

OPONENTSKÝ POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Klára Karasová: Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu

Studentka se v práci věnuje problematice, za kterých podmínek má množina spojitých funkcí z X do X společný pevný bod. Studentka v první a třetí kapitole zpracovala poměrně velké množství pozitivních výsledků.

Hlavním přínosem práce je ale kapitola druhá, motivovaná článkem [3], kde bylo dokázáno, že existují funkce $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ které spolu komutují, ale nemají společný pevný bod. Kromě tohoto výsledku článek [3] obsahuje ještě další dva problematické důsledky, které nyní označím jako D1 a D2. Ohledně D1 není jasné jak jej autor článku [3] myslel a autorka se pokouší výsledek správně interpretovat a vylepšit. Dále autorka ukazuje, že D2 neplatí (nachází netriviální protipříklad na celé tvrzení) a pokouší se zamyslet nad tím, za jakých dodatečných přirozených předpokladů výsledek platit bude. Materiál obsažený v druhé kapitole dalece přesahuje to, co se od bakalářské práce požaduje a dle mého názoru je to část, která je dokonce publikovatelná.

Co je ale velikým nedostatkem celé práce, je zpracování dosažených výsledků. Práce je psána velmi nepečlivě, obsahuje velké množství nepřesností a argumentů, které neplatí a je třeba je (často třeba jen mírně) modifikovat. Za nejzásadnější nedostatky považuji následující dva.

- důkaz Lemmatu 19: zdá se mi, že důkaz je špatně a v současné chvíli ani nevím, zda Lemma platí, což má vliv na Důsledek 20, kde se Lemma 19 používá (podrobněji problém popisují v bodu 23. níže).
- Příklad 22: považuji za jeden z hlavních přínosů celé práce, přesto je jeho důkaz pouze naznačen. Asi je správně, ale dokud autorka nepodá detailní důkaz, s jistotou to říci nemohu.

Myslím, že by se studentka k těmto bodům měla vyjádřit, například při obhajobě své práce. Úplnější seznam nalezených nedostatků uvádím pro hrubou představu na konci posudku. Text se moc nepřibližuje tomu, co bych od bakalářské práce očekával. Práce je příliš dlouhá a příliš málo srozumitelná.

Pokud by se jednalo o práci, která vznikla zpracováním poznatků z literatury/od vedoucího, nebyl bych si jistý, zda předložená práce splňuje požadavky kladené na závěrečnou práci bakalářského studia. Vedoucí práce mne ale ujistil, že zejména výsledky druhé kapitoly (tj. ty publikovatelné) jsou vlastním přínosem studentky, což trochu mění můj pohled na věc.

Závěr: Autorka prokázala, že je schopna nastudovat velké množství netriviálního materiálu a že je schopna tvůrčím způsobem s matematikou pracovat. Proto, navdory tomu že práce není zrovna pečlivě sepsaná, navrhuji, aby byla uznána jako bakalářská práce oboru Obecná matematika.

3. 9. 2020

Marek Cúth

Seznam nalezených neodstatků v práci:

1. str 2, řádek 1: konvence o každé funkci předpokládat, že je spojitá, mi připadá jako naprosto nevhodná (v průběhu důkazů je třeba spojitost dokazovat, takže na některých místech se funkcí myslí zobrazení, o kterém nevíme zda je spojitě a na jiných místech zase zobrazení, o kterém víme že je spojitě)
2. str 3: u Věty 3 mi chybí citace (kde se najde důkaz?), u příkladu $\sin(1/x)$ -kontinua mi chybí alespoň náznak důkazu (nebo citace kde jej najít) že se jedná o oblouku podobné kontinuum
3. str 4, řádek -5: místo " $\text{diam}(g_{1/n}^{-1}(x_n))$ " má být " $\text{diam}(g_{1/n}^{-1}(g_{1/n}(x_n)))$ "
4. str 5, řádek -11 (a také řádky -8 a -4): přirozená čísla se značí symbolem \mathbb{N} a ne N (to se opakuje na více místech v práci)
5. str 6, řádky 9-10: v Bc práci by bylo vhodné uvést, proč je každý homeomorfismus $[0, 1]$ striktně monotónní (mezi odborníky je to známý fakt, ale mezi studenty možná ne tak docela)
6. str 6: Pozorování 10 neplatí (je třeba přidat předpoklad že $x \in [\inf A, \sup A]$)
7. str 9, řádky 18-19: místo $g(u) \neq g(v)$ asi autorka chtěla napsat $f(g(u)) \neq f(g(v))$, dále místo $f(u) \neq f(v)$ asi autorka chtěla napsat $g(f(u)) \neq g(f(v))$ (což je ale ekvivalentní $f(g(u)) \neq f(g(v))$, takže se to celé dalo napsat zkráceně a lépe)
8. str 9, řádek -1: autorka píše, že "definice se shodují". Mělo by být řečeno, s čím se mají definice shodovat (s předpisem funkce f_n ?)
9. str 9: místo "lemma" má být "Lemma" (tato stylistická chyba se opakuje na více místech v práci)
10. str 10, řádek 1: nevidím jak z konstrukce a indukčního předpokladu plyne, že $A_n \subset A_{n+1}$ (zdá se mi, že je třeba přidat do 1-4 ještě požadavek, aby platilo $f_n(A_n) \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
11. str 10, řádek 1: nevidím jak z konstrukce a indukčního předpokladu plyne, že pro každé po sobě jdoucí u, v v A_n platí $|u - v| \leq 3^{1-n}$ (zdá se mi, že je třeba přidat do 1-4 ještě požadavek, že pro každé po sobě jdoucí u, v v $f_n^{-1}(A_n)$ platí $|u - v| \leq 3^{1-n}$)
12. str 10, řádky -9 a -10: nevidím jak z vlastností 1-4 plyne že $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 3^{2-n}$ pro u, v po sobě jdoucí v A_n (zdá se mi, že je třeba přidat do 1-4 ještě požadavek, že $A_{n+1} = f_n^{-1}(A_n)$ a dostaneme pak, že pro u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} máme $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 3^{1-n}$.. což by implikovalo $\|f_n - f_m\| \leq 3^{1-n}$ a ne $\|f_n - f_m\| \leq 3^{2-n}$ jak tvrdí autorka)
13. str 10, řádek -6: výraz "spojité limity" by mohl být nahrazen něčím více exaktním
14. str 10, řádek -4 a -3: není mi moc jasné, jak autorka odvozuje poslední podmínku (píše, že "ji splňují funkce f_n a g_n " což je sice opravdu po nějaké úvaze vidět z konstrukce funkcí, ale nejsem si jistý jestli to lze odvodit i z podmínek 1-4 jak autorka naznačuje)

