A. Použitím předpokladů pro $a := u$ a $a' := u$ dostáváme $g([f(u), f(u)]) \subseteq [fg(u), fg(u)]$, tj. $fg(u) = gf(u)$, a analogicky se ukáže $fg(v) = gf(v)$. Tedy

$$[fg(u), fg(v)] = [gf(u), gf(v)].$$

Užitím téhož předpokladu pro $a := u$ a $a' := v$ dostáváme, že $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Tedy ihned z definice $f*$, $g*$ dostáváme i $f*([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g*([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Opačné inkluze plynou z toho, že spojité funkce $f*$ a $g*$ nabývají mezihodnot. Tedy je splněn bod 2 pro $n = 0$.

Funkce $f*$ a $g*$ jsou zřejmě po částech lineární. Z předpokladu, že pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$, ihned dostáváme, že jsou na každém úseku také nekonstantní. Tedy jsou splněny i body 3 a 5.

Bod 4 plyne z toho, že ${f_0}^{-1}(A_0) = A$, a z předpokladu, že pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$.

Bod 6 plyne z toho, že $A_0 = f(A) \subseteq A = f*^{-1}(f(A)) = {f_0}^{-1}(A_0)$.

Jsou-li pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ A_n, f_n a g_n definovány, položíme $A_{n+1} := {f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$. Nechť $l \in \mathbb{N}$ je počet disjunktních uzavřených intervalů, jejichž sjednocením je A_n, $m \in \mathbb{N}$ je počet intervalů, na kterých je f_n lineární nekonstantní, a tedy prosté, a $k \in \mathbb{N}$ počet intervalů, na kterých je f_n konstantní. Pak A_{n+1} je sjednocením nejvýše $m \cdot l + k$ disjunktních uzavřených intervalů, protože průnik A_{n+1} s každým z m intervalů, na kterých je f_n prosté, se rozkládá na disjukntní uzavřené intervaly stejně jako obraz tohoto průniku při zobrazení f_n. Tento obraz je ovšem podmnožinou A_n.

Položme $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = f_n|_{A_{n+1}}$, $g_{n+1}|_{A_{n+1}} = g_n|_{A_{n+1}}$. Dále pro každé $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A_{n+1} definujeme $f_{n+1}|_{[u,\,v]}$ a $g_{n+1}|_{[u,\,v]}$ v závislosti na tom, jestli $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, nebo $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$.

Pokud $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, definujeme obě funkce přímo: položíme $f_{n+1}(u) := f_n(u)$, $f_{n+1}(2u/3 + v/3) := f_n(v)$, $f_{n+1}(u/3 + 2v/3) := f_n(u)$, $f_{n+1}(v) := f_n(v)$ a dodefinujeme $f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ tak, aby $f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ byla lineární na každém z intervalů $[u,\ 2u/3 + v/3]$, $[2u/3 + v/3,\ u/3 + 2v/3]$ a $[u/3 + 2v/3,\ v]$, analogicky definujeme g_{n+1}. Z indukčního předpokladu pro n (bod 4) máme zaručeno, že alespoň jedna z těchto funkcí je po částech lineární nekonstantní, a navíc každá z těchto dvou funkcí je buď po částech lineární nekonstantní, nebo konstantní na $[u, v]$. Tedy je splněn bod 5.

Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, jsou splněny předpoklady Lemmatu 3 pro $a := g_n(u)$, $b := g_n(v)$, $c := f_n(u)$, $d := f_n(v)$ a funkce $f_n|_{[a,\,b]}$, $g_n|_{[c,\,d]}$. Protože $g_n f_n(u) = f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v) = g_n f_n(v)$, nutně také $c = f_n(u) \neq f_n(v) = d$, $a = g_n(u) \neq g_n(v) = b$ a $u \neq v$. Z indukčního předpokladu, bod 2 platí, že $[f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = f_n([g_n(u), g_n(v)]) = g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)]$ a zároveň $f_n g_n(u) = g_n f_n(u)$.

Protože $A_{n+1} = {f_n}^{-1}(A_n)$ a u, v jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, z pozorování 1 dostáváme, že a, b jsou po sobě jdoucí v A_n. Z indukčního předpokladu, bod 5, tedy dostáváme, že f_n je buď konstantní, nebo po částech lineární nekonstantní na $[a, b]$. Pokud by ale funkce f_n byla na $[a, b]$ konstantní, nutně by platilo $f_n g_n(u) = f_n(a) = f_n(b) = f_n g_n(v)$, což je spor s předpokladem $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$. Tedy f_n je po částech lineární nekonstantní na $[a, b]$. Analogicky se ukáže, že g_n je po částech lineární nekonstantní na $[c, d]$. Ověřili jsme předpoklady Lemmatu 3, existují tedy po částech lineární nekonstantní funkce $j : [u, v] \to [f_n(u),\ f_n(v)]$ a $h : [u,\ v] \to [g_n(u),\ g_n(v)]$ takové, že $f_n h = g_n j$ a $j(u) = f_n(u)$, $j(v) = f_n(v)$, $h(u) = g_n(u)$ a $h(v) = g_n(v)$.

Kdybychom definovali funkce $f_{n+1}|_{[u,\,v]}, g_{n+1}|_{[u,\,v]}$ jako $f_{n+1}|_{[u,\,v]} := j$, $g_{n+1}|_{[u,\,v]} := h$, nemusel by být splněn bod 4. Funkce h, j proto nejprve upravíme a funkce $f_{n+1}|_{[u,\,v]}, g_{n+1}|_{[u,\,v]}$ pak definujeme až pomocí těchto upravených funkcí.

