

Posudek na disertační práci Pavla Hrubeše *Some problems concerning lengths of proofs.*

Práce sestává ze čtyř kapitol, kde každá z nich je prezentací jednoho výsledku autora disertace. Ve svém posudku se omezím na tři nejdůležitější.

První kapitola je o Kreiselově domněnce, což je známý problém, který byl publikován více než před třiceti lety a dosud není vyřešen. Týká se vztahu dokazatelnosti a počtu kroků v důkazech jistých formulí v Peanově Aritmetice. Pavel Hrubeš učinil velmi důležitý krok k vyvrácení domněnky. Dokázal, že domněnka neplatí pro několik přirozených modifikací Peanovy Aritmetiky, např. když ji formalizujeme i s operací odečítání.

Třetí kapitola je prezentací velmi důležitého výsledku. Jedná se o první exponenciální dolní odhad na délku důkazů ve výrokové modální logice. V klasické logice jsou známy víc než polynomiální dolní odhady na délku důkazů pouze v případě, že důkazový systém je nějakým způsobem podstatně omezen, např., že používá jen formule konstantní hloubky. Protože dokázat exponenciální dolní odhady v klasické logice se zdá být nesmírně obtížné, navrhnul jsem před několika lety studovat délky důkazů také v neklasických výrokových logikách. Hrubešův výsledek je první takový dolní odhad, kde se používá přirozený důkazový systém (tzv. Fregeho systém). Jeho důkaz využívá některé známé prostředky (monotonní interpolaci, dolní odhady na monotonní booleovské obvody), jsou však použity novým a neobvyklým způsobem. Tento výsledek Hrubeš již publikoval v *Journal of Symbolic Logic*. V disertaci předkládá nový, jednodušší důkaz.

Ve čtvrté kapitole je další skvělý výsledek---exponenciální dolní odhad na důkazy ve výrokové intuicionistické logice. Tento problém byl ještě známejší, než předchozí. Výsledek je také zajímavější, protože intuicionistická logika je jen zeslabení klasické logiky a nepoužívá jiné spojky ani modality. Dolní odhad původně dokázal Hrubeš chytrou redukcí na modální logiku. V disertaci zase předkládá nový důkaz, který nepoužívá modální logiku.

Oba posledně zmíněné výsledky měli ihned velký ohlas a Pavel Hrubeš získal pozvání na postdoktorandskou stáž do Toronta.

Tato práce je skutečně vyjimečná, protože se nestává tak často, aby doktorand vyřešil významné problémy ve studovaném oboru.

V Praze, 12.9.2007

Doc.RNDr. Pavel Pudlák, DrSc