15. str 12, znění Lemmatu 17: autorka tvrdí, že se Lemma dokazuje v Bc práci [5] což ale není pravda (dokazuje se tam pouze pro $[a, b] = [c, d] = [u, v] = [0, 1]$ a funkce splňující $f(0) = g(0) = 0$ a $f(1) = g(1) = 1$). Mělo by tedy být podrobněji osvětleno, proč Lemma 17 platí
16. str 12: pojem “po částech lineární nekonstantní”, použitý poprvé v Lemmatu 17, je zavádějící (z kontextu se zdá, že autorka má na mysli že funkce je na “každé části” lineární a nekonstantní, druhá možná a asi i přirozenější interpretace by byla, že funkce není konstantní a zároveň je po částech lineární)
17. str 12, řádek -6: “z Důsledku 1, Důsledku 2 v této práci” by bylo vhodnější nahradit něčím exaktnějším (třeba “z důkazů [5, Důsledek 1 a Důsledek 2]”). Podobně místo “Tyto dvě věty” by bylo lepší napsat “Tyto dva důsledky” nebo ještě lépe “[5, Důsledek 1 a Důsledek 2]”
18. Pozorování 18 je podivně zformulováno, dalo by se výrazně zesílit (dokazuje se, že pro A uzavřenou platí $1. \implies 2.$ a že pokud je A navíc řádká, pak z 2. dostáváme že $|f(b, b')| \geq 2$.. zmíněná ekvivalence je sice důsledkem, ale ne úplně vystihuje podstatu věci; v důkazu se vůbec nepoužívá, že funkce f, g jsou bez skoků takže zdá přirozené tento předpoklad nezmiňovat)
19. znění Lemmatu 19: by určitě mohlo být ještě optimalizováno, aby nebylo tak dlouhé (ne vše opravdu v dalším textu používáme). Z analogických důvodů jako v důkazu Věty 13 se mi navíc zdá, že by bylo vhodné do induktivní konstrukce 1-6 (jejíž větší část by měla být součástí důkazu a ne znění Lemmatu 19) zařadit i další požadavky (například “ $f_n(A_n) \subset A_n$ ” a “pro každé po sobě jdoucí u, v v $f_n^{-1}(A_n)$ platí $|u - v| \leq 3^{1-n}$ ”)
20. str 14, řádky 1-3: bod 5 je podivně formulovaný (lokální nekonstantností jedné z funkcí se asi myslí, že jedna z funkcí je “po částech lineární nekonstantní” na intervalu $[u, v]$)
21. str 14: stylistická poznámka: autorka píše $\frac{1}{3}$, na jiných místech používá $1/3$ (to by mělo být sjednoceno)
22. str 15, odstavec 5 (aplikace Lemmatu 17): mělo by být lépe vysvětleno jak se Lemma 17 používá (například asi chceme Lemma použít pro $a = g_n(u)$, $b = g_n(v)$ takže bychom měli komentovat proč je funkce f_n “po částech lineární nekonstantní” na intervalu $[g_n(u), g_n(v)]$ a ne proč není konstantní na intervalu $[u, v]$ jak činí autorka)
23. **str 15, definice bodu c** : proč je bod c korektně definován? (zdá se mi, že korektně definován není ani pro $i = 1$: máme totiž $\{0, 1\} \subset X$ a aby byla množina určující bod c neprázdná, bylo by potřeba, aby $X \subset [g_n(u), g_n(v)]$, pak ale nutně $[g_n(u), g_n(v)] = [0, 1]$, což platit nemusí)
24. **Vzhledem k předchozímu jsem nečetl zbytek důkazu Lemmatu 19 ani důkaz Důsledku 20**
25. **Příklad 22: jedná se o jeden z hlavních přínosů celé práce, přesto je jeho důkaz pouze naznačen. Asi je správně, ale dokud autorka nepodá detailní důkaz, s jistotou to říci nemohu.**

26. důkaz Lemmatu 24: výraz “Vynecháme některé technické detaily” by se v Bc práci vůbec neměl objevit, naopak technické detaily by měly být předloženy. Důkaz je sepsán velmi vágně, často chybí matematické argumenty, které jsou nahrazeny výrazy typu *funkce .. odpovídá “zrychlení” nebo “zpomalení” .. , takže je to po částech lineární nekonstantní funkce.*
27. důkaz Důsledku 25: je analogický důkazu Věty 13 a měl bych proto analogických 7 připomínek jako k důkazu Věty 13
28. str 24: text uvozující Příklady 26 a 27 by snesl dost výrazné přepracování (autorka se často vyjadřuje velmi vágně a neexaktně v důsledku čehož se jen obtížně čtenář může dovtípit smyslu napsaného textu)
29. str 28, řádek 2: “FPP je hezkých prostorů” nedává smysl
30. str 29: u Vět 34 a 36 mi chybí citace (kde se najde důkaz?)
31. str 30, důkaz Pozorování 37: je příliš stručný a se zdá, že mírně zavádějící (nevím jak se používá dědičná unikohherentnost v důkazu “ \subseteq ”)
32. str 30: autorka pracuje se symbolem $[y, s]$, který ale není nikde definován - mohu se pouze domýšlet že $[y, s] := A(y, s)$ (se symbolem pracuje autorka na mnoha dalších místech)
33. str 30, řádek -12: nevidím proč platí $f([y, s]) \subset V$ a proč platí $[y, s] \subset U$ (zdá se mi, že by bylo třeba aby bod r byl určen pečlivěji - například podmínkou $i([r, s]) \subset U \cap f^{-1}(V)$). Podobná výtka se vztahuje i ke straně 32, řádek -17 kde by bylo asi třeba pečlivěji volit podmínku určující bod r
34. str 32: slovo “mximální”
35. str 32, -8: tvrzení, že $[e, w] \cup (A(f(y), f(p)) \setminus [w, f(p)])$ je oblouk spojující e a $f(y)$ by mělo být dokázáno
36. str 33, řádek 3: “Zřejmě $g^{-1}(q) \cap [e, f(p)]$ je neprázdná” by mělo být lépe odůvodněno
37. v referencích není uveden rok publikací (jak bývá obvyklé)