Označme

$$X := \{x \in A_{n+1}, x \text{ neleží ve vnitřku } A_{n+1}\} \cup \{0, 1\}, \tag{1.1}$$

neboli X je hranice A_{n+1} (jakožto podmnožiny $\mathbb{R}$). Ještě jinak, X je množina krajních bodů uzavřených intervalů, jejichž disjunktním sjednocením je A_{n+1}. Proto je X konečná a tedy i $X \times X$ je konečná, uspořádáme ji do prosté posloupnosti $X \times X = \{[a_i, b_i]; 1 \leq i \leq I\}$. Indukcí definujeme body v_i a funkce $j_i : [u, v_i] \to [f_n(u), f_n(v)]$, $h_i : [u, v_i] \to [g_n(u), g_n(v)]$, $0 \leq i \leq I$. Položme $v_0 := v$, $h_0 := h$ a $j_0 := j$. Je-li pro $1 \leq i \leq I$ definováno v_{i-1}, h_{i-1} a j_{i-1}, položme

$$A_i := \{x \in [u, v_{i-1}]; h_{i-1}(x) = a_i \,\&\, j_{i-1}(x) = b_i\}. \tag{1.2}$$

Množina A_i je zřejmě uzavřená. Rozlišíme, zda-li je A_i prázdná, nebo ne.

Pokud je A_i prázdná, definujeme $v_i := v_{i-1}$, $h_i := h_{i-1}$ a $j_i := j_{i-1}$. Pokud je A_i neprázdná, položme

$$c := \inf A_i = \min A_i,$$
$$d := \sup A_i = \max A_i,$$

$v_i := v_{i-1} - (d - c)$ a definujme funkce h_i, j_i předpisy:

$$h_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}(x), & x \leq c, \\ h_{i-1}(x + (d - c)), & c \leq x \end{cases}$$

a podobně

$$j_i(x) = \begin{cases} j_{i-1}(x), & x \leq c, \\ j_{i-1}(x + (d - c)), & c \leq x. \end{cases}$$

Všimněme si, že pro každé i jsou funkce h_i, j_i spojité, neboť jsou spojité v každém bodě, splňují $f_n h_i = g_n j_i$ (triviálně, neboť jde o bodovou vlastnost) a $j_i(u) = f_n(u)$, $j_i(v_i) = f_n(v)$, $h_i(u) = g_n(u)$, $h_i(v_i) = g_n(v)$. Všimněme si, že z toho (díky $f_n(u) \neq f_n(v)$) plyne $j_i(u) \neq j_i(v_i)$, a tedy $u \neq v_i$ pro každé $1 \leq i \leq I$. Navíc funkce h_I, j_I splňují, že pro každé $i \leq I$ platí $|(h_I \times j_I)^{-1}[a_i, b_i]| \leq 1$.

Označme h', j' složení funkcí h_I, j_I s lineární bijekcí intervalu $[u, 2u/3 + v/3]$ na $[u, v_I]$ (to lze právě díky tomu, že $u \neq v_I$). To jsou opět spojité, po částech lineární nekonstantní funkce splňující $f_n h' = g_n j'$, $j'(u) = f_n(u)$, $j'(2u/3 + v/3) = f_n(v)$, $h'(u) = g_n(u)$, $h'(2u/3 + v/3) = g_n(v)$. Také pro každé $i \leq I$ platí $|(h' \times j')^{-1}[a_i, b_i]| \leq 1$. Nyní už můžeme definovat funkce $f_{n+1}|_{[u,\, v]}$, $g_{n+1}|_{[u,\, v]}$:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} j'(x), & x \in [u, 2u/3 + v/3], \\ j'(4u/3 + 2v/3 - x), & x \in [2u/3 + v/3, u/3 + 2v/3], \\ j'(2u/3 - 2v/3 + x), & x \in [u/3 + 2v/3, v] \end{cases}$$

a podobně

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} h'(x), & x \in [u, 2u/3 + v/3], \\ h'(4u/3 + 2v/3 - x), & x \in [2u/3 + v/3, u/3 + 2v/3], \\ h'(2u/3 - 2v/3 + x), & x \in [u/3 + 2v/3, v]. \end{cases}$$

Takto získáme funkce f_{n+1}, g_{n+1}, které jsou na konečně mnoha ($\leq 2\cdot(m\cdot l+k)$) svých definujících intervalech po částech lineární, a tedy jsou po částech lineární (součet konečně mnoha přirozených čísel je přirozené číslo). Ověříme předpoklady 1– 7 pro $n+1$:

6 S využitím $A_{n+1} = {f_n}^{-1}(A_n)$, $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = f_n|_{A_{n+1}}$, což plyne ihned z konstrukce, a $A_n \subseteq {f_n}^{-1}(A_n) = A_{n+1}$ z bodu 6 indukčního předpokladu pro n dostáváme:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= {f_n}^{-1}(A_n) && /f_n() \\ f_{n+1}(A_{n+1}) = f_n(A_{n+1}) &= f_n({f_n}^{-1}(A_n)) \subseteq A_n && /{f_{n+1}}^{-1}() \\ A_{n+1} \subseteq {f_{n+1}}^{-1}(f_{n+1}(A_{n+1})) &\subseteq {f_{n+1}}^{-1}(A_n) \subseteq {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Ověříme bod 7:

- Pro každé u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} platí $|u-v| \leq (1/3)^n$: pro $n=0$ platí triviálně. Nechť tedy $n \geq 1$ a nechť u, v jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}. Předpokládejme, že $u \neq v$, protože pro $u = v$ tvrzení zřejmě platí.

  Vezměme libovolné $x \in (u,,v)$ a z pozorování 2 najdeme a, b po sobě jdoucí v A_n taková, že $x \in [a, b]$. Protože platí $A_n \subseteq A_{n+1}$, jak jsme dokázali výše, nutně $[u, v] \subseteq [a, b]$. Ihned z konstrukce navíc plyne, že $2a/3 + b/3, a/3 + 2b/3 \in A_{n+1}$. Tedy interval $[u, v]$ je dokonce nutně podmnožinou některého z intervalů $[a, 2a/3 + b/3]$, $[2a/3 + b/3, a/3 + 2b/3]$, $[a/3 + 2b/3, b]$. Z indukčního předpokladu máme $|a - b| \leq (1/3)^{n-1}$. Celkem tedy $|u - v| \leq (1/3)^n$.

- Pro každé u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} platí $f_{n+1}([u, v]) = [f_{n+1}(u), f_{n+1}(v)]$ a $g_{n+1}([u, v]) = [g_{n+1}(u), g_{n+1}(v)]$: ihned plyne z konstrukce.

- $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = f_n|_{A_{n+1}}$ a $f_{n+1}|_A = f$,

- $g_{n+1}|_{A_{n+1}} = g_n|_{A_{n+1}}$ a $g_{n+1}|_A = g$: tyto dva body rovněž ihned plynou z konstrukce a indukčního předpokladu.

- $f_n g_{n+1} = g_n f_{n+1}$: Nechť u, v jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, ověříme, že

  $$f_n g_{n+1}|_{[u,\,v]} = g_n f_{n+1}|_{[u,\,v]}$$

  (a to stačí, neboť intervaly tohoto tvaru pokrývají $[0, 1]$).

  Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, tvrzení plyne ihned z konstrukce. Předpokládejme tedy, že $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$. Pak z indukčního předpokladu dostáváme:

  $$g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_n(v) = g_n f_n(v),$$

  $$\begin{aligned} f_n([g_n(u), g_n(v)]) &= [f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = \{f_n g_n(u)\}, \\ g_n([f_n(u), f_n(v)]) &= [g_n f_n(u), g_n f_n(v)] = \{g_n f_n(u)\}. \end{aligned}$$

  Nechť $w \in [u, v]$, z konstrukce ihned plyne $f_{n+1}(w) \in [f_n(u), f_n(v)]$, $g_{n+1}(w) \in [g_n(u), g_n(v)]$. Celkem tedy:

  $$g_n f_{n+1}(w) = g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_{n+1}(w).$$

5 Bylo dokázáno už v průběhu konstrukce.

1 S využitím indukčního předpokladu a 6 pro každé $x \in [0,1]$ dostáváme :

$$f_{n+1}(x) \in A_{n+1} \Leftrightarrow g_n f_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow f_n g_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow g_{n+1}(x) \in A_{n+1}.$$

2 Ať u, v jsou po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, pak z pozorování 1 dostáváme, že $f_{n+1}(u), f_{n+1}(v)$ jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, a tedy z bodu 7 plyne

$$g_{n+1}([f_{n+1}(u),\, f_{n+1}(v)]) = [g_{n+1}f_{n+1}(u),\, g_{n+1}f_{n+1}(v)].$$

Podobně díky bodu 1 jsou i $g_{n+1}(u), g_{n+1}(v)$ po sobě jdoucí v A_{n+1}, proto platí analogicky rovnost $f_{n+1}([g_{n+1}(u),\, g_{n+1}(v)]) = [f_{n+1}g_{n+1}(u),\, f_{n+1}g_{n+1}(v)]$. Stačí tedy dokázat, že f_{n+1} a g_{n+1} komutují na ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$. Ať $u \in {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, s využitím bodu 7 dostáváme

$$g_{n+1}f_{n+1}(u) \;=\; g_n f_{n+1}(u) \;=\; f_n g_{n+1}(u) \;=\; f_{n+1}g_{n+1}(u).$$

3 Bylo dokázáno už v průběhu konstrukce.

4 Jsou-li $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, vezmeme libovolné $x \in (u,v)$ a najdeme a, b po sobě jdoucí v A_{n+1}, že $x \in [a,b]$. Protože $A_{n+1} \subseteq {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, jak jsme dokázali výše, nutně $[u,v] \subseteq [a,b]$. Kdyby některá z funkcí f_{n+1}, g_{n+1} byla na $[a,b]$ konstantní, pak by platilo $[u,v] \subseteq [a,b] \subseteq {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, což by byl spor s tím, že $u, v, u \neq v$ jsou po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$.

Ihned z konstrukce plyne $2a/3+b/3, a/3+2b/3 \in {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, tedy platí buď $[u,v] \subseteq [a, 2a/3+b/3]$, nebo $[u,v] \subseteq [2a/3+b/3, a/3+2b/3]$, nebo $[u,v] \subseteq [a/3+2b/3, b]$. Pokud $f_n g_n(a) = f_n g_n(b)$, jsou z konstrukce funkce f_{n+1}, g_{n+1} na každém z intervalů $[a, 2a/3 + b/3]$, $[2a/3 + b/3, a/3 + 2b/3]$, $[a/3 + 2b/3, b]$ prosté (a lineární). Tedy nutně $f_{n+1}(u) \neq f_{n+1}(v)$ a $g_{n+1}(u) \neq g_{n+1}(v)$, což je dokonce silnější podmínka, než požadujeme.

