Posudek vedoucího diplomové práce
Radovan Švarc: **Slabé a slabé* homeomorfismy**

Cílem práce bylo zpracovat známé výsledky o charakterizaci některých tříd Banachových prostorů pomocí topologických vlastností slabé topologie a prozkoumat sekvenciální verze těchto výsledků. Motivací k tomu je na jedné straně skutečnost, že že mnohé třídy Banachových prostorů (separabilní prostory, reflexivní prostory, prostory se separabilním duálem aj.) lze charakterizovat pomocí topologických vlastností slabé topologie (někdy snadno, jindy s použitím netriviálních vět), na druhou stranu není znám žádný příklad dvojice Banachových prostorů, které by byly slabě homeomorfní ale ne izomorfní. Pokud ovšem budeme uvažovat pouze sekvenciální chování slabé topologie, je situace zajímavější – některé ze zmíněných charakterizací mají své sekvenciální analogie, u jiných to není zřejmé. Zároveň existují dvojice neizomorfních prostorů, které jsou slabě sekvenciálně homeomorfní. Proto stojí toto téma za důkladnější výzkum.

Práce je rozdělena do tří kapitol doplněných úvodem a seznamem použitých pojmů a značení. První kapitola je kompilační a shrnuje známé charakterizace vybraných tříd Banachových prostorů pomocí topologických vlastností slabé topologie. Jde o separabilní prostory, prostory se separabilním duálem, Asplundovy prostory, reflexivní prostory, slabě kompaktně generované prostory a prostory neobsahující izomorfní kopii ℓ_1. Téměř všechna tvrzení jsou v práci dokázaná (výjimku tvoří například nejtěžší implikace v oddílu 1.5, který používá hlubokou větu Bourgaina, Fremlina a Talagranda).

Druhá kapitola se věnuje sekvenciálním vlastnostem slabé topologie. V oddílu 2.1 se mj. ukazuje, že slabé sekvenciální homeomorfismy zachovávají separabilní prostory, reflexivní prostory a slabě kompaktně generované prostory. Pro zbývající třídy prostorů z první kapitoly to není jasné. Také je vysvětleno, že Torunczykova věta o homeomorfismu Banachových prostorů téže hustoty dává příklady neizomorfních prostorů, které jsou slabě sekvenciálně homeomorfní (stačí ji aplikovat na prostory se Schurovou vlastností). Oddíl 2.2 se věnuje stejnoměrné verzi slabých sekvenciálních homeomorfismů. Mj. se ukazuje, že tato zobrazení zachovávají slabou sekvenciální úplnost (což je snadné) a třídu prostorů neobsahujících kopii ℓ_1 (k tomu se využije Rosenthalova věta).

Třetí kapitola obsahuje zobecnění konstrukce J. Dijsktry a J. van Milla o existenci homeomorfismu $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pro který $\|Tx\|_\infty = \|x\|_1$ pro každé x. Tato věta je zobecněna pro případ „N-normy“ (viz oddíl 3.1). Jak je vysvětleno v posledním odstavci, dává tato konstrukce další příklady slabě sekvenciálně homeomorfních prostorů.

Student pracoval velmi samostatně s využitím mých námětů a poznámek. Za nejcennější část práce považuji oddíl 2.2 a kapitolu 3. Tam bylo třeba důkladně porozumět netriviálním větám a konstrukcím. Zvlášť konstrukce ve třetí kapitole je velmi technická – bylo třeba postupy z literatury pochopit, rozvést do podrobností a zobecnit, což uchazeč úspěšně zvládnul. Jsem přesvědčen, že práce jednoznačně splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

V Praze, dne 3. září 2020

Prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK