MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Klára Karasová

Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu Mgr. Benjaminu Vejnarovi, Ph.D. za trpělivost, za zajímavé téma a za volnost, kterou mi nechal k jeho zpracování.

Dále děkuji Kateřině Gemrotové a Alexandře Havelkové za jejich intenzivní podporu a svému bratru Jakubu Karasovi za jeho ochotu pomáhat mi s LaTeXem.

Název práce: Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu

Autor: Klára Karasová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tématem práce jsou společné pevné body komutujících funkcí. Pomocí Mountain climbing theorem dokážeme větu o rozšiřování komutujících funkcí, která nám umožní zkonstruovat komutující funkce intervalu $[0, 1]$ na sebe, které nemají společný pevný bod. Dále jsou dokázány různé verze věty o rozšiřování komutujících funkcí pomocí různých verzí Mountain climbing theorem. Také dokážeme, že je-li X dendroid, S abelovská semigrupa monotónnních zobrazení na X a $f : X \to X$ komutuje se všemi prvky S, pak f a S mají společný pevný bod.

Klíčová slova: spojitost, funkce, pevný bod

Title: Commuting continuous functions without a common fixed point

Author: Klára Karasová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The topic of the thesis are common fixed points of commuting functions. With the help of the Mountain climbing theorem we will prove the theorem about extending commuting functions, which will allow us to construct commuting self-mappings of the unit interval with no common fixed point. For the next part we prove several versions of the extending commuting functions theorem using different versions of the Mountain climbing theorem. We will also prove that if X is a dendroid, S an abelian semigroup of continuous monotone self-mappings of X and $f : X \to X$ commutes with each elements of S, then f and S have a common fixed point.

Keywords: continuous, function, fixed point

Obsah

Úvod **2**

1 Vlastnost pevného bodu (FPP) **3**

2 Zobecnění pro dvě funkce **5**
2.1 Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu na intervalu 7
2.2 Další výsledky týkající se spojitých komutujících funkcí 12
2.3 Jiné věty o rozšiřování komutujících funkcí 18

3 Abelovská semigrupa funkcí **28**

Seznam použité literatury **34**

Seznam obrázků **35**

Úvod

V celé práci budeme uvažovat pouze spojité funkce, tj. u každé funkce budeme předpokládat, že je spojitá, a to i v případě, že to nebude explicitně řečeno.

Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že funkce $f : X \to X$ má pevný bod, pokud existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = x$. Řekneme, že funkce $f, g : X \to X$ mají společný pevný bod, pokud existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = g(x) = x$. Obecněji: řekneme, že $\mathscr{F}$, což je množina funkcí z X do X, má společný pevný bod, pokud existuje $x \in X$ takové, že pro každé $f \in \mathscr{F}$ platí $f(x) = x$. Práce se primárně zabývá nutnými a postačující podmínkami pro existenci pevného bodu spojité funkce, resp. společného pevného bodu spojitých komutujících (vzhledem k operaci skládání) funkcí na metrických prostorech. Zařazeny jsou ale i některé další výsledky týkající se dvou spojitých komutujících funkcí na intervalu $[0, 1]$.

V první kapitole jsou uvedeny příklady metrických prostorů, na kterých každá spojitá funkce má pevný bod.

Ve druhé kapitole dokážeme pomocí věty o rozšiřování komutujích funkcí, že existují komutující spojité funkce intervalu [0,1] na sebe, které společný pevný bod nemají. Tudíž komutativita není postačující podmínkou pro existenci společného pevného bodu dvou spojitých funkcí, a to ani na intervalu. Dále pak jsou zkonstruovány komutující funkce s jinými zajímavými vlastnostmi. V poslední části kapitoly jsou dokázány další věty o rozšiřování komutujících funkcí na komutující funkce a na závěr jsou uvedeny příklady komutujících funkcí, které takto rozšířit nelze.

Ve třetí kapitole je dokázána postačující podmínka pro existenci společného pevného bodu abelovské semigrupy funkcí (s operací skládání).

Přehled vlastní práce

Důkaz věty 6 byl zpřehledněn a doplněn o detaily.

Druhá kapitola obsahuje nejvíce vlastních výsledků, vlastní jsou například všechna pozorování v této kapitole. Motivační úvod ke kapitole je vlastní. Veškeré technické části důkazu věty 13, včetně například předpokladů indukce a dodefinování funkcí v případě, kdy autorova definice není korektní, jsou vlastní.

Kapitoly 2.2 a 2.3 jsou vlastní, jde v zásadě o modifikace věty 13, důsledku 14 a příkladů z [1] a z [5]. V těchto dvou kapitolách se podrobně rozebírají dva důsledky z článku [3]. U prvního z nich dokážeme dvě možné interpretace, v obou případech je dokázané tvrzení netriviálním zesílením původního. U druhého je za pomoci vhodného protipříkladu ukázáno, že neplatí, a dále jsou dokázána dvě slabší tvrzení. Na konec jsou zařazeny dva příklady.

Ze třetí kapitoly je vlastní motivační úvod včetně tvrzení 28. Všechny důkazy v kapitole byly doplněny o detaily, resp. o odkazy na literaturu.

1. Vlastnost pevného bodu (FPP)

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, pro které topologické prostory X platí, že každá spojitá funkce $f : X \to X$ má pevný bod. Všimněme si, že obecně to neplatí — např., je-li prostor X nesouvislý, vždy najdeme spojitou funkci z X do X, která nemá pevný bod. Souvislost je ale jen nutnou podmínkou, a nikoli postačující, neboť pro kružnici v $\mathbb{R}^2$ nebo obecněji sféru v $\mathbb{R}^n$ rovněž najdeme takovou funkci, v tomto případě můžeme vzít třeba antipodální zobrazení. To motivuje následující definici.

Definice 1. *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že X má vlastnost pevného bodu — FPP (fixed point property), pokud každá spojitá funkce z X do X má pevný bod.*

Ukážeme si několik příkladů prostorů s FPP. Začneme následujícím jednoduchým pozorováním.

Pozorování 2. *Prostor $[0, 1]$ má FPP.*

Důkaz. Nechť $f : [0, 1] \to [0, 1]$ je spojitá funkce a uvažme množiny $E := \{x \in [0, 1]; x < f(x)\}$, $F := \{x \in [0, 1]; x > f(x)\}$. Obě tyto množiny jsou otevřené, neboť např. E je vzorem otevřené množiny $(-\infty, 0)$ při spojitém zobrazení $x - f(x)$ (tuto funkci chápeme tedy jako funkci z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$).

Množiny E a F jsou zřejmě disjunktní. Navíc vidíme, že nutně $f(1) \leq 1$, a tedy $1 \notin E$, podobně $f(0) \geq 0$, a tedy $0 \notin F$. Ze souvislosti prostoru $[0, 1]$ dostáváme, že $[0, 1] \setminus (E \cup F) = \{x \in [0, 1]; x = f(x)\}$ je neprázdná.

□

Dále uvedeme dvě zobecnění tohoto tvrzení.

Věta 3 (Brouwerova věta o pevném bodě)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $[0, 1]^n$ má FPP.*

Tuto větu nebudeme dokazovat, neboť důkaz je dlouhý a obtížný.

Abychom mohli zformulovat druhé zobecnění pozorování 2, budeme potřebovat následující dvě definice.

Definice 4. *Nechť X, Y jsou kompaktní metrické prostory, $f : X \to Y$ a $\varepsilon > 0$. Řekneme, že f je ε-zobrazení, jestliže pro každé $x \in X$ platí diam$(f^{-1}(f(x))) < \varepsilon$.*

Definice 5. *Nechť X je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že X je podobné oblouku, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-zobrazení z X* ***na*** *$[0, 1]$.*

Podobné oblouku jsou triviálně uzavřené intervaly nebo obecněji oblouky. Dalším, méně triviálním příkladem oblouku podobného kontinua je tzv. $\sin(1/x)$-kontinuum, což je kontinuum definované předpisem

$$\overline{\{(x, \sin(1/x));\, x \in (0, 1]\}} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Poznamenejme, že existují i dost komplikovaná oblouku podobná kontinua, např. nerozložitelné abc-kontinuum (viz [4, Příklad 1.10]) nebo dokonce dědičně nerozložitelný psedooblouk (viz [4, Cvičení 1.23]).

Následující věta a důkaz byly volně upraveny podle Nadler [4, Tvrzení 12.24-12.30] .

Věta 6. *Nechť (X, d) je kompaktní souvislý metrický prostor podobný oblouku. Pak X má FPP.*

Důkaz. Mějme libovolnou spojitou funkci $f : X \to X$. Nechť $\varepsilon > 0$, najdeme ε-zobrazení g_ε z X na $[0, 1]$ a uvažme množiny

$$E := \{x \in X;\, g_\varepsilon(f(x)) < g_\varepsilon(x)\},$$

$$F := \{x \in X;\, g_\varepsilon(f(x)) > g_\varepsilon(x)\}.$$

Obě tyto množiny jsou otevřené, neboť např. E je vzorem otevřené množiny $(-\infty, 0)$ při spojitém zobrazení $g_\varepsilon \circ f - g_\varepsilon$ (tuto funkci chápeme tedy jako funkci z X do $\mathbb{R}$), dále zřejmě jsou disjunktní. Navíc, protože g_ε je na, existuje $x_1 \in X$ takové, že $g_\varepsilon(x_1) = 1$, a tedy nutně $g_\varepsilon(f(x_1)) \leq 1 = g_\varepsilon(x_1)$, a proto $x_1 \notin F$, podobně existuje $x_2 \in X$ takové, že $g_\varepsilon(x_2) = 0$, a tedy nutně $g_\varepsilon(f(x_2)) \geq 0 = g_\varepsilon(x_2)$, a proto $x_2 \notin E$.

Ze souvislosti prostoru X dostáváme, že $X \setminus (E \cup F) = \{x \in X;\, g_\varepsilon(f(x)) = g_\varepsilon(x)\}$ je neprázdná. (Povšimněme si, že jsme právě dokázali zobecnění motivačního pozorování 2. Vskutku, položíme-li nyní $X := [0, 1]$ a $g_\varepsilon := id$, dostaneme přesně pozorování 2 a jeho důkaz.)

Použijeme-li nyní první část důkazu pro $\varepsilon := 1/n;, n \in \mathbb{N}$, dostaneme $1/n$–zobrazení $g_{1/n}$ a body $x_n \in X$ splňující $g_{1/n}(f(x_n)) = g_{1/n}(x_n)$, tedy podle definice $1/n$-zobrazení (diam $(g_{1/n}^{-1}(x_n)) < 1/n$) platí $d(f(x_n), x_n) < 1/n$. Protože X je kompaktní, má posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k $x \in X$ a ze spojitosti f pak $f(x) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Celkem

$$d(f(x), x) = d(\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}), \lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d(f(x_{n_k}), x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} 1/n_k = 0.$$

Tedy $f(x) = x$ a x je pevným bodem f.

□

2. Zobecnění pro dvě funkce

Víme-li tedy o nějakém prostoru X, že má FPP, tj., že každá spojitá funkce z X do X má pevný bod, můžeme uvažovat následující zobecnění pro dvě funkce: jsou-li $f, g : X \to X$ spojité, musí mít společný pevný bod, tj. existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = g(x) = x$? Odpověď je ne — na libovolném alespoň dvouprvkovém prostoru můžeme vzít dvě různé konstantní funkce a ty nebudou mít společný pevný bod, dokonce ani společnou hodnotu (tj. neexistuje $x \in X$ takové, že $f(x) = g(x)$), přestože obě mají pevný bod.

Uvedeme ještě jeden příklad: uvažme $X = [0, 1]$ a funkce $f(x) = x^2$, $g(x) = 1-x$. Opět, tyto funkce nemají společný pevný bod, přestože obě tyto funkce pevný bod mají. Všimněme si, že f i g jsou bijekce a jejich inverzy jsou spojité funkce (to je u funkcí z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ nutný důsledek), tj. f a g jsou homeomorfismy. Tedy ani pro tak hezký prostor, jako je prostor $[0, 1]$, a/nebo tak hezké a „snadno uchopitelné“ funkce, jako konstantní resp. homeomorfismy, společný pevný bod nemusí existovat.

Pro existenci společného pevného bodu je tedy nutné předpokládat víc než jen hezké funkce na hezkém prostoru, potřebujeme předpoklady týkající se přímo dané dvojice funkcí (tedy nejen, jaké funkce se mohou v nějaké dvojici vyskytnout, ale i to, které z přípustných funkcí mohou být spolu ve dvojici) — nějakou svazující podmínku. Jednou z možných podmínek je komutativita (vzhledem ke skládání). Můžeme tedy uvažovat následující úlohu pro dvě funkce: nechť X je prostor s FPP (a případně dalšími vlastnostmi) a $f, g : X \to X$ jsou spojité funkce splňující $fg = gf$, musí f a g mít společný pevný bod?

Ukážeme si nyní, že pro dvojice funkcí analogické příkladům výše je komutativita postačující podmínkou pro společný pevný bod. Pokud je alespoň jedna z funkcí f, g konstantní, nepotřebujeme dokonce ani žádnou strukturu; je-li totiž X množina, $f, g : X \to X$ komutující funkce (ne spojité, tady nemáme žádnou topologickou strukturu, a proto ani nemůžeme předpokládat spojitost) a $f \equiv c$ pro nějaké $c \in X$, pak z komutativity máme $g(c) = gf(c) = fg(c) = c$, tedy c je společným pevným bodem f a g. Ukážeme, že na [0,1] nám stačí mnohem slabší podmínka na funkci f, než je konstantnost.

Pozorování 7. *Nechť funkce $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ komutují a nechť f je neklesající. Pak f a g mají společný pevný bod.*

Důkaz. Z pozorování 2 víme, že g má pevný bod, označme ho x_0. Je-li pro $n \in N$ dáno x_{n-1}, položíme $x_n := f(x_{n-1})$. Indukcí podle n ukážeme, že každý prvek rekurzivně definované posloupnosti $\{x_n\}$ je pevným bodem g, pro $n = 0$ tvrzení platí. Nechť $n \in N$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$, z komutativity dostáváme $g(x_n) = gf(x_{n-1}) = fg(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) = x_n$.

Všimneme si, že $\{x_n\}$ je monotónní; ukážeme jen pro případ, že $x_0 \leq f(x_0) = x_1$, pro $x_0 \geq f(x_0) = x_1$ by se postupalo analogicky. Indukcí podle n ukážeme, že $x_{n-1} \leq x_n$, pro $n = 0$ tedy tvrzení platí. Nechť $n \in N$ libovolné a nechť pro $n - 1$ tvrzení platí, aplikujeme na obě strany nerovnosti $x_{n-1} \leq x_n$ funkci f a z neklesajícnosti f máme $x_n = f(x_{n-1}) \leq f(x_n) = x_{n+1}$. Protože monotónní posloupnost v $[0, 1]$ je nutně konvergentní, existuje $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ze spojitosti funkcí f, g dostáváme

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

$$g(x) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Tedy x je společným pevným bodem funkcí f a g.

□

Všimněme si, že místo komutativity bychom v tomto případě mohli požadovat slabší podmínku, a to, že funkce f zobrazuje pevné body g na pevné body g, nebo jinak, že funkce f zobrazuje množinu $\{x \in [0,1]; x = g(x)\}$ do sebe.

