Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Kombinatorika v prostředí didaktických her na 1. stupni ZŠ

Combinatorics of didactic games at primary school

Jana Rolečková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Praha, 2020

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Kombinatorika v prostředí didaktických her na 1. stupni ZŠ

Diplomová práce

Studijní program: M7503 – Učitelství pro základní školy
Studijní obor: 7503T047 – Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Autor práce: **Jana Rolečková**
Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Liberec 2018

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Jana Rolečková**
Osobní číslo:	**P13000493**
Studijní program:	**M7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obor:	**Učitelství pro 1. stupeň základní školy**
Název tématu:	**Kombinatorika v prostředí didaktických her na 1. stupni ZŠ**
Zadávající katedra:	**Katedra primárního vzdělávání**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Abstrakt:
Diplomová práce se zabývá problematikou kombinatoriky na prvním stupni základních škol. Je zaměřena na tvorbu souboru didaktických her, které rozvíjejí logicko-kombinační myšlení. Dané aktivity jsou založené na vlastní poznávací aktivitě žáků a na jejich aktivní spoluúčasti ve vyučování. Podněcují zájem o řešení kombinačních úloh a umožňují hledání různorodých strategií řešení problémových úkolů. Žáci při jejich aplikaci využívají své dosavadní matematické vědomosti a dovednosti, a zároveň rozvíjí své předpoklady ke kombinačnímu a logickému uvažování.
Klíčové pojmy:
didaktická hra, kombinatorika, kombinatorické a logické myšlení, efektivní a zajímavá matematika, žák prvního stupně základní školy
Cíl práce:
Cílem diplomové práce je vypracovat soubor didaktických her, které budou rozvíjet logicko-kombinační myšlení žáků na 1. stupni ZŠ. Navržené hry aplikovat na ZŠ a vyhodnotit jejich účinnost.
Metody:
Vytvoření souboru didaktických her na různé oblasti kombinatoriky. Praktické ověření souboru ve škole. Vyhodnocení účinnosti navrženého souboru.
Dotazníkové šetření u žáků.
Požadavky:
Znalost RVP pro základní vzdělávání. Znalost učebnic matematiky pro první stupeň základní školy. Zpracování teoretických podkladů z kombinatoriky pro realizaci a vyhodnocení navržených her.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. Náměty k rozvíjení kombinačního myšlení. 1. vyd. Brno: PdF MU, 1998.
HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001a, ISBN 8071785814.
LOKŠOVÁ, I., LOKŠA, J.: Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Portál, Praha 1999.
Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.
Učebnice matematiky pro první stupeň.
VANKÚŠ, P.: Didactic Games in Mathematics. Comenius University. Bratislava, Faculty of Mathematics, Pfysics and Informatics. Bratislava 2013, [online]. Dostupné z www:
https://www.academia.edu/3983408/Book_Didactic_Games_in_Mathematics
ŽILKOVÁ, Monika. Kombinatorické hry v školskej matematike. Math.ku.sk. 2003. [online]. [cit. 2015-10-17]. Dostupné z:
http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Zilkova.pdf

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.**

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **9. listopadu 2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2018**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

L.S.

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci

doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. prosince 2016

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 23. 3. 2018

Podpis:

Poděkování

Mé poděkování patří paní docentce RNDr. Janě Příhonské, Ph. D., za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování diplomové práce věnovala. Velký dík patří také mé rodině a všem blízkým, kteří mi byli oporou jak při psaní diplomové práce, tak po celou dobu studia. V neposlední řadě děkuji svému příteli za významnou pomoc při tvorbě herních pomůcek.

ABSTRAKT

Diplomová práce pojednává o problematice kombinatoriky na prvním stupni základních škol. Je zaměřena na tvorbu souboru didaktických her, které rozvíjejí logicko-kombinační myšlení, podněcují vlastní poznávací aktivitu žáků a jejich aktivní spoluúčast ve vyučování. Tyto didaktické hry jsou v rámci experimentálního šetření realizovány ve výuce matematiky na prvním stupni základní školy a na základě aplikace testů, podrobných kazuistik vybraných žáků a dotazníkového průzkumu je vyhodnocena jejich účinnost.

Klíčové pojmy:

didaktická hra, kombinatorika, kombinační a logické myšlení, efektivní a zajímavá matematika, žák prvního stupně základní školy

ABSTRACT

The graduation thesis deals with problematics of combinatorics at primary school. It is focused on creation of a set of didactic games, which develope logical-combinatorial thinking and are based on pupils' own cognitive activity and on their active participation in teaching. These didactic games are implemented in teaching mathematics at primary school within an experimental survey and their effectiveness is evaluated based on test application detailed case studies of selected pupils and a questionnaire survey.

Key words:

didactic game, combinatorics, combinatorial and logical thought, effective and interesting mathematics, a pupil of primary school

„Zábavnost vyučování nejen že není v rozporu s jeho užitečností, ale právě naopak je absolutně základní podmínkou pro to, aby výuka ovlivnila život budoucího dospělého člověka.“

Peter Hilton

Obsah

Seznam obrázků, ilustrací, grafů a tabulek

Seznam obrázků

Seznam grafů

Seznam ilustrací

Seznam tabulek

Seznam použitých symbolů a zkratek

$\|A\|$	počet prvků množiny A
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$	kartézský součin množin A_1, A_2, … A_n
A_i, A_j	množiny prvků
$A_i \cup A_j$	sjednocení dvou množin A_i a A_j
$A_i \cap A_j$	průnik dvou množin A_i a A_j
$a \in A$	a je prvkem množiny A
(a_1, a_2)	uspořádaná dvojice prvků s 1. prvkem a_1 a 2. prvkem a_2
apod.	a podobně
atd.	a tak dále
$C_k(n)$	kombinace k prvků z daných n prvků
$C'_k(n)$	kombinace s opakováním k prvků z daných n prvků
č.	číslo
ČPS	Česko-polsko-slovenská matematická konference
EME	Elementary mathematics education
ilu.	Ilustrace
k, n	přirozená čísla
kap.	kapitola
KMD	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
M	neprázdná množina
N	množina přirozených čísel N = {1, 2, 3, … }
$n!$	n-faktoriál
např.	například
obr.	obrázek
P1–P4	označení výzkumných předpokladů
$P(n)$	permutace z n prvků
$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$	permutace s opakováním z n prvků
podkap.	podkapitola
pozn.	Poznámka
př. n. l.	před naším letopočtem
resp.	respektive

RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
s.	strana
SGS	Studentská grantová soutěž
SVOČ	Studentská vědecká odborná činnost
ŠVP	Školní vzdělávací program
tj.	to jest
TUL	Technická univerzita v Liberci
tzn.	to znamená
tzv.	tak zvaný
U	označení mluvy učitele
úl.	úloha
$V_k(n)$	variace *k*-třídy z daných *n* prvků
$V'_k(n)$	variace s opakováním *k*-třídy z daných *n* prvků
viz	odkaz k vidění
$x \leq y$	*x* je menší nebo rovno *y*
$x \geq y$	*x* je větší nebo rovno *y*
$x \neq y$	*x se* nerovná *y*
ZŠ	základní škola
Ž	označení mluvy žáka/žákyně
$\emptyset$	prázdná množina
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	sjednocení konečných množin A_i
$\sum_{i=1}^{n} \lvert A_i \rvert$	součet prvků konečných množin A_i

Úvod

Kombinatorické úlohy nejsou explicitně vymezeny v RVP a následně ŠVP, ale jsou brány jako součást Nestandardních aplikačních úloh. Tento fakt potvrzují i zjištění na základě řešení grantu SGS, na kterém jsem se podílela jako spoluřešitelka. V prvním roce řešení projektu SGS byla provedena analýza učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ a přijímacích testů z matematiky pro víceletá gymnázia s cílem identifikovat typy a četnost zařazení kombinatorických úloh. Zjistili jsme, že procento zastoupení těchto úloh v porovnání s jinými typy úloh je výrazně menší. Následně proběhlo dotazníkové šetření u učitelů primárního vzdělávání s cílem zjistit, jak často učitelé řeší kombinatorické úlohy se svými žáky v hodinách matematiky a ukázalo se, že kombinatorické úlohy nejsou do vyučování běžně zařazovány. Někteří učitelé měli dokonce problém s identifikací kombinatorických úloh a tento pojem jim nic neříkal.

Na základě těchto skutečností mohu říci, že žáci prvního stupně základních škol nemají možnost získat prvotní zkušenosti s tímto typem úloh a jejich předpoklady ke kombinačnímu a logickému myšlení zůstanou po dlouhou dobu nerozvíjené.

S kombinatorikou jako oborem matematiky se žáci prvotně setkávají až v rámci sekundárního vzdělávání. Výjimkou jsou žáci navštěvující základní školu s rozšířenou výukou matematiky. I tak jde především o pamětné osvojování si kombinatorických vzorců bez cíleného hlubšího porozumění dané problematice. Jak však již zmiňoval ve svých dílech jeden z našich největších pedagogických myslitelů Jan Ámos Komenský ve své zásadě soustavnosti, je nutné, aby se v učivu postupně navazovalo na předchozí zkušenosti. „*Čemukoliv se žák učí, učí se tomu předchozími poznatky. Poznávání se totiž děje postupně a lidské chápání je jakýsi vzestup k tomu, co hledáme*“ [J. A. Komenský in 4 s. 17]. Pokud se v myslích žáků vytvoří předpoklady pro rozvoj kombinačního myšlení již v raném věku, mohou na tyto konkrétní představy navazovat a následné porozumění abstraktním informacím pro ně bude v dalším vzdělávání snadnější. Je tedy zřejmé, že není na škodu, ba spíše naopak, aby už žáci mladšího školního věku rozvíjeli své kombinační a logické myšlení prostřednictvím zábavných úkolů, her a aktivit.

Ze své vlastní zkušenosti vím, že hodiny matematiky bývají na školách většinou realizovány za účelem naplnění obsahu učiva, které je dáno vzdělávacími programy. V rámci pedagogických praxí v průběhu mého studia jsem si mohla na různých základních školách všimnout, že se učitelé tolik nezabývají tím, zda-li žáci přijímaným informacím porozuměli. Často se spokojí s mechanickým a povrchním osvojením dané látky. Zdůvodňují to tím, že na hlubší poznání probíraného učiva není čas. Musí se pokračovat dál, aby se všechno stihlo probrat do konce roku. To však přispívá jen k demotivaci žáků. Učivo, které si pouze pamětně osvojí, často brzy zapomínají. V důsledku toho, dle mého názoru, celkově klesá kvalita vzdělávacího procesu. Na základě výše uvedených skutečností jsem se rozhodla problematikou kombinatoriky na prvním stupni zabývat a zaměřit se na to, aby poznatky, které si žáci v hodinách matematiky osvojují, byly pro ně trvalé a především pro budoucí vzdělávání účelné.

Cílem této diplomové práce je vypracovat soubor didaktických her, které budou rozvíjet logicko-kombinační myšlení žáků na 1. stupni ZŠ a na základě aplikace daných her na 1. stupni ZŠ vyhodnotit jejich účinnost, tj. zjistit, zda rozvíjejí kombinační myšlení žáků a jejich řešitelské strategie, zda jim usnadňují pochopení základních kombinatorických principů, v souvislosti s jejich využitím při řešení kombinatorických problémů, a uvědomění si podstaty opakování či neopakování prvků a uspořádání prvků v dané konfiguraci.

Snažila jsem se navrhnout náměty, které jsou dobře aplikovatelné v praxi, jsou přínosné pro kognitivní i osobnostní rozvoj žáků a mají za úkol zpestřit a zefektivnit výuku matematiky na 1. stupni základních škol. Usiluji o to, aby žáci pouze nepřijímali hotové poznatky a informace prostřednictvím výkladu, ale aby v hodinách matematiky převládala konstruktivistická výuka, kde jsou žáci v rámci činnostních aktivit podněcováni k vlastní tvorbě poznatků a poznatkových struktur.

Závěrečná práce směřuje k zlepšení účinnosti výuky matematiky na prvním stupni základních škol, a to v oblasti rozvoje logického a kombinačního myšlení. Hry mohou být zdrojem inspirace pro budoucí i stávající učitele národní školy, kteří mají zájem své hodiny matematiky oživit, zpestřit a začlenit do nich něco, co není běžné. Jde mi především o to, aby se matematika stala pro žáky praktickým osvojováním si poznatků, zábavným objevováním a nenásilným učením se v rámci radostné a tvůrčí atmosféry.

TEORETICKÁ ČÁST

V teoretické části se zabývám především pojmy, které jsou pro mou diplomovou práci klíčové. Nejprve objasňuji pojem kombinatorika. Uvádím ji v historickém kontextu, vymezuji její základní pojmy a principy, zabývám se jejím začleněním do RVP ZV, a nakonec objasňuji otázku rozvoje kombinačního myšlení na prvním stupni základních škol.

V druhé kapitole otevírám téma efektivity ve vyučovacím procesu v předmětu matematiky. Především vysvětluji pojem pedagogický konstruktivismus a seznamuji s jeho zásadami.

Třetí kapitola pojednává o motivaci jako o nezbytném činiteli ve vyučovacím procesu, který je důležitou součástí i ve výuce matematiky. Osvětluji její význam a zabývám se souvislostmi s ní spjatými. Nezbytnou součástí této části je motivace ve výchovně vzdělávacím procesu, kde především směřuji k seznámením se s metodami, které motivaci rozvíjejí a zvyšují.

Následující čtvrtá kapitola je zaměřena čistě pedagogicky. V ní se stává ústředním zájmem termín hra a didaktická hra. Vymezuji jejich definici a zaobírám se začleněním didaktických her do výuky. Následně navazuji na didaktické hry v matematice a konkrétně pojednávám o kombinatorických didaktických hrách.

Kapitola poslední objasňuje pojem desková hra. Bylo nutností tuto část do teoretické rozpravy zahrnout, jelikož mnou vytvořené didaktické hry, se kterými čtenáře blíže seznamuji v praktické části, mají k deskovým hrám velice blízko. Neuvádím zde historický vývoj, jelikož ho nepovažuji za podstatný, ale vymezuji druhy deskových her. Poté se částečně zabývám i tématem kombinatorických deskových her, které jsou předmětem zájmu především v jedné disciplíně aplikované matematiky, tj. v teorii her.

1 Kombinatorika

1.1 Vymezení pojmu a vztahů k vědním disciplínám

Kombinatoriku můžeme označit jako vědní disciplínu, která dnes patří mezi klasické matematické obory. Má zde své nezastupitelné místo. Zabývá se především organizací daných prvků podle předem určených pravidel do jistých skupin a nalézáním všech množství, jak je to možné provést.

Obecně je kombinatorika označována *jako matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáním a výběrem prvků – tedy tvořením tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi* [1 s. 1].

Konfigurace je pojem, který bychom mohli charakterizovat jako zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou – za elementární konfigurace můžeme považovat variace, permutace, kombinace, dále pak např. rozklady konečných množin, rozklady přirozených čísel na sčítance, rozdělování předmětů do přihrádek [20 s. 9].

Ačkoli jsou základní kombinatorická pravidla (součtu a součinu) a s nimi i kombinatorické principy (variace, kombinace, permutace, …) poměrně velmi jednoduché, dochází kombinatorika v rámci jejich generalizace k hlubokým a složitým výsledkům. V kombinatorice pracujeme především s konečnými soubory objektů, přičemž jejich daný počet prvků můžeme vyjádřit přirozenými čísly. Přirozená čísla pak tvoří primární číselný obor ve školské matematice [2 s. 13].

Kombinatorika je velmi těsně propojena s ostatními matematickými disciplínami, v nichž jsou využívány kombinatorické metody a úvahy. Především je spjata s pravděpodobností, která jí zároveň se statistikou poskytuje potřebný základ. Bez kombinatoriky by statistická data nemohla být řádně uplatněna. Grinstead a Snell [5 s. 75] ve své zahraniční publikaci uvádějí, že mnoho problémů v teorii pravděpodobnosti vyžaduje zjišťování počtu způsobů, jak může dojít k určité události. K tomu nám mohou pomoci právě výpočty, které jsou s kombinatorikou spjaté.

Dále je užitečná i v řadě dalších odvětví matematiky, především v algebře (v teorii grup a jejich reprezentací), teorii čísel, teorii her, v geometrii (při zkoumání jejich základů), dále v topologii a matematické analýze [20 s. 13]. Dá se říci, že bez obecně platných principů kombinatoriky se neobejde téměř žádný specializovaný obor. Využívá se nejen v technických odvětvích, ale i v oblasti chemie, v lékařství, školství ba i v řemeslnictví apod. Pomáhá nám také vyřešit problémy v běžném životě, kdy se především snažíme vytvořit určité skupiny z daných prvků a zajímá nás, kolik těchto skupin je. Využíváme ji například při zjišťování počtu zápasů na sportovním turnaji, které musí týmy odehrát, při plánování si cesty různými dopravními prostředky nebo při ranním kombinování kusů oblečení, které si vezmeme na sebe.

1.2 Historie kombinatoriky

Pravděpodobně první kombinatorické poznatky pocházejí z období kolem roku 2000 př. n. l. a jsou spjaty s pojmem konfigurace (viz výše), s nímž se můžeme setkat v posvátné knize *I-ťing* (tj. *Kniha proměn*) [20 s. 9].

Záznamy, které se kombinatoriky týkají, nalézáme nejčastěji u čínských a indických civilizací. Základní kombinatorická pravidla byla v této době mnohdy používána, ale jelikož se jedná o pravidla velmi jednoduchá, jejich studium to značně znemožňuje, jelikož není zachyceno jejich přesné znění. V historických listinách se můžeme setkat i s kombinatorickými pojmy jako jsou variace, kombinace i permutace, často ale nebyl zachován jejich přesný význam [26 s. 72].

První zmínky o úlohách z kombinatoriky nacházíme v Indii, a to v lékařském spise *Susruta*, který pochází z 6. století př. n. l. Výsledky úloh v tomto období autoři nacházejí vypsáním všech možností, takže nemůžeme určit, zda znali i nějaké všeobecné vzorce. [20 s. 10].

Židovská kniha s hebrejským názvem *Sefer Yetzirah*, pocházející ze 3. století našeho letopočtu, je první knihou, kde se objevují náznaky uchopení principu výpočtu dnešního faktoriálu. Dříve však o pojmu faktoriál neměli ani ponětí. Ve 12. století našeho letopočtu pak *Abraham ibn Ezra* vydedukoval pravidlo pro výpočet k-prvkových kombinací ze 7 prvků, aby zjistil počet veškerých možných konjunkcí 7 planet, které v té době pozoroval. Od 13. století se už v mnohých pracích tehdejších matematiků objevují kombinatorické důkazy [20 s. 10].

V 16. století měly kombinatorické úlohy spojitost s hazardními hrami, které zaujímaly významné místo v životě výsadních vrstev tehdejší společnosti. Problémy hazardních her podmínily rozvoj nejen kombinatoriky, ale i teorie pravděpodobnosti, která se vyvíjela paralelně s ní. Ital *Niccolo Tartaglia* byl jedním z prvních matematiků, který začal při hře v kostky počítat různé kombinace. Sestavil dokonce tabulku, v které je zobrazeno, kolik je způsobů, při nichž může padnout na *r* kostkách *s* ok [20 s. 11].

Kombinatorika se jako matematická disciplína začala objevovat přibližně v 17. století jako podpůrná část teorie pravděpodobnosti [26 s. 72]. Koncem 16. a začátkem 17. století vznikaly nejstarší kombinatorikou se zabývající práce, jejichž autory jsou *B. Pascal* a *P. Fermat*. Historicky nejstarší prací z kombinatoriky, která byla publikována, je dílo „*Disertatio de Arte Combinatoria*" z roku 1666 od *G. W. Leibnize*. V polovině 18. století k významnému rozvoji kombinatoriky svými pracemi dále přispěl *L. Euler.* [23 s. 3]. Dalšími významnými osobnostmi zabývajícími se kombinatorikou byl *J. I. Bernoulli, G. W. von Leibniz* a *P. S. Laplace*.

Roku 1901 vyšla v Lipsku první učebnice kombinatoriky, jejímž autorem je německý matematik *Netto*. Ve 20. století postihl kombinatoriku bouřlivý rozvoj. V rámci vývoje výpočetní techniky se značně rozvíjela celá diskrétní matematika a vnitřně se diferencovala. Dnes je využívána v několika jiných matematických disciplínách [26 s. 72–73].

V dnešní době se všeobecně zvýšil zájem o problémy diskrétní matematiky. Kombinatorických metod se užívá při řešení různých záležitostí, jako je tvorba plánů výroby, realizace produkce či v otázkách s dopravní tématikou. Objevuje se také spojitost kombinatoriky s lineárním programováním a s teorií informace. [20 s. 13]

1.3 Základní pojmy a principy kombinatoriky

Kombinatorika zkoumá skupiny prvků vybraných z dané základní množiny. Podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, rozdělujeme skupiny prvků na skupiny s opakováním a skupiny bez opakování [20 s. 15]. Důležité je také rozlišit, jestli jsou vybrané skupiny uspořádané nebo neuspořádané. Pak buď záleží nebo nezáleží na pořadí prvků ve skupině.

Vybíráme k prvků z daných n prvků konečné množiny ($k \in$ N, $n \in$ N) přirozených čísel a tvoříme (ne)uspořádané k-tice [20 s. 15].

Součin přirozených čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ označujeme v kombinatorice symbolem $n!$ a čteme n-faktoriál [1 s. 18].

Mezi základní pravidla kombinatoriky patří kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu. Mezi základní kombinatorické pojmy řadíme permutaci, variaci a kombinaci.

Při definování výše uvedených pravidel a pojmů budeme pracovat pouze s konečnými množinami, tedy s množinami, kde jejich počet prvků je dán celým nezáporným číslem. Množina M má n prvků, kde n je celé nezáporné číslo [23 s. 5]:

$$|M| = n, \text{ přitom } |\varnothing| = 0$$

Definice 1.1 *Nechť M je neprázdná množina. Uspořádanou dvojicí* (a_1, a_2) *prvků z množiny M (s prvním prvkem* a_1 *a druhým* a_2*) rozumíme množinu* $\{ \{ a_1 \}, \{ a_1, a_2 \} \}$*, tj.* $(a_1, a_2) = \{ \{ a_1 \}, \{ a_1, a_2 \} \}$ [23 s. 5].

Poznámka. *Pro libovolné přirozené číslo* $k \geq 2$ *lze analogicky definovat uspořádanou k- tici prvků z množiny M. Systém všech uspořádaných k-tic prvků z množiny M značíme*

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k.$$

A nazýváme jej k-tou kartézskou mocninou množiny M. Dvě uspořádané k-tice $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ *prvků z množiny M jsou si přitom rovny, právě když pro každé* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *platí* $a_i = b_i$ [23 s. 5].

V kombinatorice mnohdy mluvíme o neuspořádané k-tici prvků z množiny M, kde $k \leq |M|$. Myslíme tím obvykle k-prvkovou podmnožinu množiny M [23 s. 5].

Definice 1.2 *Nechť* M_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *jsou neprázdné množiny. Kartézským součinem množin* M_i *rozumíme systém všech uspořádaných k-tic* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$*, kde* $a_i \in M_i$*, a značíme jej* [23 s. 5]:

$$\underbrace{M \times M \times \ldots M}_{k-krát} = M^k$$

1.3.1 Kombinatorické pravidlo součtu

Kombinatorické pravidlo součtu je možné použít v takových případech, kdy smíme rozdělit dané prvky nebo skupiny prvků do několika tříd (množin) za podmínky, že každý prvek patří právě do jedné třídy (množiny). Součet počtu prvků ve všech třídách (množinách) je tak roven celkovému počtu prvků (za předpokladu, že třídy jsou disjunktní, tzn. ani jeden z uvažovaných prvků nepatří do dvou nebo více tříd) [20 s. 15].

Věta 1.1 (princip součtu) *Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou konečné množiny takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$ nechť $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pak platí* [23 s. 6]:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Příklad úlohy 1.1 Deset žáků z 5. B jezdí do školy autobusem, čtyři žáky vozí do školy rodiče autem. Patnáct žáků z této třídy chodí do školy pěšky. Kolik je ve třídě žáků, jestliže nikdo nepoužívá na cestě do školy jiný dopravní prostředek?

Řešení úlohy 1.1 Výsledek můžeme zjistit tím způsobem, že sečteme žáky, kteří jezdí do školy autobusem (tj. 10) s žáky, které vozí do školy rodiče autem (tj. 4) a s žáky, kteří chodí do školy pěšky (tj. 15).

$$10 + 4 + 15 = 29$$

Odpověď na otázku zní: Ve třídě je dvacet devět žáků.

1.3.2 Kombinatorické pravidlo součinu

Když sestavujeme skupiny o dvou prvcích, mnohdy víme, kolik je možností, jak lze vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý. Zároveň počet způsobů výběru druhého prvku není závislý na tom, jak byl vybrán první prvek. Kombinatorické pravidlo součinu spočívá v tom, že pokud předpokládáme, že první prvek je možné vybrat m způsoby a druhý prvek n způsoby, pak skupinu těchto prvků (m, n) můžeme vybrat $m \times n$ způsoby. Toto pravidlo lze generalizovat pro výběr k-tic prvků [20 s. 16].

Věta 1.2 (princip součinu) *Nechť n je přirozené číslo a A_j, j = 1, 2, ...,n, jsou konečné množiny takové, že* $|A_j| = k_j$. *Pak kartézký součin $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ má $k_1k_2 \ldots k_n$ prvků, tj. platí* [23 s. 6]:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_n|$$

Příklad úlohy 1.2 V pekařství nabízejí tři velikosti koláčů (malý, střední a velký) a čtyři druhy náplně (makovou, tvarohovou, oříškovou a jablečnou). Kolik různých koláčů s náplní lze vytvořit za předpokladu, že nechceme míchat více náplní najednou?

Řešení úlohy 1.2 Ke každé velikosti koláče existují 4 různé náplně. Celkový počet možností je tedy:

$$3 \cdot 4 = 12$$

Odpověď na otázku zní: Lze vytvořit 12 různých koláčů.

1.3.3 Variace bez opakování

Variace je, stejně jako permutace, obměnou pořadí daných prvků ve skupině. Rozdíl je v tom, že u permutace máme k dispozici *n* prvků a vytváříme *n*-členné skupiny. U variace máme však k dispozici *n* prvků a vytváříme *k*-členné skupiny. Vybíráme tedy *k* prvků ve stanoveném pořadí z daných *n* prvků. Je patrné, že permutace je speciální případ variace, kdy $k = n$ [20 s. 27].

Je charakteristická tím, že vybíráme jen některé prvky z dané skupiny, přičemž záleží na pořadí prvků ve skupině a každý prvek se v ní může vyskytovat nejvýše jednou.

Definice 1.3 *Nechť $k \leq n$ jsou přirozená čísla. Variací k-té třídy z dané n-prvkové množiny M (k-člennou variací z n prvků) budeme rozumět každou uspořádanou k-tici navzájem různých prvků z dané n-prvkové množiny M* [23 s. 7].

Věta 1.3 *Pro počet $V_k(n)$ všech variací k-té třídy z dané n-prvkové množiny M platí* [23 s. 7]:

$$V_k(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Příklad úlohy 1.3 Čtyři kamarádi Tonda, Kuba, Matěj a Filip se rozhodli, že si o Vánocích pošlou přáníčka, každý každému. Kolik přáníček si dohromady pošlou?

Řešení úlohy 1.3 Vzhledem k tomu, že každý chlapec posílá přáníčka každému z kamarádů, a že záleží na pořadí, kdo komu přáníčko pošle, jde o dvojčlenné variace ze čtyř prvků za předpokladu, že se jednotlivé prvky nemohou opakovat (jednotliví chlapci nepošlou přáníčko sami sobě). Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro $n = 4$; $k = 2$:

$$V_2(4) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Odpověď na otázku zní: Dohromady si navzájem pošlou dvanáct přáníček.

1.3.4 Variace s opakováním

U variace s opakováním pracujeme se skupinami, ve kterých se mohou jednotlivé prvky opakovat. Míníme tím to, že se v každé k-tici zvolené z daných prvků n může každý z nich objevovat až k-krát [3 s. 35]. Je charakteristická tím, že vybíráme pouze některé prvky z dané skupiny, přičemž záleží na pořadí prvků ve skupině.

Definice 1.4 *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Variací s opakováním k-té třídy z dané n-prvkové množiny M budeme rozumět libovolnou uspořádanou k-tici prvků z množiny M, v níž se prvky mohou opakovat* [23 s. 7].

Věta 1.4 *Pro počet $V'_k(n)$ všech variací s opakováním k-té třídy z dané n-prvkové množiny M platí* [23 s. 7]:

$$V_k^{'}\left(n\right) = n^k.$$

Příklad úlohy 1.4 Kolik dvojciferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 za předpokladu, že číslice se v daném čísle mohou opakovat?

Řešení úlohy 1.4 Ze skupiny pěti číslic můžeme každou číslici spojit se čtyřmi zbývajícími číslicemi i s číslicí samotnou, přičemž záleží na pořadí číslic. Vytváříme tedy dvojčlenné variace z pěti prvků za předpokladu, že se jednotlivé prvky mohou opakovat. Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro n = 5; k = 2:

$$V_2'(5) = 5^2 = 25$$

Odpověď na otázku zní: Z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 lze vytvořit dvacet pět dvojciferných čísel.

1.3.5 Permutace bez opakování

Permutace bez opakování je obměnou pořadí daných prvků ve skupině. Když prohodíme pořadí prvků v řadě, vytvoříme novou obměnu (permutaci) [20 s. 20]. Je charakteristická tím, že pracujeme se všemi prvky ve skupině, přičemž záleží na pořadí daných prvků a každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou, tj. žádný prvek nechybí ani se neobjevuje vícekrát.

Definice 1.5 *Nechť n je přirozené číslo. Permutací z n prvků budeme rozumět každou variaci n-té třídy z n-prvkové množiny M (n-člennou variaci z n prvků)* [23 s. 7].

Věta 1. 5 *Pro počet P(n) všech permutací z n prvků platí* [23 s. 7]:

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Příklad úlohy 1.5 Prvňáčci mají mít v úterý čtyři vyučovací hodiny – český jazyk, matematiku, výtvarnou výchovu a prvouku. Kolika různými způsoby může paní učitelka sestavit rozvrh hodin na úterý?

Řešení úlohy 1.5 Jde o obměnu pořadí jednotlivých čtyř vyučovacích hodin s tím, že se hodiny nemohou opakovat. Jedná se tedy o permutaci ze čtyř prvků. Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro $n\ =\ 4$ (český jazyk, matematika, výtvarná výchova a prvouka):

$$P(4) = 4!;\ P(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;\ P(4) = 24$$

Odpověď na otázku zní: Paní učitelka může sestavit rozvrh dvaceti čtyřmi různými způsoby.

1.3.6 Permutace s opakováním

Permutace s opakováním je obměnou pořadí daných prvků ve skupině, přičemž se v ní některé ze zvolených prvků mohou opakovat. Opět jako u permutace bez opakování vybíráme všechny prvky ze skupiny a záleží na pořadí prvků.

Definice 1.6 *Nechť $k \geq n$ jsou přirozená čísla. Permutací s opakováním n-prvkové množiny M budeme rozumět každou uspořádanou k-tici sestavenou z prvků této množiny, v níž se každý prvek množiny M vyskytuje aspoň jednou* [23 s. 8].

Věta 1.6 *Pro počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ všech permutací s opakováním, v nichž se první prvek opakuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát, atd. až n-tý prvek k_n-krát, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, platí* [23 s. 8]:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

Příklad úlohy 1.6 Dřevěný vláček má čtyři vagóny modré a tři zelené. Kolika způsoby můžeme za lokomotivu zařadit těchto sedm vagónů?

Řešení úlohy 1.6 Máme určit počet způsobů, jimiž lze všechny vagóny dvou různých barev zařadit za lokomotivu. Jde o permutaci s opakováním ze sedmi vagónů (čtyř vagónů modrých a tří vagónů zelených). Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro $k_1 = 4$; $k_2 = 3$; $k = 7$:

$$P'(4,3) = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

Odpověď na otázku zní: Za lokomotivu můžeme těchto sedm vagónů zařadit třiceti pěti způsoby.

1.3.7 Kombinace bez opakování

Kombinace je kombinatorický pojem, který je zcela odlišný od variací a permutací. Stejně jako u variace vybíráme jen některé prvky z dané skupiny, přičemž ale nezáleží na pořadí prvků ve vybrané skupině. U kombinace bez opakování se zároveň může každý prvek ve skupině objevovat nejvýše jednou.

Definice 1.7 *Nechť $k \leq n$ jsou celá nezáporná čísla. Kombinací k-té třídy z dané n-prvkové množiny M rozumíme každou neuspořádanou k-tici navzájem různých prvků M (libovolnou k-prvkovou podmnožinu množiny M)* [23 s. 7].

Věta 1.7 *Pro počet C_k (n) všech kombinací k-té třídy z dané n-prvkové množiny platí* [23 s. 7]:

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} V_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Příklad úlohy 1.7 Šest týmů hraje volejbalový turnaj systémem každý s každým. Kolik zápasů se celkem za turnaj odehraje?

Řešení úlohy 1.7 Tvoříme dvojice týmů z celkových šesti, tudíž máme určit kolik dvojčlenných skupin můžeme vybrat z šestičlenného souboru. Hledáme tedy počet dvouprvkových kombinací bez opakování (jeden tým nemůže hrát sám se sebou) z šesti prvků. Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro $n = 6$; $k = 2$:

$$C_2(6) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Odpověď na otázku zní: Celkem se za turnaj odehraje patnáct zápasů.

1.3.8 Kombinace s opakováním

U kombinace s opakováním pracujeme se skupinami, v nichž nezáleží na pořadí prvků ve skupině a jejichž prvky se mohou opakovat [3 s. 46].

Definice 1.8 *Nechť k je celé nezáporné a n přirozené číslo. Kombinací s opakováním k-té třídy z dané n-prvkové množiny M budeme rozumět každou neuspořádanou k-tici prvků z množiny M (skupinou k prvků z M), v níž se každý prvek z množiny M může opakovat* [23 s. 8].

Věta 1.8 *Počet $C'_k(n)$ všech kombinací s opakováním k-té třídy z dané n-prvkové množiny je* [23 s. 8]:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = P'(k, n-1)$$

Příklad úlohy 1.8 V cukrárně prodávají tři druhy zákusků – dortíky, věnečky a košíčky. Terezka si chce koupit pět zákusků. Kolik možností výběru má?

Řešení úlohy 1.8 U zákusků, které Terezka vybírá, nezáleží na pořadí a druhy zákusků se mohou opakovat. Jde o pětičlenné kombinace s opakováním ze tří prvků. Výsledek zjistíme dosazením zadaných údajů do vzorce pro n = 3; k = 5:

$$C_5'(3) = \binom{5+3-1}{5} = \frac{(5+3-1)!}{5!(3-1)!} = 21$$

Odpověď na otázku zní: Terezka má dvacet jedna možností výběru.

Poznámka. Při studiu americké odborné publikace, která se zabývá zejména pravděpodobností, ale kombinatorice věnuje jednu rozsáhlou kapitolu [5 s. 75–132], jsem se seznámila s tím, že rozdělení kombinatoriky na permutaci, variaci a kombinaci, jako je tomu u nás, není v USA používáno. Teorie kombinatoriky je zde založena pouze na dvou termínech a to na pojmu „*permutation*“ (tzn. permutace), kdy záleží na pořadí prvků ve skupině a „*combination*“ (tzn. kombinace), kdy na pořadí prvků ve skupině nezáleží. Permutaci tak můžeme na základě těchto informací nazvat uspořádanou kombinací. Rozdělení na skupiny s opakováním a bez opakování je už obdobné. Je tedy patrné, že naše kombinatorické pojmy nejsou v matematice obecně používané po celém světě.

1.4 Kombinatorika v RVP ZV

Rámcový vzdělávací program (RVP) je kurikulární dokument, který je vytvořen Ministerstvem školství a spolu s Národním programem vzdělávání tvoří v soustavě kurikulárních dokumentů státní úroveň.

RVP určuje obligátní rámce vzdělávání pro určité stupně – předškolní, základní, a střední vzdělávání. Na jeho základě si každá škola vytváří Školní vzdělávací program (ŠVP), podle něhož probíhá vzdělávání na jednotlivých školách.

RVP ZV vymezuje základní principy, pojetí a cíle základního vzdělávání. Zaměřme se na 1. stupeň základního vzdělávání. Základní vzdělávání na 1. stupni ZŠ by mělo svou koncepcí žákům umožnit snadný přechod z preprimárního vzdělávání a rodinné péče do povinného, soustavného a pravidelného vzdělávání na základní škole. Zakládá se na kognici, respektování a rozvíjení individuálních potřeb a zájmů každého jedince (i žáků se speciálními vzdělávacími potřebami). V rámci vhodných metod a činnostního i praktického vzdělávání jsou žáci motivováni k dalšímu učení. Jsou vedeni k učební aktivitě a poznávají, že mohou hledat, zjišťovat a nacházet vhodné cesty k řešení problémů [21 s. 12]. Můžeme si všimnout poukázání především na praktické a činnostní vyučování, které má vést žáky k objevování a hledání vhodných řešení problémů. Jak je uvedeno dále v rámci dosahování cílů základního vzdělávání, žáci by měli svou pozornost věnovat činnostem, které uplatní v běžném životě.

Základní vzdělávání má dle RVP ZV [21 s. 12] *žákům pomoci utvářet a postupně rozvíjet klíčové kompetence a poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání.*

Nedílnou součástí RVP ZV jsou klíčové kompetence. Klíčové kompetence jsou v RVP ZV definovány jako soubor dovedností, vědomostí, schopností, hodnot i postojů, které jsou důležité jak pro osobnostní růst, tak i pro uplatnění každého příslušníka společnosti [21 s. 14].

V průběhu základního vzdělávání by měly být především rozvíjeny: *kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní* [21 s. 14].

Je zřejmé, že při řešení kombinatorických problémů si žák neosvojuje pouze jednu klíčovou kompetenci, nýbrž právě naopak. V každé z nich je možno najít dílčí část, kterou žák při řešení kombinatorických úloh rozvíjí. Tato skutečnost je však podmíněna vnějšími i vnitřními činiteli. Záleží jak na osobnosti žáka, jeho inteligenci, motivaci i pozornosti, tak na osobnosti učitele, jeho znalostech, výukové metodě, organizační formě, i na jeho vztahu k matematice jako vědě apod. V ideálním případě se dá říci, že všechny klíčové kompetence mohou býti naplněny. Pro lepší představu uvádím ke každé klíčové kompetenci příklad osvojování si její dílčí složky při řešení kombinatorických problémů v rámci realizace kombinatorických didaktických her, které uvádím v praktické části.

Kombinatorické didaktické hry vedou k rozvíjení a utváření těchto kompetencí:

Kompetence k učení:

- podporují logické a kombinační myšlení žáků, vedou je k pochopení principu vytváření skupin z několika prvků, učí je rozlišovat zda jde o skupiny uspořádané nebo neuspořádané a jestli se prvky v dané skupině mohou či nemohou opakovat
- podporují systematickou práci s údaji a poznatky, vedou žáky k jejich třídění
- motivují žáky k cílevědomému a systematickému výkonu, podporují uvědomění si propojenosti jednotlivých poznatků a mohou žákům ujasnit význam matematiky pro praxi

Kompetence k řešení problémů:

- přispívají k samostatnému i skupinovému řešení problémů, vedou žáky k systematickému hledání řešení úloh v rámci konfrontace se spolužáky
- podporují tvorbu řešitelských strategií a odhadnutí taktiky spolužáka
- vedou žáky k využívání logických úvah, k uplatňování různých metod řešení (zakreslování a experimentování) a k hledání vhodného postupu za účelem nalezení všech možností řešení
- vytvářejí u žáků schopnost aplikovat osvojené metody ze hry na dané konkrétní problémy

Kompetence komunikativní:

- vedou žáky ke srozumitelnému, jasnému a správnému vyjadřování i k účelné komunikaci mezi hráči při hře
- učí žáky rozumět pojmům a slovním spojením, které jsou s danou problematikou spjaté (uspořádání, záleží/nezáleží na pořadí, prvky se mohou/nemohou opakovat apod.)
- vedou žáky k diskuzi o možnostech hledání a řešení úloh se spolužáky i s učitelem

Kompetence sociální a personální:

- učí žáky respektovat osobnost druhého hráče při hře (jeho postup řešení, herní strategii apod.), vedou je k ohleduplnosti a úctě při jednání se spolužáky
- učí žáky vytvářet objektivní i kritické postoje k názorům spolužáků
- přispívají k vytváření a upevňování dobrých mezilidských vztahů mezi spolužáky
- slouží jako vhodný nástroj k rozvíjení pozitivního třídního klimatu

Kompetence občanské:

- vedou žáky k uznání vlastní chyby, ke schopnosti vyrovnat se s výhrou i porážkou, k ovládání svých emocí
- učí žáky základním principům fair play, vedou je k dodržování pravidel, k aktivnímu a odpovědnému přístupu ke hře
- přispívají k chápání spolužáka jako svébytné a jedinečné osobnosti s vlastními potřebami a zájmy

Kompetence pracovní:

- přispívají k vytváření příjemné pracovní atmosféry
- rozvíjejí u žáků praktické uvažování, které uplatní v běžném životě
- vedou žáky k uvědomění si nutnosti soustavné práce (nejen v matematice)
- vzbuzují u žáků kladný vztah k matematice jako vědě a mohou je motivovat k dalšímu vzdělávání v tomto oboru

Pokud má některý žák už v mladším školním věku badatelské schopnosti a v oblasti logického myšlení vyniká, jsou pro něho kombinatorické úlohy to pravé, co u něj vzbudí zájem o matematiku jako vědu a může se jí do budoucna dále věnovat. Pokud mu však nedáme možnost, aby své nadání projevil a budeme ho trýznit neustálým opakováním aritmetických výpočtů, nikdy si nevybuduje k matematice pozitivní vztah a jeho matematické vlohy zůstanou nerozvinuté.