Předpokládejme, že $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$. Ukážeme, že $f_{n+1}(u)$ je krajním bodem A_{n+1}. To, že $f_{n+1}(v), g_{n+1}(u)$ a $g_{n+1}(v)$ jsou krajními body A_{n+1}, se ukáže analogicky. Zřejmě $f_{n+1}(u) \in A_{n+1}$, nechť pro spor $f_{n+1}(u)$ leží ve vnitřku A_{n+1}. Pak ale u leži ve vnitřku ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, neboť vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřená množina. Pak ale $u \neq v$ nemohou být po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, spor.

Tedy všechny body $f_{n+1}(u), f_{n+1}(v), g_{n+1}(u)$ a $g_{n+1}(v)$ ležely v množině X (viz 1.1) z konstrukce funkcí $f_{n+1}|_{[a,b]}$, $g_{n+1}|_{[a,b]}$. Proto dvojice $[f_{n+1}(u), g_{n+1}(u)]$ a $[f_{n+1}(v), g_{n+1}(v)]$ ležely v $X \times X$ z konstrukce funkcí $f_{n+1}|_{[a,b]}$, $g_{n+1}|_{[a,b]}$. Každé dvojice z $X \times X$ ale funkce $f_{n+1}|_{[a,b]} \times g_{n+1}|_{[a,b]}$ nabývá na každém z intervalů $[a, 2a/3+b/3]$, $[2a/3+b/3, a/3+2b/3]$, $[a/3 + 2b/3, b]$ nejvýše jednou a víme, že $u \neq v$. Tedy buď $f_{n+1}(u) \neq f_{n+1}(v)$ nebo $g_{n+1}(u) \neq g_{n+1}(v)$.

Tím je indukční krok dokončen.

Ukážeme, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ a u, v po sobě jdoucí v A_n platí $f_m([u,\, v]) = [f_m(u),\, f_m(v)]$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné, tvrzení dokážeme indukcí podle m. Pro $n = m$ dostáváme požadované okamžitě z bodu 7. Mějme tedy $m > n$ a předpokládejme, že pro $m - 1$ tvrzení platí. Inkluze $f_m([u,\, v]) \supseteq [f_m(u),\, f_m(v)]$ plyne z toho, že spojitá funkce f_m nabývá mezihodnot.

Pro důkaz opačné inkluze předpokládejme, že $a, b \in [u,v]$ jsou po sobě jdoucí v A_m, ukážeme, že $f_m([a,b]) \subseteq [u,v]$. To stačí, protože intervaly tohoto tvaru pokrývají $[u,v]$, neboť pro každé a', b' po sobě jdoucí v A_m platí buď $[a',b'] \subseteq [u,v]$, nebo $[a',b'] \subseteq [0,1] \setminus (u,v)$. Z bodů 6 a 7 totiž snadno indukcí plyne $A_n \subseteq A_m$. S využitím bodu 7 dostáváme

$$f_m([a,b]) = [f_m(a), f_m(b)] = [f_{m-1}(a), f_{m-1}(b)] \subseteq f_{m-1}([a,b]) \subseteq [u,v],$$

kde předposlední inkluze plyne z toho, že spojitá funkce f_{m-1} nabývá mezihodnot, a v poslední inkluzi využíváme indukční předpoklad. Analogicky se ukáže, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ a u, v po sobě jdoucí v A_n platí $g_m([u,\ v]) = [g_m(u),\ g_m(v)]$.

Posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejnoměrně cauchyovské, protože pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ platí $f_m([u,\ v]) = [f_m(u),\ f_m(v)] = [f_n(u),\ f_n(v)] = f_n([u,\ v])$, a navíc $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 1/3^{n-2}$ kdykoli u, v jsou po sobě jdoucí v A_n (pak z pozorování 1 jsou $f_n(u) = f_{n-1}(u), f_n(v) = f_{n-1}(v)$ po sobě jdoucí v A_{n-1}), a tedy $\|f_m - f_n\|_{sup} \leq 1/3^{n-2}$; analogicky pro g_n. Tedy existují spojité funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$, ke kterým posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konvergují.

Z bodu 7 $\bar{f}|_A = f$, $\bar{g}|_A = g$, tedy je splněn bod (vi), a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\bar{f}|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$, $\bar{g}|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$. Dále z bodu 7 $\bar{f}$ a $\bar{g}$ komutují na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, což je hustá podmnožina $[0,\ 1]$ z bodu 7, a tedy komutují na $[0,\ 1]$, tedy je splněn bod (vii).

Podmínka (i) plyne z bodu 3 a z konstrukce, podmínka (ii) plyne z bodů 6, 7 a $0, 1 \in f(A) = A_0$. Podmínka (iii) plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $u \in A_n$ platí $\bar{f}(u) = f_{n-1}(u) \in A_{n-1}$ a podobně $\bar{g}(u) = g_{n-1}(u) \in A_{n-1}$. Využili jsme toho, že $A_n = {f_{n-1}}^{-1}(A_{n-1=}) = {g_{n-1}}^{-1}(A_{n-1=})$, body 1 a 7.

Dokážeme podmínku (iv). Nechť $n \in \mathbb{N}$ a u, v jsou po sobě jdoucí v A_n. Pak platí $\bar{f}(u) = f_{n-1}(u)$ a $\bar{f}(v) = f_{n-1}(v)$. Z bodu 4 s využitím bodu 7 ($A_n = f_{n-1}(A_{n-1})$) dostáváme požadované.

Dokážeme podmínku (v). Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in [0, 1], a \neq b$ splňují $[a, b] \subseteq A_n$. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že (a, b) není podmnožinou A_m; takové m existuje, neboť $A_1 = A$ je konečná. Najdeme $x \in (a, b) \setminus A_m$ a u, v po sobě jdoucí v A_m takové, že $x \in [u, v]$. Nyní $|[a, b] \cap [u, v]| > 1$, neboť x je vnitřním bodem obou intervalů.

Z $\bar{f}|_{A_{m+1}} = f_m|_{A_{m+1}}$, $\bar{g}|_{A_{m+1}} = g_m|_{A_{m+1}}$ a $[a, b] \subseteq A_{m+1}$ dostáváme $f_m|_{[a,b]} = \bar{f}|_{[a,b]}$, $g_m|_{[a,b]} = \bar{g}|_{[a,b]}$. Z bodu 5 je alespoň jedna z funkcí f_m, g_m lokálně nekonstantní na $[u, v]$ a tedy nekonstantní na $[a, b] \cap [u, v]$. Tedy alespoň jedna z funkcí $\bar{f}, \bar{g}$ je nekonstantní na $[a, b] \cap [u, v]$ a proto nekonstantní na $[a, b]$.

Tím je lemma dokázáno.

$\square$

Následující důsledek je upravený Důsledek 20 z původní práce. Důkaz byl upraven tak, aby odpovídal Lemmatu 4.

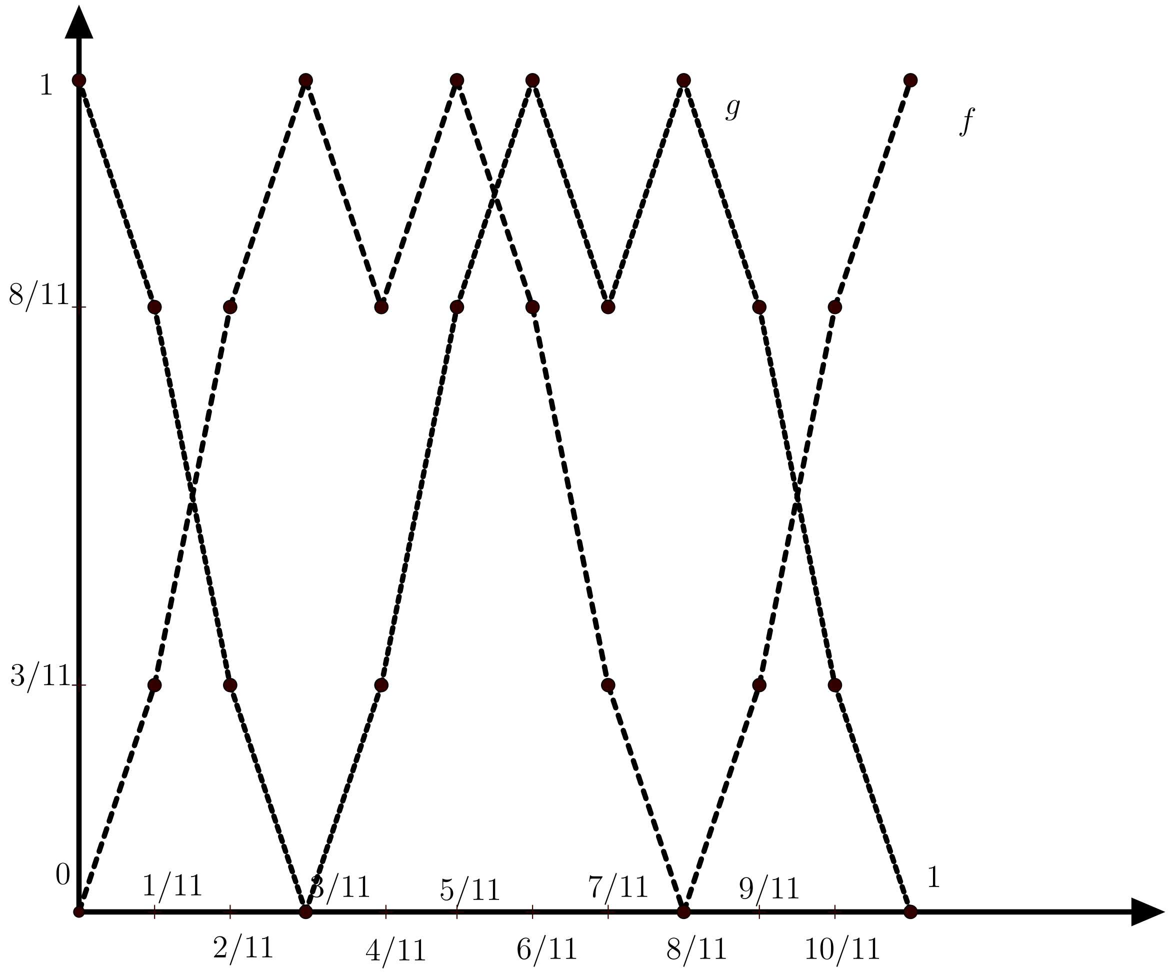
Důsledek 5. *Existují komutující spojité funkce $\bar{f}, \bar{g}$ (různé, ani jedna z nich není identita, ani jedna z nich není mocninou druhé vzhledem ke skládání) intervalu $[0, 1]$ na sebe takové, že jediná množina $E \subseteq [0, 1]$ s neprázdným vnitřkem splňující $\bar{f}(E) \subseteq E$ a $\bar{g}(E) \subseteq E$ je množina $E = [0, 1]$.*

Důkaz. Položme

$$A := \{n/11;\ n = 0, \dots, 11\}$$

a definujme funkce $f, g : A \to A$ následovně:

$$f(n/11) := \begin{cases} 0, & n = 0, 8, \\ 3/11, & n = 1, 7, 9, \\ 8/11, & n = 2, 4, 6, 10, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 1.1: Funkce f, g, resp. $f*$, $g*$

$$g(n/11) := \begin{cases} 0, & n = 3, 11, \\ 3/11, & n = 2, 4, 10, \\ 8/11, & n = 1, 5, 7, 9, \\ 1, & \text{jinak (viz obrázek 1.1).} \end{cases}$$

Ověříme, že jsou splněny předpoklady Lemmatu 4. Zřejmě množina A je konečná a funkce f, g z A do A jsou funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující $0, 1$. Dále je zřejmé, že pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí, že $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$.

Ověříme, že pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$. Nejprve tuto podmínku ověříme pro $a = a'$, v takovém případě $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ platí triviálně a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ je ekvivalentní podmínce $fg(a) = gf(a)$.

Tedy: $fg(0) = f(1) = 1 = g(0) = gf(0)$, $fg(1/11) = f(8/11) = 0 = g(3/11) = gf(1/11)$, $fg(2/11) = f(3/11) = 1 = g(8/11) = gf(2/11)$, $fg(3/11) = f(0) = 0 = g(1) = gf(3/11)$, $fg(4/11) = f(3/11) = 1 = g(8/11) = gf(4/11)$, $fg(5/11) = f(8/11) = 0 =$

$g(1) = gf(5/11)$, $fg(6/11) = f(1) = 1 = g(8/11) = gf(6/11)$, $fg(7/11) = f(8/11) = 0 = g(3/11) = gf(7/11)$, $fg(8/11) = f(1) = 1 = g(0) = gf(8/11)$, $fg(9/11) = f(8/11) = 0 = g(3/11) = gf(9/11)$, $fg(10/11) = f(3/11) = 1 = g(8/11) = gf(10/11)$, $fg(1) = f(0) = 0 = g(1) = gf(1)$.

Ukážeme, že pro $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A vždy platí $[fg(a), fg(a')] = [0, 1]$, a tedy nutně $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$. Platí totiž $fg(0) = 1$, $fg(1/11) = 0$, $fg(2/11) = 1$, $fg(3/11) = 0$, $fg(4/11) = 1$, $fg(5/11) = 0$, $fg(6/11) = 1$, $fg(7/11) = 0$, $fg(8/11) = 1$, $fg(9/11) = 0$, $fg(10/11) = 1$, $fg(1) = 0$.

Tedy existují množiny $A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a spojité funkce $\bar{f}, \bar{g}$ ze závěru Lemmatu 4. Ukážeme, že funkce $\bar{f}$, $\bar{g}$ jsou hledanými funkcemi. Z bodu (vii) funkce $\bar{f}, \bar{g}$ komutují. Z bodu (vi) funkce $\bar{f}, \bar{g}$ rozšiřují funkce f, g, z toho ihned plyne, že jsou na, že jsou různé a že ani jedna z nich není identita.

Ukážeme, že se ani jedna z funkcí $\bar{f}, \bar{g}$ nerovná dokonce libovolné mocnině (vzhledem ke skládání) druhé z funkcí $\bar{f}, \bar{g}$. Přesněji, ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $(\bar{f})^n \neq \bar{g}$, kde

$$(\bar{f})^n := \underbrace{\bar{f} \circ \bar{f} \circ \cdots \circ \bar{f}}_{n\times}.$$

Pro $n = 0, 1$ je tvrzení zřejmé, nechť tedy $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n \geq 2$. Platí $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$ a dále $f^2(A) = f(f(A)) = f(\{0, 3/11, 8/11, 1\}) = \{0, 1\}$. Protože $\bar{f}|_A = f|_A$, $\bar{g}|_A = g|_A$ a funkce f, g jsou z A do A, platí $(\bar{f})^n(A) = f^n(A) = f^{n-2}(f^2(A)) = f^{n-2}(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, zatímco $\bar{g}(A) = g(A) = \{0, 3/11, 8/11, 1\}$. Tedy $(\bar{f})^n \neq \bar{g}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Analogicky se ukáže, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $(\bar{g})^n \neq \bar{f}$.

Nechť tedy $E \subseteq [0, 1]$ je množina s neprázdným vnitřkem splňující $\bar{f}(E) \subseteq E$ a $\bar{g}(E) \subseteq E$, najdeme x z vnitřku E a $n \in \mathbb{N}$ dost velké, aby $[x-(1/3)^n, x+(1/3)^n] \subseteq E$. Z Lemmatu 4, bod (ii) najdeme $u, v \in A_{n+1}, u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq [x - (1/3)^n, x + (1/3)^n] \subseteq E$.

Pozorování: Existují-li pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ body $u, v \in A_n, u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq E$, pak existují $u', v' \in A_{n-1}, u' \neq v'$ takové, že $[u', v'] \subseteq E$.

Důkaz pozorování: Pokud existuje $x \in [u, v] \setminus A_n$, najdeme a, b po sobě jdoucí v A_n taková, že $x \in [a, b]$. Pak zřejmě $[a, b] \subseteq [u, v]$ a $a \neq b$. Z Lemmatu 4, bod (iv) dostáváme, že $\bar{f}(a) \neq \bar{f}(b)$ nebo $\bar{g}(a) \neq \bar{g}(b)$. Předpokládejme, že $\bar{f}(a) \neq \bar{f}(b)$, v případě, že by platilo $\bar{g}(a) \neq \bar{g}(b)$, by se postupovalo analogicky.

Položme $u' := \bar{f}(a)$, $v' := \bar{f}(b)$, z Lemmatu 4, bod (iii) víme $u', v' \in A_{n-1}$. Protože spojitá funkce $\bar{f}$ nabývá mezihodnot, dostáváme:

$$[u', v'] = [\bar{f}(a), \bar{f}(b)] \subseteq \bar{f}([u, v]) \subseteq \bar{f}(E) \subseteq E.$$

Pokud platí $[u, v] \subseteq A_n$, pak z lemmatu 4, bod (v) dostáváme, že $\bar{f}$ nebo $\bar{g}$ je nekonstantní na $[u,v]$. Předpokládejme, že $\bar{f}$ je nekonstantní na $[u, v]$, v případě, že by nekonstantní na $[u, v]$ byla pouze funkce $\bar{g}$, by se postupovalo analogicky. Najdeme tedy $u', v' \in \bar{f}([u, v]), u' \neq v'$. Z Lemmatu 4, bod (iii) víme, že $u', v' \in A_{n-1}$. Protože spojitá funkce $\bar{f}$ nabývá mezihodnot, dostáváme

$$[u', v'] \subseteq \bar{f}([u, v]) \subseteq \bar{f}(E) \subseteq E.$$

Tím jsme dokázali pozorování.

Nyní opakovaným použitím pozorování dostáváme, že existují $u, v \in A_0$, $u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq E$. Najdeme $a, b, a \neq b$ po sobě jdoucí v A_0 takové, že $[a, b] \subseteq [u, v] \subseteq E$. Pokud je např. $u < v$, můžeme položit $a := u$ a $b := \min(A_0 \cap (u, 1])$. Z Lemmatu 4, bod (i) víme, že $A_0 = f(A) = \{0, 3/11, 8/11, 1\}$. Pro každá taková a, b tedy platí $[f(a), f(b)] = [0, 1]$, neboť $f(0) = 0$, $f(3/11) = 1$, $f(8/11) = 0$ a $f(1) = 1$. Protože z Lemmatu 4, bod (vi) platí $\bar{f}|_A = f|_A$, dostáváme:

$$[0,1] = [f(a), f(b)] = [\bar{f}(a), \bar{f}(b)] \subseteq \bar{f}([u,v]) \subseteq \bar{f}(E) \subseteq E,$$

kde v první inkluzi využíváme toho, že spojitá funkce $\bar{f}$ nabývá mezihodnot. Dokázali jsme tedy $E = [0,1]$, jak jsme chtěli.

$\square$

2. Důkaz k Příkladu 22

V této kapitole uvedeme kompletní důkaz k Příkladu 22 z původní práce. Nová je část označená jako „důkaz“.

Následující důsledek byl publikován v článku [1].

Důsledek 6 (B — verze z článku)**.** *Nechť A je uzavřená řídká podmnožina* $[0,1]$ *a* $f, g : A \to A$ *spojité funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující* $0, 1$. *Nechť pro každé* u, v *po sobě jdoucí v* A *platí, že* $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ *a* $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. *Pak existují rozšíření funkcí* f *a* g *na spojité funkce* $\bar{f}, \bar{g} : [0,1] \to [0,1]$ *takové, že* $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, *a navíc pro každé* u, v *po sobě jdoucí v* A *platí* $\bar{f}([u,v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u,v]) = [g(u), g(v)]$.

Tento důsledek neplatí. Následující protipříklad je modifikací příkladu uvedeného ve druhé kapitole práce [2].

Příklad 7 (B1 — Protipříklad na Důsledek 6)**.** *Položme*

$$A_1 := \{1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2};\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\begin{aligned} A_2 &:= \{1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} \pm 2^{-n-1-i};\ n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}\}, \\ A_3 &:= \{1/2 + 2^{-2-i};\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{1/2\}, \\ A_4 &:= \{7/8 \pm 2^{-2-i};\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{7/8\}, \\ A &:= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \end{aligned}$$

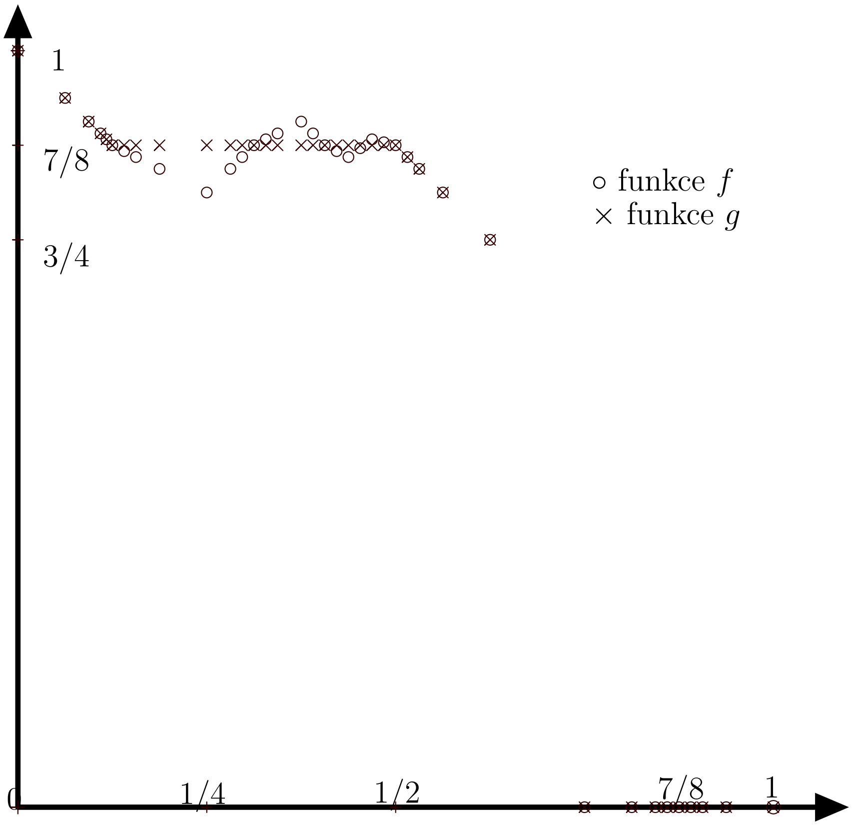
a definujeme $f : A \to A$ *následovně:*