Poznámka. Mějme komutující spojité bijekce (tedy i homeomorfismy) f, g z $[0,1]$ na $[0,1]$. Pak platí $f(\{0,1\}) = g(\{0,1\}) = \{0,1\}$, navíc každá z funkcí je buď rostoucí, nebo klesající. Tedy body $0, 1$ jsou společnými pevnými body f a g nebo je alespoň jedna z funkcí f, g rostoucí (nebo oboje). S použitím pozorování 7 dostáváme, že f a g mají společný pevný bod. Tedy komutující homeomorfismy intervalu $[0,1]$ mají vždy společný pevný bod.

Ukázali jsme si, že za jistých předpokladů je komutativita postačující pro existenci společného pevného bodu dvou funkcí. Nabízí se tedy otázka, jestli je komutativita postačující podmínkou pro existenci společného pevného bodu dvou spojitých funkcí z intervalu $[0,1]$ do sebe. Odpověď je ne. V této kapitole zkonstruujeme komutující spojité funkce intervalu $[0,1]$ na sebe, které společný pevný bod nemají. K této konstrukci si nejprve připravíme několik definic a tvrzení.

Úmluva. Ve zbytku kapitoly budeme místo $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$ zkráceně psát jen $[a,b]$.

Definice 8. *Nechť $A \subseteq [0,1]$ a $u, v \in [0,1]$. Řekneme, že u a v jsou po sobě jdoucí v A, pokud $A \cap [u,v] = \{u,v\}$.*

Abychom mohli s tímto pojmem efektivně pracovat, budeme potřebovat následující dvě velmi užitečná jednoduchá pozorování, která budeme používat v celé kapitole.

Pozorování 9. *Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$, $A \subseteq [0,1]$ a $u, v \in [0,1]$ jsou po sobě jdoucí v $f^{-1}(A)$. Pak $f(u), f(v)$ jsou po sobě jdoucí v A.*

Důkaz. Protože $u, v \in f^{-1}(A)$, jistě $f(u), f(v) \in A$. Pokud $f(u) = f(v)$, tvrzení zřejmě platí, předpokládejme tedy $f(u) \neq f(v)$ a nechť pro spor existuje $w \in (f(u), f(v)) \cap A$. Protože spojitá funkce f nabývá mezihodnot, najdeme $x \in [u,v]$ takové, že $f(x) = w \in A$, tedy $x \in f^{-1}(A)$. Protože $f(u) \neq w \neq f(v)$, nutně i $u \neq x \neq v$, což je spor s tím, že u, v jsou po sobě jdoucí v $f^{-1}(A)$.

□

Pozorování 10. *Nechť $A \subseteq [0,1]$ je uzavřená a $x \in [0,1]$. Pak existují u, v po sobě jdoucí v A takové, že $x \in [u,v]$. Navíc pokud $x \notin A$, pak jsou tyto body určeny jednoznačně (až na pořadí).*

Důkaz. Položme $u := \sup\{a \in A;\ a \le x\}$ a $v := \inf\{a \in A;\ x \le a\}$. Z uzavřenosti A máme $u, v \in A$. Dále zřejmě platí $u \le x \le v$, neboť x je horní, resp. dolní závora. Pro spor předpokládejme, že existuje w, $u < w < v$, $w \in A$. Je-li $w \le x$, pak dostáváme $u < w \le x$, což je spor s definicí u, je-li $x \le w$, pak $x \le w < v$ je spor s definicí v.

Nechť $x \notin A$ a mějme $u_1 \le v_1$ po sobě jdoucí v A a $u_2 \le v_2$ po sobě jdoucí v A takové, že $x \in [u_1, v_1]$, $x \in [u_2, v_2]$. Protože $A \cap [u_1, v_1] = \{u_1, v_1\}$ a protože $u_2 < x$ (a proto $u_2 \ne v_1$), nutně $u_2 \le u_1$. Podobně se ukáže $u_2 \ge u_1$, $v_2 \le v_1$ a $v_2 \ge v_1$. Tedy $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$.

□

Definice 11. *Nechť $0, 1 \in A \subseteq [0, 1]$, A uzavřená a $f : A \to [0, 1]$ je spojitá. Symbolem $f*$ budeme značit (jednoznačně určenou) funkci z $[0, 1]$ do sebe, která rozšiřuje f a je lineární na každé komponentě doplňku A. Dále řekneme, že f přeskočila $b \in f(A)$, jestliže existují $a, a' \in A$ tak, že $b \in [f(a), f(a')]$, ale $b \notin f(A \cap [a, a'])$.*

Poznámka. Takto definovaná funkce $f*$ je spojitá.

Úmluva. Místo např. $f(A \cap [a, a'])$ budeme napříště psát zkráceně jen $f([a, a'])$. Tj., v zápisu budeme vynechávat průnik s definičním oborem.

O funkci řekneme, že je bez skoků, pokud nepřeskočila žádný bod ve svém obrazu.

2.1 Komutující spojité funkce bez společného pevného bodu na intervalu

Ke konstrukci dvou komutujících spojitých funkcí bez společného pevného bodu budeme potřebovat větu, která je v anglické literatuře označována jako Mountain climbing theorem. Uvedeme si ji sice bez důkazu, neboť ten je sám o sobě dost náročný, aby mohl být tématem bakalářské práce, viz [5], ale uvedeme alespoň následující populární interpretaci původní úlohy.

Mountain climbing problem (MCP)

Jako Mountain climbing problem je označována následující úloha: dva horolezci stojí na úpatí pohoří (ve stejné nadmořské výšce), ovšem na opačných stranách, a chtějí se potkat na nejvyšším vrcholu, případně na jednom z nejvyšších vrcholů, který si společně domluví předem. Zároveň ale chtějí postupovat tak, aby se oba stále nacházeli ve stejné nadmořské výšce. Předpokládáme, že každý z horolezců má danou cestu se známým výškovým profilem a může se pohybovat jen po ní (tj. vybírá si jen, jestli jde „tam“, nebo „zpátky“) a že ani jedna z těchto cest nikdy neklesne pod počáteční úroveň.

Formálně úlohu popíšeme takto: jsou dány spojité funkce $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ takové, že $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$, udávající výškový profil cest z úpatí na (předem domluvený) nejvyšší vrchol, které neklesají pod počáteční úroveň. Hledáme „časové reparametrizace“, spojité funkce $h, j : [0, 1] \to [0, 1]$ splňující

$h(0) = j(0) = 0$, $h(1) = j(1) = 1$ (horolezci začínají na úpatí a končí na cílovém vrcholu) a $fh = gj$ (horolezci jsou stále ve stejné výšce). Pokud takové funkce h, j existují, říkáme, že Mountain climbing problem (MCP) je pro dvojici funkcí f, g řešitelný a h, j jsou jeho řešením [srov. 5].

Jak je podrobně rozebráno v [5], existence řešení MCP závisí na dalších vlastnostech funkcí f, g.

Konstrukce funkcí

Následující verze Mountain climbing theorem, věta a důsledek jsou převzaty z článku Huneke [3].

Lemma 12 (Mountain climbing theorem)**.** *Nechť $a, b, c, d, u, v \in [0, 1]$ splňují $a \neq b$, $c \neq d$ a $u \neq v$. Nechť $f : [a, b] \to [0, 1]$ a $g : [c, d] \to [0, 1]$ jsou lokálně nekonstantní funkce takové, že intervaly $f([a, b])$, $[f(a), f(b)]$, $g([c, d])$ a $[g(c), g(d)]$ splývají (a $f(a) = g(c)$).*

Pak existují lokálně nekonstantní funkce $h : [u, v] \to [a, b]$ a $j : [u, v] \to [c, d]$ splňující $fh = gj$ a $h(u) = a$, $h(v) = b$, $j(u) = c$, $j(v) = d$.

Věta 13. *Nechť A je uzavřená podmnožina $[0, 1]$ a nechť $f, g : A \to A$ jsou funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující 0 a 1. Dále předpokládejme, že*

- *pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$,*
- *pro každé $b, b' \in A$, $b \neq b'$ platí: pokud $|f([b, b'])| = 1$, pak $g*^{-1}([b, b']) \subseteq A$, a pokud $|g([b, b'])| = 1$, pak $f*^{-1}([b, b']) \subseteq A$.*

Potom existují funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \to [0, 1]$ takové, že $\bar{f}|_A = f$, $\bar{g}|_A = g$, $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, a pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí $[f(a), f(a')] = \bar{f}([a, a'])$, $[g(a), g(a')] = \bar{g}([a, a'])$.

Důkaz. Indukcí zkonstruujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ množinu $A_n \subseteq [0, 1]$ a funkce $f_n, g_n : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ splňující

1. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : {f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každé u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$:
$$[f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = f_n([g_n(u), g_n(v)]) =$$
$$= g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)],$$
a zároveň $f_n g_n(u) = g_n f_n(u)$, tj. funkce f_n a g_n komutují na ${f_n}^{-1}(A_n)$,
3. pokud pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$ platí $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, pak f_n je lokálně nekonstantní na $[g_n(u), g_n(v)]$ a g_n je lokálně nekonstantní na $[f_n(u), f_n(v)]$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$:
   - $A_{n-1} \subseteq A_n$, $A \subseteq A_n$, A_n je uzavřená,

- pro každé u, v po sobě jdoucí v A_n platí $|u - v| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,
- pro každé u, v po sobě jdoucí v A_n platí $f_n([u, v]) = [f_n(u), f_n(v)]$ a $g_n([u, v]) = [g_n(u), g_n(v)]$,
- $f_n|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$, a $f_n|_A = f$,
- $g_n|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$, a $g_n|_A = g$,
- $f_{n-1}g_n = g_{n-1}f_n$.

Položme $A_0 := f(A) = g(A)$, $f_0 := f*$, $g_0 := g*$ (můžeme, neboť z předpokladů $0, 1 \in f(A) \subseteq A$).

Z toho, že funkce f, g jsou z A do A a bez skoků, dostáváme

$$f_0{}^{-1}(A_0) = g_0{}^{-1}(A_0) = A \text{ (bod 1)}.$$

Pro ověření 2 předpokládejme, že u a v jsou po sobě jdoucí v A. Použitím předpokladů pro $a := u$ a $a' := u$ dostáváme $g([f(u), f(u)]) \subseteq [fg(u), fg(u)]$, tj. $fg(u) = gf(u)$, a analogicky se ukáže $fg(v) = gf(v)$. Tedy

$$[fg(u), fg(v)] = [gf(u), gf(v)].$$

Užitím téhož předpokladu pro $a := u$ a $a' := v$ dostáváme $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$.

Protože f_0 a g_0 vzniknou z funkcí f a g lineárním dodefinováním, dostáváme z předchozího 2 pro $n = 0$. Z předpokladů navíc ihned plyne, že pro $g(u) \neq g(v)$ je f_0 lokálně nekonstantní na $[g(u), g(v)]$ a pro $f(u) \neq f(v)$ je g_0 lokálně nekonstantní na $[f(u), f(v)]$, tedy je splněn i bod 3.

Jsou-li pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ A_n, f_n a g_n definovány, položíme $A_{n+1} := f_n{}^{-1}(A_n) = g_n{}^{-1}(A_n)$ a pro u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} definujeme $f_{n+1}|_{[u, v]}$ a $g_{n+1}|_{[u, v]}$ v závislosti na tom, jestli $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, nebo $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$.

Pokud $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, definujeme obě funkce přímo: položíme $f_{n+1}(u) := f_n(u)$, $f_{n+1}(2u/3 + v/3) := f_n(v)$, $f_{n+1}(u/3 + 2v/3) := f_n(u)$, $f_{n+1}(v) := f_n(v)$ a dodefinujeme $f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ tak, aby $f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ byla lineární na každém z intervalů $[u, 2u/3 + v/3]$, $[2u/3 + v/3, u/3 + 2v/3]$ a $[u/3 + 2v/3, v]$, a analogicky definujeme g_{n+1} — konstantní pro $g_n(u) = g_n(v)$ a po částech lineární nekonstantní pro $g_n(u) \neq g_n(v)$.

Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, jsou z indukčního předpokladu pro n (body 2 a 3) splněny předpoklady lemmatu 12 a najdeme lokálně nekonstantní funkce $f_{n+1}|_{[u,\ v]} : [u,\ v] \to [f_n(u),\ f_n(v)]$, $g_{n+1}|_{[u,\ v]} : [u,\ v] \to [g_n(u),\ g_n(v)]$ takové, že $f_n g_{n+1}|_{[u,\ v]} = g_n f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ a $f_{n+1}(u) = f_n(u)$, $f_{n+1}(2u/3 + v/3) = f_n(v)$, $f_{n+1}(u/3 + 2v/3) = f_n(u)$, $f_{n+1}(v) = f_n(v)$, $g_{n+1}(u) = g_n(u)$, $g_{n+1}(2u/3 + v/3) = g_n(v)$, $g_{n+1}(u/3 + 2v/3) = g_n(u)$ a $g_{n+1}(v) = g_n(v)$.

Lemma přitom použijeme třikrát, postupně pro intervaly $[u,\ 2u/3 + v/3]$, $[2u/3 + v/3,\ u/3 + 2v/3]$ a $[u/3 + 2v/3,\ v]$.

Nyní f_{n+1}, $g_{n+1} : [0, 1] \to [0, 1]$ jsou dobře definované a spojité, neboť díky uzavřenosti A_{n+1} z pozorování 10 pro každé $x \in [0,\ 1]$ existují u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} takové, že $x \in [u, v]$; navíc tyto u, v jsou určeny jednoznačně pro $x \notin A_{n+1}$ a na A_{n+1} se definice shodují. Ověříme předpoklady 1–4 pro $n + 1$:

4 Ověříme jen poslední bod, ostatní ihned plyne z konstrukce a indukčního předpokladu. Nechť u, v jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, ověříme, že

$$f_n g_{n+1}|_{[u,\,v]} = g_n f_{n+1}|_{[u,\,v]}$$

(a to stačí, neboť intervaly tohoto tvaru pokrývají $[0,1]$).

Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, tvrzení plyne ihned z konstrukce. Předpokládejme tedy, že $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$. Pak z indukčního předpokladu dostáváme:

$$g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_n(v) = g_n f_n(v)$$

$$f_n([g_n(u), g_n(v)]) = [f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = \{f_n g_n(u)\}$$
$$g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)] = \{g_n f_n(u)\}.$$

Nechť $w \in [u, v]$, z konstrukce ihned plyne $f_{n+1}(w) \in [f_n(u), f_n(v)]$, $g_{n+1}(w) \in [g_n(u), g_n(v)]$. Celkem tedy:

$$g_n f_{n+1}(w) = g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_{n+1}(w).$$

1 S využitím indukčního předpokladu a 4 pro každé $x \in [0,1]$ dostáváme :

$$f_{n+1}(x) \in A_{n+1} \Leftrightarrow g_n f_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow f_n g_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow g_{n+1}(x) \in A_{n+1}.$$

2 Ať u, v jsou po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, pak z pozorování 9 dostáváme, že $f_{n+1}(u), f_{n+1}(v)$ jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, a tedy ihned z konstrukce plyne

$$g_{n+1}([f_{n+1}(u),\, f_{n+1}(v)]) = [g_{n+1} f_{n+1}(u),\, g_{n+1} f_{n+1}(v)].$$

Podobně díky 1 jsou i $g_{n+1}(u), g_{n+1}(v)$ po sobě jdoucí v A_{n+1}, proto platí analogicky $f_{n+1}([g_{n+1}(u),\, g_{n+1}(v)]) = [f_{n+1} g_{n+1}(u),\, f_{n+1} g_{n+1}(v)]$. Stačí tedy dokázat, že f_{n+1} a g_{n+1} komutují na ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$. Ať $u \in {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, s využitím 4 dostáváme

$$g_{n+1} f_{n+1}(u) \;=\; g_n f_{n+1}(u) \;=\; f_n g_{n+1}(u) \;=\; f_{n+1} g_{n+1}(u).$$

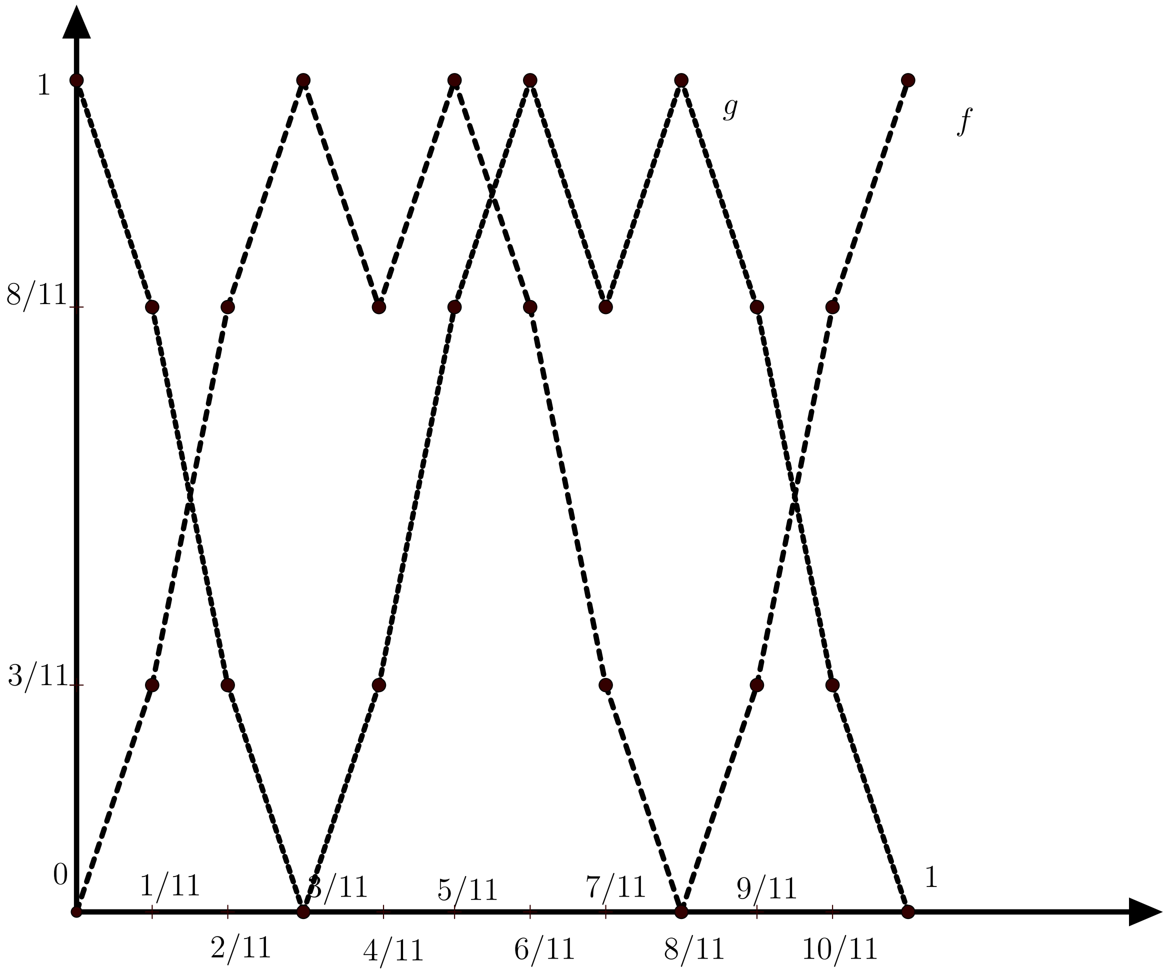
3 Ihned plyne z pozorování 9, z bodu 2 a z konstrukce.

Posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejnoměrně cauchyovské, protože pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ platí $f_m([u,\, v]) = [f_m(u),\, f_m(v)] = [f_n(u),\, f_n(v)] = f_n([u,\, v])$, a navíc $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 1/3^{n-2}$ kdykoli u, v jsou po sobě jdoucí v A_n (pak z pozorování 9 jsou $f_n(u), f_n(v)$ po sobě jdoucí v A_{n-1}), a tedy $\|f_m - f_n\|_{sup} \leq 1/3^{n-2}$; analogicky pro g_n.

Tedy existují spojité limity $\bar{f}$ a $\bar{g}$. Ze 4. bodu $\bar{f}|_A = f$ a $\bar{g}|_A = g$. Dále ze 4. bodu $\bar{f}$ a $\bar{g}$ komutují na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, což je hustá podmnožina $[0,\,1]$ opět z bodu 4, a tedy komutují na $[0,\,1]$. Poslední podmínka plyne z toho, že ji splňují funkce f_n i g_n pro každé $n \in N$.

$\square$

Důsledek 14. *Existují komutující spojité funkce z intervalu* $[0,1]$ *na sebe, které nemají společný pevný bod.*



Obrázek 2.1: Funkce f, g, resp. $f*$, $g*$, z důsledku 14

Důkaz. Položme $A := \{n/11; n = 0, \ldots, 11\}$ a definujme funkce $f, g : A \to A$ následovně: $f(n/11)$ se rovná 0 pro $n = 0, 8$; $3/11$ pro $n = 1, 7, 9$; $8/11$ pro $n = 2, 4, 6, 10$ a 1 jinak; $g(n/11)$ se rovná 0 pro $n = 3, 11$; $3/11$ pro $n = 2, 4, 10$; $8/11$ pro $n = 1, 5, 7, 9$ a 1 jinak (viz obrázek 2.1). Použitím věty 13 dostaneme funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \to [0, 1]$, které komutují a nemají společný pevný bod.

$\square$

Poznámka. Otázka, jestli abelovská semigrupa spojitých zobrazení na dendritu musí mít společný pevný bod (Dyer, Isbell, Shields), zůstala poměrně dlouho otevřená. Nakonec ji nezávisle na sobě vyřešili Boyce a Huneke, z jehož článku čerpá tato bakalářská práce.

Navíc oba zkonstruovali v zásadě ten stejný příklad a to překvapivě (jen) dvě komutující funkce na intervalu $[0, 1]$, které jsou dokonce na.

2.2 Další výsledky týkající se spojitých komutujících funkcí

Následující důsledek je převzat z článku Huneke [3].

Důsledek 15 (A — verze z článku)**.** *Existují komutující spojité funkce intervalu* $[0,1]$ *do sebe, které mají otevřenou množinu minimálně souvislou a invariantní vzhledem k těmto funkcím.*

Tím, že množina E je invariantní vzhledem k funkci f, se zpravidla myslí jedna z následujících dvou alternativ:

- $f(E) \subseteq E$,
- $f^{-1}(E) = E$.

(Zřejmě druhá podmínka je silnější.) V článku není specifikováno, kterou z možností měl autor na mysli. Navíc toto tvrzení nejen není v článku dokázáno, ale není ani nijak okomentováno; nemůžeme si to tedy ani domyslet. Rozebereme proto obě možnosti.

Důsledek 16 (A1 — možná verze důsledku 15)**.** *Existují komutující spojité funkce* f, g *(různé, ani jedna z nich není identita) intervalu* $[0,1]$ *na sebe takové, že jediná (neprázdná) souvislá množina* $E \subseteq [0,1]$ *splňující* $E = f^{-1}(E)$ *je množina* $E = [0,1]$*.*

Důkaz. Položme $f := \bar{f}$ a $g := \bar{g}$ z důsledku 14 a mějme neprázdnou souvislou množinu $E \subseteq [0,1]$ splňující $E = f^{-1}(E)$. Nechť tedy $x \in E$. Všimněme si, že $f^{-1}(x) \subseteq E$ a $f^{-1}(x) \cap [0, 3/11] \neq \emptyset$, $f^{-1}(x) \cap [8/11, 1] \neq \emptyset$. Tedy ze souvislosti E nutně $[3/11, 8/11] \subseteq E$. Tedy $[0,1] \subseteq f(E) \subseteq E$.

□

Druhá verze důsledku 15 je o něco zajímavější. K jejímu důkazu budeme potřebovat několik pomocných tvrzení.

Lemma 17 (Mountain climbing theorem pro po částech lineární nekonstantní funkce)**.** *Nechť* $a, b, c, d, u, v \in [0,1]$ *splňují* $a \neq b$, $c \neq d$ *a* $u \neq v$*. Nechť* $f : [a,b] \to [0,1]$ *a* $g : [c,d] \to [0,1]$ *jsou po částech lineární nekonstantní funkce takové, že intervaly* $f([a,b])$, $[f(a), f(b)]$, $g([c,d])$ *a* $[g(c), g(d)]$ *splývají (a* $f(a) = g(c)$*). Pak existují po částech lineární nekonstantní funkce* $h : [u,v] \mapsto [a,b]$ *a* $j : [u,v] \mapsto [c,d]$ *splňující* $fh = gj$ *a* $h(u) = a$, $h(v) = b$, $j(u) = c$, $j(v) = d$.

Toto tvrzení je převzato z bakalářské práce Kristýny Šmídové [5] a podobně jako v případě lemmatu 12 ho uvedeme bez důkazu, přestože bohužel není nikde v této práci explicitně zformulováno. Lemma 17 ale ihned plyne z Důsledku 1, Důsledku 2 v této práci a jejich důkazů. Tyto dvě věty totiž sice říkají jen to, že pro po částech lineární nekonstantní funkce je MCP řešitelný (ve smyslu uvedeném v kapitole Mountain climbing problem této práce), ale dokazují se tím, že se řešení MCP definují přímo. To, že jsou potom tato řešení po částech lineární nekonstantní funkce, je snadné ověřit.

Následující pozorování se nám bude hodit i později.

Pozorování 18. *Nechť $A \subseteq [0,1]$ je uzavřená řídká množina, $f, g : A \to A$ jsou funkce bez skoků a $0, 1 \in g(a)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Pro každé $b, b' \in A$, $b \neq b'$ takové, že $|f([b,b'])| = 1$ platí $g*^{-1}([b,b']) \subseteq A$.*

2. *Pro každé $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A platí $f(u) \neq f(v)$.*

Důkaz. „1. $\Rightarrow$ 2.“ Nechť pro spor pro nějaká $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A platí $f(u) = f(v)$; protože u, v jsou po sobě jdoucí v A, dostáváme $f([u,v]) = f(A \cap [u,v]) = f(\{u,v\}) = \{f(u)\}$. Protože $g*$ je na ($0, 1 \in g(A)$ a spojitá funkce nabývá mezihodnot), najdeme $x \in [0,1]$ takové, že $g*\,(x) = (u+v)/2$. Z předpokladu použitého pro $b := u$, $b' := v$ dostáváme

$$x \in g*^{-1}\,((u+v)/2) \subseteq g*^{-1}([u,v]) \subseteq A.$$

Protože $g : A \to A$, platí $(u+v)/2 = g*(x) = g(x) \in A$. Tedy $(u+v)/2 \in A$ a zároveň $u \neq v$ jsou po sobě jdoucí v A, spor.

„2. $\Rightarrow$ 1.“ Ukážeme, že pro žádné $b, b' \in A$, $b \neq b'$ není splněno $|f([b,b'])| = 1$. Nechť $b, b' \in A$, $b \neq b'$, z řídkosti množiny A najdeme $x \in [b,b'] \setminus A$. Najdeme u, v po sobě jdoucí v A, pro která $x \in [u,v]$, a zřejmě $[u,v] \subseteq [b,b']$. Z předpokladu dostáváme $f(u) \neq f(v)$, a tedy $|f([b,b'])| \geq |f([u,v])| \geq |\{f(u), f(v)\}| = 2$.

□

Následující poměrně technické lemma je modifikací věty 13.

Lemma 19. *Nechť A je **konečná** podmnožina $[0,1]$ a nechť $f, g : A \to A$ jsou funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující 0 a 1. Dále předpokládejme, že*

- *pro každé a, a' po sobě jdoucí v A platí $f([g(a), g(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$ a $g([f(a), f(a')]) \subseteq [fg(a), fg(a')]$,*
- *pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$.*

Pak existují množiny $A_n \subseteq [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a funkce $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, splňující:

1. *$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : {f_n}^{-1}\,(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n) = A_{n+1}$.*

2. *$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každé u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$:*

$$[f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = f_n([g_n(u), g_n(v)]) =$$

$$= g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)],$$

   a zároveň $f_n g_n(u) = g_n f_n(u)$, tj. funkce f_n a g_n komutují na ${f_n}^{-1}(A_n)$.

3. *Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí, že f_n, g_n jsou po částech lineární a A_n je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených intervalů.*

4. *Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$ platí, že $f_n(u) \neq f_n(v)$ nebo $g_n(u) \neq g_n(v)$.*

5. *Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A_n platí, že každá z funkcí f_n, g_n je buď konstantní, nebo po částech lineární nekonstantní na $[u, v]$, přičemž alespoň jedna z nich je lokálně nekonstantní.*

6. $\forall n \in \mathbb{N}$:

   - $A_{n-1} \subseteq A_n$, $A \subseteq A_n$,
   - *pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí* $|u - v| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,
   - *pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí* $f_n([u, v]) = [f_n(u), f_n(v)]$ *a* $g_n([u, v]) = [g_n(u), g_n(v)]$,
   - $f_n|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$, *a* $f_n|_A = f$,
   - $g_n|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$, *a* $g_n|_A = g$,
   - $f_{n-1}g_n = g_{n-1}f_n$.

Navíc posloupnosti funkcí f_n a g_n mají spojité limity $\bar{f}, \bar{g}$ splňující

- *pro každé $n \in \mathbb{N}$:* $\bar{f}|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$,
- *speciálně tedy* $\bar{f}|_A = f$,
- *pro každé $n \in \mathbb{N}$:* $\bar{g}|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$,
- *speciálně tedy* $\bar{g}|_A = g$,
- $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$,
- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé a, a' po sobě jdoucí v A_n platí* $[f(a), f(a')] = \bar{f}([a, a'])$, $[g(a), g(a')] = \bar{g}([a, a'])$.

Důkaz. Důkaz je podobný důkazu věty 13, ale místo lemmatu 12 budeme používat lemma 17.

Položme $A_0 := f(A) = g(A)$, $f_0 := f*$, $g_0 := g*$ (můžeme, neboť z předpokladů $0, 1 \in f(A) \subseteq A$).

Z toho, že funkce f a g jsou z A do A a bez skoků, dostáváme

$$f_0{}^{-1}(A_0) = g_0{}^{-1}(A_0) = A \text{ (bod 1)}.$$

Pro ověření 2 předpokládejme, že u a v jsou po sobě jdoucí v A. Použitím předpokladů pro $a := u$ a $a' := u$ dostáváme $g([f(u), f(u)]) \subseteq [fg(u), fg(u)]$, tj. $fg(u) = gf(u)$, a analogicky se ukáže $fg(v) = gf(v)$. Tedy

$$[fg(u), fg(v)] = [gf(u), gf(v)].$$

Užitím téhož předpokladu pro $a := u$ a $a' := v$ dostáváme $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Protože f_0 a g_0 vzniknou z funkcí f a g lineárním dodefinováním, dostáváme z předchozího 2 pro $n = 0$.

Funkce $f*$ a $g*$ jsou zřejmě po částech lineární. Z předpokladu, že pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$, ihned dostáváme, že jsou na každém úseku také nekonstantní. Tedy jsou splněny i body 3 a 5.