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Oborem matematiky se zabývá vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* [21 s. 29].

Vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* se zakládá na činnostech aktivního charakteru, které se vyznačují prací s matematickými objekty a využitím matematiky v reálných situacích. Je nástrojem rozvoje matematické gramotnosti, jelikož umožňuje získávání vědomostí a dovedností, které jsou potřebné v praktickém životě. Na základě těchto skutečností prostupuje celým základním vzděláváním a buduje předpoklady pro další úspěšné studium [21 s. 29].

Pro nás podstatné cíle této vzdělávací oblasti jsou [21 s. 29–30]:[1]

- *využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace,*
- *rozvíjení kombinačního a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů,*
- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu,*
- *provádění rozboru problémů a plánů řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocení správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému,*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situaci z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby.*

Obsah Matematiky a její aplikace pro 1. stupeň se dělí na čtyři tematické oblasti. Patří mezi ně: *Číslo a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru; Nestandardní aplikační úlohy a problémy* [21 s. 30–32].

---

1 Vybrány jsou jen ty cíle, které považuji za podstatné z hlediska rozvíjení kombinatorických dovedností.

Zde se konečně dostáváme k zařazení kombinatoriky do vzdělávacího procesu. Kombinatoriku bychom mohli zařadit do třetího tématického okruhu, tj. *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. Očekávaným výstupem žáka je, že *řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky* [21 s. 32]. V učivu se objevují *slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce a prostorová představivost* [21 s. 32]. Kombinatorické problémy, úlohy a otázky s hledáním jejich řešení je tak možné postupně zařadit bez sebemenších obtíží do ŠVP, tématických plánů a příprav na jednotlivé vyučovací hodiny.

Řešení těchto úloh se téměř nezakládá na vědomostech a dovednostech získaných během výuky matematiky na základní škole, nýbrž je závislé na využití logického myšlení. Úlohy tohoto typu by měly být součástí všech tématických okruhů v procesu základního vzdělávání. Žák získává schopnost rozebrat problém a porozumět mu, učí se uspořádat informace a podmínky, vytvářet situační nákresy a řešit problémové úlohy. Při řešení logických úloh, které jsou přiměřené mentální úrovni žáků, dochází k upevňování vědomí žáka o svých schopnostech logicky uvažovat [21 s. 29].

Touto kapitolou jsem chtěla poukázat na to, že kombinatorika, ačkoli jako téma není do osnov školské matematiky zařazena, je v RVP ZV naznačena a má ve vzdělávacím procesu své nezastupitelné místo. Jejích metod, forem a postupů můžeme využít v tématech do osnov zařazených. Kombinatorika se tak může objevit v oblasti numerace v oboru přirozených čísel nebo také v geometrii. Je však pozoruhodné, že i přes to nebývá tak často aplikována v praxi. Učitelé ji odsouvají do pozadí a žáci tak nemají možnost se s ní setkat. Tomu také napomáhá skutečnost, že ve většině učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ je zastoupení úloh na kombinační a logické myšlení, ve srovnání s jinými typy úloh, výrazně menší. Což mohu doložit závěry z analýzy učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ, přijímacích testů z matematiky na víceletá gymnázia a dotazníků, získaných od učitelů, které vznikly na základě řešení projektu SGS a o nichž jsem se již zmiňovala v úvodu. Z praxe na základních školách vím, že když už se však kombinatorická úloha v některé z učebnic objeví, učitelé jí nevěnují dostatečnou pozornost. Občas ji zadají jen dětem nadaným a rychlým, když dokončí zadané cvičení v brzkém čase, aby nelelkovaly a nerušily ostatní při práci. Ještě jsem se nesetkala s učitelem, který by kombinatorické úlohy dětem zadával globálně a účelně. Zkrátka této matematické disciplíně není dle mého názoru věnována dostatečná pozornost.

1.5 Rozvoj kombinačního myšlení na 1. stupni ZŠ

Není na škodu, pokud si žáci osvojují matematické poznatky prostřednictvím řešení úloh z praktického života a prostřednictvím různých činností především takových, které mají charakter hry. Úlohy s kombinatorickými náměty jsou právě jednou takovou skupinou, která prostřednictvím hravých činností upevňuje matematické učivo. Žáci se v rámci školní výuky učí vyhledávat, zpracovávat, třídit a využívat získané informace, učí se pracovat s grafickým materiálem jako jsou tabulky, grafy a diagramy. Tyto činnosti jsou úzce spjaty s rozvojem určitého druhu myšlení, které v sobě přináší tvorbu a rozvoj specifických schopností a dovedností tj. *kombinačního myšlení* [1 s. 1].

Kombinační myšlení rozvíjí schopnost [1 s. 1]:

- *uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,*
- *uvědomovat si, zda v daném souboru mohou existovat skupiny prvků požadovaných vlastností,*
- *provádět výběr prvků z nějaké skupiny podle určitého pravidla,*
- *provádět rozdělování prvků dané skupiny na základě určitého požadavku,*
- *provádět uspořádání prvků dané skupiny daným způsobem,*
- *najít metodu vyhledávání všech skupin prvků s požadovanou vlastností (např. výčtem prvků, graficky, s využitím vztahů nebo vzorců),*
- *rozhodnout, zda jde o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,*
- *rozlišit, zda se prvky ve skupinách mohou či nemohou opakovat,*
- *najít pravidlo pro vyhledávání všech skupin splňujících podmínky dané úlohy.*

Už od prvního ročníku na základní škole lze začlenit do vyučování matematiky úlohy, které se zakládají na elementárních principech kombinatoriky. Prostřednictvím řešení těchto úloh se u žáků nenásilně a postupně rozvíjí kombinační myšlení, které značně zvyšuje matematickou kulturu dětí [1 s. 1].

Mnoho autorů pohybujících se v oblasti didaktiky matematiky uvádí, že je tato část učiva na ZŠ opomenuta. Vhodným příkladem je tvrzení Žilkové [29 s. 1] (překlad vlastní): *Kombinatorika je ta část matematiky, se kterou se stále trápí žáci základních a středních škol a někdy i jejich učitelé. Je to proto, že kombinatorika si vyžaduje určitou úroveň kombinačního myšlení žáků. Toto myšlení se musí kontinuálně rozvíjet už od první třídy ZŠ, na což se často zapomíná.*

Rolí učitele by mělo být hledat nejvhodnější metody, jak u žáků rozvíjet kombinační myšlení, aniž by musel zavádět kombinatorické pojmy. Vhodné je s nimi řešit kombinatorické rébusy, hry a hlavolamy. Učitel zároveň určením pravidel hry přetváří hru v lehkou či těžkou. Tak je schopen danou hru modifikovat podle různých věkových kategorií žáků a také podle úrovně jejich poznatků. Když hru spojíme s krátkými příběhy, upozorníme na to, jak může být abstraktní matematický pojem spjatý se situací z každodenního života [29 s. 1–2].

Pokud řešíme kombinatorické úlohy s dětmi, měli bychom se zaměřit především na pochopení strategie při hledání řešení. Nalezení správného výsledku musíme řádně ocenit. Před samotným řešením úloh je vhodné využívat odhady výsledků a také začleňovat momenty překvapení v případě, že je výsledek úlohy neočekávaný. To může u dětí vzbudit zájem o tyto úlohy a také o matematiku obecně [1 s. 2].

Je tedy jistě zřejmé, že kombinatorika má pro budoucí vzdělávání se i budoucí profesní život žáka značný význam. Ať už se jedinec uplatní v kterémkoli oboru, všude mu budou kombinatorické znalosti prospěšné. Současná kombinatorika nachází své uplatnění v mnoha oborech a činnostech (např. sestavování jízdních řádů, rozvrhů a plánů, znázorňování spojování molekul a atomů, vytváření poznávacích značek automobilů, ekonomická řešení apod.). V běžném životě a v rámci řešení denních problému občas člověk také zvažuje různé možnosti výběru, kombinuje a rozhoduje se, přičemž hledá nejefektivnější řešení daných otázek. Proto je důležité, aby se žáci s kombinatorikou setkali již v raném věku. Domnívám se, že rozvoj kombinačního a logického myšlení, pokud je uskutečněn vhodnými metodami a postupy, vytváří a zajišťuje vhodné prostředí pro efektivní vyučování matematiky na prvním stupni základních škol.

2 Efektivní vyučování matematiky

Efektivní vyučování je dle mého názoru takové, které naplňuje vytyčené vzdělávací cíle, přičemž zajišťuje kvalitní a trvalé osvojování si poznatků žáky, podporuje pozitivní sociální klima ve třídě a směřuje k vytváření kladných postojů žáků ke vzdělávání.

Cílem výuky matematiky na základní škole je naučit žáky mnoho základních vědomostí a dovedností, které jsou v osnovách a učebnicích a na něž budou žáci v průběhu následujícího studia s dalšími poznatky navazovat. Vnímám jako velkou chybu, když je žákům předkládáno mnoho informací, které si musí mechanicky (z paměti) osvojit bez hlubšího porozumění. Může to vést k tomu, že dítě má pak hlavu plnou vědomostí, z nichž do budoucna část zapomene a zbytek neumí použít v praxi, protože jim nikdy dostatečně neporozumělo. Kombinatorika se obzvlášť využívá v praxi, proto je důležité nepodcenit přípravu a rozvíjet logicko-kombinační myšlení již na prvním stupni základních škol. Není určitě vhodné, aby si žáci již v primárním vzdělávání osvojovali abstraktní pojmy a pamětně se učili vzorečky z tohoto oboru. Je však adekvátní využít alternativní formy, jako jsou různé herní činnosti, problémové úlohy a praktické úkoly.

Úkolem matematické přípravy člověka by měl být rozvoj vlastností a schopností jedince, které dokáže v životě uplatnit. Domnívám se, že vhodným způsobem zefektivnění výuky matematiky je využívat v jejích hodinách prvky konstruktivismu.

2.1 Pedagogický konstruktivismus

Konstruktivismus je dle pedagogického slovníku [19 s. 105–106] definován jako *široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností.*

Didaktické postupy kognitivního konstruktivismu jsou založené na předpokladu, že poznávání se děje konstruováním, což znamená, že si poznávající jedinec propojuje části poznatků z vnějšího prostředí do smysluplných struktur a ty využívá k myšlenkovým operacím, jenž jsou podmíněné úrovni jeho kognitivního vývoje. Konstruktivismus je ve výuce založen na řešení problémů ze života, tvořivém myšlení, na práci dětí ve skupinách apod. Odsouvá do pozadí učení se teorii a dril [19 s. 105–106]. Prostřednictvím konstruktivismu si žáci vytvářejí o poznatcích svou vlastní představu, která je součástí jejich postupně vzrůstajícího poznatkového systému. Pokud tuto skutečnost převedeme na téma kombinatoriky, můžeme říci, že se žáci neučí kombinatorickým pojmům a principům pouze pamětně, ale přijímaným informacím rozumějí. *Pro konstruktivně pojaté vyučování matematice je charakteristické aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte* [6 s. 196]. Učitel má za úkol vytvářet vhodné prostředí a vzbuzovat u žáka aktivitu. Pokládá před žáky problémy, otevřené otázky a zajímavé úkoly, které u žáků rozvíjejí logicko-kombinační myšlení.

Konstruktivistický přístup je opakem formálního (povrchního) osvojování si učiva. Obsah učiva z kombinatoriky by měl být žákům předkládán takovým způsobem, aby si o něm vytvořili konkrétní představy a tím učivu porozuměli. Informace, kterým žák neporozuměl, si pak může osvojit pouze pamětně, neustálým opakováním. *Opakování není matkou moudrosti, matkou moudrosti jsou aplikace. Škola by měla vést žáky k zapamatování si souvislostí, k zapamatování podstatného, paměť by se měla opírat o zkušenosti, o vytváření představ a schémat* [6 s. 147].

Domnívám se, že kombinatorické didaktické hry jsou vhodnou formou uplatnění konstruktivistického přístupu, pokud chceme rozvíjet logicko-kombinační myšlení žáků. Zajistí to, že žáci opravdu kombinatorickým principům a vztahům dostatečně porozumí, jelikož je v rámci herních činností budou aplikovat, aniž by si to sami uvědomovali.

Shrňme tuto kapitolu do několika bodů, které vystihují podstatu účelné výuky matematiky na základních školách. Aby vyučování matematiky bylo efektivní, je potřeba, aby splňovalo následující body [6 s. 196]:

- Aby matematické vzdělávání bylo smysluplné a přínosné, musí rozvíjet u žáků schopnost samostatně a kriticky myslet.
- Aby matematika byla užitečná, musí být součástí lidské kultury a jejím cílem musí být efektivní pomoc v řešení problémů každodenní praxe. Musí u žáků vytvářet potřebné pracovní návyky. Může mít i charakter hry.
- Aby matematické vzdělání mělo smysl, mělo by rozvíjet zvídavost, pokládat otázky a přispívat ke kritickým postojům.

3 Motivace

3.1 Vymezení motivace

Motivace je definována jako *souhrn činitelů, které podněcují, energizují a řídí průběh chování člověka a jeho prožívání ve vztazích k okolnímu světu a k sobě samému* [15 s. 11]. To usměrňuje naše chování a jednání pro dosažení určitého cíle. Můžeme říci, že se jedná o souhrn všech vnitřních a vnějších aktivizujících faktorů, které vedou člověka k činnosti.

Motivace je dynamický proces, který je dán vznikem motivů. *Motivy jsou faktory, které vzbuzují, udržují a zaměřují chování, jednání či učení* [14 s. 13]. Je to příčina, kvůli které se jedinec začíná chovat určitým způsobem. Chování člověka může být motivováno jak z vnitřních pohnutek, potřeb člověka, tak z vnějšího popudu. Vytváří se ve vzájemném působení potřeb a incentiv.

Potřeby, ač jsou vrozené či získané během života jedince, představují dispoziční motivační činitele. Projevují se pocitem vnitřního nedostatku nebo přebytku. Incentivy lze nazvat vnějšími podněty, jenž vzbudí a mnohdy i uspokojí potřeby člověka. Incentivy mohou být pozitivní (např.: potrava) i negativní (např.: hrozba) [9 s. 17]. Motivy jsou u každého člověka individuální a mají tedy u každého jedince rozdílnou intenzitu i frekvenci [12 s. 13].

3.2 Vnitřní a vnější motivace

Je důležité, aby učitel při vyučování diferencoval vnější a vnitřní motivaci. Vnitřní motivace vychází z potřeby člověka vykonávat určitou činnost jen kvůli ní samé, bez očekávání pochvaly či odměny. Děti mají přirozený pud zvídavosti, který od raného věku podněcuje spontánní zkoumání. Žák může být motivován vlastní touhou po vzdělávání, vnitřními pohnutkami, pocity vnitřního nedostatku nebo přebytku. Vnitřní motivace pramení z individuality každého jedince. Bývá více spontánnější, pružnější a má za následek tvořivější přístup k práci. Vnitřně motivovaný žák má vyšší úspěšnost, je ochoten aktivně se podílet na školní práci i přípravě, také si učivo lépe osvojí a zapamatuje. Je však skutečností, že se tento druh motivace ve vyučovacím procesu objevuje v menšině [15 s. 15].

Vnější motivace vychází z vlivů vnějšího prostředí. Jedinec se neučí z vlastní iniciativy či zájmu, nýbrž pod určitým vlivem vnějších podnětů, jevů a událostí. Činnost může být doprovázena napětím a vést k nejistotě. Žák trpí větší úzkostí a strachem z neúspěchu, obtížněji se připravuje a nemívá velké sebevědomí [15 s. 15].

V období mladšího školního věku převládá ve vyučování motivace vnější. Největší motivační účinek na učení mají vnější motivy v podobě pochval a trestů. Žák si s postupujícím věkem, krok za krokem, klade nároky sám na sebe, snaží se prosadit svůj zájem a svou vůli. Tím se u něj utváří systém vnitřní motivace. *Tento přechod od vnější motivace k vnitřní probíhá v procesu interiorizace vnějších požadavků, v závislosti na osvojené poznatky, zručnosti a rozvoj kognitivních funkcí žáků ve spojení s osnovami* [15 s. 19].

3.3 Motivace ve výchovně vzdělávacím procesu

Motivace je rozhodujícím faktorem v procesu vzdělávání a výchovy [14 s. 14]. Je velmi významným činitelem ve všech vyučovacích hodinách, kde se uplatňuje celý systém motivů. Jejich intenzita a zaměření pak závisí na mnoha faktorech, jako je věk žáka, jeho individuální vlastnosti, jeho zdravotní stav, práce učitele apod. [14 s. 15].

Pokud chceme žáky optimálně motivovat, je nutné znát jejich dominantní potřeby. Pokud známe motivační zaměření žáka, můžeme ho nejen přiměřeně motivovat, ale zároveň mít i vliv na rozvoj utváření jeho zájmů a hodnot [9 s. 23].

Motivaci ve výchovně vzdělávacím procesu lze chápat ve dvojím smyslu [9 s. 24]:

- jako činitel, který zvyšuje efektivitu učení žáků,
- jako jeden z významných cílů výchovně vzdělávacího vlivu školy.

Za předpokladu, že učitel uplatňuje aktivní činnosti, využívá vhodné metody práce a při vyučování podporuje působení dobré emoční atmosféry i vytváření pozitivních sociálních vztahů, se může změnit konstrukce motivace žáka k učení. Dochází tak k většímu vlivu samotné potřeby k činnosti a zvídavosti na úkor ústupu usilování o pochvalu a odměnu. Vnější motivace se tak postupně přetváří ve vnitřní.

3.4 Metody rozvíjení a zvyšování motivace

Možností, jak rozvíjet a zvyšovat motivaci ve škole, je mnoho. Záleží jen na učiteli, které formy chce uplatňovat a jakým způsobem. Důležitým faktorem je také věk dětí, jejich počet ve třídě nebo jejich individuální zvláštnosti apod.

Pro každého žáka je důležité znát smysl práce ve škole. Učitel by měl dětem pomoci tento smysl najít. To je možné mnoha způsoby. Žáci by měli mít možnost pochopit a poznat cíle vyučování, a to nejen ty krátkodobé. Stanovený cíl by měli vnímat, jako by si jej stanovili sami. Každý žák po vykonání výkonu potřebuje také přiměřenou pozitivní zpětnou vazbu. Tím se upevňují žádoucí výkony, popřípadě negativní zpětná vazba chyby a nedostatky eliminuje.

Způsoby a metody rozvíjení motivace žáka dle Lokše a Lokšové jsou [15 s. 43–45]:[2]

1. Tvořivost

Podstatný význam má zařazování tvořivých činností do výuky. To má mimo tvorby motivace vliv na rozvoj tvořivého myšlení, fantazie a samostatnosti žáků. Žák je nenásilně aktivizován k činnosti a osvojí si mnohem více poznatků než při běžných pasivních činnostech.

Tvořivost je soubor vlastností, které dávají člověku schopnost, aby v důsledku změn ve svém vědomí vytvářel nový produkt [Votruba in 7 s. 8]. Tvořivost v sobě zahrnuje tvůrčí myšlení, které se zakládá na dvou pilířích – na fantazii a intuici [8 s. 30]. Realizací tvůrčího myšlení je tvůrčí činnost.

Tvůrčí myšlení se projevuje vysokou motivovaností, vytrvalostí, odmítáním tradičních postupů, hledáním variantních řešení, smyslem pro originalitu, nalezením nového postupu, snahou vyřešit problém apod. [7 s. 10]

Do výuky by tak měly být zařazovány činnosti a aktivizující metody, které tvořivost žáků podporují. Existuje již mnoho metod, které rozvoj tvůrčího myšlení podporují. Můžeme je rozdělit na [7 s. 24]:

- diskuzní metody (rozhovory, které vedou k vytváření nebo změně postojů a hodnot žáků),

2 Vybrány jsou jen ty způsoby a metody rozvíjení motivace, které uplatňuji v praktické části diplomové práce.

- heuristické metody (zahrnují řešení problémů),
- situační metody (jsou založené na problémovém řešení modelových případů),
- inscenační metody (jde především o sociální učení a hraní sociálních rolí),
- didaktické hry (tj. herní aktivity sledující didaktické cíle).

2. **Problémové vyučování**

Využívání problémového vyučování, které v sobě zahrnuje různě namáhavé úkoly a možnou volbu obtížnosti úkolů, rozvíjí vlastní iniciativu žáků a jejich aspirační úroveň.

Řešení problémů je jednou z vysoce účinných a efektivních metod. Žák si prostřednictvím řešení problému osvojuje poznatky svou vlastní řešitelskou aktivitou. Není zároveň na škodu, když žák řeší tentýž problém s časovým odstupem opakovaně. *Pro vědce je znovuobjevení ztrátou času, pro dítě je to aktivizace a tvůrčí přístup ke světu. Nepřebírat hotové definice, ale objevit si je a získat si je* [6 s. 60]. Matematiku je důležité se učit ne pouze pamětně ale s pochopením. Pokud jsou žákům zprostředkovány takové podmínky, kdy si vše musí sami objevit, pak v rámci problémového učení snadněji dosahují porozumění. Zároveň si žáci vytváří důvěru v sebe sama, projevují aktivitu a mají radost z poznání.

Základem problémových metod je indukce [8 s. 60]:

1. Žák se zabývá jednotlivými poznatky.
2. U dílčích poznatků porovnává jejich podmínky a vlivy.
3. Odlišuje kvalitativní a kvantitativní vztahy mezi jednotlivými poznatky.
4. Vytváří domněnky a zobecňuje poznané.
5. Ověřuje obecnou platnost vytvořených hypotéz na jednotlivých případech.

Problémové úlohy by měly u žáků aktivizovat vnitřní motivaci. Úloha, jenž vyvolá v žákovi vnitřní konflikt, který ho vyburcuje k poznávací činnosti, se stává problémovou situací. *Konflikt mezi tím, co člověk očekává a tím, co je mu předkládané, činí z objektivního problému subjektivní – bez toho není možné vnitřně motivovanou poznávací činnost aktivizovat* [15 s. 27]. Jde o to, že řada učitelů předpokládá, že jimi předložená otázka je sama o sobě problémová a má aktivizovat poznávací potřeby žáků. Nelze ztotožňovat objektivní problém s problémovou situací žáka. Došlo by tak pouze k vnější motivaci, ale vnitřní popudy žáků by zůstaly neprobuzené.

Z vlastní zkušenosti mohu říci, že většina učitelů je přesvědčena, že základní podmínkou rozvíjení schopnosti žáků řešit problémové úlohy je setkat se s nimi v praxi. Když však budeme žáky zahlcovat množstvím úloh, povede to dle mého názoru více k demotivaci namísto zdárného a efektivního osvojování si algoritmů řešení úloh.

Vhodné přístupy k řešení problémových úloh uvádí Fridman [Fridman in 15 s. 26]:

- U žáků je nutné rozvíjet schopnost úlohy logicky rozebírat. Zároveň bychom u nich měli vytvářet takové návyky, aby začali hledat možná řešení úloh, se kterými se ještě nesetkali, až po jejich předběžné analýze.
- Vedeme žáky k hledání strukturních zvláštností úloh, aby využívali pro jejich řešení organizovanou posloupnost jednotlivých po sobě jdoucích kroků. Je důležité společně se žáky přemýšlet nad zadanými úlohami, zkoumat jejich strukturu i zvláštnosti a rozebírat všeobecné metody řešení.
- K hledání správného výsledku úloh musí docházet za účelem osvojování si všeobecných metod, způsobů a schémat obecně platných řešení.
- Když žáci naleznou správné řešení úlohy, měli by provést zpětnou analýzu řešení, aby si ujasnili všeobecné zákonitosti postupu použitého při řešení, popřípadě nalezli případné racionálnější řešení.

Cílem učitele by mělo být vzbuzení u žáků pocitu vlastní radosti z hledání řešení problémové úlohy a uspokojení z jeho nalezení. Pak budou žáci sami motivováni k vyhledávání těchto úkolů a úloh.

3. Soutěže

Motivaci také zvyšují různé soutěže se spolužáky. Zde je však důležité střídat zadání soutěží, aby se u dětí uplatnily různé formy nadání a různé druhy inteligence. Soutěžit by měly vyrovnané týmy a rovnocenní jedinci. Nemělo by tak dojít k demotivující variantě, kdy vyhrává či prohrává stále stejná skupina žáků.

4. Zajímavé úlohy

Motivační jsou především ty úlohy, které nejsou stereotypní a ve kterých žáci nacházejí možnost objevování a bádání. Učitel by se neměl spokojit pouze s úlohami, které mu nastoluje učebnice, ale měl by hledat v literatuře či na internetu vhodné náměty zařaditelné do hodin matematiky.

5. Vyučování hrou

Svou roli zde zastávají didaktické hry, které jsou nezbytnou součástí každého vyučování. Didaktickými hrami se zabývám v celé jedné kapitole (viz níže kap. 4 Didaktická hra).

6. Rozmanitost ve vyučování

Hodiny ve kterých se stále děje něco nového, kde dochází ke změnám metod i forem výuky, jsou pro žáky zábavné a v mnoha ohledech přínosné. Jednak kvůli možnosti oscilace zaměření pozornosti, tak kvůli principu uplatnění různých osobnostních předpokladů při rozdílných úkolech a činnostech.

7. Učení činností

Pokud žáci nejsou při hodině pasivní a na výuce se aktivně podílejí, mohou k poznávání zapojit celou svou osobnost. Praktická činnost je nutí být činnými, nemají tak možnost zažít nudu a lelkování. Je ještě nutné podotknout, že praxí se žáci mnohem více naučí. Osvojení poznatků bývá touto metou snadnější a efektivnější.

8. Kooperativní a párové vyučování a učení

Rovněž skupinová či párová práce pomáhá zlepšovat motivaci žáků, a to prostřednictvím spolupráce, hledání společného postupu řešení problému a jeho následným hodnocením.

Kooperace je vymezována jako společná a návazná činnost uvnitř skupiny a navenek, jejíž podmínkou je akceptování společných cílů [11 s. 7]. Tento pojem se objevuje v mnoha vědních disciplínách. V oblasti vzdělávání žáků bychom mohli říci, že jde o učební činnost s plněním úkolů, v rámci které žáci spolupracují ve dvojicích či početnějších skupinách. Kasíková [11 s. 62] vymezuje pojem kooperativní učení jako *systém založený na principech kooperace při učení v malých* *skupinách. Kooperace sama, i když je cenným cílem tohoto systému, však není cílem prioritním – tím je rozvoj intelektuální a osobnostně sociální.*

Kooperativní učení zlepšuje sociální interakci mezi spolužáky z hlediska odlišnosti pohlaví, etnického původu nebo intelektuálních schopností. Zapojením komunikace do řešení společného problému, kdy žáci vyslovují své domněnky, nápady a názory, dochází k diskuzi a společnému hledání řešení, kde každý má prostor na sebevyjádření.

Krejčová ve své publikaci [12 s. 7] uvádí**:** *Skupinové vyučování vsazené do hry považujeme z metodického hlediska za velice potřebnou organizační podobu rozvíjení vzájemné spolupráce. Právě využití didaktických her formou kooperativního vyučování se ukazuje jako velice vhodné propojení.*

Spolupráce mezi žáky ve vyučování má spoustu výhod. Žáci si mohou vzájemně radit, propojovat své znalosti a poznatky, kontrolovat si navzájem správnost postupu a podílet se na společné práci. Každý žák má odpovědnost za společný výsledek a je v jeho zájmu se na dosažení společného cíle podílet. V sociální oblasti se pak děti učí naslouchat ostatním, vyslovovat svůj názor a respektovat názor druhých, spojovat různé nápady a nacházet kompromis v případě rozporů.

4 Didaktická hra

4.1 Vymezení pojmu

Hra je základní, vrozenou a přirozenou činností každého člověka. Svojí úlohu má především ve vývoji dítěte, kde zastává roli významného a nezbytného činitele. V rámci hry se dítě učí, poznává okolní svět i sebe samo a rozvíjí celou svou osobnost. Hra může být pro dítě determinantem duševního zdraví i tělesné rekreace.

Hrou rozumíme dle Schürera [24 s. 12] *jakoukoli samovolnou – spontánní – činnost, jejíž provádění samo je zřejmým cílem a zdrojem uspokojení subjektu, i když výsledek činnosti mívá další vývojový – často cvičný – význam, obvykle víceméně skrytý.*

Hra patří mezi základní formy lidské činnosti. Je to svobodně volená aktivita, která se nezakládá na dosahování určitého stanoveného cíle, ale hodnotu má sama v sobě [16 s. 126].

Hrou rozumíme především prostředek aktivizační, kterou dítě vykonává spontánně rádo, aniž bychom ho museli různými prostředky podněcovat. Hra mobilizuje nejen dětskou aktivitu, ale má za následek tvůrčí jednání a svobodnou komunikaci se spoluhráči. O hře můžeme mluvit i jako o prostředku socializačním.

Potřebu dítěte hrát si je možné využít k didaktickým záměrům. *Podaří-li se učení ať volní nebo mimovolní zakomponovat do hry, docílíme nejvyšší efektivity* [8 s. 65]. Jelikož nevyžaduje příliš složitou motivaci, lze ji uplatnit i ve škole v rámci výuky. Vznikne tak didaktická hra. Mezi spontánní hrou a didaktickou hrou jsou patrné rozdíly a je tedy nutné tyto dvě odlišné činnosti rozlišovat. Didaktická hra je často pro žáky povinná, řídí se požadavky učitele, má svá objektivní pravidla a co je důležité, směřuje k dosažení některých vzdělávacích cílů. Ve výuce tak sleduje kognitivní, psychický, sociální, emoční i tělesný rozvoj. Při didaktické hře žáci jednak rozvíjejí své schopnosti a osvojují si dovednosti, jednak stimulují svou kreativitu a tvůrčí způsob myšlení, rozvíjí svůj komunikační aspekt a zdokonalují své smysly i pozornost a paměť. Souhrnně by se dalo říci, že hra působí integrálně na celou osobnost žáka.

Didaktická hra je dle pedagogického slovníku [19 s. 43] definována jako *analogie spontánní činnosti dětí, která sleduje (pro žáky ne vždy zjevným způsobem) didaktické* *cíle.* Průcha, Walterová a Mareš [19 s. 43] dále upřesňují, že je možné ji realizovat v různých prostorách, jako je učebna, tělocvična, hřiště i příroda. Je dána pravidly a potřebuje průběžné řízení a závěrečné hodnocení. Může být vytvořena pro jednotlivce i skupiny žáků. Pedagog se při ní může ocitnout v různých rolích (od hlavního organizátora až po pozorovatele). Obsahuje silný zdroj stimulace, jelikož vyvolává zájem, zvyšuje aktivitu žáků, vzbuzuje jejich tvořivost, umožňuje jim spolupráci i soutěživost a pomáhá jim vytvářet a používat již získané životní zkušenosti.

Didaktickou hru je také možné vymezit jako *takovou seberealizační aktivitu jedinců nebo skupin, která se svobodnou volbou, uplatněním zájmů, spontánností a uvolněním přizpůsobuje pedagogickým cílům* [16 s. 127].

Rozsáhlejší a ucelenou definici podává ve své publikaci Vankúš [25 s. 17] (překlad vlastní): *Didaktickou hrou rozumíme činnost žáků a učitele, která sleduje jisté didaktické cíle. Žáci si zpravidla tyto cíle neuvědomují. Jejich motivací je radost z jejího vykonávání, soutěživost, možnost práce ve prospěch týmu, seberealizace… Didaktická hra má pravidla, která organizují činnost žáků. Obsah a pravidla didaktické hry vedou k realizaci jejích edukačních cílů. Charakteristikou pro didaktickou hru je vysoká angažovanost, motivace žáků a potěšení z průběhu hravé aktivity.*

4.2 Začlenění didaktických her do výuky

Pokud chceme zařadit didaktické hry do výuky a záleží nám na tom, aby byly efektivní, je nutné se předem dobře připravit. Důležitý je především správný výběr didaktické hry a následná metodická práce s ní. Ještě než dojde k samotné realizaci vybrané hry, měl by si učitel ujasnit (mimo obecné didaktické alkálie) několik specifických metodických zásad.

Metodická příprava k začlenění didaktických her do výuky [16 s. 129]:

a) vytyčení cílů hry (Ujasníme si cíle, které se mají prostřednictvím hry naplnit. Položíme si otázku, jaké důvody nás vedou k volbě dané hry. Může jít o cíle kognitivní, sociální a emocionální.)

b) diagnóza připravenosti žáka (Uvědomíme si, jaké vědomosti, dovednosti a zkušenosti potřebuje žák mít, aby pro něho hra nebyla příliš náročná.)

c) ujasnění pravidel hry (Měli bychom si stanovit pravidla hry, abychom je mohli jasně a správně sdělit žákům. Pokud už hru žáci znají je možné pravidla obměnit nebo upravit.)

d) vymezení úlohy vedoucího hry (Ujasníme si roli pedagoga či vychovatele při realizaci hry. Zda bude hru řídit nebo svěří tuto funkci žákům.)

e) stanovení způsobu hodnocení (Určíme si formu hodnocení např. diskuze, hodnocení učitelem, hodnocení žáky mezi sebou apod.)

f) zajištění vhodného místa (Místo, kde se bude hra odehrávat, by jí mělo být přizpůsobené. Místnost uspořádáme, terén upravíme. Dodržujeme především zásadu bezpečnosti.)

g) příprava pomůcek, materiálu, rekvizit (Předem si připravíme dostatečné množství potřebných pomůcek.)

h) určení časového limitu hry (Rozvrhneme si průběh hry a časové možnosti.)

i) promyšlení případných variant (Rozmyslíme si, jak lze hru modifikovat. Do jejího průběhu může vstoupit iniciativa žáků nebo různé rušivé elementy.)

Návodů na realizaci didaktických her, jako jich samotných, je nepřeberné množství. Funkčnost a efektivní edukační využití tohoto didaktického materiálu záleží především na tvůrčí aktivitě učitele, jeho iniciativě a nápaditosti, aby vybral ty správné, které odpovídají věkovým a popřípadě i individuálním zvláštnostem a schopnostem dětí. Pak už jen stačí je vhodně začlenil do vzdělávacího procesu.

4.3 Didaktické hry v matematice

Zařazení didaktických her do hodin matematiky znamená pro většinu žáků důvod k radosti. Hra s sebou přináší vlídnou atmosféru, možnost projevit hravost, fantazii, spontánnost a aktivitu. Učení matematice je tak uskutečněno zábavnou formu a stává se přitažlivějším.

Hra může sloužit i jako prostředek socializace. Při ní se žáci sblíží nejen mezi sebou, ale i s učitelem. Lépe se začlení do kolektivu spolužáků, společně prožívají radost z vítězství i smutek spojený s prohrou. Jsou si vzájemnou oporou, fandí si a podporují se. Hra ve vyučování matematiky má za následek vytvoření dobrého pracovního prostředí.

Matematické didaktické hry rozvíjí osobnost žáka po mnoha stránkách. Jsou značným zdrojem motivace, zlepšují koncentraci pozornosti a podílejí se na zvyšování rozumového úsilí a aktivity myšlení. Umožňují hledat strategické postupy, cvičí logický a kombinační úsudek a podporují rozvoj tvořivého způsobu uvažování, pozornosti, představivosti i paměti [13 s. 9].

Didaktické hry v hodinách matematiky přispívají k naplnění nespočtu výchovně-vzdělávacích cílů. Mohou usnadnit nácvik numerace, procvičují aplikaci základních početních operací, rozvíjejí prostorovou představivost apod. Mohou přispívat k lepšímu vytváření pojmů, umožňují rozvíjet orientaci v rovině a v prostoru. V rámci vyučování pak plní především funkci motivační a mohou pomáhat v překonávání těžkostí při řešení úloh [13 s. 10].

Důležitou roli mají také ty matematické didaktické hry, které v sobě prolínají učivo z odlišných vyučovacích předmětů. Zahrnují tak mezipředmětové vztahy, které ničí blokované a oddělené osvojování si vědomostí, vedou k propojení obsahů učiva a vytváření systému souvislostí v mysli žáků.

Didaktické hry v matematice je možné rozčlenit dle různých hledisek [13 s. 12]:

a) podle funkce: vyučovací (učební) a kontrolní

b) podle počtu účastníků: kolektivní a individuální

c) podle reakce: pohybové a statické

d) podle tempa: rychlostní a kvalitativní

e) podle specifičnosti: specifické (jedinečné) a nespecifické (univerzální)

V rámci učebních her si žáci osvojují nové vědomosti a dovednosti, nebo dochází k jejich upevňování. Při kontrolních hrách žákům stačí dosud nabyté či dříve získané vědomosti. Kontroluje se, jak jim žáci dostatečně porozuměli.

Kolektivní hry jsou určené pro realizaci v rámci celého třídního kolektivu, kdy se všichni podílejí na společné aktivitě. Dalo by se říci, že mají silný socializační vliv. Žáci spolupracují a využívají své komunikační a organizační schopnosti. Naopak při hrách individuálních je do činnosti zapojen každý sám za sebe. Starší děti (především děti staršího školního věku) inklinují více ke kolektivním hrám, mladší žáci ještě nemají potřebu tolik kooperovat a raději dávají přednost hrám individuálním.

Pohybové hry jsou vhodnou formou kompenzace ve chvílích, kdy organismus po dlouhodobém sedění v lavici vyžaduje změnu. Jsou jednou z variant, jak vhodně propojit učení s nejpřirozenější potřebou dítěte – s pohybem. Hry statické (stolní či deskové) jsou svým charakterem zcela intelektuální. Je vhodné je zařazovat, když chceme přejít od jedné duševní práce ke druhé.

Didaktické hry v matematice můžeme rozdělit na dva druhy podle upřednostnění rychlosti postupu nebo kvality, kde rychlost nemá rozhodující úlohu. U těchto typů je potřeba rozlišovat, pro který druh aktivity hru zařazujeme. Pokud chceme, aby si žáci zautomatizovali některou matematickou dovednost (např. numeraci v oboru do dvaceti či pamětní osvojení si násobilky), je vhodnější využít první typ. Pokud však vybíráme úkol náročnější a chceme, aby se nad zadanou úlohou žáci zamysleli, je lepší zvolit typ druhý.

Dělení her je nutné brát pouze orientačně, seznam není vyčerpatelný. Zároveň není vhodné jednotlivé hry striktně zařazovat do jedné z dílčích kategorií, jelikož většinu her je možné zařadit do více kategorií.

Při zařazení didaktické hry do výuky matematiky je potřebné dodržovat některé zásady, které ve své publikaci [13 s. 10–11] velice přehledně uvádí Krejčová a Volfová:

1. Základní charakteristikou hry by měla být lákavost, přitažlivost a zábavnost.

2. Každá hra by měla svým obsahem odpovídat věkovým zvláštnostem a schopnostem každého dítěte, aby se mohla opravdu uplatnit motivace hrou. Hry s prvky tajemnosti a záhady jsou vhodné pro mladší žáky. Na druhou stranu hry s hlavolamy a rébusy uvítají spíše žáci starší (až po desátém roce věku). Žáci, kteří jsou slabší, hrají hry raději ve skupině, naopak žáci zdatnější a zpravidla i starší preferují hry individuální.

3. Pravidla hry musí být srozumitelná a jasná pro všechny žáky. V průběhu hry se musí hlídat jejich dodržování a za jejich porušení by měly být předem stanoveny tresty v podobě trestných bodů, hrozby vyloučení ze hry apod. Pravidla není vhodné u jedné hry příliš často měnit.

4. Hra musí být předem dobře zorganizovaná a materiálově zajištěná. Je potřeba připravit dostatečný počet pomůcek. Vhodnější je zařazovat hry, které jsou z těchto hledisek nenáročné.

5. Některé hry žáky upoutají až při opakované realizaci, jelikož si osvojí pravidla a mohou se tak zaměřit na samotný obsah. Není proto vhodné vytvářet a plánovat na každou vyučovací hodinu hru jinou.

6. Úlohou pedagoga je promýšlet, za jakým cílem hry do výuky zařazujeme, k čemu jsou přínosné. Hry nelze do výuky zařazovat náhodně. Stanovený cíl však není potřebné před hrou zdůrazňovat a připomínat.

7. Hry by se měl zúčastnit celý třídní kolektiv a každý žák by měl alespoň někdy zažít úspěch, aby ono samo nebo alespoň jeho družstvo zvítězilo. Může například správně připevnit písmeno na magnetickou tabuli, vybarvit obrázek, nakreslit cestu apod. Pokud dítě nikdy v hodinách matematiky nezažije úspěch, je možné, že si vytvoří k matematickému vzdělání negativní vztah. Někdy je vhodné si předem připravit lehčí či zjednodušené varianty úloh pro méně nadané žáky. Jde o to, abychom v nich vyvolali pocit radosti z úspěchu, pocit důvěry ve vlastní schopnosti.

8. Zařazujeme spíše hry, které působí na co nejvíce smyslů. Dítě totiž nejlépe vnímá, pamatuje a myslí všemi smysly.

Znát zásadní didaktické požadavky, které podmiňují to, aby hra celkově pozitivně působila, jistě není na škodu. Přesto však vždy více záleží na osobnosti učitele, jeho citlivosti, vnímavosti a obezřetnosti. Pedagog, který své žáky dobře zná, pravděpodobně nezařadí do výuky hry, jež neodpovídají jejich věkovým zvláštnostem a schopnostem. Stejně tak by si měl učitel všimnout, že některý žák je neustále flustrován neúspěchy a adekvátně na to reagovat. Stačí okamžik radosti z vyřešení úlohy nebo rozluštění hádanky, který ihned pozitivně ovlivní citovou a emoční stránku žáka a motivuje ho to k opakování činnosti. Zároveň pokud je patrné, že hra v daném kolektivu nefunguje, žáky nudí, zvrhne se a je nekontrolovatelná nebo třídní nekázeň ruší její účinek (neboť v dnešní době již není heslo „Kdo si hraje, nezlobí." obecně platné), je na místě, aby ji učitel co nejdříve ukončit.

Bez didaktických her se vyučování matematice na 1. stupni základních škol neobejde. Někdy se můžeme setkat s názorem nezasvěcených osob do pedagogické činnosti, že hry a zábava s nimi spjatá do školy ve větší míře nepatří, že odvádí mysl žáků od řádného učení a nic kloudného kromě rozptýlení jim nepřináší. Na tento názor je vhodné argumentovat, že si nelze plést didaktickou hru s nevázanou legrací. Didaktické hry se ve výuce nepoužívají, aby žáka pobavily, ale integrují motivy hry a učiva takovým způsobem, že se nenásilně docílí poznávacího efektu. Při správném provedení si žák ani sám nemusí uvědomovat, že si osvojuje učební látku.

Pokud je didaktická hra do hodiny matematiky vhodně zařazena, stane se dobrou motivací a vyvolá nejen radost z aktivity, ale může i vytvořit nebo prohloubit zájem o matematiku. Tím se formuje vztah žáka k této exaktní vědě a ovlivňuje to jeho budoucí profesní orientaci.

4.4 Kombinatorické didaktické hry

Při studiu odborné literatury, jsem se nikde nesetkala s definicí kombinatorické didaktické hry. Dovolila jsem si proto zkomponovat definici vlastní, která se zakládá na poznatcích získaných studiem obecných definic didaktické hry:

Kombinatorické didaktické hry jsou takové uvědomělé a seberealizační činnosti žáků, které mají svá daná pravidla, svůj specifický obsah i způsob provedení, mají silný motivační charakter a sledují tyto didaktické cíle: rozvoj kombinačního myšlení, logického myšlení a strategických postupů.

Kombinatorické didaktické hry včleněné do hodin matematiky na 1. stupni ZŠ rozvíjí kromě kombinačního a logického myšlení také komunikační schopnosti v tomto oboru, pomáhají dětem nacházet různé alternativy řešení úloh a přijmout jiný pohled a názor na způsoby řešení. Kombinatorické problémy v úlohách skryté se tak začnou podobat hře, ve které se prvky určité skupiny dají složit různými způsoby. Tyto problémy nabádají ke zkoumání velké množiny možných řešení, za účelem nalezení správného řešení (jednoho či více), které vyhovuje zadaným podmínkám.

Přínos kombinatoriky pro rozvoj osobnosti dítěte jsem uvedla už výše. Jen bych ještě dodala, že řešení kombinatorických problémů má pomoci žákovi orientovat se nejen ve světě matematiky (vytváření matematických představ, pochopení obecných matematických pojmů a jejich vzájemných souvislostí apod.), ale i ve světě vůbec.

5 Desková hra

5.1 Vymezení pojmu

Definovat pojem deskové hry, najít všechny společné rysy těchto her a ty zobecnit, není zcela snadné, jelikož jednotlivé deskové hry se od sebe liší nejen pravidly a pomůckami k nim potřebnými, nýbrž především svou podstatou. Zapletal uvádí, že *je to druh stolních her, který se od jiných liší tím, že herní děj probíhá na zvláštním plánu prostřednictvím hracích kamenů* [28 s. 7].

V deskových hrách stojí většinou dva hráči (či více hráčů) proti sobě a jsou motivováni touhou soupeře porazit a dosáhnout tak vítězství. Vše se přitom odehrává pouze v rovině symbolické. Hráči se při deskových hrách ocitají v různých rolích, ze kterých po posledním tahu hracího kamene odcházejí s nálepkou výhry či prohry. Snášet pocit vítězství nebo porážky se děti postupně učí. V průběhu deskové hry zažívají různé emoce (pozitivní i negativní), se kterými se musí vyrovnat a učí se tak i sebeovládání. Často se pak na jedné straně můžeme setkat s jásavou radostí nebo s tesklivým pláčem na straně druhé. Je zřejmé, že je to pro osobnost hráče v obou variantách přínosné. V životě člověk může někdy vyhrát, jindy se musí vyrovnat s porážkou [28 s. 7–8].

I to, že se při deskových hrách musí dodržovat jistá pravidla, žáky v mnohém rozvíjí. Hry s pravidly dle Chauvelové a Michelové [10 s. 11] dítěti umožňují:

Z hlediska citového

- přesunout pozornost z prožívání situace pouze vlastní osobou na vnímání situace z pohledu soupeře, a tím získat důležitou schopnost předvídat jeho reakce (převážně se dá tato schopnost využít při strategických hrách),
- prožívat vzájemný soulad a spolupráci a na druhé straně i nesouhlas a rivalitu,
- vnímat a dodržovat pravidla (ne jen na základě nařízení dospělého, ale může je samo veřejně hlásat),
- navazovat nové přátelské vztahy založené na společném akceptování ustanovených dohod, bez nichž se žádná hra neobejde.

Z hlediska motivačního

- ocenit vlastní schopnosti a dovednosti a využívat značné motivace k jejich rozvoji,
- zdokonalovat se ve zručnosti a v dovednosti vymýšlení vlastních her.

Z hlediska poznávacího v operační oblasti

- osvojovat si tzv. „*prenumerické*" dovednosti jako je hledání různých vztahů, třídění a uspořádání,
- rozvíjet smysl pro časové a prostorové vnímání,
- osvojit si základy logiky a řešit jednoduché problémy, v rámci nichž dochází k hledání vhodných strategií.

Deskové hry jsou zkrátka užitečné pro život tím, že rozvíjejí mentální předpoklady, racionální úsudek a emoční kontrolu, posilují charakter a v neposlední řadě také podporují rozhodování se v konfliktních situacích.

5.2 Druhy deskových her

Podle vnitřního obsahu her, herního děje a hlavních úkolů hráčů je možné deskové hry rozřadit do těchto kategorií [28 s. 12]:

1. Strategické hry

Hra spočívá v boji dvou či několika znepřátelených protichůdných stran. Sem můžeme zařadit hry, při kterých se kameny různé barvy vzájemně zajímají. Zajaté figurky se sundají z herního plánu nebo na desce znehybní či si je soupeř převezme a využije je pro svůj účel. Hra končí, když na herním plánu zůstanou figurky pouze jednoho z hráčů, když se jedna strana vzdá nebo když dojde k remíze (strany se dohodnou na nerozhodném výsledku).

2. Závodivé hry

Při závodivých hrách je úkolem hráčů přejít se svými herními kameny určitou cestu a přijít do cíle dříve než soupeř. Závod může být spojený s bojem, jenž nemá zásadní význam. Jindy mohou soupeři překonávat společné překážky či jejich rychlost závisí na náhodě a troše štěstí, čímž se hra stává dramatickou.

3. Poziční hry

U pozičních her spolu hráči nezávodí ani nesoupeří. Snaží se pouze manipulovat s kameny na herním plánu za účelem vytvoření určité konfigurace. Také se mohou snažit splnit úkoly, na základě jejichž uskutečnění mohou vyhrát nebo získat odměnu.

4. Pátrací hry

V rámci těchto her hráči luští a řeší daný problém nebo po něčem pátrají.

5.3 Kombinatorické deskové hry

Skálová ve své přednášce [22 s. 2] uvádí, co musí hra splňovat, abychom ji nazvali kombinatorickou:

1. Hru hrají vždy dva hráči proti sobě.

2. Hráči se v tazích pravidelně střídají. Hráč by neměl vynechat tah (pokud není v pravidlech uvedeno jinak).

3. Je stanoveno velké množství pozic, ve kterých se hra může nacházet. Základní pozice, ve které hra začíná, se nazývá startovní. Druhé základní pozici se říká koncová. Při ní hra končí buď remízou, nebo výhrou jednoho a prohrou druhého hráče.

4. Pravidla hry stanovují pro každého hráče všechny povolené tahy z každé pozice.

5. Náhodné prvky se ve hře neobjevují.

6. Hráči mají kompletní informaci.

7. Hráči jsou racionální.

Můžeme se ještě setkat s podmínkou, že hra má být konečná. Tedy by měla skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají. Někdy se také nedovoluje možnost remízy. Spojením s podmínkou konečnosti pak můžeme říci, že hra musí být nutně ukončena vítězstvím jednoho z hráčů [22 s. 2].

Při kombinatorických hrách je podstatné, aby si žáci dokázali vytvořit svou vlastní strategii hry, která je dovede k zdárnému výsledku. Často se také ukazuje, že nejde jen o vytvoření strategie své, ale je moudré zaměřit se na vnímání taktiky soupeře. Podle jeho způsobu hry lze přizpůsobit postup vlastní. To je u mnoha her ta pravá cesta k úspěchu.

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry. Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče. [22 s. 2].

Je zřejmé, že strategie jednotlivých hráčů se liší. Závisí totiž na mnoha faktorech jako je věk, vyspělost logického a strategického myšlení, zdravotní stav, ale také pochopení pravidel hry, motivace apod. Ta strategie, která je v závislosti na pravidlech hry shledána jako lepší dovede svého nositele k vítězství.

Vyhrávající strategii můžeme definovat jako takovou taktiku hráče, která ho dovede k vítězství bez závislosti na tom, jak chytře hraje jeho protihráč, tj. bez ohledu na soupeřovu strategii. [22 s. 2].

Učitelům by při aplikaci kombinatorických didaktických her ve vyučování v zásadě nemělo jít o výsledek hry jako takové, tj. určení vítěze a prohraného. Jde totiž především o proces hry - o rozvíjení logického a kombinačního myšlení, o vytváření strategií v myslích žáků, o poznávací proces v obecném slova smyslu. Zásadní také je, že kombinatorická hra spojená se soutěživostí má pro žáky silný motivační charakter. Vítěz je pochválen a má touhu hrát opakovaně. Prohraný může být hnán silou pokusit se dosáhnout vítězství na druhý pokus nebo soupeři prohru oplatit.

PRAKTICKO-VÝZKUMNÁ ČÁST

Obsahem praktické části je vytvoření souboru didaktických her s potenciálem rozvíjet kombinační a logické myšlení žáků na 1. stupni základních škol. Na úvod čtenáře s jednotlivými sedmi kombinatorickými didaktickými hrami, které mají blízko k hrám deskovým, blíže seznamuji. Uvádím i informace o procesu jejich tvorby a pilotní realizaci. Následně poskytuji informace o tvorbě podkladů pro experimentální šetření, tj. vstupních, výstupních testů a dotazníků.

Výzkumná část práce je zaměřena na ověření účinnosti souboru didaktických her v praxi, resp. na 1. stupni ZŠ. Nejprve stanovuji výzkumné předpoklady, a poté uvádím nezbytné informace o experimentální základní škole a třídě, kde šetření proběhlo. Navazuji detailním popisem průběhu realizace experimentu a uvádím stručnou charakteristiku realizace didaktických her spojenou s reflexemi.

Dále uvádím vyhodnocení vstupních, výstupních testů a dotazníků, kde sděluji informace nezbytné k zjištění účinnosti didaktických her. Nedílnou součástí výzkumné části jsou kazuistiky zkoumaných žáků třetího a čtvrtého ročníku, zaměřené na mapování úrovně kombinačního myšlení žáků na začátku i na konci experimentu a sledování rozvoje jejich řešitelských strategií. Kazuistiky jsou doplněny úryvky z rozhovorů s žáky a ilustračními ukázkami řešení vybraných úloh z testů. Na závěr vyhodnocuji výzkumné předpoklady a objasňuji výsledky celého experimentálního šetření.

6 Soubor kombinatorických didaktických her

V této kapitole bych ráda představila soubor sedmi didaktických her, jejichž jsem autorem. Hry jsou navrženy tak, aby rozvíjely logické, strategické a kombinační myšlení – především vnímání určitých vztahů, které jsou pro kombinatoriku podstatné (tj. opakování prvků a uspořádání prvků). Žáci si na základě uvědomění podstaty uspořádaných a neuspořádaných skupin a možnosti opakování či neopakování prvků v daných skupinách vytvářejí předpoklad pro pozdější práci s kombinatorickými pojmy (tj. permutace, variace a kombinace s i bez opakování). Proto je tyto didaktické hry možné chápat jako propedeutiku ke studiu kombinatoriky, resp. porozumění základním principům a vztahům kombinatoriky a jejich vědomému využívání při řešení kombinatorických úloh a problémů.

V myslích žáků se totiž při realizaci her vytváří poznatková struktura, na kterou budou moci v dalším studiu navazovat. Až budou žáci v pozdějším věku (na střední škole) obeznámeni s výše uvedenými abstraktními pojmy, které jsou s kombinatorikou spjaté, budou moci konkrétní poznatky uchované v paměti posunout do fáze abstrakce. Nepůjde tedy pouze o bezmyšlenkové a pamětné učení se vzorcům bez pochopení podstaty jejich aplikace, ale žáci budou rozumět, proč volí zrovna variaci a ne kombinaci nebo proč u permutace použijí výpočet s opakováním prvků místo bez opakování. Budou mít tu výhodu, že zákonitostem, vytváření (ne)uspořádaných skupin vybraných z předem dané konečné množiny s opakováním či neopakováním prvků, porozuměli už jako žáci prvního stupně základní školy.

Jako vhodnou výukovou metodu pro úvodní seznámení se s kombinatorikou jsem zvolila didaktické hry, jelikož jsem vycházela z poznatku, že prostředí her je pro proces učení nejlepší. Z vlastní zkušenosti vím, že pokud se žáci v rámci výuky potkají s kombinatorickými úlohami, řeší je často jen za pomocí papíru a tužky. Dle mého názoru je však vhodné evidenci získaných možností pomocí papíru a tužky propojit s manipulací s předměty. Své hry jsem tak vytvořila čistě manipulační. Avšak u některých her se objevují navazující aktivity, kde žáci papír a tužku také využijí.

Hry jsou založené na konstruktivním přístupu k učení, na vlastní poznávací aktivitě žáků a na jejich spoluúčasti ve vyučování. Děti jsou při mých sedmi didaktických hrách aktivní, pracují s herními pomůckami a podílejí se na procesu učení.

Jelikož na prvním stupni základního vzdělávání ještě převažuje vnější motivace nad motivací vnitřní, snažila jsem se o to, aby herní pomůcky k příslušným hrám byly co nejvíce stimulující, aby žáci měli chuť je vzít do rukou, prohlédnout si je a manipulovat s nimi. Každá hra je vždy realizována na herním plánu, který jsem sama navrhla a vytvořila. Další součástí her jsou pestré, z části autentické, herní kameny a kartičky. K hrám *Zahrada tulipánů* a *Válka živlů* jsem vytvořila kresby herních kamenů, podle kterých byly vyrobeny ze dřeva. Nezbytnou součástí některých her jsou i figurky a šestihranné hrací kostky ze známé hry „*Člověče, nezlob se*“. Veškeré herní pomůcky je možné zaměnit za materiál, který je běžně k dostání. Je možné je nahradit víčky od pet lahví, kusy stavebnice, dřevěnými kostkami, hranatými korálky apod.

K podnícení zájmu ke každé hře jsem využila motivační pohádky. Úvodní příběhy, vztahující se tématem k jednotlivým hrám, mají uvést žáky do děje a motivovat je ke splnění úkolu, ke kterému při hraní hry směřují. Snažila jsem se je napsat tak, aby byly vhodné k ústnímu projevu. Učitel by je měl žákům přednášet a tím si získat jejich pozornost. Do příběhů zařazuji otázky, které mají přimět žáky k reakci. Učitel tak získává od dětí bezprostřední zpětnou vazbu a může kontrolovat, zda žáci poslouchají. Jde také o propojení předmětu matematiky s českým jazykem. Motivační pohádka v sobě zahrnuje porozumění danému textu, pochopení její podstaty a zapamatování si některých informací z ní.

Didaktické hry jsou vytvořeny tak, jak je už u začlenění motivačních pohádek do fáze motivace zřejmé, aby v sobě zahrnovaly mezipředmětovou složku. Žáci získají znalosti nejen z oboru matematiky a českého jazyka, ale i z oblasti fyziky, přírodovědy a zeměpisu.

Každá hra má přesně daná pravidla. Při vymýšlení pravidel her se často stane, že se najdou skulinky, které nejsou doladěné. Teprve aplikací je možné je objevit a opravit či upravit. Pravidla jsem proto postupně upravovala na základě hraní her s dětmi ve svém rodinném prostředí.

Prostřednictvím těchto her, které jsou určeny k hraní ve dvojici či ve skupině, dochází k upevňování sociálních vztahů. U žáků rozvíjí schopnost dodržovat pravidla, hrát spravedlivě, adekvátně přijmout porážku či výhru a respektovat osobnost spoluhráče. Dále vytvářejí podklad pro rozvoj trpělivosti, kooperace a komunikačních dovedností.

Hry je nutné provádět s žáky, kteří mají již osvojeny základní informace v oboru primární matematiky. Je důležité, aby žáci již chápali význam daných čísel a dokázali si ho spojit s množstvím. Další podmínkou je dokonalé ovládání prvních aritmetických operací, jako je sčítání a odčítání čísel v oboru do dvaceti a poté do sta. Proto jsou hry určeny dětem až od 2. ročníku ZŠ.

Každá hra v sobě obsahuje různé modifikace, za účelem jejich přizpůsobení věku, počtu i individuálním předpokladům žáků. Jednotliví učitelé mají možnost je upravit tak, aby byly aplikovatelné v jejich konkrétních třídách. Zároveň je u her možné postupně zvyšovat či snižovat obtížnost.

Hry lze realizovat ve školním prostředí při klasické hodině matematiky. Jejich časová dotace je přizpůsobená trvání jedné vyučovací hodiny (výjimečně dvěma vyučovacím hodinám). Lze je však uplatnit také v rámci bloku či projektového vyučování, a zároveň je možné jimi obohatit pobyt ve školní družině.

Následuje podrobný popis jednotlivých her. U každé hry uvádím její obecnou charakteristiku a cíle, které jí sledujeme. Následně představuji motivační pohádky, uvádím výčet pomůcek nezbytných k realizaci a na závěr popisuji pravidla jednotlivých her.

6.1 Duha

Jedná se o hru manipulační, kdy žáci posouvají figurky z původního barevného uspořádání, podle jimi zvolené strategie, dle daných herních pravidel, za účelem co nejrychlejšího dosažení původního barevného uspořádání figurek na druhé straně herního plánu.

Cíl:

- žák si uvědomuje, že záleží na uspořádání prvků, resp. že skupiny jsou uspořádané
- žák se snaží uspořádat prvky do řady, přičemž záleží na pořadí prvků v řadě
- žák vytváří všechna možná uspořádání množiny prvků bez opakování i s opakováním (permutace bez opakování i s opakováním)
- žák využívá různé strategie a možnosti řešení
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace:

S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma déšť. Dáváme jim cílené otázky: *„Proč je déšť pro život na Zemi důležitý? Co je na dešti hezkého? Co se stane, když svítí slunce a zároveň prší? Vznikne duha. Viděli jste někdy někde duhu? Jak taková duha vypadá? Kolik má barev?"* Dětem můžeme ukázat obrázek duhy. Duha má od vnějšího kraje ke kraji vnitřnímu červenou, oranžovou, žlutou, zelenou, modrou a fialovou barvu.

Motivační pohádka

Byl jednou jeden moudrý vědec. Jak to tak u vědců bývá, tito učení lidé často stráví celý svůj život zkoumáním a objevováním. A pak se stane, že opravdu vynaleznou nový lék, který lidem pomůže vyléčit se z těžké nemoci, nebo třeba nějaký stroj, který lidem usnadní práci. Tento náš vědec také nad něčím bádal. Byl totiž přímo očarován pestrostí duhy. Rád se na ni díval, když zářila svými krásnými barvami na obloze. Proto vymýšlel způsob, jak by tento duhový barevný oblouk přenesl z oblohy k sobě na zem. To by se pak na ni mohl dívat celý den pěkně zblízka, než by mu zmizela.

Věděl, že duha vzniká v okamžiku, když svítí slunce a zároveň prší. Sluneční paprsky osvětlují padající dešťové kapky. Světlo se v kapkách zlomí, rozloží a odrazí. Na opačné straně než září slunce, vzniká duha. Jak ale přesunout takovou duhu z nebe na zem? Lámal si nad tím hlavu již několik let.

Až jednoho dne se stalo něco neočekávaného. Našeho milého vědce napadlo, že si duhu jednoduše chytí a přemístí si ji tam, kam bude chtít. Co myslíte, podařilo se mu to? Jistě, že ano. Když se jednoho slunečného dne po krátké přeháňce duha objevila nízko na obloze, chytil ji za okraj a stáhl ji z nebe na zem. Když ji však chtěl odnést s sebou, zjistil, že je pro něho velice těžká. Víte, taková duha přeci jenom něco váží. Potřeboval by pomocníky. Pomůžeme mu? Pokusíme se duhu přemístit z jednoho místa na druhé. Komu se to povede rychleji?

Pomůcky: herní plán, červená, oranžová, žlutá, zelená, modrá a fialová figurka, pastelky, papíry; (viz obr. č. 1)

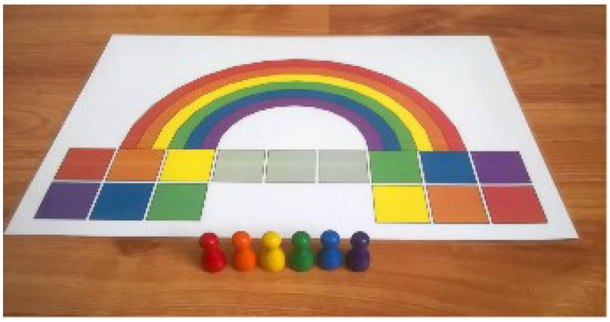
Pravidla hry: Hru hrají dva hráči proti sobě. Každý z nich má po třech figurkách odlišných barev. Jeden hráč má červenou, oranžovou a žlutou figurku. Druhý hráč má fialovou, modrou a zelenou figurku. Tak jak je vidět na obr. č. 2, se na herní plán postaví figurky v daném barevném uspořádání (od konce herního plánu: fialová, modrá, zelená) a naproti nim opět tři figurky odlišného barevného uspořádání (od druhého konce herního plánu: červená, oranžová, žlutá). Vznikne tak duha. Hráčům vysvětlíme, že figurkami se postupuje přímo vpřed, tj. směrem k protihráči. Pokud však figurky nemohou dále postupovat kupředu, smějí táhnout nazpět. Hráči se střídají a postupují s figurkami vždy o jedno pole. Figurky se zároveň mohou přeskakovat. Přeskočit lze soupeřovu figurku i figurku vlastní. Pokud jeden z hráčů nemůže táhnout ani jedním směrem (vpřed či vzad), o svůj tah přichází a hraje dál jeho soupeř. Vítězí ten hráč, který jako první obsadí 3 výchozí pole protivníka (přesune část své duhy na druhou stranu herního plánu), přičemž musí být jeho figurky ve správném barevném uspořádání (viz obr. č. 3).

Ať už se duha objeví kdekoli, má vždy dané pořadí barev, které se nemění. Je tedy důležité žákům vysvětlit, aby byly figurky na konci hry ve stejném barevném uspořádání, jako byly na začátku hry. Změní tedy jen svou polohu (např.: barevná řada – fialová, modrá, zelená, kde fialová je na kraji herního plánu se přesune na druhou polovinu herního plánu, přičemž výsledná řada bude opět v pořadí fialová, modrá, zelená, kde fialová bude opět na kraji herního plánu, avšak na druhé straně) – viz srovnání obr. č. 2 a č. 3. Děti tedy tvoří z figurek barevné uspořádání, kde záleží na pořadí barev v řadě. Barvy v řadě se zároveň nemohou opakovat.

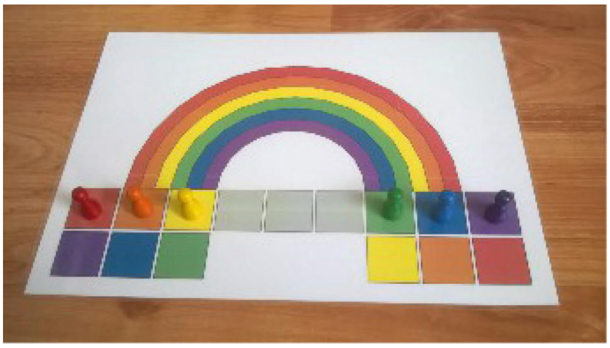
Po skončení hry navazujeme otázkou: *„Co kdyby se při přesunu duhy její barvičky různě promíchaly? Pokuste se najít všechny možnosti, jak mohou jít tři různé barvy za sebou.“* Děti v malých skupinách (po třech nebo čtyřech) zkouší ze svých tří barev vytvořit různé možnosti, jak mohou jít barvy za sebou. Manipulují s barevnými figurkami a mohou si (v případě potřeby) pomocí tužky a papíru barevné kombinace kreslit na papír. Ze tří barev je možné vytvořit šest možností (Např.: U barev červená, oranžová, žlutá je možné vytvořit barevné kombinace: ČOŽ, ČŽO, OČŽ, OŽČ, ŽČO, ŽOČ = 6 možných řešení). Těžší variantou je vytváření barevných kombinací ze všech šesti barev. Výsledkem je třicet šest barevných kombinací.

V duze je každá barva pouze jednou. *„Co kdyby se však stalo, že by se nám jedna barvička zlomila v půli a vznikly by z ní barvy dvě? Jak by tedy mohla vypadat část duhy, kdyby měla jednu barvu dvakrát?“* (Např.: U barev červená, červená, oranžová, žlutá je možné vytvořit barevné kombinace: ČČOŽ, ČČŽO, ČOŽO, ČŽOČ, ČŽČO, ČOČŽ, OŽČČ, ŽOČČ, OČŽČ, ŽČOČ, OČČŽ, ŽČČO = 12 možných řešení).

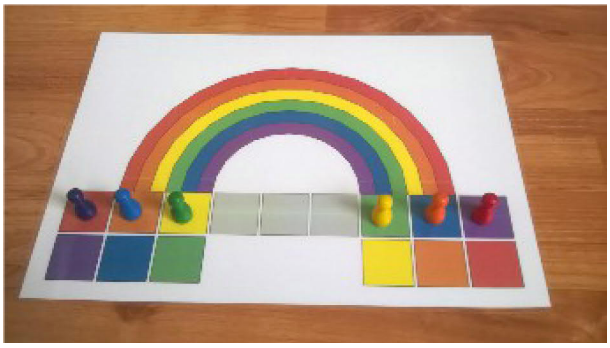
Pozn. Je zřejmé, že když jsou vedle sebe dvě stejné barvy (např.: ČČOŽ), získáme tříbarevnou duhu, která je však složená ze čtyř částí. Dětem je důležité říci, že nám nejde o to kolikabarevná duha vznikne, ale o to jak v ní mohou jít jednotlivé barvy za sebou.



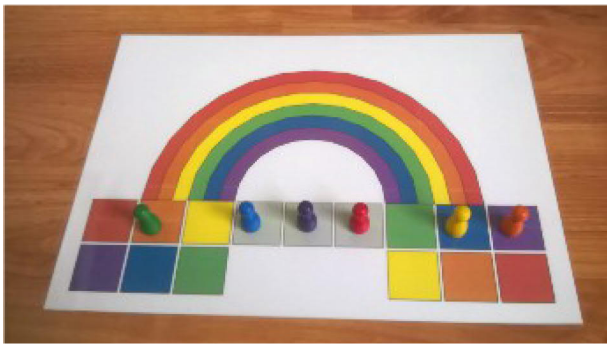
Obrázek 1: Duha – pomůcky



Obrázek 2: Duha – uspořádání figurek na začátku hry



Obrázek 3: Duha – uspořádání figurek na konci hry



Obrázek 4: Duha – průběh hry

6.2 Válka živlů

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci snaží, podle jimi zvolené strategie posouváním figurek, dle daných pravidel hry, ze hry vyřadit všechny soupeřovy figurky.

Cíl:

- žák si uvědomuje, že záleží na uspořádání prvků, resp. že skupiny jsou uspořádané
- žák hledá všechny možnosti, jak lze uspořádat některé své vlastní figurky kolem soupeřových figurek (jedné a více) přičemž záleží na pořadí figurek v řadě (variace s opakováním)
- žák využívá různé strategie řešení a způsoby, jak vyřadit soupeřovy figurky ze hry
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma, jaké známe živly (země, oheň, voda, vzduch). Navážeme otázkou: *„Jaká je voda ?“* (Např.: studená, mokrá, modrá, *...)* Voda je průhledná tekutina, která je nezbytná k životu. *„V jaké podobě se voda v přírodě nachází?“* (Např.: potůček, řeka, moře, oceán, déšť, kaluž, rosa, led, *...)* *„Jaký je oheň?“* (Např.: teplý, červenožlutý, hřejivý, *...)* Oheň je dobrý sluha, ale špatný pán. Povídáme si, kdy a jak oheň člověku pomáhá a kdy naopak škodí. Dětem můžeme ukázat vytištěné obrázky těchto dvou živlů (ohně a vody).

Motivační pohádka

V jedné vzdálené pohádkové zemi žily dva královské rody. První království leželo na vodní hladině rozlehlého jezera. Město zde bylo vybudováno přímo na vodní ploše. Všechny domy vypadaly jako by se na hladině vznášely. Královna této vodní říše žila v krásném modravém zámku. Její moc byla nesmírná. Vládla každé kapičce vody, každému potůčku, řece, jezeru či moři. Na druhém konci této země se rozprostíralo království ohně. Město bylo obehnáno kamennou zdí, kolem které ze všech stran sálal oheň. Král, který vládl této zemi, měl moc nad každým malým plápolajícím plamínkem i ohromným nespoutaným ohněm. Žil v rudém hradě v samém středu tohoto města, kde neustále panovalo strašlivé horko a žár. V které zemi byste, děti, chtěly žít?

Tyto dva odlišné národy žily spokojeně vedle sebe. Od pradávna mezi nimi panoval klid a mír. Až jednoho dne se vše změnilo. Král ohně si připadal velmi osamělý a rozhodl se, že se ožení. Poslal svého posla do vodního království ke královně s žádostí o ruku. Královna o tom přemýšlela. Nechtěla si krále znepřátelit. Když si ale představila, že by musela celý svůj život strávit v horku a žáru bez kapičky vody, královu žádost odmítla. Vládce ohně to velmi rozzuřilo a vyhlásil královně válku. Strhl se nespoutaný boj. Kdo asi vyhraje? Oheň nebo voda?

Pomůcky: herní plán (šachovnice 5×5 polí), 8 modrých herních kamenů (voda), 8 červených herních kamenů (oheň), papíry, červené a modré pastelky, černé fixy; (viz obr. č. 7)

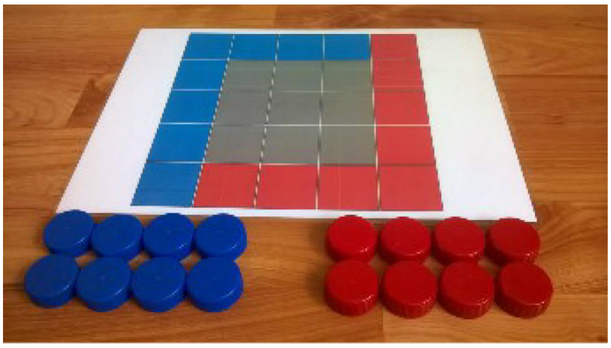
Pravidla hry: Hru hrají dva hráči. Každý hráč obdrží 8 herních kamenů (jeden hráč 8 modrých a druhý hráč 8 červených herních kamenů), které umístí dle obr. č. 8 resp. 9 na herní plán. Červené kameny představují oheň a modré vodu. Hráči je střídavě posunují vždy o jedno políčko ve vodorovném či svislém směru po herním plánu. Diagonální směr je zakázán. Zároveň přeskakování není povoleno. Herní kámen je zajat tehdy, když se ocitne v těsném sevření dvou kamenů protivníka na protilehlých stranách. Není tedy mezi nimi žádné volné pole a všechny tři kameny stojí v jedné přímce (viz obr. č. 10). Zajatý kámen vypadává ze hry (viz srovnání obr. č. 10 a č. 11). Oheň vypaří vodu či voda uhasí oheň. Stejným způsobem lze zajmout i řadu několika soupeřových kamenů, když na oba konce umístíme své herní kameny. Pokud tedy dojde k zajetí dvou soupeřových kamenů tak, že vznikne barevná kombinace př. ČMMČ nebo ČMČMČ (viz obr. č. 12 a č. 13), vypadávají ze hry oba modré herní kameny. Herní kámen nesmí sám vstoupit mezi dva soupeřovy kameny, pokud tak udělá, bude zajat a vypadává ze hry. Aby mohl být herní kámen zajat, musí stát všechny herní kameny vedle sebe v jedné linii. Proto nelze zajmout kámen, který stojí v rohu.

Žáci se tedy snaží uspořádat své dva kameny kolem soupeřových kamenů (jednoho i více). Vymýšlí, kolika různými způsoby to lze uskutečnit. Zároveň se snaží, aby jejich strategie byla rychlá a jejich tahy účelné. Prohrává ten hráč, kterému zůstává jeden poslední herní kámen (viz obr. č. 14). Vyhraje tedy buď oheň (červené herní kameny), nebo voda (modré herní kameny). Tak to chodí i v přírodě.

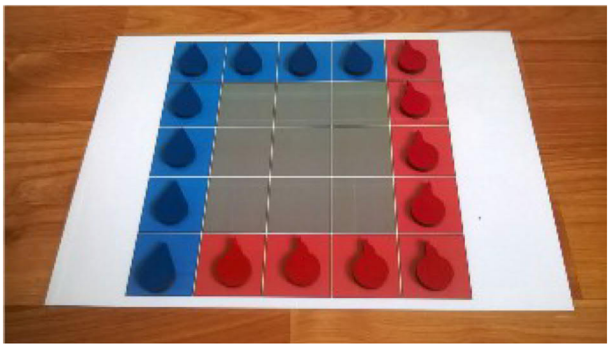
Po skončení hry navazujeme slovy: *„Při boji je veliký zmatek. Vezměte si do skupiny tři vojáky (dva kameny jedné barvy a jeden kámen druhé barvy). Vytvářejte z nich dvojice. Kolik je možných způsobů, jak mohou po dvou vedle sebe stát?“* Děti v malých skupinkách (po třech nebo čtyřech) manipulují s kameny a zjišťují, kolik je možných správných řešení. Je vhodné, aby si děti na dva kameny stejné barvy napsaly černým fixem čísla, kterými kameny od sebe rozliší. Kombinace si mohou zakreslovat na papír pomocí modré a červené pastelky s tím, že u dvou stejných barev uvedou i čísla. (Např: Pokud máme jeden červený kámen a dva modré kameny, můžeme vytvořit tyto barevné kombinace: $ČM_1 + ČM_2 + M_1Č + M_2Č + M_1M_2 + M_2M_1 =$ 6 možností) → *„Vezměte si do skupiny čtyři vojáky (dva kameny jedné barvy a dva kameny druhé barvy). Kolik různých trojic z nich můžete vytvořit?“* (Např.: Pokud máme dva červené kameny a dva modré kameny, můžeme vytvořit tyto barevné kombinace: $Č_1M_1M_2 + Č_1M_2M_1 + M_1Č_{1,}M_{2,} + M_2Č_1M_1 + M_1M_2Č_1 + M_2M_1Č_1 + Č_2M_1M_2 + Č_2M_2M_1 + ... =$ 24 možných řešení)

Obrázek 5: Válka živlů – herní kameny (plamínky a kapičky)

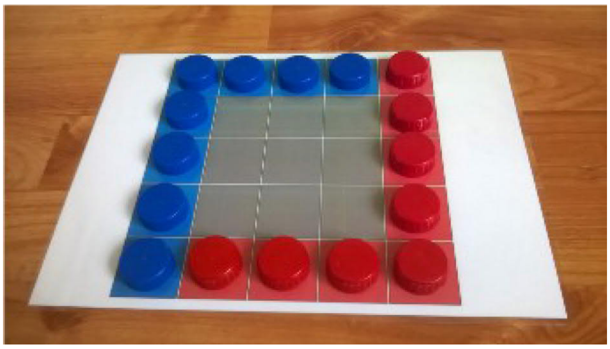
Obrázek 6: Válka živlů – herní kameny (víčka)



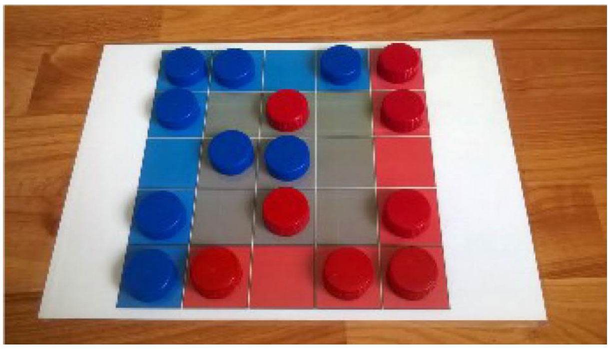
Obrázek 7: Válka živlů – pomůcky



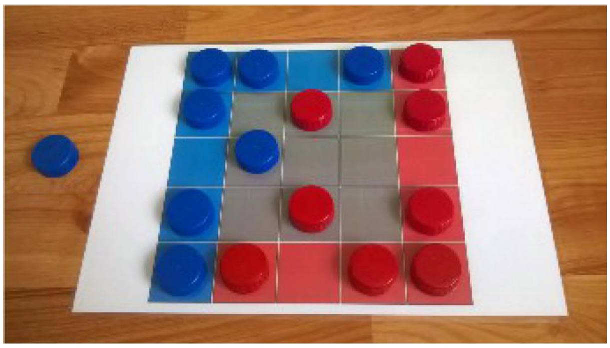
Obrázek 8: Válka živlů – uspořádání herních kamenů na začátku hry



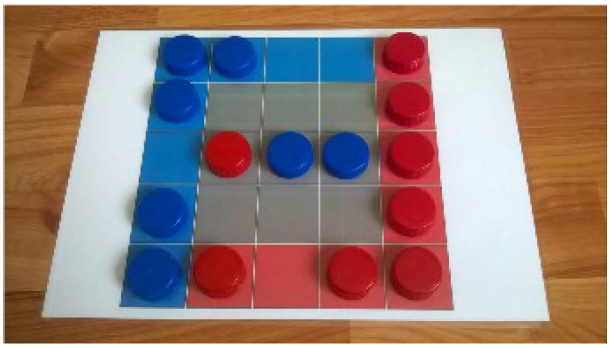
Obrázek 9: Válka živlů – uspořádání herních kamenů na začátku hry (s víčky)



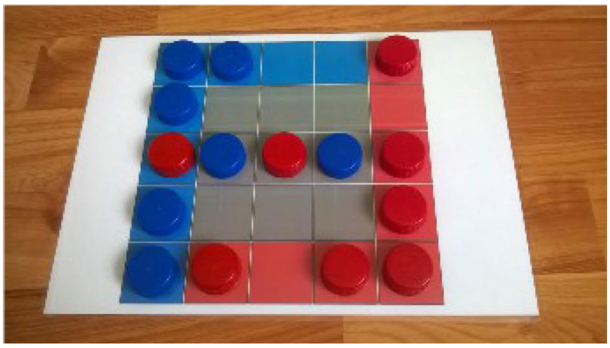
Obrázek 10: Válka živlů – zajmutí modrého herního kamene dvěma červenými



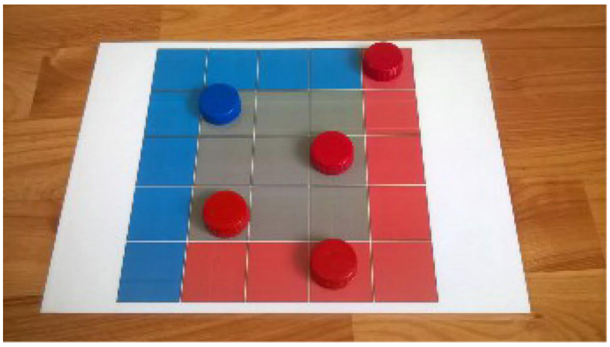
Obrázek 11: Válka živlů – odejmutí modrého herního kamene z herního plánu



Obrázek 12: Válka živlů – zajmutí dvou modrých herních kamenů dvěma červenými



Obrázek 13: Válka živlů – zajmutí dvou modrých herních kamenů třemi červenými



Obrázek 14: Válka živlů – konec hry

6.3 Zahrada tulipánů

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci snaží podle předlohy na kartičce, svou zvolenou strategií a co nejrychleji, sestavit řadu barevných kamenů na herním plánu.