$$f(x) = \begin{cases} 7/8, & x \in A_1 \cup \{1/2\}, \\ 7/8 + (-1)^n \cdot 2^{-n-i-2}, & x = 1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} + 2^{-n-1-i}, n, i \in \mathbb{N}, \\ 7/8 - (-1)^n \cdot 2^{-n-i-1}, & x = 1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} - 2^{-n-1-i}, n, i \in \mathbb{N}, \\ 7/8 - 2^{-i-2}, & x = 1/2 + 2^{-2-i};\ i \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in A_4. \end{cases}$$

Funkci $g : A \to A$ *pak definujeme jednoduše pomocí už definované funkce* f *takto:*

$$g(x) = \begin{cases} 7/8, & x \in A \cap [1/8, 1/2], \\ f(x), & \textit{jinak (viz obrázek 2.1).} \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že funkce $g*$ *je na intervalu* $[1/8, 1/2]$ *konstantní, nemůžeme použít Mountain climbing theorem. Ve druhé kapitole práce [2] je totiž dokázáno, že pro (v zásadě) tyto funkce je Mountain climbing problem neřešitelný. Platí ovšem víc než jen, že pro tyto funkce nelze použít Lemma 4 ani žádnou jeho modifikaci, přestože množina* A *a funkce* f, g *splňují předpoklady důsledku 6. Ukážeme totiž, že neexistují rozšíření s požadovanými vlastnostmi.*



Obrázek 2.1: Funkce f, g z příkladu 7

Důkaz. Nejprve ověříme, že jsou splněny předpoklady Důsledku 6. Zřejmě A je uzavřená řídká podmnožina $[0, 1]$ a $f, g : A \to A$ jsou funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující $0, 1$.

Nechť u, v jsou po sobě jdoucí v A. Pokud $u, v \in [0, 5/8]$, uvážíme, že

$$fg([u,v]) \subseteq fg([0, 5/8]) = f([3/4, 1]) = \{0\},$$

$$gf([u,v]) \subseteq gf([0, 5/8]) = g([3/4, 1]) = \{0\}.$$

Tedy $f([g(u), g(v)]) = [fg(u), fg(v)] = g([f(u), f(v)]) = \{0\}$. Pokud $u, v \in [3/4, 1]$, pak podobně dostáváme

$$fg([u,v]) \subseteq fg([3/4, 1]) = f(\{0\}) = \{1\},$$

$$gf([u,v]) \subseteq gf([3/4, 1]) = g(\{0\}) = \{1\},$$

a tedy $f([g(u), g(v)]) = [fg(u), fg(v)] = g([f(u), f(v)]) = \{1\}$. Zbývá poslední dvojice $5/8, 3/4$. Pro tuto dvojici ovšem platí $fg(5/8) = f(3/4) = 0$, $fg(3/4) = f(0) = 1$, tedy $[fg(5/8), fg(3/4)] = [0, 1]$, a tedy opět platí $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$.

Pro spor předpokládejme, že existují rozšíření funkcí f a g na spojité funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \to [0, 1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, a navíc pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{f}([u, v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u, v]) = [g(u), g(v)]$. Z toho, že pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{g}([u, v]) = [g(u), g(v)]$, speciálně dostáváme $\bar{g}([0, 1/8]) = [7/8, 1]$, $\bar{g}([1/8, 1/2]) = \{7/8\}$ a $\bar{g}([1/2, 1]) = [0, 7/8]$.

Indukcí zkonstruujeme klesající posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [5/8, 3/4]$ splňující $\bar{g}(x_n) = 1/2 - (1/2)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $x_1 := 3/4$. Je-li pro $n \in \mathbb{N}$ definován n-tý člen posloupnosti splňující $\bar{g}(x_n) = 1/2 - (1/2)^n$, najdeme $x_{n+1} \in [5/8, x_n]$ takové, že $\bar{g}(x_{n+1}) = 1/2-(1/2)^{n+1}$, neboť spojitá funkce $\bar{g}$ nabývá na intervalu $[5/8, x_n]$ mezihodnot a $1/2 - (1/2)^{n+1} \in [1/2 - (1/2)^n, 3/4]$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\bar{g}\bar{f}(x_n) = \bar{f}\bar{g}(x_n) = \bar{f}(1/2 - (1/2)^n) = 7/8 - (-1/2)^{n+2}$. To znamená, že pro lichá n platí $\bar{g}\bar{f}(x_n) > 7/8$, a tedy nutně $\bar{f}(x_n) < 1/8$, a pro sudá n platí $\bar{g}\bar{f}(x_n) < 7/8$, a tedy nutně $\bar{f}(x_n) > 1/2$. To speciálně znamená, že neexistuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{f}(x_n)$. Přitom ale posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a omezená, tedy konvergentní, což je spor se spojitostí $\bar{f}$.

$\square$

Seznam použité literatury

[1] John Philip Huneke. Extending commuting functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24:206–208, 1970.

[2] Šmídová Kristýna. Mountain climbing theorem. Bakalářská práce. *Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra matematické analýzy. Vedoucí práce Benjamin Vejnar*, 2018.