Bod 4 plyne z toho, že ${f_0}^{-1}(A_0) = A$, a z předpokladu, že pro každé $a, a', a \neq a'$ po sobě jdoucí v A platí $f(a) \neq f(a')$ a $g(a) \neq g(a')$.

Jsou-li pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ A_n, f_n a g_n definovány, položíme $A_{n+1} := {f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$. Nechť $l \in \mathbb{N}$ je počet disjunktních uzavřených intervalů, jejichž sjednocením je A_n, $m \in \mathbb{N}$ je počet intervalů, na kterých je f_n lineární nekonstantní, a tedy prosté, a $k \in \mathbb{N}$ počet intervalů, na kterých je f_n konstantní. Pak A_{n+1} je sjednocením nejvýše $m \cdot l + k$ disjunktních uzavřených intervalů, protože průnik A_{n+1} s každým z m intervalů, na kterých je f_n prosté, se rozkládá na disjukntní uzavřené intervaly stejně jako obraz tohoto průniku při zobrazení f_n. Tento obraz je ovšem podmnožinou A_n.

Položme $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = f_n|_{A_{n+1}}$, $g_{n+1}|_{A_{n+1}} = g_n|_{A_{n+1}}$. Dále pro každé $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A_{n+1} definujeme $f_{n+1}|_{[u,v]}$ a $g_{n+1}|_{[u,v]}$ v závislosti na tom, jestli $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, nebo $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$.

Pokud $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$, definujeme obě funkce přímo: položíme $f_{n+1}(u) := f_n(u)$, $f_{n+1}(2u/3 + v/3) := f_n(v)$, $f_{n+1}(u/3 + 2v/3) := f_n(u)$, $f_{n+1}(v) := f_n(v)$ a dodefinujeme $f_{n+1}|_{[u,\, v]}$ tak, aby $f_{n+1}|_{[u,\, v]}$ byla lineární na každém z intervalů $[u,\, 2u/3 + v/3]$, $[2u/3 + v/3,\, u/3 + 2v/3]$ a $[u/3 + 2v/3,\, v]$, analogicky definujeme g_{n+1}. Z indukčního předpokladu pro n (bod 4) máme zaručeno, že alespoň jedna z těchto funkcí je po částech lineární nekonstantní, a navíc každá z těchto dvou funkcí je buď po částech lineární nekonstantní, nebo konstantní na $[u, v]$. Tedy je splněn bod 5.

Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, jsou z indukčního předpokladu pro n (body 2 a 5) splněny předpoklady lemmatu 17, neboť pokud by jedna z funkcí f_n, g_n byla na $[u, v]$ konstantní, pak by nutně platilo $[u, v] \subseteq A_{n+1}$, a tedy by $u \neq v$ nemohly být po sobě jdoucí v A_{n+1}. Existují tedy funkce $j : [u,\, v] \to [f_n(u),\, f_n(v)]$ a $h : [u,\, v] \to [g_n(u),\, g_n(v)]$ takové, že $f_n h = g_n j$ a $j(u) = f_n(u)$, $j(v) = f_n(v)$, $h(u) = g_n(u)$ a $h(v) = g_n(v)$.

Označme X (konečnou) množinu všech krajních bodů uzavřených intervalů, jejichž disjunktním sjednocením je A_{n+1}. Pak i $X \times X$ je konečná, uspořádáme ji do prosté posloupnosti $X \times X = \{[a_i, b_i];\, 1 \leq i \leq I\}$. Indukcí definujeme body v_i a funkce $j_i : [u,\, v_i] \to [f_n(u),\, f_n(v)]$, $h_i : [u,\, v_i] \to [g_n(u),\, g_n(v)]$, $0 \leq i \leq I$. Položme $v_0 := v$, $h_0 := h$ a $j_0 := j$. Je-li pro $1 \leq i \leq I$ definováno v_{i-1}, h_{i-1} a j_{i-1}, položme

$$c := \min\{x \in [u, v_{i-1}];\, h_{i-1}(x) = a_i \,\&\, j_{i-1}(x) = b_i\},$$

$$d := \max\{x \in [u, v_{i-1}];\, h_{i-1}(x) = a_i \,\&\, j_{i-1}(x) = b_i\},$$

$v_i := v_{i-1} - (d - c)$ a definujme funkce h_i, j_i předpisy:

$$h_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}(x), & x \leq c, \\ h_{i-1}(x + (d - c)), & c \leq x \end{cases}$$

a podobně

$$j_i(x) = \begin{cases} j_{i-1}(x), & x \leq c, \\ j_{i-1}(x + (d - c)), & c \leq x. \end{cases}$$

Všimněme si, že pro každé i jsou funkce h_i, j_i spojité, neboť jsou spojité v každém bodě, splňují $f_n h_i = g_n j_i$ (triviálně, neboť jde o bodovou vlastnost) a $j_i(u) = f_n(u)$, $j_i(v_i) = f_n(v)$, $h_i(u) = g_n(u)$, $h_i(v_i) = g_n(v)$. Navíc funkce h_I, j_I splňují, že pro každé $i \leq I$ platí $|(h_I \times j_I)^{-1}[a_i, b_i]| = 1$.

Označme h', j' složení funkcí h_I, j_I s lineární bijekcí intervalu $[u, 2u/3 + v/3]$ na $[u, v']$. To jsou opět spojité, po částech lineární nekonstantní funkce splňující $f_n h' = g_n j'$, $j'(u) = f_n(u)$, $j'(2u/3 + v/3) = f_n(v)$, $h'(u) = g_n(u)$, $h'(2u/3 + v/3) = g_n(v)$. Také pro každé $i \leq I$ platí $|(h' \times j')^{-1}[a_i, b_i]| = 1$. Nyní už můžeme definovat funkce $f_{n+1}|_{[u,v]}$, $g_{n+1}|_{[u,v]}$:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} j'(x), & x \in [u, 2u/3 + v/3], \\ j'(4u/3 + 2v/3 - x), & x \in [2u/3 + v/3, u/3 + 2v/3], \\ j'(2u/3 - 2v/3 + x), & x \in [u/3 + 2v/3, v] \end{cases}$$

a podobně

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} h'(x), & x \in [u, 2u/3 + v/3], \\ h'(4u/3 + 2v/3 - x), & x \in [2u/3 + v/3, u/3 + 2v/3], \\ h'(2u/3 - 2v/3 + x), & x \in [u/3 + 2v/3, v]. \end{cases}$$

Takto získáme funkce f_{n+1}, g_{n+1}, které jsou na konečně mnoha ($\leq 2\cdot(m\cdot l + k)$) svých definujících intervalech po částech lineární, a tedy jsou po částech lineární (součet konečně mnoha přirozených čísel je přirozené číslo). Ověříme předpoklady 1–6 pro $n+1$:

6 Ověříme jen poslední bod, ostatní ihned plyne z konstrukce a indukčního předpokladu. Nechť u, v jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, ověříme, že

$$f_n g_{n+1}|_{[u,v]} = g_n f_{n+1}|_{[u,v]}$$

(a to stačí, neboť intervaly tohoto tvaru pokrývají $[0, 1]$).

Pokud $f_n g_n(u) \neq f_n g_n(v)$, tvrzení plyne ihned z konstrukce. Předpokládejme tedy, že $f_n g_n(u) = f_n g_n(v)$. Pak z indukčního předpokladu dostáváme:

$$g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_n(v) = g_n f_n(v),$$

$$f_n([g_n(u), g_n(v)]) = [f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = \{f_n g_n(u)\},$$
$$g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)] = \{g_n f_n(u)\}.$$

Nechť $w \in [u, v]$, z konstrukce ihned plyne $f_{n+1}(w) \in [f_n(u), f_n(v)]$, $g_{n+1}(w) \in [g_n(u), g_n(v)]$. Celkem tedy:

$$g_n f_{n+1}(w) = g_n f_n(u) = f_n g_n(u) = f_n g_{n+1}(w).$$

5 Ihned plyne z konstrukce.

1 S využitím indukčního předpokladu a 6 pro každé $x \in [0, 1]$ dostáváme :

$$f_{n+1}(x) \in A_{n+1} \Leftrightarrow g_n f_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow f_n g_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow g_{n+1}(x) \in A_{n+1}.$$

2 Ať u, v jsou po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, pak z pozorování 9 dostáváme, že $f_{n+1}(u), f_{n+1}(v)$ jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, a tedy ihned z konstrukce plyne

$$g_{n+1}([f_{n+1}(u),\ f_{n+1}(v)]) = [g_{n+1} f_{n+1}(u),\ g_{n+1} f_{n+1}(v)].$$

Podobně díky 1 jsou i $g_{n+1}(u), g_{n+1}(v)$ po sobě jdoucí v A_{n+1}, proto platí analogicky $f_{n+1}([g_{n+1}(u),\, g_{n+1}(v)]) = [f_{n+1}g_{n+1}(u),\, f_{n+1}g_{n+1}(v)]$. Stačí tedy dokázat, že f_{n+1} a g_{n+1} komutují na ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$. Ať $u \in {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, s využitím bodu 4 dostáváme

$$g_{n+1}f_{n+1}(u) \;=\; g_n f_{n+1}(u) \;=\; f_n g_{n+1}(u) \;=\; f_{n+1}g_{n+1}(u).$$

3 Ihned plyne z konstrukce.

4 Jsou-li $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, najdeme a, b po sobě jdoucí v A_{n+1}, že $u \in [a, b]$, a dále a', b' po sobě jdoucí v A_{n+1}, že $v \in [a', b']$. Protože $A_{n+1} \subseteq {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, nutně $[a, b] = [a', b']$. Kdyby některá z funkcí f_{n+1}, g_{n+1} byla na $[a, b]$ konstantní, pak by $[u, v] \subseteq [a, b] \subsetneq {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, což by byl spor s tím, že $u, v, u \neq v$ jsou po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$.

Ihned z konstrukce tedy platí buď $[u, v] \subseteq [a, 2a/3+b/3]$, nebo $[u, v] \subseteq [2a/3+b/3, a/3+2b/3]$, nebo $[u, v] \subseteq [a/3+2b/3, b]$. Tvrzení nyní plyne z konstrukce — jedna z funkcí je totiž dokonce prostá na $[u, v]$ v případě, že $f_n g_n(a) = f_n g_n(b)$, a jinak použijeme, že dvojice $[f_{n+1}(u), g_{n+1}(u)]$ a $[f_{n+1}(v), g_{n+1}(v)]$ ležely v $X \times X$ z konstrukce funkcí $f_{n+1}|_{[a,b]}$, $g_{n+1}|_{[a,b]}$.

Posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejnoměrně cauchyovské, protože pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ platí $f_m([u,\, v]) = [f_m(u),\, f_m(v)] = [f_n(u),\, f_n(v)] = f_n([u,\, v])$, a navíc $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 1/3^{n-2}$ kdykoli u, v jsou po sobě jdoucí v A_n (pak z pozorování 9 jsou $f_n(u), f_n(v)$ po sobě jdoucí v A_{n-1}), a tedy $\|f_m - f_n\|_{sup} \leq 1/3^{n-2}$; analogicky pro g_n. Tedy existují spojité limity $\bar{f}$ a $\bar{g}$.

Ze 6. bodu $\bar{f}|_A = f$, $\bar{g}|_A = g$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\bar{f}|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$, $\bar{g}|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$. Dále ze 6. bodu $\bar{f}$ a $\bar{g}$ komutují na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, což je hustá podmnožina $[0,\, 1]$ z 6, a tedy komutují na $[0,\, 1]$. Poslední podmínka plyne z toho, že ji splňují funkce f_m i g_m pro každé $m \in N, m \geq n$.

Tím je lemma dokázáno.

□

Důsledek 20 (A2 — možná verze důsledku 15)**.** *Existují komutující spojité funkce f, g (různé, ani jedna z nich není identita) intervalu $[0, 1]$ na sebe takové, že jediná množina $E \subseteq [0, 1]$ s neprázdným vnitřkem splňující $f(E) \subseteq E$ a $g(E) \subseteq E$ je množina $E = [0, 1]$.*

Důkaz. Uvažme opět množinu A a funkce f, g z důsledku 14. Protože množina A je zřejmě konečná, můžeme použít lemma 19. Tvrdíme, že funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$ ze závěru lemmatu jsou hledanými funkcemi. Nechť tedy $E \subseteq [0, 1]$ je množina s neprázdným vnitřkem splňující $\bar{f}(E) \subseteq E$ a $\bar{g}(E) \subseteq E$, najdeme x z vnitřku E a $n \in \mathbb{N}$ dost velké, aby $[x-(1/3)^n, x+(1/3)^n] \subseteq E$. Z lemmatu 19, bod 6 najdeme $u, v \in A_{n+2}, u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq [x-(1/3)^n, x+(1/3)^n] \subseteq E$.

Pozorování: Existují-li pro nějaké $n \in N$ body $u, v \in A_n, u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq E$, pak existují $u', v' \in A_{n-1}, u' \neq v'$ takové, že $[u', v'] \subseteq E$.

Důkaz pozorování: Pokud existuje $x \in [u, v] \setminus A_n$, najdeme a, b po sobě jdoucí v $A_n = f_{n-1}(A_{n-1})$ takové, že $x \in [a, b]$, pak zřejmě $[a, b] \subseteq [u, v]$, a z lemmatu 19, bod 4 dostáváme, že $f_{n-1}(u) \neq f_{n-1}(v)$ nebo $g_{n-1}(u) \neq g_{n-1}(v)$. Předpokládejme, že $f_{n-1}(u) \neq f_{n-1}(v)$, v případě, že by platilo $g_{n-1}(u) \neq g_{n-1}(v)$, by se postupovalo analogicky.

Položme $u' := f_{n-1}(u)$, $v' := f_{n-1}(v)$, zřejmě $u', v' \in A_{n-1}$. Protože u, v jsou po sobě jdoucí v A_n, s využitím lemmatu 19 dostáváme

$$[u', v'] = [f_{n-1}(u), f_{n-1}(v)] = [\bar{f}(u), \bar{f}(v)] = \bar{f}([u, v]) \subseteq \bar{f}(E) \subseteq E.$$

Pokud platí $[u, v] \subseteq A_n$, pak z lemmatu 19, bod 6 dostáváme $f_{n-1}([u, v]) = \bar{f}([u, v]) \subseteq \bar{f}(E) \subseteq E$. Podobně pro g_{n-1}. Stačí tedy ukázat, že $|f_{n-1}([u, v])| > 1$ nebo $|g_{n-1}([u, v])| > 1$, neboť pak najdeme $u', v' \in f_{n-1}([u, v]), u' \neq v'$, resp. $u', v' \in g_{n-1}([u, v]), u' \neq v'$. Pro libovolná taková u', v' bude platit $[u', v'] \subseteq f_{n-1}([u, v]) \subseteq E$, resp. $[u', v'] \subseteq g_{n-1}([u, v]) \subseteq E$, protože spojitá funkce nabývá mezihodnot.

Najdeme $m \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že (u, v) není podmnožinou A_m (takové m existuje, neboť $A_1 = A$ je konečná). Najdeme tedy $x \in (u, v) \setminus A_m$ a a, b po sobě jdoucí v A_m takové, že $x \in [a, b]$. Z bodu 6 lemmatu 19 dostáváme, že $f_m|_{[u,v]} = f_{n-1}|_{[u,v]}$ a $g_m|_{[u,v]} = g_{n-1}|_{[u,v]}$. Z bodu 5 lemmatu 19 dostáváme, že alespoň jedna z funkcí f_m, g_m je lokálně nekonstantní na $[a, b]$, a tedy i na $[a, b] \cap [u, v]$. Tím jsme dokázali pozorování.

Nyní opakovaným použitím pozorování dostáváme, že existují $u, v \in A_0$, $u \neq v$ takové, že $[u, v] \subseteq E$, a rozborem všech případů nahlédneme, že vždy $\bar{f}([u, v]) = [0, 1]$. Dokázali jsme $E = [0, 1]$, jak jsme chtěli.

□

2.3 Jiné věty o rozšiřování komutujících funkcí

Následující důsledek je převzat z článku [3].

Důsledek 21 (B — verze z článku)**.** *Nechť A je uzavřená řídká podmnožina $[0, 1]$ a $f, g : A \to A$ funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující $0, 1$. Nechť pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí, že $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Pak existují rozšíření funkcí f a g na funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \to [0, 1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, a navíc pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{f}([u, v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u, v]) = [g(u), g(v)]$.*

Tento důsledek neplatí. Následující protipříklad je modifikací příkladu uvedeného ve druhé kapitole práce [5].

Příklad 22 (B1 — Protipříklad na důsledek 21)**.** *Položme*

$$A_1 := \{1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2};\, n \in \mathbb{N}\},$$

$$A_2 := \{1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} \pm 2^{-n-1-i};\, n \in \mathbb{N},\, i \in \mathbb{N}\},$$

$$A_3 := \{1/2 + 2^{-2-i};\, i \in \mathbb{N}\} \cup \{1/2\},$$

$$A_4 := \{7/8 \pm 2^{-2-i};\, i \in \mathbb{N}\} \cup \{7/8\},$$

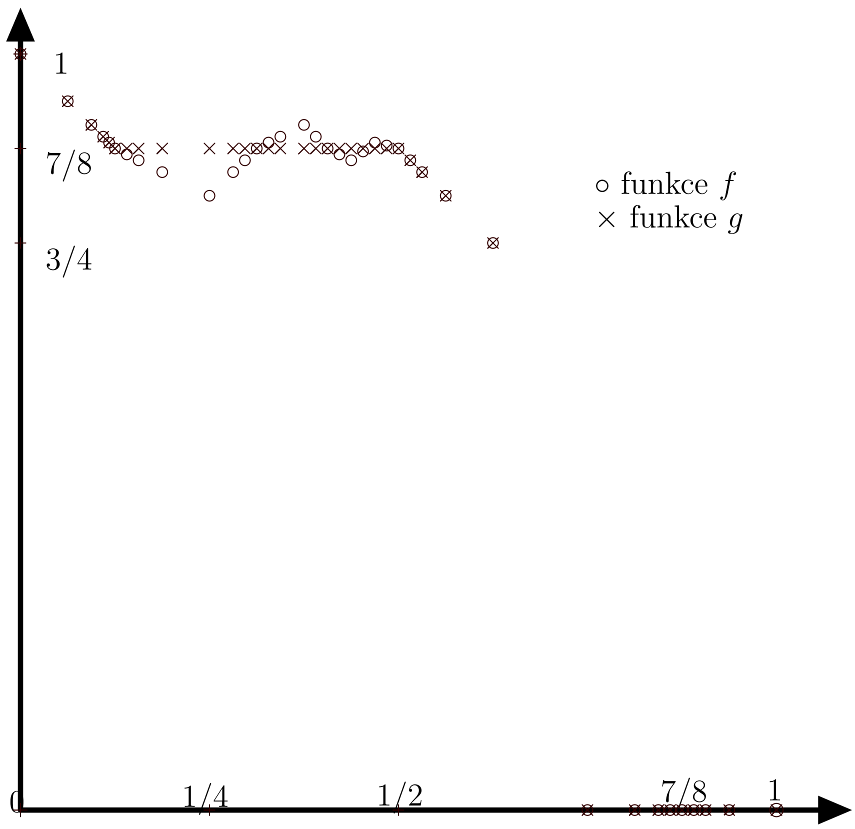
$$A := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

a definujeme $f : A \to A$ *následovně:*

$$f(x) = \begin{cases} 7/8, & x \in A_1 \cup \{1/2\}, \\ 7/8 + (-1)^n \cdot 2^{-n-i-2}, & x = 1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} + 2^{-n-1-i}, n, i \in \mathbb{N}, \\ 7/8 - (-1)^n \cdot 2^{-n-i-1}, & x = 1/2 - 3 \cdot 2^{-n-2} - 2^{-n-1-i}, n, i \in \mathbb{N}, \\ 7/8 - 2^{-i-2}, & x = 1/2 + 2^{-2-i};\ i \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in A_4. \end{cases}$$

Funkci $g : A \to A$ *pak definujeme jednoduše pomocí už definované funkce* f *takto:*

$$g(x) = \begin{cases} 7/8, & x \in A \cap [1/8, 1/2], \\ f(x), & \textit{jinak (viz obrázek 22).} \end{cases}$$



Obrázek 2.2: Funkce f, g z příkladu 22

Vzhledem k tomu, že funkce $g*$ *je na intervalu* $[1/8, 1/2]$ *konstantní, nemůžeme použít Mountain climbing theorem (ani verzi 12, ani verzi 17). Ve druhé kapitole práce [5] je dokázáno, že ve skutečnosti pro (v zásadě) tyto funkce je Mountain climbing problem neřešitelný (ve smyslu uvedeném v kapitole Mountain climbing problem této práce).*

Platí ovšem víc než jen, že pro tyto funkce nelze použít větu 13 ani žádnou její modifikaci, přestože množina A *a funkce* f, g *splňují předpoklady důsledku 21.*

Ukážeme totiž, že neexistují rozšíření s požadovanými vlastnostmi. Nechť tedy pro spor taková rozšíření $\bar{f}, \bar{g}$ existují, z podmínky $\bar{g}([u, v]) = [g(u), g(v)]$ pro každé u, v po sobě jdoucí v A vidíme, že $\bar{g}|_{[1/8,\,1/2]} \equiv 7/8$, $\bar{g}([5/8, 3/4]) = [0, 3/4]$, a podobně $\bar{f}([5/8, 3/4]) = [0, 3/4]$. Protože platí $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$ na $[0, 1]$, speciálně platí i

$$\bar{f}|_{[0,\,3/4]}\bar{g}|_{[5/8,\,3/4]} = \bar{g}|_{[0,\,3/4]}\bar{f}|_{[5/8,\,3/4]}.$$

Našli jsme tak dvojici funkcí $\bar{g}|_{[5/8,\,3/4]}$, $\bar{f}|_{[5/8,\,3/4]}$, které řeší neřešitelný Mountain climbing problem s funkcemi $\bar{f}|_{[0,\,3/4]}$, $\bar{g}|_{[0,\,3/4]}$ (jde opět o analogii příkladu uvedeného ve druhé kapitole práce [5]).

Uvedeme dvě slabší verze důsledku 21, které platí.

Důsledek 23 (B2 — možná verze důsledku 21)**.** *Nechť A je uzavřená řídká podmnožina $[0, 1]$ a $f, g : A \to A$ funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující $0, 1$. Nechť pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí, že $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$, a nechť dále pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $f(u) \neq f(v)$, $g(u) \neq g(v)$. Pak existují rozšíření funkcí f, g na funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \to [0, 1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, a navíc pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{f}([u, v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u, v]) = [g(u), g(v)]$.*

Důkaz. Protože množina A je řídká, z pozorování 18 je splněn i poslední předpoklad věty 13. Použitím věty okamžitě dostáváme požadované tvrzení.

□

Pro druhou verzi budeme opět potřebovat speciální verzi Mountain climbing theorem.

Lemma 24 (Mountain climbing theorem pro po částech lineární funkce)**.** *Nechť $a, b, c, d, u, v \in [0, 1]$. Nechť $f : [a, b] \to [0, 1]$ a $g : [c, d] \to [0, 1]$ jsou po částech lineární funkce takové, že intervaly $f([a, b])$, $[f(a), f(b)]$, $g([c, d])$ a $[g(c), g(d)]$ splývají (a $f(a) = g(c)$). Pak existují po částech lineární funkce $h : [u, v] \to [a, b]$ a $j : [u, v] \to [c, d]$ splňující $fh = gj$ a $h(u) = a$, $h(v) = b$, $j(u) = c$, $j(v) = d$.*

Důkaz. Vynecháme některé technické detaily, neboť Mountain climbing problem není tématem této práce a podrobněji se budeme zabývat až důsledky tohoto lemmatu pro rozšiřování spojitých komutujících funkcí.

Pokud by platilo např. $a = b$, platilo by i $f(a) = f(b)$, a tedy $g([c, d]) = [f(a), f(b)] = \{f(a)\}$, tj. funkce g by už nutně byla konstantní. Můžeme pak položit $h \equiv a$ a j zvolit tak, aby $j(u) = c$, $j(v) = d$ a j byla lineární na $[u, v]$. Podobně by se postupovalo pro $c = d$ nebo $u = v$. Nadále tedy budeme předpokládat, že $a \neq b$, $c \neq d$ a $u \neq v$.

Z funkcí f, g vyrobíme funkce f', g' po částech lineární nekonstantní vynecháním intervalů, na kterých jsou tyto funkce konstantní. Konstrukci rozepíšeme jen pro f, pro g by se postupovalo analogicky. Nechť tedy funkce f je lineární na každém z intervalů $[a = x_0,\, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1},\, x_n = b]$, položme $f_0 := f$, $b_0 := b$ a pro $1 \leq i \leq n$ indukcí definujeme body b_i a funkce $f_i : [a, b_i] \to [0, 1]$ takto: $f_i := f_{i-1}$ a $b_i := b_{i-1}$, pokud f_{i-1} je nekonstantní na $[x_{n-i}, x_{n-i+1}]$, a $b_i := b_{i-1} - (x_{n-i+1} - x_{n-i})$,

$$f_i(x) := \begin{cases} f_{i-1}(x), & a \leq x \leq x_{n-i}, \\ f_{i-1}(x + (x_{n-i+1} - x_{n-i})), & x_{n-i} \leq x \leq b_i, \end{cases}$$

pokud f_{i-1} je konstantní na $[x_{n-i}, x_{n-i+1}]$. Je vidět, že všechny funkce $f_i, 0 \leq i \leq n$ jsou spojité a že $a = b_n$ právě tehdy, když f je konstantní funkce; v takovém případě ovšem (díky shodnosti obrazů obou funkcí) je i g konstantní, a tedy tvrzení platí (funkce h, j můžeme definovat přímo podobným způsobem jako v případě $a = b$ výše). Položme tedy $f' := f_n$, to je zřejmě po částech lineární nekonstantní funkce. Podobně bychom našli g_n, funkci g' získáme jejím složením s vhodnou lineární funkcí tak, aby funkce f', g' měly shodné definiční obory (to lze díky $a \neq b_n$).

Máme tedy funkce f', g' splňující předpoklady Mountain climbing theorem pro po částech lineární nekonstantní funkce (lemma 17), takže existují funkce $h', j' : [0,1] \to [0,1]$ ze závěru lemmatu 17. Označme:

$$M := \{f(x), \exists\, x, y \in [a,b], x \neq y : f([x,y]) = \{f(x)\}\},$$

$$N := \{g(x), \exists\, x, y \in [c,d], x \neq y : g([x,y]) = \{g(x)\}\},$$

$$X := (f'h')^{-1}(M) \cup (g'j')^{-1}(N).$$

Množiny M a N jsou konečné, a tedy i množina X je konečná, neboť funkce $f'h', g'j'$ jsou po částech lineární nekonstantní, a tedy po částech prosté: na každém intervalu, kde je funkce h' lineární nekonstantní, totiž funkce $f'h'$ odpovídá „zrychlení“ nebo „zpomalení“ zúžení funkce f' na nějaký nedegenerovaný podinterval definičního oboru, takže je to po částech lineární nekonstantní funkce. Toto platí na všech konečně mnoha intervalech, kde je funkce h' lineární, celkem tedy $f'h'$ je po částech lineární nekonstantní; podobně pro $g'j'$.

Můžeme tedy prvky množiny X seřadit podle velikosti $X = \{y_1 < \cdots < y_k\}$ a položme $y_0 := 0, y_{k+1} := 1$. Definujeme $h'', j'' : [0, 1+k] \to [0,1]$ takto: $h''(x) := h'(x-i)$, $j''(x) := j'(x-i)$ pro $x \in [y_i + i, y_{i+1} + i]$, $0 \leq i \leq k$, a intervaly $[y_i, y_i + 1]$, $1 \leq i \leq k$, budou „přerovnávací pro konstantní úseky“.

Jedna z funkcí $h''|_{[y_i, y_i+1]}, j''|_{[y_i, y_i+1]}$ tedy bude lineární bijekcí $[y_i,\, y_i + 1]$ na nějaký takový interval a druhá bude konstantní (druhý horolezec „čeká“), nebo budou obě dvě funkce lineární bijekce $[y_i, y_i + 1]$ na příslušné dvě „rovinky“.

Funkce h, j nyní získáme složením funkcí h'', j'' s lineární bijekcí z $[u, v]$ na $[0, 1+k]$. Takto definované funkce h, j budou opět po částech lineární; důkaz by byl analogický ověření, že $f'h'$ je po částech lineární nekonstantní, výše. Z konstrukce je zřejmé, že h, j splňují $fh = gj$ a $h(u) = a$, $h(v) = b$, $j(u) = c$, $j(v) = d$. □

Nyní máme připraveno vše potřebné k důkazu druhé verze důsledku 21. Tento důsledek je podobně jako lemma 19 modifikací věty 13, ale není zdaleka tolik technický.

Důsledek 25 (B3 — možná verze důsledku 21)**.** *Nechť A je konečná podmnožina $[0,1]$ a $f, g : A \to A$ funkce bez skoků, které mají shodné obrazy obsahující $0, 1$. Nechť pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí, že $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Pak existují rozšíření funkcí f, g na funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0,1] \to [0,1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$, a navíc pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{f}([u,v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u,v]) = [g(u), g(v)]$.*

Důkaz. Důkaz je opět podobný důkazu věty 13, jen s použitím lemmatu 24 místo lemmatu 12. To důkaz velmi usnadňuje, neboť v tomto případě je možné lemma použít vždy a není tedy nutné rozebírat více případů, nehledě na to, že to zjednodušuje i předpoklady indukce.

Indukcí zkonstruujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ množinu $A_n \subseteq [0,1]$ a funkce $f_n, g_n : [0,1] \mapsto [0,1]$ splňující

1. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : {f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každé u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$:
$$[f_n g_n(u), f_n g_n(v)] = f_n([g_n(u), g_n(v)]) =$$
$$= g_n([f_n(u), f_n(v)]) = [g_n f_n(u), g_n f_n(v)],$$
a zároveň $f_n g_n(u) = g_n f_n(u)$, tj. funkce f_n a g_n komutují na ${f_n}^{-1}(A_n)$,
3. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a u, v po sobě jdoucí v ${f_n}^{-1}(A_n)$ platí, že f_n je po částech lineární na $[g_n(u), g_n(v)]$ a g_n je po částech lineární na $[f_n(u), f_n(v)]$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$:
   - $A_{n-1} \subseteq A_n$, $A \subseteq A_n$, A_n je uzavřená,
   - pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí $|u - v| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,
   - pro u, v po sobě jdoucí v A_n platí $f_n([u, v]) = [f_n(u), f_n(v)]$ a $g_n([u, v]) = [g_n(u), g_n(v)]$,
   - $f_n|_{A_n} = f_{n-1}|_{A_n}$, a $f_n|_A = f$,
   - $g_n|_{A_n} = g_{n-1}|_{A_n}$, a $g_n|_A = g$,
   - $f_{n-1} g_n = g_{n-1} f_n$.