Cíl:

- žák si uvědomuje, že při tvoření barevné řady záleží na pořadí prvků
- žák rozlišuje, zda se některé prvky v řadě mohou či nemohou opakovat (variace s opakováním i bez opakování)
- žák vytváří různé strategie a možnosti řešení
- žák se snaží odhadnou strategii řešení soupeře, podle níž usměrňuje strategii svou
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma, co se děje s přírodou na jaře (otepluje se, taje sníh, začínají růst první jarní květiny, ...). Navážeme otázkou: „*Jaké znáte jarní květiny*?“ (Např.: sněženka, bledule, petrklíč, tulipán, ...)

Motivační pohádka

Budu vám vyprávět příběh o jedné daleké zemi. Studená voda Severního moře omývá její břehy a šplouchá na pobřeží v podobě blankytných vlnek. Na pevnině se zde rozprostírají široké lány polí, lesů a zahrad. Příroda je tu čistá a nádherná. Silný a studený západní vítr roztáčí kola větrných mlýnů a kam se lidské oko podívá, leží pestrobarevné zahrady různorodých tulipánů. Lidé se tu věnují zemědělství, chovu dobytka a výrobě dřeváků. Vyrábí také lahodné sýry, které nikde jinde ve světě nenajdete. Ptáte se, o jakou zemi se jedná? Jistě, je to Holandsko.

A v této zemi se odehrává naše vyprávění. Král této mírumilovné země měl velmi rád krásu rozkvetlých tulipánů. Jeho královské zahrady se mohly pyšnit nejrůznějšími druhy a barvami těchto jarních květin. Rád se procházel mezi zahradami, kde každá řada tulipánů měla jinou barvu. Byly rudě červené, pomněnkově modré, zlatavě žluté, smaragdově zelené i bílé jako první sníh. Za ranních východů slunce či za pozdních teplých večerů brouzdal mezi záhonky, obdivoval nesmírnou krásu tulipánů a vdechoval jejich rozmanitou vůni. Víte, kdo se o všechny tyto květiny musel starat, aby krásně kvetly? To se ví, přeci mnoho šikovných zahradníků.

Jednoho teplého dne, když se tak král procházel zahradami, napadlo ho, že by bylo jistě velmi nádherné, kdyby se barvy tulipánů mezi sebou v barvách duhově promíchaly.

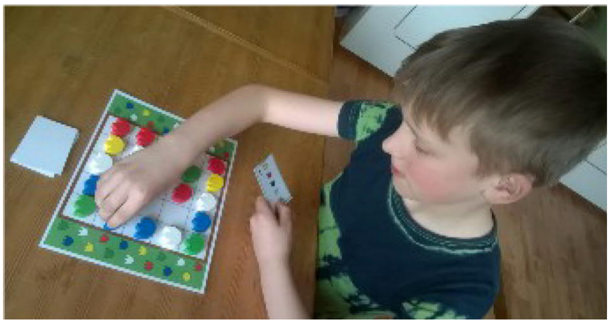
„Mít každou řadu jedné barvy, to už se mi nelíbí," pomyslel si. Zavolal si tedy všechny zahradníky ve své zemi a poručil jim, aby do královské zahrady zasázeli řady tulipánů v co nejvíce barevných kombinacích. Kdo bude pracovat nejrychleji a jeho práce bude odpovídat požadavkům krále, stane se vrchním zahradníkem a jeho sláva bude známá po celém Holandsku. My si teď na takové zahradníky zahrajeme. Kdopak z nás se stane vrchním zahradníkem?

Pomůcky: herní plán (šachovnice 5×5 polí), 4 žluté, 4 zelené, 4 modré, 4 červené a 4 bílé hrací kameny ve tvaru tulipánových květů, 15 kartiček s barevnými květy tulipánů a bodovým ohodnocením – 5 karet s jedním bodem, 3 karty s dvěma body, 3 karty s třemi body, 2 karty se čtyřmi body a 2 karty s pěti body; (viz obr. č. 15)

Pravidla hry: Hru mohou hrát dva až čtyři hráči. Barevné kameny rozmístíme na herní plán. Pokládáme je do řady vedle sebe v tomto pořadí: zelená, modrá, bílá, žlutá, červená. Vždy dvě řady na krajích herního plánu jsou obsazeny kameny, prostřední řada zůstane volná (viz obr. č. 18). Vedle herního plánu umístíme karty lícem dolů, kde karty s jedním bodem budou navrchu a karty s pěti body úplně vespod (viz obr. č. 18). Každé dítě si vezme z hromádky jednu kartu (vzor barevných tulipánů). Nesmí ji soupeřovi ukázat. Následně děti posouvají vždy jeden herní kámen ve směru dopředu, dozadu i diagonálně. V tazích se děti střídají. Pokud jedno dítě táhne kamenem, může druhé dítě stejný kámen v tahu hned po soupeři posunout dál. Zakázáno je však posunout daný kámen ihned po soupeřově tahu na původní místo, ve kterém byl kámen před tahem soupeře. Úkolem dětí je sestavit z herních kamenů barevnou řadu totožnou s barevnými tulipány na kartičce. Řady se mohou na herním plánu vytvářet svisle, vodorovně i diagonálně (viz. obr. č. 19, č. 20 a č. 21). Když se jednomu z hráčů podaří řadu sestavit, řekne slovo: „*mám*" a ukáže soupeřovi kartičku i řadu na plánu, kterou sestavil, aby to mohl soupeř zkontrolovat. Poté si položí kartičku vedle sebe na lavici a vezme si další. Postupně si děti berou kartičky s odstupňovanou obtížností. Karty s jedním a dvěma body mají každou barvu tulipánu jen jednou. Karty se třemi body mají jednu barvu tulipánu dvakrát. Karty se čtyřmi body mají dvě barvy tulipánů dvakrát a karty s pěti body mají jednu barvu tulipánů dokonce třikrát. Každý hráč postupuje vlastním tempem. Na konci hry, kdy má každý hráč jednu kartu v ruce a v balíčku již žádné karty nejsou, záleží na tom, kdo jako první poslední řadu sestaví. Druhý pomalejší hráč musí následně kartu odložit, protože se do celkového počtu bodů nezapočítává z toho důvodu, že řada nebyla sestavena. Děti si sečtou body na kartičkách. Vyhrává hráč s vyšším počtem získaných bodů.

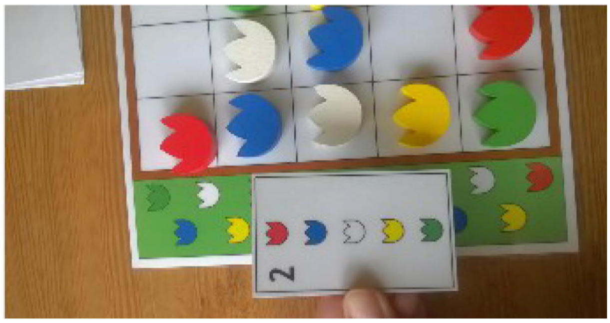
Obrázek 15: Zahrada tulipánů – pomůcky

Obrázek 16: Zahrada tulipánů – kartičky



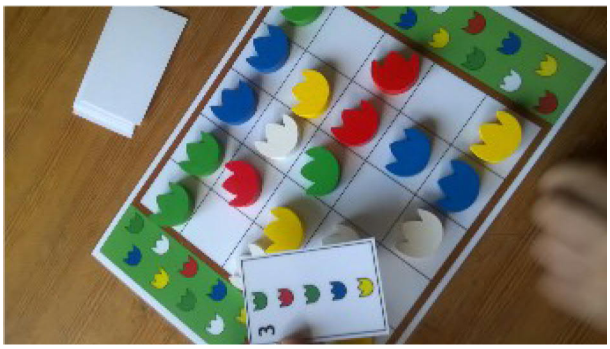
Obrázek 17: Zahrada tulipánů – průběh hry

Obrázek 18: Zahrada tulipánů – uspořádání pomůcek na začátku hry



Obrázek 19: Zahrada tulipánů – sestavení barevné řady svisle

Obrázek 20: Zahrada tulipánů – sestavení barevné řady vodorovně



Obrázek 21: Zahrada tulipánů – sestavení barevné řady diagonálně

6.4 Důl drahých kamenů

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci snaží nasbírat co nejvíce různě barevných drahých kamenů za účelem jejich kombinace, aby získali diamant.

Cíl:

- žák vnímá, chápe a užívá kombinaci prvků podle daných pravidel směňování
- žák vytváří různé strategie a možnosti řešení (kombinace drahých kamenů)
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma, jaký je rozdíl mezi horninou a minerálem (Minerály jsou přírodní krystalické látky a horniny jsou z minerálů tvořeny. Např.: Horninou můžeme nazvat žulu, která se skládá ze tří minerálů – z živce, křemene a slídy.). Mezi minerály patří drahé kameny neboli drahokamy a polodrahokamy. Drahý kámen je cenný a vzácný minerál. Má krásný lesk nebo barvu. „*Znáte nějaké drahé kameny*?“ Ukážeme žákům na obrázcích křemen, granát, smaragd, safír, rubín a diamant.

Motivační pohádka

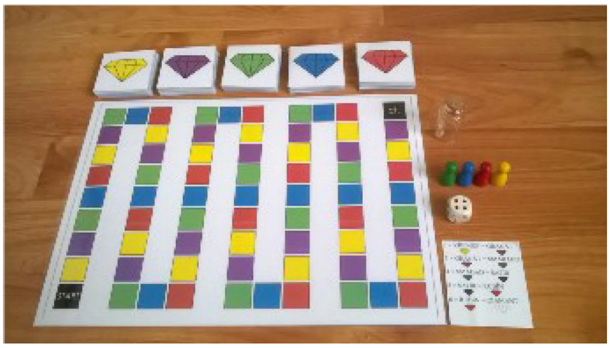
Víte, děti, kde leží Orlické hory? To jsou prý hory pohádkové, ve kterých vládne královna Kačenka, stejně jako v Krkonoších Krakonoš. Nemusím tedy jistě už zmiňovat, že na těchto horách a v jejich okolí žilo mnoho pohádkových bytostí. Tak třeba v údolích a hlavně velice hluboko pod zemí ve skalních jeskyních žili skřítkové. Říkalo se jim Permoníci. Zajímalo by vás jak vypadali? Nu byli to takoví malí mužíčkové s barevnými kalhotkami na kšandách a s kostkovanou košilkou. Tváře a bradu jim pokrývaly mohutné vousy a na hlavě nosili špičatou červenou čepičku. Nepotkali byste je bez maličké lucerničky a s krumpáčem nebo motykou na rameni. Podzemní skalní chodbičky a jeskyně byly jejich královstvím.

Na zemi za bílého dne byste je nezahlédli, leda v noci se často vyškrábali na zemský povrch, aby si odpočinuli a nadýchali se čerstvého vzduchu po celém dni náročné práce v dolech. Oni totiž byli velice pracovití. Kdybyste šli tenkrát kolem skal a slyšeli byste jakési vzdálené a tiché ťukání ťuk, ťuk, ťuk, podobné jako když datel tluče zobákem do kmene stromu, určitě byste se divili, kdo tyto zvuky vydává a odkud přichází. A to byli naši Permoníci.

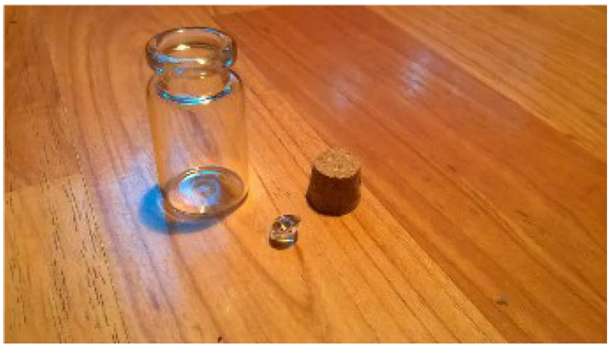
Kdopak by věděl, co v dolech dělali? Hledali v dolech drahé kameny: žluté citríny, fialové granáty, zelené smaragdy, modré safíry a červené rubíny. Pomocí motyk odloupávali jednotlivé kousky skály a nacházeli v nich třpytivé klenoty. Málo komu se však podařilo najít nejdražší a nejkrásnější kámen na světě a to křišťálově bílý diamant. Kdo ho našel stal se velice váženým Permoníkem. Pojďme si na takové Permoníky zahrát. Kdopak z nás získá jako první nejcennější diamant?

Pomůcky: herní plán, kartičky s barevnými drahými kameny - od každé barvy 40 (žlutá, fialová, zelená, modrá a červená), korálek v průhledné lahvičce simulující diamant, 4 figurky odlišných barev, hrací kostka, pomocná kartička s pravidly směňování; (viz obr. č. 22)

Pravidla hry: Hru hrají dva hráči. Každý hráč si vybere jednu barvu figurky, se kterou bude hrát a umístí ji na herní plán na start. Vedle herního plánu děti položí pět hromádek roztříděných kartiček s drahými kameny dle barev, lahvičku s diamantem a kartičku s nápovědou, jak mohou drahé kameny kombinovat (viz obr. č. 26). Poté si mezi sebou určí pořadí, v kterém budou hrát. Každý hráč hází kostkou a postupuje cestou dolem. Pokud hráč hodí šestku, nehraje opakovaně. Pokud figurka vstoupí na pole, které je již obsazené soupeřem, jeho figurku vyřadí ze hry a zaujme její místo. Vyřazená figurka se musí vrátit na začátek (na start). Podle barvy políčka, na které si hráč stoupne, si vezme kartičku s kamenem dané barvy. Vždy jen na konci svého tahu může žák kartičky směňovat dle pomocné tabulky (viz obr. č. 25). Za dva křemeny může směnit jeden granát, za tři granáty jeden smaragd, za čtyři smaragdy jeden safír, za pět safírů jeden rubín a za šest rubínů jeden diamant. Do balíčků vrátí karty, které odevzdává a vezme si kartičku, kterou za ně směnil (Např.: Do balíčků odloží tři granáty a vezme si jeden smaragd.). Kartičky hráči nesmí směňovat mezi sebou. Takto se postupuje do té doby než jeden z hráčů získá diamant (korálek v lahvičce). Pokud některý hráč dojde během hry do cíle, aniž by některý z hráčů diamant získal, vrací se zpět na start a hraje se dál.



Obrázek 22: Důl drahých kamenů – pomůcky



Obrázek 23: Důl drahých kamenů – korálek simulující diamant

Obrázek 24: Důl drahých kamenů – kartičky s obrázky drahokamů

Obrázek 25: Důl drahých kamenů – pomocná kartička s pravidly směňování

Obrázek 26: Důl drahých kamenů – uspořádání pomůcek na začátku hry

Obrázek 27: Důl drahých kamenů – průběh hry

6.5 Sahara

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci pohybují po herním plánu, za účelem získání co nejvíce kartiček s určitým číslem a jednotkou objemu, které následně kombinují, aby z nich sestavili 30 l.

Cíl:

- žák vytváří skupinu prvků, v níž se prvky nemohou opakovat, a která odpovídá zadání (součet čísel se musí rovnat třiceti)
- žák vnímá uspořádání, kde nezáleží na pořadí prvků (kombinace bez opakování)
- žák vytváří různé strategie a možnosti řešení
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma poušť. „*Jak vypadá poušť? Žije tam někdo*? *Roste tam něco*? *Jaký je asi život na poušti*?“ Dětem ukážeme obrázek pouště. „*Jak se jmenuje největší a nejznámější poušť na světě*? *Sahara. Kde leží*? *V Africe*.“

Motivační pohádka

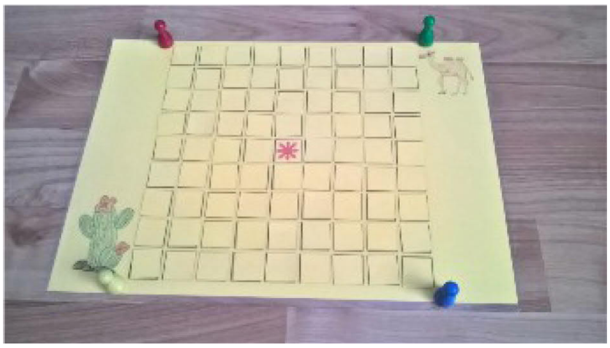
Přesuneme se do dalekých krajin až na území Afriky, kde se nachází veliká poušť nazývaná Sahara. Obrovské a rozsáhlé kopce písku pokrývají celé její území. Říká se jim duny. Slunce zde přes den svítí tak mocně, až zahřívá celé území do neuvěřitelně vysoké teploty. Není divu, že zde rostou pouze kaktusy, které nepotřebují skoro žádnou vodu a kromě štírů, pouštních lišek a některých druhů hadů, zde téměř nic nežije. Vody je zde opravdu nedostatek. Nikde na světe není voda cennější než na pusté poušti. Přesto tu však můžeme najít místa, kde je možné si při putování pouští odpočinout v chladném stínu a posilnit se několika doušky vody. V poušti se totiž nacházejí oázy. Jsou to místa, kde je život, kde roste několik rostlin a vysokých palem a hlavně, kde je jezírko nebo tůňka s osvěžující čirou tekutinou.

Představte si, děti, že Saharou právě v době našeho vyprávění putovala karavana. Víte, co to taková karavana je? Je to dlouhý průvod několika velbloudů, na nichž jedou lidé, většinou kupci z dalekých krajů. Snaží se poušť přejít a dostat se na druhou stranu, aby ve vzdálených krajích mohli prodat zboží, které vezou. Nemusím jistě říkat, že je to velmi náročné. Poušť je nebezpečná. Našich poutníků bylo přesně třicet. Ve třiceti vyšli a třicet se jich stále drželo pohromadě. Byli to věrní kamarádi. Už však byli vyčerpáni dlouhou cestou v žáru slunce. Velbloudi, takzvaní koráby pouště, už se také sotva nesli. A co bylo nejhorší, kupci už neměli ani jedinou kapičku vody a trpěli žízní. Jak to s nimi asi dopadne. Kdyby alespoň objevili oázu, kde by si odpočinuli a doplnili zásoby vody. Pojďme jim pomoci! Kdo najde v poušti skryté oázy a nasbírá pro poutníky třicet litrů vody?