Položme $A_0 := f(A) = g(A)$, $f_0 := f*$, $g_0 := g*$ (můžeme, neboť z předpokladů $0, 1 \in f(A) \subseteq A$).

Z toho, že funkce f a g jsou z A do A a bez skoků, dostáváme

$${f_0}^{-1}(A_0) = {g_0}^{-1}(A_0) = A \text{ (bod 1).}$$

Pro ověření 2 předpokládejme, že u a v jsou po sobě jdoucí v A. Použitím předpokladů pro $a := u$ a $a' := u$ dostáváme $g([f(u), f(u)]) \subseteq [fg(u), fg(u)]$, tj. $fg(u) = gf(u)$, a analogicky by se ukázalo $fg(v) = gf(v)$. Tedy

$$[fg(u), fg(v)] = [gf(u), gf(v)].$$

Užitím téhož předpokladu pro $a := u$ a $a' := v$ dostáváme $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$.

Protože f_0 a g_0 vzniknou z funkcí f a g lineárním dodefinováním, dostáváme z předchozího 2 pro $n = 0$. Z toho, že množina A je konečná, navíc okamžitě plyne, že funkce $f*$ a $g*$ jsou po částech lineární, a tedy pro každé u, v po sobě jdoucí v ${f_0}^{-1}(A_0) = A$ platí, že f_n je po částech lineární na $[g_n(u), g_n(v)]$ a g_n je po částech lineární na $[f_n(u), f_n(v)]$ (zúžení po částech lineární funkce je po částech lineární funkce). Tedy je splněn i bod 3.

Jsou-li pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ A_n, f_n a g_n definovány, položíme $A_{n+1} := {f_n}^{-1}(A_n) = {g_n}^{-1}(A_n)$ a pro u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} definujeme $f_{n+1}|_{[u,v]}$ a $g_{n+1}|_{[u,v]}$: z indukčního předpokladu pro n (body 2 a 3) jsou splněny předpoklady lemmatu 24 a najdeme po částech lineární funkce $f_{n+1}|_{[u,\ v]} : \ [u,\ v] \to [f_n(u),\ f_n(v)]$ a $g_{n+1}|_{[u,\ v]} : \ [u,\ v] \to [g_n(u),\ g_n(v)]$ takové, že $f_n g_{n+1}|_{[u,\ v]} = g_n f_{n+1}|_{[u,\ v]}$ a $f_{n+1}(u) = f_n(u)$, $f_{n+1}(2u/3 + v/3) = f_n(v)$, $f_{n+1}(u/3 + 2v/3) = f_n(u)$, $f_{n+1}(v) = f_n(v)$, $g_{n+1}(u) = g_n(u)$, $g_{n+1}(2u/3 + v/3) = g_n(v)$, $g_{n+1}(u/3 + 2v/3) = g_n(u)$ a $g_{n+1}(v) = g_n(v)$ (lemma použijeme třikrát, postupně pro intervaly $[u,\ 2u/3 + v/3]$, $[2u/3 + v/3,\ u/3 + 2v/3]$ a $[u/3 + 2v/3,\ v]$).

Nyní $f_{n+1}, g_{n+1} : \ [0,1] \to [0,1]$ jsou dobře definované a spojité, neboť díky uzavřenosti A_{n+1} z pozorování 10 pro každé $x \in [0,\ 1]$ existují u, v po sobě jdoucí v A_{n+1} takové, že $x \in [u, v]$; navíc tyto u, v jsou určeny jednoznačně pro $x \notin A_{n+1}$ a na A_{n+1} se definice shodují. Ověříme předpoklady 1–4 pro $n + 1$:

4 Ihned plyne z konstrukce a indukčního předpokladu.

1 S využitím indukčního předpokladu a 4 pro každé $x \in [0, 1]$ dostáváme :

$$f_{n+1}(x) \in A_{n+1} \Leftrightarrow g_n f_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow f_n g_{n+1}(x) \in A_n \Leftrightarrow g_{n+1}(x) \in A_{n+1}.$$

2 Ať u, v po sobě jdoucí v ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, pak z pozorování 9 $f_{n+1}(u), f_{n+1}(v)$ jsou po sobě jdoucí v A_{n+1}, a tedy ihned z konstrukce plyne

$$g_{n+1}([f_{n+1}(u),\ f_{n+1}(v)]) = [g_{n+1}f_{n+1}(u),\ g_{n+1}f_{n+1}(v)].$$

Podobně díky 1 jsou i $g_{n+1}(u), g_{n+1}(v)$ po sobě jdoucí v A_{n+1}, proto platí analogicky $f_{n+1}([g_{n+1}(u),\ g_{n+1}(v)]) = [f_{n+1}g_{n+1}(u),\ f_{n+1}g_{n+1}(v)]$. Stačí tedy dokázat, že f_{n+1} a g_{n+1} komutují na ${f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$. Ať $u \in {f_{n+1}}^{-1}(A_{n+1})$, s využitím 4. bodu dostáváme

$$g_{n+1}f_{n+1}(u) = g_n f_{n+1}(u) = f_n g_{n+1}(u) = f_{n+1}g_{n+1}(u).$$

3 Ihned plyne z pozorování 9 a z konstrukce.

Posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou stejnoměrně cauchyovské, protože pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$ platí $f_m([u,\ v]) = [f_m(u),\ f_m(v)] = [f_n(u),\ f_n(v)] = f_n([u,\ v])$, a navíc $|f_n(u) - f_n(v)| \leq 1/3^{n-2}$ kdykoli u, v jsou po sobě jdoucí v A_n (pak z pozorování 9 jsou $f_n(u), f_n(v)$ po sobě jdoucí v A_{n-1}), a tedy $\|f_m - f_n\|_{sup} \leq 1/3^{n-2}$; analogicky pro g_n.

Tedy existují spojité limity $\bar{f}$ a $\bar{g}$. Ze 4. bodu $\bar{f}|_A = f$ a $\bar{g}|_A = g$. Dále ze 4. bodu $\bar{f}$ a $\bar{g}$ komutují na $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, což je hustá podmnožina $[0,\ 1]$ z 4, a tedy komutují na $[0,\ 1]$. Poslední podmínka plyne z toho, že ji splňují funkce f_n i g_n pro každé $n \in N$.

$\square$

Ve všech větách o rozšiřování komutujících funkcí jsme předpokládali, že funkce $f, g : A \to A$, kde A je uzavřená množina, jsou funkce bez skoků, se shodnými obrazy obsahujícími $0, 1$ a splňují, že pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$. Zároveň toto jsou jediné předpoklady, které jsme měli ve všech větách o rozšiřování komutujících funkcí.

Podívejme se na teď na tyto předpoklady podrobněji. Požadavek, aby A byla uzavřená, je nutný, jinak by se totiž mohlo stát, že některou z funkcí f, g (nebo obě) nepůjde rozšířit vůbec.

To, že funkce f, g jsou bez skoků a mají shodné obrazy, předpokládáme z jediného důvodu: aby platilo $f*^{-1}(f(A)) = g*^{-1}(f(A)) = A$, což nám umožňuje, pokud definujeme nulté funkce jako lineární rozšíření, přenášet hezké vlastnosti množiny A a funkcí f, g iteračně na celou posloupnost. Vzory totiž díky tomu mají přímý vztah k oběma funkcím. Zároveň není snadné vzory „nahradit“ něčím jiným, využívali jsme například, že vzor (při spojitém zobrazení) uzavřené množiny je uzavřená množina nebo že díky nabývání mezihodnot platí jednoduchý vztah mezi body po sobě jdoucími v nějaké množině a body po sobě jdoucími v jejím vzoru (viz pozorování 9). Tyto vlastnosti vzoru by se obcházely dost těžko. Vzhledem k tomu, že se dá čekat, že obecně nebude možné nalézt rozšíření funkcí přímo a bude naopak třeba vypomoct si nějakou aproximační úlohou, dává i tento předpoklad dobrý smysl.

Mohli bychom ještě zkusit definovat nulté funkce jako jiné rozšíření než lineární, to ale příliš nezmění: protože spojité funkce nabývají mezihodnot, můžeme vzor množiny $f(A)$ resp. $g(A)$ jedině zvětšit. To ale klidně můžeme udělat „ručně“ a potom použít lineární rozšíření. Jakékoliv řešení nové úlohy pak bude i řešením původní úlohy.

To, že $0, 1 \in f(A)$, předpokládáme spíše pro pohodlnost, abychom mohli jednoznačně rozšiřovat lineárním způsobem. Na řešení nemá vliv.

Zbývá tedy poslední předpoklad — (jediný) společný předpoklad všech verzí Mountain climbing theorem. Nabízí se tedy otázka, jaký má tento předpoklad vztah k platnosti závěru jednotlivých vět. Zřejmě je nutné, aby funkce f a g komutovaly (což je přesně tato podmínka pro $u = v \in A$), ale je to nutné i pro ostatní dvojice? Nebylo by možné použít ještě nějakou jinou verzi Mountain climbing theorem, případně jiné přerovnávací lemma (alespoň třeba pro A konečnou)? Neplyne tento předpoklad už z předchozích (alespoň pro A konečnou), nedají se pro A konečnou za předchozích předpokladů přidat nějaké „mezihodnoty“ tak, aby i tento poslední předpoklad už byl splněn a existovalo rozšíření, které bude i rozšířením původní úlohy?

Jinak řečeno, může neřešitelnost MCP (ve smyslu uvedeném v kapitole Mountain climbing problem) pro $f*|_{[g(u),g(v)]}$ a $g*|_{[f(u),f(v)]}$, kde $u \neq v$ jsou nějaké dva body po sobě jdoucí v A, vést až k tomu, že f a g nebude možné rozšířit požadovaným způsobem?

Odpověď je ano.

Následující dva příklady jsou modifikacemi příkladu publikovaného v článku [1].

Příklad 26. *Položme* $A := \{0, 1/6, 1/3, 6/15, 7/15, 8/15, 9/15, 2/3, 1\}$*,* $f(x) = 1$ *pro* $x \in \{0, 1/6, 1/3\}$*,* $f(x) = 1/3$ *pro* $x \in \{6/15, 2/3\}$*,* $f(x) = 1/6$ *pro* $x \in \{7/15, 9/15, 1\}$*,* $f(x) = 0$ *pro* $x = 8/15$*,* $g(x) = 1$ *pro* $x \in \{0, 1/6, 1/3\}$*,* $g(x) = 1/3$ *pro* $x = 6/15$*,* $g(x) = 1/6$ *pro* $x \in \{7/15, 9/15, 1\}$*,* $g(x) = 0$ *pro* $x = \{8/15, 2/3\}$ *(viz obrázek 2.3).*

Pak A je konečná, $f, g : A \to A$ jsou komutující funkce bez skoků, se shodnými obrazy obsahujícími $0, 1$, dokonce pro všechny neuspořádané dvojice $\{u, v\}$ až na jedinou, a to $\{1/3, 6/15\}$, platí $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$.

Přesto nelze funkce f, g rozšířit na funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0,1] \to [0,1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$ a pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $\bar{f}([u,v]) = [f(u), f(v)]$, $\bar{g}([u,v]) = [g(u), g(v)]$.

Důkaz. To, že množina A je konečná, f, g jsou z A do A, bez skoků a se shodnými obrazy obsahujícími $0, 1$, je vidět. To, že funkce f, g komutují, můžeme nahlédnout z toho, že $f \equiv g$ na $A \setminus \{2/3\}$, tento bod neleží v obrazu ani jedné z nich a $gf(2/3) = fg(2/3) = 1$.

I to, že $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ platí pro všechny neuspořádané dvojice $\{u, v\}$ až na $\{u, v\} = \{1/3, 6/15\}$, je snadné ověřit například rozebráním všech případů.

Ukážeme, že funkce f, g nelze rozšířit požadovaným způsobem. Nechť $F : [0,1] \to [0,1]$ rozšiřuje f a $G : [0,1] \to [0,1]$ rozšiřuje g. Nechť navíc pro každé u, v po sobě jdoucí v A platí $F([u,v]) = [f(u), f(v)]$, $G([u,v]) = [g(u), g(v)]$. Ukážeme, že funkce F, G nekomutují. Označme

$$x_F := \inf\{x \in [1/3, 1];\ F(x) = 2/3\} = \min\{x \in [1/3, 1];\ F(x) = 2/3\},$$

$$x_G := \inf\{x \in [1/3, 1];\ G(x) = 2/3\} = \min\{x \in [1/3, 1];\ G(x) = 2/3\}.$$

Pokud $x_F \leq x_G$, pak $GF(x_F) = G(2/3) = g(2/3) = 0$. Protože $G(x_F) \geq 2/3$ (rovnost nastává právě tehdy, když $x_F = x_G$), z podmínky $F([u,v]) = [f(u), f(v)]$ použité pro $2/3, 1$ (tyto body jsou po sobě jdoucí v A) dostáváme $FG(x_F) \in F([2/3, 1]) = [f(2/3), f(1)] = [1/6, 1/3]$. Tedy $FG(x_F) \neq GF(x_F)$.

Pokud $x_G \leq x_F$, pak $FG(x_G) = F(2/3) = f(2/3) = 1/3$. Protože $F(x_G) \geq 2/3$ (rovnost nastává právě tehdy, když $x_F = x_G$), z podmínky $G([u,v]) = [g(u), g(v)]$ použité pro $2/3, 1$ (tyto body jsou po sobě jdoucí v A) dostáváme $GF(x_G) \in G([2/3, 1]) = [g(2/3), g(1)] = [0, 1/6]$. Tedy $FG(x_G) \neq GF(x_G)$.

□

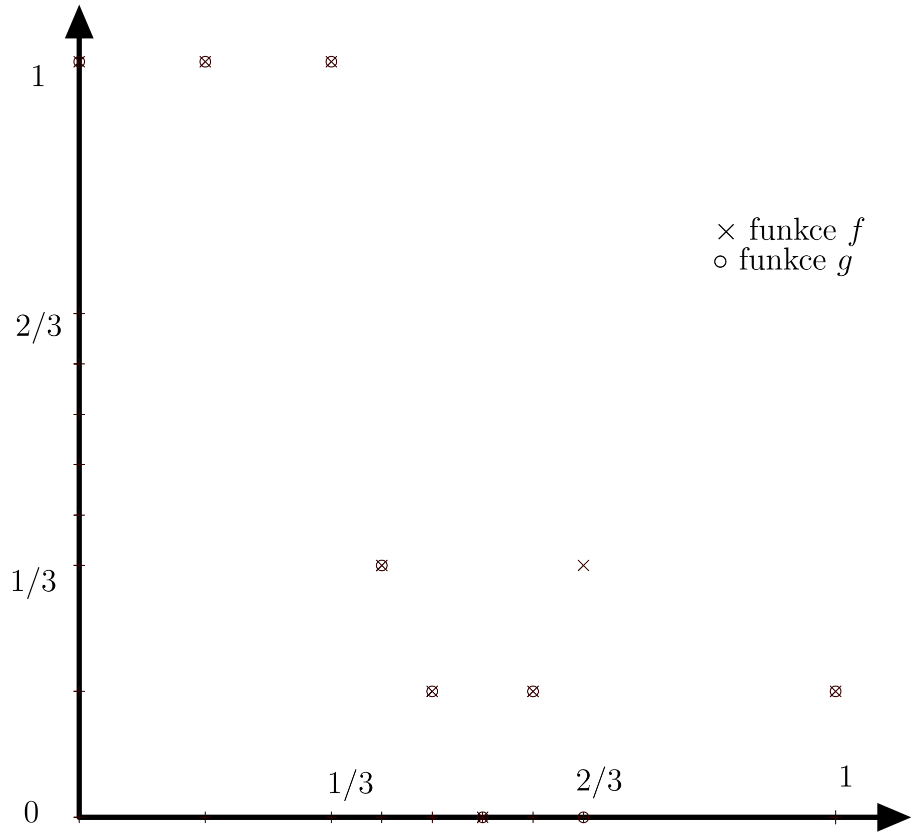
Příklad 27. *Položme $A := [0, 1/3] \cup [1/2, 1]$, $f(0) = f(1/3) = g(0) = g(1/3) = 1$, $f(1/2) = g(1/2) = f(2/3) = 1/3$, $f(7/12) = g(2/3) = 0$, $f(1) = g(1) = 1/6$ a dodefinujme funkce $f, g : A \to A$ tak, aby f byla lineární na intervalech $[0, 1/3]$, $[1/2, 7/12]$, $[7/12, 2/3]$, $[2/3, 1]$ a g byla lineární na intervalech $[0, 1/3]$, $[1/2, 2/3]$, $[2/3, 1]$ (viz obrázek 2.3).*

Pak $A \subseteq [0,1]$ je uzavřená a $f, g : A \to A$ jsou komutující funkce bez skoků a se shodnými obrazy obsahujícími $0, 1$. Množina A sice není konečná ani řídká, ale pro každé $b, b' \in A$, $b \neq b'$ platí: pokud $|f([b, b'])| = 1$, pak $g*^{-1}([b, b']) \subseteq A$, a pokud $|g([b, b'])| = 1$, pak $f*^{-1}([b, b']) \subseteq A$.

Navíc opět podmínka „pro $u, v, u \neq v$ po sobě jdoucí v A platí $f([g(u), g(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$ a $g([f(u), f(v)]) \subseteq [fg(u), fg(v)]$" není splněna jen pro jedinou neuspořádanou dvojici $\{u, v\} = \{1/3, 1/2\}$, tentokrát se ale jedná o jedinou takovou dvojici.

V tomto případě neexistuje vůbec žádné rozšíření na komutující funkce, tj. neexistují spojité funkce $\bar{f}, \bar{g} : [0,1] \to [0,1]$ takové, že $\bar{f}\bar{g} = \bar{g}\bar{f}$ a $\bar{f}|_A = f$, $\bar{g}|_A = g$.

Důkaz. To, že množina A je uzavřená, f, g jsou z A do A, bez skoků a se shodnými obrazy obsahujícími $0, 1$, je vidět. Také je vidět, že jediné body $u \neq v$ po sobě



Obrázek 2.3: Funkce f, g z příkladu 26

jdoucí v A jsou body $1/3, 1/2$. Dále pro každé $x \in [0, 1/3]$ platí $fg(x) = f(1) = 1/6 = g(1) = gf(x)$ a pro každé $x \in [1/2, 1]$ platí $f(x) \in [0, 1/3]$, $g(x) \in [0, 1/3]$, proto $fg(x) = 1 = gf(x)$, tedy funkce f, g komutují na A.

Pokud pro nějaká $b, b' \in A$, $b \neq b'$ platí $|f([b, b'])| = 1$, pak $[b, b'] \subseteq [0, 1/3]$, a tedy $g*^{-1}([b, b']) \subseteq g*^{-1}[0, 1/3] = [1/2, 1] \subseteq A$. Podobně pokud pro nějaká $b, b' \in A$, $b \neq b'$ platí $|g([b, b'])| = 1$, pak $[b, b'] \subseteq [0, 1/3]$, a tedy $f*^{-1}([b, b']) \subseteq f*^{-1}[0, 1/3] = [1/2, 1] \subseteq A$.

Důkaz, že funkce f, g nemají komutující rozšíření na $[0, 1]$, je podobný jako u předchozího příkladu. Nechť $F : [0, 1] \to [0, 1]$ rozšiřuje f a $G : [0, 1] \to [0, 1]$ rozšiřuje g. Ukážeme, že funkce F, G nekomutují. Označme

$$x_F := \inf\{x \in [1/3, 1];\ F(x) = 2/3\} = \min\{x \in [1/3, 1];\ F(x) = 2/3\},$$

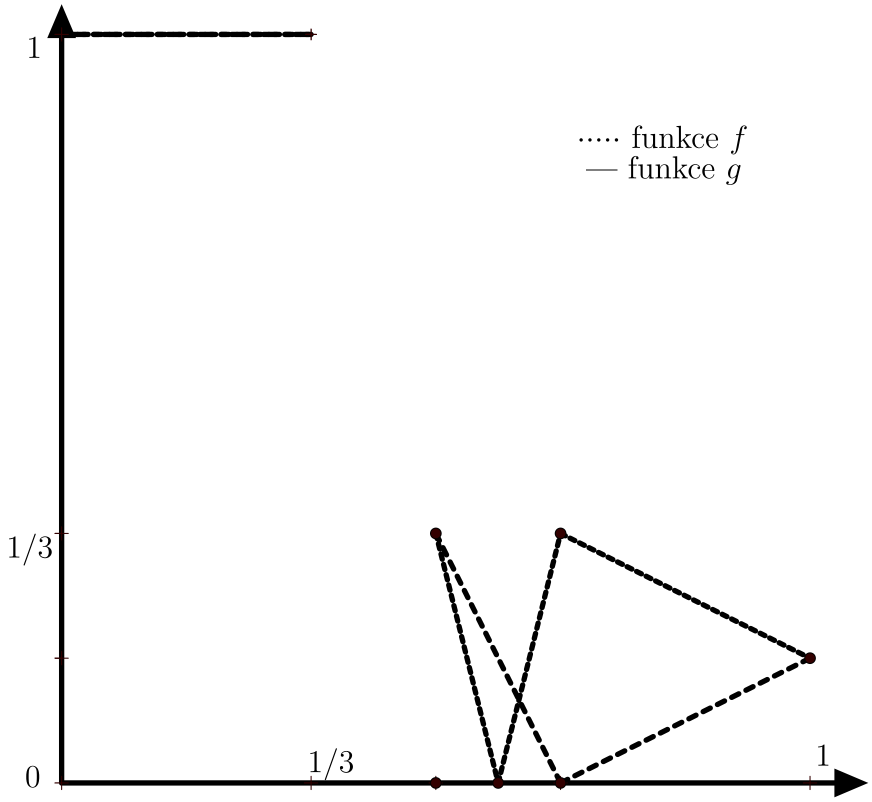
$$x_G := \inf\{x \in [1/3, 1];\ G(x) = 2/3\} = \min\{x \in [1/3, 1];\ G(x) = 2/3\}.$$

Pokud $x_F \leq x_G$, pak $GF(x_F) = G(2/3) = g(2/3) = 0$. Protože $G(x_F) \geq 2/3$ (rovnost nastává právě tehdy, když $x_F = x_G$), dostáváme $FG(x_F) \in F([2/3, 1]) = f([2/3, 1]) = [1/6, 1/3]$. Tedy $FG(x_F) \neq GF(x_F)$.

Pokud $x_G \leq x_F$, pak $FG(x_G) = F(2/3) = f(2/3) = 1/3$. Protože $F(x_G) \geq 2/3$, dostáváme $GF(x_G) \in G([2/3, 1]) = g([2/3, 1]) = [0, 1/6]$.

Tedy $FG(x_G) \neq GF(x_G)$.

$\square$



Obrázek 2.4: Funkce f, g z příkladu 27

3. Abelovská semigrupa funkcí

Zatímco tedy FPP je hezkých prostorů celkem běžná, jak jsme si ukázali v první kapitole, společný pevný bod nemusí mít ani dvě komutující funkce na intervalu [0,1], jak jsme ukázali v kapitole druhé. Z pozorování 7 ale víme, že každé dvě komutující funkce na $[0,1]$, z nichž alespoň jedna je neklesající, společný pevný bod mají. Ukážeme si, že toto tvrzení jde snadno zobecnit pro více funkcí.

Tvrzení 28. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce $f, g_1, \dots, g_n : [0,1] \to [0,1]$ komutují (tj., každé dvě komutují). Nechť dále funkce $g_1, \dots, g_n$ jsou neklesající. Pak $f, g_1, \dots, g_n$ mají společný pevný bod.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ tvrzení platí z pozorování 7. Předpokládejme tedy, že pro $n \in N$ tvrzení platí, a dokážeme, že platí i pro $n+1$. Mějme komutující funkce $f, g_1, \dots, g_n, g_{n+1} : [0,1] \to [0,1]$, kde $g_1, \dots, g_n, g_{n+1}$ jsou neklesající. Z indukčního předpokladu pro n víme, že funkce $f, g_1, \dots, g_n$ mají společný pevný bod, označme ho x_0. Je-li pro $i \in N$ dáno x_{i-1}, položíme $x_i := g_{n+1}(x_{i-1})$. Indukcí podle i ukážeme, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ a každé $h \in \{f, g_1, \dots, g_n\}$ je x_i pevným bodem h, pro $i = 0$ tvrzení platí. Nechť $i \in N$ a předpokládejme, že x_{i-1} je pevným bodem h, z komutativity dostáváme $h(x_i) = hg_{n+1}(x_{i-1}) = g_{n+1}h(x_{i-1}) = g_{n+1}(x_{i-1}) = x_i$.

Všimneme si, že rekurzivně definovaná posloupnost $\{x_i\}$ je monotónní; ukážeme jen pro případ, že $x_0 \leq g_{n+1}(x_0) = x_1$, pro $x_0 \geq g_{n+1}(x_0) = x_1$ by se postupalo analogicky. Indukcí podle i ukážeme, že $x_{i-1} \leq x_i$, pro $i = 0$ tedy tvrzení platí. Nechť $i \in N$ libovolné a nechť pro $i - 1$ tvrzení platí, aplikujeme na obě strany nerovnosti $x_{i-1} \leq x_i$ funkci g_{n+1} a z neklesajícnosti g_{n+1} máme $x_i = g_{n+1}(x_{i-1}) \leq g_{n+1}(x_i) = x_{i+1}$. Protože monotónní posloupnost v $[0,1]$ je nutně konvergentní, existuje $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$.

Ze spojitosti funkcí $f, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}$ dostáváme

$$g_{n+1}(x) = g_{n+1}(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} g_{n+1}(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = x,$$

a pro každé $h \in \{f, g_1, \dots, g_n\}$:

$$h(x) = h(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} h(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_i = x.$$

Tedy x je společným pevným bodem funkcí $f, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}$.

□

V této kapitole ukážeme, že tvrzení 28 lze výrazně zobecnit. Společný pevný bod totiž vždy má dokonce libovolně mnoho komutujících funkcí, z nichž všechny až na jednu jsou monotónní, a to i na obecnějších prostorech, než je $[0,1]$.

Veškeré výsledky obsažené dále v této kapitole pocházejí z článku W. Graye a C. Smitha [2].

Pro pohodlnost budeme v této kapitole prázdnou množinu považovat za souvislou.

Definice 29. *Kontinuum je neprázdný souvislý kompaktní Hausdorffův prostor.*

Definice 30. *Nechť X je kontinuum, řekneme, že X je dědičně unikoherentní, pokud průnik každých dvou souvislých podmnožin X je souvislá (klidně i prázdná) množina. Dendroid je kontinuum, které je navíc dědičně unikoherentní, obloukově souvislé a metrizovatelné.*

Definice 31. *Nechť X je kontinuum, $x \in X$ a S je semigrupa spojitých funkcí z X do X (s operací skládání). Řekneme, že x je společný pevný bod S, jestliže pro každé $g \in S$ platí $g(x) = x$.*

Definice 32. *Nechť X je kontinuum a $f : X \to X$ je spojitá funkce. Řekneme, že f je monotónní, jestliže pro každé $x \in X$ je množina $f^{-1}(x)$ souvislá.*

Definice 33. *Kontinuum X je rozložitelné, pokud má vlastní subkontinua A, B taková, že $X = A \cup B$.*

Věta 34. *Nechť X je dědičně unikoherentní a dědičně rozložitelné kontinuum, nechť S je abelovská semigrupa monotónních spojitých funkcí z X do X. Pak S má v X společný pevný bod.*

Lemma 35. *Každý dendroid je dědičně unikoherentní a dědičně rozložitelné kontinuum.*

Důkaz. Každý metrizovatelný prostor je Hausdorffův, zbývá tedy dokázat, že každý dendroid je dědičně rozložitelný. Nechť tedy Y je nedegenerované subkontinuum X, pak Y je obloukově souvislé (viz [4, Cvičení 10.58a]). Pro spor předpokládejme, že Y je nerozložitelné, pak existují body $p, q \in Y$ takové, že jediné subkontinuum Y obsahující body p a q je Y (viz [4, Věta 11.15.1]). Z obloukové souvislosti Y existuje oblouk $A \subseteq Y$ s krajními body p, q. Protože A je subkontinuum Y obsahující p, q, nutně $A = Y$. Tedy Y je oblouk, což je zřejmě rozložitelné kontinuum, spor.

□

Věta 36. *Nechť X je dendroid. Pak pro každé $a, b \in X$ existuje jediný oblouk $A(a, b) \subseteq X$ s krajními body a a b. Zvolme $e \in X$ libovolné pevné a definujme na X relaci „$\leq$“ následovně: pro $x, y \in X$ je $x \leq y$ právě tehdy, když $x \in A(e, y)$. Nechť $f : X \to X$ je monotónní spojité zobrazení* ***na*** *takové, že $f(e) = e$, a definujme funkci $f* : X \to X$ předpisem $f*(x) := \inf f^{-1}(x)$. Pak platí:*

1. *„$\leq$“ je částečné uspořádání na X s nejmenším prvkem e, nazýváme ho obloukové uspořádání na X s nejmenším prvkem e,*

2. *pro každé $x \in X$ je $[e, x] = \{y \in X, e \leq y \leq x\} = A(e, x)$ řetězec vzhledem k „$\leq$“,*

3. *každý neprázdný řetězec v X má v X supremum a každé podkontinuum X má v X nejmenší prvek, speciálně $f*$ je dobře definované,*

4. *pro každé $x, y \in X$ platí $f(A(x, y)) = A(f(x), f(y))$, a tedy f zachovává uspořádání „$\leq$“,*

5. *$f*$ zachovává uspořádání „$\leq$“,*

6. $f \circ f* \equiv id$ *na* X,

7. *Pokud* $g : X \to X$ *komutuje s* f *a pro nějaké* $x \in X$ *platí* $g(f^{-1}(x)) \subseteq f^{-1}(g(x))$[1], *pak* $f*g(x) \leq gf*(x)$.

Pozorování 37. *Nechť* X *je dendroid,* $e \in X$ *a „*$\leq$*" je obloukové uspořádání na* X *s nejmenším prvkem* e*. Pak pro každé* $x, y \in X$ *platí*

$$A(x,y) = \cap\{N \subseteq X; N \text{ je subkontinuum } X \text{ obsahující } x, y\}.$$

Speciálně, je-li H *subkontinuum* X *obsahující* x *a* y*, pak* $A(x,y) \subseteq H$.

Důkaz. Dokážeme dvě inkluze.
„$\subseteq$" Plyne ze cvičení 10.58a v [4] a definice dědičné unikoherentnosti.
„$\supseteq$" Triviální.

□

Definice 38. *Nechť* X *je dendroid,* $e \in X$ *a „*$\leq$*" je obloukové uspořádání na* X *s nejmenším prvkem* e*. Pro* $x \in X$ *definujeme* $M(x)$ *předpisem* $M(x) := \{y \in X;\ y \geq x\}$*. Dále* $x < y$ *znamená* $x \leq y$ *a zároveň* $x \neq y$.

Lemma 39. *Nechť* X *je dendroid,* $e \in X$ *a „*$\leq$*" je obloukové uspořádání na* X *s nejmenším prvkem* e*. Nechť* $f : X \to X$ *a označme* $K := \{x \in X;\ f(x) \in M(x)\} = \{x \in X;\ f(x) \geq x\}$ *a mějme* $A \subseteq K$ *neprázdný řetězec. Označme* $s := \sup A$*. Pak* $s \in K$.

Důkaz. Podle bodu 3 věty 36 je s dobře definované.

Lemma dokážeme sporem, nechť $s \notin K$, což z definice znamená, že $s \notin A(e, f(s))$. Tedy speciálně $s \neq f(s)$ a najdeme disjunktní otevřené množiny U, V splňující $s \in U$, $f(s) \in V$. Označme $i : [0,1] \to A(e,s)$ homeomorfismus prostorů $[0,1]$ a $A(e,s)$, který splňuje $i(1) = s$. Ze spojitosti f víme, že $f^{-1}(V)$ je otevřená (v X), a tedy $i^{-1}(U \cap f^{-1}(V))$ je otevřená podmnožina $[0,1]$ obsahující 1, neboť U i $f^{-1}(V)$ obsahují s. Najdeme tedy $r \in i^{-1}(U \cap f^{-1}(V)), 0 < r < 1$, a položme $y = i(r)$. Pak platí $e < y < s$ a $f([y,s]) \cap [y,s] = \emptyset$, neboť $f([y,s]) \subseteq V$ a $[y,s] \subseteq U$.

Všimněme si, že $f([y,s]) = (f \circ i)([r,1])$ je subkontinuum X, neboť spojitý obraz kompaktu je kompakt a rovněž spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina, tedy podle bodu 3 věty 36 můžeme položit $u := \inf f([y,s]) = \min f([y,s])$ a vidíme, že $u \leq f(s)$, neboť $f(s) \in f([y,s])$. Nyní pro každé $x \in A \cap [y,s]$ platí $u \leq f(x)$ a zároveň i $x \leq f(x)$, tedy z bodu 2 věty 36 se x a u dají porovnat.

Pokud by pro nějaké $x \in A \cap [y,s]$ platilo $u < x$, pak by $H := [e,u] \cup f([y,s])$, což je kontinuum, neboť sjednocení dvou kompaktů je kompakt a sjednocení dvou souvislých množin s neprázdným průnikem (a $u \in [e,u] \cap f([y,s])$) je souvislá množina, obsahovalo e i $f(x)$, ale ne x (víme $f([y,s]) \cap [y,s] = \emptyset$). Zároveň by ale platilo $x \leq f(x)$, neboť $x \in A$, což by byl spor s pozorováním 37.

[1] Tato podmínka je ve skutečnosti vždy splněna. Je-li totiž $x \in X$ a $y \in g(f^{-1}(x))$, pak existuje $h \in f^{-1}(x)$ takové, že $y = g(h)$, tedy $y = g(h)$ pro h splňující $f(h) = x$, a tedy $f(y) = f(g(h)) = g(f(h)) = g(x)$. Tedy $y \in f^{-1}(g(x))$. Tudíž můžeme bod 7 věty 36 přeformulovat takto: pokud $g : X \to X$ komutuje s f, pak pro každé $x \in X$ platí $f*g(x) \leq gf*(x)$.

Tedy nutně $x \leq u$ pro každé $x \in A \cap [y, s]$. Ukážeme, že z toho už plyne, že u je horní závora A. Protože $y < s$, z definice suprema najdeme $z_0 \in A$, že $y < z_0 \leq s$. Nechť tedy $z \in A$ libovolné, protože A je řetězec, můžeme porovnat z se z_0. Pokud $z_0 \leq z$, máme $y < z_0 \leq z \leq s$, tedy $z \in A \cap [y, s]$, a proto $z \leq u$. Pokud $z \leq z_0$, pak můžeme využít už dokázaného a dostáváme $z \leq z_0 \leq u$. Tedy u je horní závora A, proto $s \leq u \leq f(s)$, a tedy $s \in K$, což je spor.

□

Věta 40. *Nechť X je dendroid a S je abelovská semigrupa monotónních spojitých zobrazení z X do X. Nechť $f : X \to X$ je spojité a komutuje se všemi prvky S. Pak f a S mají společný pevný bod.*

Důkaz. Nejprve najdeme Y subkontinuum X, které všechny prvky $S' := S \cup \{f\}$ zobrazují na sebe. Uvažme množinu

$$\mathscr{A} := \{Z \text{ subkontinuum } X;\ \text{všechny prvky } S' \text{ zobrazují } Z \text{ do sebe}\}$$

uspořádanou relací $B \leq C$ právě tehdy, když $B \supseteq C$. $\mathscr{A}$ je neprázdná, neboť $X \in \mathscr{A}$. Nechť $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}$ je neprázdný řetězec, označme $R := \cap\mathscr{R}$ a ukážeme, že R je horní závora $\mathscr{R}$. Všechny prvky S' zobrazují R do sebe, neboť je-li $x \in R$ a $g \in S'$, pak pro každé $T \in \mathscr{R}$ platí $x \in T$ a tedy z $T \in \mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}$ nutně $g(x) \in T$. Proto $g(x) \in R$.

Zbývá dokázat, že R je subkontinuum X; jde o zobecnění [4, Tvrzení 1.8]. Dokážeme nejprve následující pomocné tvrzení: je-li U otevřená množina taková, že $R \subseteq U$, pak existuje $T \in \mathscr{R}$ tak, že $T \subseteq U$. $X \setminus U$ je uzavřená, a tedy kompaktní podmnožina X, proto z jejího otevřeného pokrytí $\{X \setminus T; T \in \mathscr{R}\}$ můžeme vybrat konečné podpokrytí $\{X \setminus T_1, \ldots, X \setminus T_n\}$, kde $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{R}$. Protože $\mathscr{R}$ je řetězec, najdeme $i \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $T_i \subseteq T_j$ pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nyní $T_i = T_1 \cap \cdots \cap T_n \subseteq U$.

Pomocí tohoto tvrzení ukážeme, že R je neprázdná a souvislá množina, R je totiž zřejmě uzavřený Hausdorffův prostor. Kdyby R byla prázdná, pak použitím pomocného tvrzení pro $U := \emptyset$ dostáváme, že existuje $T \in \mathscr{R}$ taková, že $T \subseteq \emptyset$, neboli $\emptyset \in \mathscr{R}$, což je spor. Tedy $R \neq \emptyset$. Nechť $R = E \cup F$, kde E, F jsou disjunktní a otevřené v R. Pak jsou také uzavřené v R a z uzavřenosti R i v X. Protože X je metrizovatelný, a tedy speciálně normální, najdeme disjunktní otevřené (v X) množiny G, H takové, že $E \subseteq G$, $F \subseteq H$. Použijeme pomocné tvrzení pro $U := G \cup H$ a najdeme $T \in \mathscr{R}$, že $T \subseteq G \cup H$. Ze souvislosti T dostáváme, že buď $T \cap G = \emptyset$, a tedy $E = R \cap E = \emptyset$, nebo $T \cap H = \emptyset$, a tedy $F = \emptyset$.

Tedy $\mathscr{A}$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu, a proto existuje maximální prvek $Y \in \mathscr{A}$. Jistě Y je subkontinuum X, ukážeme, že všechny prvky S' zobrazují Y na sebe. Sporem, nechť pro nějaké $h \in S'$ platí $h(Y) \neq Y$, tedy $h(Y)$ je vlastní podmnožina Y. Ukážeme, že $h(Y) \in \mathscr{A}$. $h(Y)$ je kontinuum, protože spojitý obraz kompaktu je kompakt a spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina, dále podprostor Hausdorffova prostoru je Hausdorffův prostor; neprázdnost je zřejmá. Nechť $g \in S'$. Protože g a h komutují, dostáváme $g(h(Y)) = gh(Y) = hg(Y) = h(g(Y)) \subseteq h(Y)$, tedy všechny prvky S' zobrazují $h(Y)$ do sebe. Dokázali jsme $h(Y) \in \mathscr{A}$, což je spor s maximalitou Y.

Protože každé subkontinuum dendroidu je dendroid [viz 4, Cvičení 10.58a], můžeme uvažovat novou úlohu pro dendroid Y, abelovskou semigrupu monotónních zobrazení $P = \{g|_Y; g \in S\}$ (to platí proto, že pro každé $x \in X$ je $g^{-1}(x)$ souvislá a uzavřená, tedy prázdná, nebo kontinuum a z definice dědičné unikoherence je pak i $g^{-1}(x) \cap Y$ prázdná, nebo kontinuum, tedy souvislá) a $f|_Y$, které komutuje se všemi prvky P. Každý společný pevný bod pro novou úlohu bude i společným pevným bodem pro původní úlohu. Můžeme proto předpokládat, že všechny prvky S i f jsou na.

Pro spor předpokládejme, že S a f nemají žádný společný pevný bod. Z věty 34 a lemmatu 35 existuje společný pevný bod S, označme ho e. Nechť „$\leq$“ je obloukové uspořádání na X s nejmenším prvkem e. Položme

$$J := \{x \in X,\ x \text{ je společný pevný bod } S\},$$

$$K := \{x \in X;\ f(x) \in M(x)\} = \{x \in X;\ f(x) \geq x\},$$

a $L := J \cap K$. Protože $M(e) = X$, platí $e \in L$. Pomocí Zornova lemmatu najdeme mximální (vzhledem k inkluzi) řetězec $C \subseteq L$, sjednocení do sebe vnořených řetězců je totiž zřejmě řetězec. Označme $p := \sup C$, z lemmatu 39 $p \in K$. Protože J je uzavřená, platí $p \in \overline{C} \subseteq J$. Celkem $p \in L$ a p je maximální v L.

Protože f komutuje se všemi prvky S, pro libovolné $g \in S$ platí $gf(p) = fg(p) = f(p)$, a tedy $f(p) \in J$. Protože $p \leq f(p)$ a předpokládáme, že S a f nemají žádný společný pevný bod, platí $p < f(p)$. Z maximality p tedy $f(p) \notin K$. Položme $M := K \cap [p,f(p)]$, to je neprázdný řetězec v K, a tedy z lemmatu 39 platí $q := \sup M \in K$.

Ukážeme, že $p < q$. Protože $p \neq f(p)$, najdeme disjunktní otevřené množiny U, V splňující $p \in U$, $f(p) \in V$. Označme $i : [0,1] \to A(e, f(p))$ homeomorfismus prostorů $[0,1]$ a $A(e, f(p))$, který splňuje $i(1) = f(p)$. Protože $p < f(p)$, tedy $p \in A(e, f(p))$ a $p \neq f(p)$, platí $t := i^{-1}(p) < 1$. Ze spojitosti f víme, že $f^{-1}(V)$ je otevřená (v X), a tedy $i^{-1}(U \cap f^{-1}(V))$ je otevřená podmnožina $[0,1]$ obsahující t, neboť U i $f^{-1}(V)$ obsahují p. Najdeme tedy $r \in i^{-1}(U \cap f^{-1}(V)), t < r < 1$ a položme $y = i(r)$. Pak platí $p < y < f(p)$ a $f([p,y]) \cap [p,y] = \emptyset$, neboť $f([p,y]) \subseteq V$ a $[p,y] \subseteq U$.

Jelikož X je dědičně unikoherentní, $H := [e, f(p)] \cap f([p,y])$ je kontinuum (protože $f(p) \in H$), a tedy z bodu 3 věty 36 můžeme položit $z := \inf H$. Celkem $H \subseteq [e, f(p)]$ je kontinuum obsahující $f(p)$, tedy H je buď oblouk s koncovými vrcholy z a $f(p)$, nebo $H = \{f(p)\}$. Protože $y \notin H$, jelikož $f([p,y]) \cap [p,y] = \emptyset$, platí $y < z$. Ukážeme, že $z \leq f(y)$. Protože $f([p,y])$ je kontinuum (obraz kompaktu je kompakt, obraz souvislé množiny je souvislá množina) obsahující $f(p), f(y)$, z pozorování 37 dostáváme $A(f(y), f(p)) \subseteq f([p,y])$. Označme tedy $w := \inf(A(f(y), f(p)) \cap A(e, f(p)))$ a všimneme si, že $[e,w] \cup (A(f(y), f(p)) \setminus [w, f(p)])$ je jediný oblouk spojující e a $f(y)$, navíc $w \in [e, f(p)]$, a tedy $z \leq w \leq f(y)$. Celkem $y < z \leq f(y)$, a tedy $p < q < f(p)$, neboť $f(p) \notin K$, jak jsme si rozmysleli výše.

Také víme, že $q \in K$, a tedy z maximality p platí $q \notin J$, tj. existuje $g \in S$ takové, že $g(q) \neq q$. Protože g je monotónní, na a e, p i $f(p)$ jsou jeho pevné body, ze 4. bodu věty 36 máme $g([p, f(p)]) \subseteq [p, f(p)]$. Druhá inkluze platí z toho, že spojitý obraz kompaktu je kompakt a spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina. Tedy $g(q) \in [p, f(p)]$. Pokud by platilo $q < g(q)$, aplikujeme zobrazení g

na nerovnost $q \leq f(q)$ a opět ze 4. bodu věty 36 dostáváme $g(q) \leq gf(q) = fg(q)$, a tedy $g(q) \in M$, což je spor s maximalitou q.

Tedy nutně $g(q) < q$. Zřejmě $g^{-1}(q) \cap [e, f(p)]$ je neprázdná, a tedy $g{*}(q) \in [e, f(p)]$, kde $g{*}$ je zobrazení popsané ve větě 36. Pokud by nyní platilo $g{*}(q) \leq q$, opět aplikujeme na obě strany nerovnosti zobrazení g a s použitím 4. a 6. bodu věty 36 dostáváme $q = gg{*}(q) \leq g(q)$, což je spor s předpokladem $g(q) < q$.

Musí tedy platit $q < g{*}(q) \leq f(p)$. Aplikujeme $g{*}$ na obě strany nerovnosti $q \leq f(q)$ a použitím bodů 5. a 7. z věty 36 dostáváme $g{*}(q) \leq g{*}f(q) \leq fg{*}(q)$, tedy $g{*}(q) \in M$, což je opět spor s maximalitou q. Tím je důkaz dokončen.

$\square$

Seznam použité literatury

[1] Anderson, D. R. a Kay, D. C. (1967). Commuting maps lacking commuting extensions. *Amer. Math. Monthly*, **74**, 183–184. ISSN 0002-9890. doi: 10.2307/2315617. URL `https://doi.org/10.2307/2315617`.

[2] Gray, W. J. a Smith, C. M. (1975). Common fixed points of commuting mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**(1), 223–226. ISSN 0002-9939. doi: 10.2307/2040402. URL `https://doi.org/10.2307/2040402`.

[3] Huneke, J. P. (1970). Extending commuting functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24**, 206–208. ISSN 0002-9939. doi: 10.2307/2036729. URL `https://doi.org/10.2307/2036729`.

[4] Nadler, Jr., S. B. (1992). *Continuum theory*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York. ISBN 0-8247-8659-9. An introduction.

[5] Šmídová Kristýna (2018). Mountain climbing theorem. Bakalářská práce. *Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra matematické analýzy. Vedoucí práce Benjamin Vejnar.*

Seznam obrázků

2.1 Funkce f, g, resp. $f*$, $g*$, z důsledku 14 11
2.2 Funkce f, g z příkladu 22 19
2.3 Funkce f, g z příkladu 26 26
2.4 Funkce f, g z příkladu 27 27