Pomůcky: herní plán, 81 kartiček – 53 kartiček s šipkami + jedna středová kartička, 27 kartiček s vodou, dvě až čtyři figurky odlišných barev; (viz obr. č. 28)

Pravidla hry: Hru mohou hrát dva až čtyři hráči. Hráči zamíchají čtvercové kartičky a umístí je lícem dolů na herní plán (na vzory čtverců na herním plánu), aby nebylo vidět, co je na nich napsáno. Jen jednu kartu otočí lícem nahoru a umístí ji doprostřed herního plánu, a to kartu s červenými šipkami směřujícími na všechny strany. Každý hráč si zvolí svou barvu figurky a umístí ji do jednoho rohu na herním plánu (viz obr. č. 29). Děti se mezi sebou domluví, kdo začne a pak už se v tazích střídají od jednoho hráče k druhému podle směru hodinových ručiček. Každý hráč vždy postupuje po herním plánu jen o jedno pole. V prvním tahu musí každý hráč otočit rohovou kartičku. Pokud se na ní objeví šipka, hráč musí v příštím kole táhnout směrem, kterým ukazuje. Jestliže ukazuje více směrů, hráč má možnost volby. Může si tedy ze směrů, které šipka ukazuje, vybrat. Figurku položí na kartičku s šipkou a hraje další hráč. Na jednom políčku se šipkami může stát i více figurek. Může se stát, že šipka bude ukazovat pouze mimo herní plán. V tomto případě musí dát hráč figurku v dalším kole mimo herní plán a v kole následujícím může svou figurku umístit na libovolné pole na hrací ploše (i na pole bez kartičky – viz níže). Pokud se na otočené kartičce objeví číslo s jednotkou obsahu, může si ji hráč vzít, na herním plánu tak zůstane volné pole (pole bez kartičky). Svou figurku hráč umístí na toto volné pole a hraje hráč další. Kartičku si však hráč brát nemusí, v tomto případě ji otočí opět lícem dolů. Avšak hráčem otočenou kartičku musí vždy všichni soupeři před zpětném otočením vidět. Když stojí figurka na volném poli (poli bez kartičky) a kolem sebe má jen otočené kartičky s šipkami nebo další prázdná místa, může si vybrat, na které místo vstoupí. Jakmile nemůže figurka postupovat nikam dál, protože jí šipky pořád vracejí, hra pro hráče končí. V průběhu hry hráč sbírá kartičky s číslem a jednotkou obsahu. Pokládá si je na stůl vedle herního plánu. V průběhu hry se hráči snaží kartičky kombinovat tak, aby nasbírali přesně 30 litrů vody (viz obr. č. 32). Tvoří z kartiček skupinu, ve které nezáleží na pořadí jednotlivých karet s čísly a jednotkami, přičemž se karty s čísly a jednotkami nemohou opakovat. Kartičky s počtem a jednotkou obsahu, kterou hráč dříve získal, ale teď už se mu nehodí, může na konci svého tahu umístit na herní plán na volné pole lícem dolů. Předem ji však ostatním hráčům ukáže. Vítězí hráč, kterému se jako prvnímu podaří nasbírat 30 litrů vody.

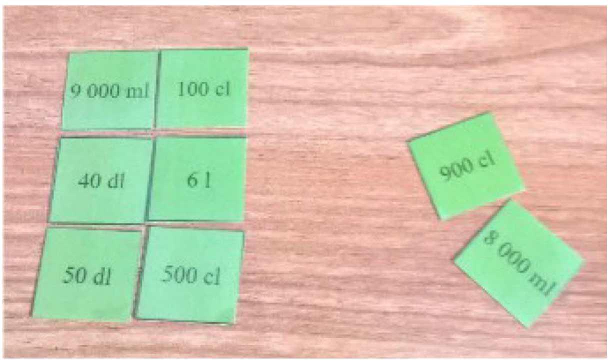
Obrázek 28: Sahara – pomůcky



Obrázek 29: Sahara – uspořádání pomůcek na začátku hry

Obrázek 30: Sahara – průběh hry

Obrázek 31: Sahara – konec hry



Obrázek 32: Sahara – sestavení třiceti litrů z nasbíraných kartiček

6.6 Pirátský poklad

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci pohybem po herním plánu snaží získat co nejvíce mincí s čísly a kombinují je, za účelem vytvoření co nejvíce trojic z čísel patřících do stejné kategorie.

Cíl:

- žák vytváří skupinu prvků, v níž se prvky mohou opakovat, a která odpovídá zadání (čísla ve skupině patří do stejné kategorie)
- žák si uvědomuje, že nezáleží na uspořádání prvků, resp. že skupiny jsou neuspořádané (kombinace s opakováním)
- žák vytváří různé strategie a možnosti řešení
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou diskuzi na téma piráti. „*Jak piráti vypadají*? *Znáte nějakého známého piráta*? *Co piráti dělají*? *Jsou za to potrestáni*?“ Dětem ukážeme obrázek pirátů a pirátské lodě.

Motivační pohádka

Jistě jste už, děti, někdy slyšely o pirátech. Putují po mořích na své pirátské lodi a přepadají lodě čestných lidí. Znáte nějaké piráty? V Karibiku řádili opravdu krutí piráti. Byla to cháska zlomyslná a krutá. Všichni v okolí se jich obávali. Kapitán pirátů Hrdlořez byl dobrý vůdce, vedl své námořníky znamenitě. Jakmile se na obzoru objevila loď, vyvěsili černou vlajku s lebkou a překříženými hnáty a začali ji dohánět. Celé moře snad bylo s Hrdlořezem spojeno, protože i když jim foukal nepříznivý vítr, vždy loď dohnali. A pak začala mela. Piráti naskákali na palubu a obsadili ji. I když posádka přepadené lodi kladla odpor, neměla šanci. Některé námořníky piráti vzali do zajetí, aby jim na lodi vařili nebo uklízeli, jiné naházeli do moře a ty nejvíc vzpurné pobili. Z lodě si odnesli vše, co mělo cenu a pak ji podpálili.

Opravdu krutě si počínali a osud je za to potrestal. Víte jak? Jejich pirátská loď byla mohutná z černého těžkého dřeva. Nazývali ji Plnozlatka. Její název byl oprávněný, opravdu byla plná zlata. V podpalubí měla místnosti přeplněné drahými kameny, zlatem, stříbrem, vzácným nádobím i bohatě vyšívanými oděvy. Hrdlořez byl puntičkář a ve svých věcech chtěl mít pořádek, proto jeho veškeré bohatství bylo svědomitě roztříděno do jednotlivých truhlic. Jelikož byli piráti ve svém řemesle opravdu úspěšní, loď se stále plnila a plnila.

Jedné noci však přišla veliká bouře. Vlny dosahovaly obrovské výšky a s Plnozlatkou si hrály, jako kdyby byla nepatrnou muškou. Kdyby nebyla tak těžká, možná by se na vlnách udržela, ale protože zlatem jen přetékala, potopila se, jako když jde sekera ke dnu. Od té doby leží na dně moře a s ní i všechny cennosti, které vezla. Pojďme se tam vypravit a poklady z hlubin moře vynést na povrch! Jelikož se ale veškeré bohatství pirátů při ponoření promíchalo, budeme ho muset roztřídit.

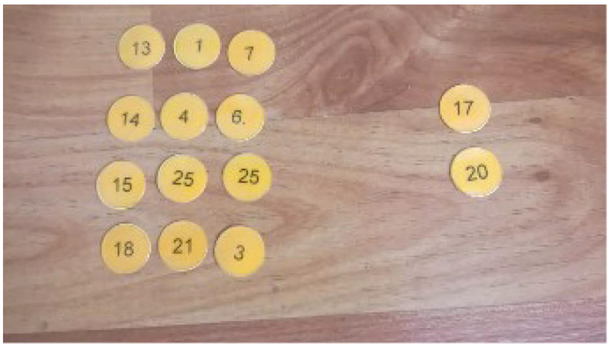
Pomůcky: herní plán, 4 figurky různých barev, hrací kostka, 50 mincí s čísly (1–25, tzn. každé číslo dvakrát); (viz obr. č. 33)

Pravidla hry: Hru hrají čtyři hráči. Na začátku hry se mince umístí lícem dolů na všechna světle modrá políčka na herním plánu. Hráči dají své figurky na libovolná tmavě modrá políčka (viz obr. č. 34). Domluví se, kdo bude začínat jako první a následně postupují od hráče k hráči podle hodinových ručiček. Hráč, který je na řadě, hodí kostkou a posune svou figurku po herním plánu libovolným směrem. Pokud se dostane na políčko s mincí, minci otočí a vezme si ji k sobě. Pokud vstoupí na tmavě modré pole, jeho hody se v následujícím kole zdvojnásobují (příští kolo hráč hraje 2 krát za sebou) a může si po každém hodu vybrat, kterým směrem bude postupovat dál. Při vstupu na prázdné pole, kde dříve byla mince, se nic neděje a hráč může v příštím kole postupovat libovolným směrem dál. Figurky se navzájem nevyhazují. Na jednom políčku může stát i více figurek najednou. Minci však získá ta figurka, která na políčko vstoupila jako první. Když hráč hodí šestku nehraje opakovaně. Hraje se do té doby, až na herním poli není již žádná mince, jelikož jsou všechny vysbírané (viz obr. č. 37). Poté hráči ze svých nasbíraných mincí sestavují trojice dle pokynů, která byla upřesněna učitelem na začátku hry (lichá čísla, sudá čísla, násobky 2, 3, 4, či 5), (viz obr. č. 36). Žáci tak tvoří trojice, kde nezáleží na pořadí jednotlivých mincí a čísla se v dané skupině (v jedné trojici) mohou opakovat. Některé mince mohou zůstat nevyužity. Děti by však měly mince kombinovat tak, aby jim neužitečných mincí zůstalo co nejméně. Vyhrává hráč, který z čísel sestaví co nejvíce příslušných trojic.

Obrázek 33: Pirátský poklad – pomůcky

Obrázek 34: Pirátský poklad – uspořádání pomůcek na začátku hry

Obrázek 35: Pirátský poklad – průběh hry



Obrázek 36: Pirátský poklad – sestavení trojic z nasbíraných mincí

Obrázek 37: Pirátský poklad – konec hry

6.7 Ptačí slavnost

Jedná se o hru manipulační, kdy se žáci snaží vytvořit co nejvíce párů z prvků dvou různých množin, kdy první prvek z dvojice je z množiny první a druhý prvek z dvojice je z množiny druhé, za účelem uvědomění si závislosti počtu párů na počtu prvků v jednotlivých množinách.

Cíl:

- žák vytváří dvojice prvků, kdy první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B
- žák si uvědomuje závislost počtu párů na počtu prvků v každé jednotlivé množině
- žák sám vytváří a využívá daný algoritmus (násobení) k zjištění počtu párů (kombinatorické pravidlo součinu)
- žák rozvíjí logické myšlení

Motivace: S dětmi vedeme řízenou debatu na téma lesní ptáci. „*Chodíte na procházky do lesa*? *Jaké ptáky tam můžete spatřit*?“ Dětem ukážeme obrázky ptáků, se kterými se ve hře setkají (drozd, krkavec, ťuhýk, strakapoud, strnad, brhlík, kos, datel, sojka, straka, sýkora). Děti poznávají, o jaké ptáky se jedná. „*Viděli jste je někdy naživo*?“

Motivační pohádka

Nedaleko jedné malé vesničky v Orlických horách leží rozlehlý les, skoro bychom ho mohli nazývat pralesem. Rozprostírá se několik kilometrů do všech světových stran. Rostou v něm vysoké a mohutné listnaté i jehličnaté stromy, které stíní na pařezy, spadlé kmeny, keříky, ale i na borůvčí, ostružiní a maliní. Kdopak by věděl, co na těchto rostlinách roste? Babičky z okolí tyto plody lesa každým rokem chodily sbírat. Kdybyste se, děti, v tomto lese, nedej bože, ztratily a hledaly byste kudy z něho ven, vylezly byste určitě na nejbližší jedličku jako Jeníček, když hledal světýlko, a rozhlížely byste se na všechny strany. Pak byste spatřily široko daleko jen špičky těch nejvyšších stromů. A ti z vás, kteří mají zrak sokolí, by uviděli v dálce zelenou plošinku, takový plácek nebo rovinku. Ona totiž v tomto lese byla jedna malá louka. To si jistě dovedete představit, jaký to byl zázrak. Bylo to jediné místečko v lese, kam sluníčko mohlo proniknout svými paprsky.

Všechna zvířátka v lese ráda na tuto mýtinku chodila. Srnky tu okusovaly šťavnatou trávu, zajíčci si mezi travnatými stébly hráli na schovávanou, lišky si na slunci vyhřívaly své kožíšky a zkrátka všechny těšilo, že tu kousek té prosluněné louky je. Lesní ptáci se jednoho dne rozhodli, že si na tom našem paloučku uspořádají ptačí slavnost. Zpráva se po lese rychle rozkřikla a přiletělo nespočet lesních ptáků, kteří se těšili, že si zatančí: datel, strakapoud, kos, krkavec, brhlík, drozd, strnad, ťuhýk a pak také straka, sýkorka a sojka. Ve vysoké trávě si cvrčci přichystali své nožky, aby až bude potřeba, s nimi o sebe začali třít a ptáčkům k tanci zahráli. Každý ptáček sameček chtěl však tancovat s každým ptáčkem samičkou. Kolik dvojic mohli utvořit, pokud byli 4 samečci a 3 samičky?

Pozn. Děti odhadují výsledky úlohy před samotnou hrou. *„Zkuste odhadnout kolik dvojic je možné utvořit ze 4 samečků a 3 samiček, pokud chceme, aby každý sameček byl ve dvojici s každou samičkou?"* Všechny tipy zapisujeme na tabuli.

Pomůcky: herní plán, kartičky s obrázkem ptáčka a jeho názvem – barevně rozlišené (drozd 3 × růžová, krkavec 3 × fialová, ťuhýk 3 × oranžová, strakapoud 3 × žlutá, strnad 3 × červená, brhlík 3 × modrá, kos 3 × zelená, datel 3 × hnědá, sojka 8 × všechny barvy, straka 8 × všechny barvy, sýkora 8 × všechny barvy), 4 figurky různých barev (červená, modrá, žlutá, zelená), hrací kostka; (viz obr. č. 38)

Pravidla hry: Hru mohou hrát dva až čtyři hráči. Hráči rozmístí na herní plán ke každému barevnému kruhu kartičky příslušné barvy s názvem a obrázkem samečků. U každého kruhu tak budou tři karty (viz obr. č. 39). Na začátek vybereme jen čtyři samečky (Např.: strnad, krkavec, strakapoud, kos). Poté vezmeme jen ty kartičky samiček, které barevně odpovídají vybraným samečkům (Tzn. červené, fialové, žluté a zelené). Ostatní kartičky samiček dáme stranou. Nebudeme je ve této hře potřebovat. Kartičky se samičkami (12 kartiček) se zamíchají a položí se vedle herního plánu lícem dolů. Každý hráč si vybere jednu barvu figurky a položí ji doprostřed herního plánu na příslušná barevná políčka. Hráči si zvolí, kdo bude hrát jako první, a poté postupují podle směru hodinových ručiček. Hráč si vezme z hromádky kartiček se samičkami jednu kartu a položí si ji vedle sebe. Barva karty mu ukazuje, kterého samečka musí pro samičku do páru získat (Např.: Vytáhne kartu se sojkou, kde je pozadí zelené. Znamená to, že hráč musí získat kartu s kosem, která je také zelená.). Poté hodí kostkou a podle čísla padlého na kostce postupuje k danému barevnému políčku. Jelikož ptáčci poletují z místa na místo, hráč může svůj počet, který na kostce hodil kombinovat (Např.: Hráč hodí šestku a může postoupit o 4 pole dopředu a o 2 dozadu. Nebo může postoupit 3 pole dopředu a 3 pole zahnout do strany.). Pokud hráč hodí šestku nehraje opakovaně. Jednotlivé figurky se mezi sebou nevyhazují. Na začátku hry je možné vystoupit z domečku na jakémkoli šedém políčku (Např.: Hráč se žlutou figurkou, může ze středu vystoupit na šedém políčku směřujícímu k fialovému kruhu.). Úkolem hráče je získat dvojici (Např.: K fialové kartičce se sojkou musí získat fialovou kartičku s krkavcem nebo k zelené kartičce se sýkorkou zelenou kartičku s kosem apod.). Jakmile figurka šlápne na barevné políčko, hráč si vezme z hromádky příslušnou kartičku a získanou dvojici si položí před sebe. Poté se hráč se svou figurkou musí dostat zpět do domečku. Opět tedy hází kostkou a postupuje za pomocí kombinace rozkladu čísla po herním plánu až do středu plánku. Vstoupit do domečku může z jakékoli strany (Např.: Žlutá figurka může vstoupit do domečku na modré středové políčko apod.). Jakmile se figurka dostane do domečku, hráč si vezme z hromádky další kartičku se samičkou a hra pokračuje. Vyhrává hráč, který získá nejvíce dvojic – kartiček se samičkou a samečkem odpovídající sobě barevně (viz obr. č. 41). Pokud má víc dětí stejný počet dvojic, je vítězů více.

Po skončení hry se dětí ptáme: *„Kdopak z vás vyhrál? Kolik má vítěz nasbíraných dvojic? Kolik dvojic jste ve skupině nasbírali dohromady?“* Žáci dohromady nasbírají 12 dvojic. Měli jsem čtyři samečky a tři samičky. Snažíme se, aby žáci přišli sami na výpočet: 4 _ 3 = 12; $4 \cdot 3 = 12$ Vrátíme se k tipům, které žáci říkali na začátku. „*Který tip byl správný*?“

Dále pokračujeme: *„Představte si, že datel a drozd po cestě zabloudili a na slavnost se dostavili později.“* Jejich kartičky dáme do hry. Přidáme všechny kartičky nejen s vybranými ptáky, ale i kartičky se samičkami, které mají barvu hnědou a růžovou. Ve hře máme tedy šest samečků a tři samičky. *„Kolik dvojic z nich teď asi můžeme složit?“* Děti hrají hru opakovaně. Po skončení hry se dětí ptáme: *„Kdopak z vás vyhrál? Kolik má vítěz nasbíraných dvojic? Kolik dvojic jste nasbírali všichni společně?“* Žáci dohromady nasbírají 18 dvojic. Měli jsme šest samečků a tři samičky. Snažíme se, aby žáci přišli sami na výpočet: 6 _ 3 = 18; $6 \cdot 3 = 18$

Pokračujeme otázkami: *„Kolik dvojic bychom mohli vytvořit, kdybychom měli tři samečky a tři samičky?“* ($3 \cdot 3 = 9$) *„Kolik dvojic bychom mohli vytvořit, kdybychom měli jen dva samečky a tři samičky?“* ($2 \cdot 3 = 6$)

Obrázek 38: Ptačí slavnost – pomůcky

Obrázek 39: Ptačí slavnost – uspořádání pomůcek na začátku hry

Obrázek 40: Ptačí slavnost – průběh hry

Obrázek 41: Ptačí slavnost – tvoření dvojic z kartiček

7 Proces tvorby her a jejich pilotní realizace

Jako první byly vytvořené hry *Duha*, *Válka živlů* (původně s názvem *Oheň a voda*) a *Zahrada tulipánů* jako součást seminární práce na téma *Aktivity pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků*. Na jejím základě došlo k prvotní realizaci her v rodinném prostředí s dětmi, které navštěvovaly 1. stupeň základní školy. Při realizaci se sledovala především úroveň motivace a náročnosti jednotlivých her a schopnosti dětí pochopit jejich pravidla. Didaktická hra *Zahrada tulipánů* byla následně v rámci řešení projektu SGS v dubnu roku 2016 realizována na semináři KMD na TUL, organizovaného především pro učitele 1. stupně ZŠ, kde se od pedagogů setkala s kladnou odezvou. Následně byla tato hra opět na základě řešení grantu SGS začleněna do souboru her s názvem *Kombinatorické hry pro malé školáky* a jako jeho součást byla přednesena na ČPS matematické konferenci v Novém Jičíně v červnu roku 2016. Tento měsíc i rok pak již výše zmiňovaná seminární práce s názvem *Aktivity pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků* získala druhé místo v soutěži SVOČ 2016 uskutečněné v Kostelci nad Černými lesy v didaktice matematiky.

Původní tři hry byly upraveny a přibyly k nim čtyři hry další: *Důl drahých kamenů*, *Sahara*, *Pirátský poklad a Ptačí slavnost*. Ke všem hrám byly vytvořeny zkušební pomůcky a herní plány. Ke konci roku 2016 byly opět realizovány v domácím prostředí s dětmi, které navštěvovaly 1. stupeň základní školy. Prostřednictvím bezprostřední zpětné vazby malých hráčů docházelo průběžně k upravování jednotlivých pravidel a dolaďování konečné reálné podoby pomůcek a herních plánů.

K prvnímu celistvému pilotnímu šetření došlo dne 15. 12. 2016, kdy byla hra *Zahrada tulipánů* aplikována ve 4. třídě na ZŠ náměstí Míru v Ruprechticích v Liberci v rámci jedné vyučovací hodiny matematiky.

Uvádím zde krátkou reflexi: Na začátku hodiny byly děti aktivizovány motivační pohádkou, díky níž získaly podnět hru hrát. Následně byla dětem prezentována pravidla hry prostřednictvím prezentace na interaktivní tabuli. Pravidla byla dětmi pochopena ihned. Nikdo nepotřeboval žádné části dovysvětlit. Všichni žáci velmi snadno porozuměli, jak správně a rychle vytvořit barevnou řadu tulipánů podle vzoru na kartičce. V procesu sestavování řad se nevyskytly žádné problémy. Děti hrály hru s nadšením. Veškerá jejich pozornost byla upoutána herním plánem a manipulací s barevnými herními kameny. V průběhu hry nedocházelo k porušování pravidel. Každý žák si vytvořil svou vlastní strategii sestavování barevných řad. Ve hře nejde jen o individuální sestavení řady. Soupeři si nevědomky vzájemně sestavování znemožňují. Proto byl, jak se prokázalo, úspěšnější ten hráč, který dokázal odhadnout, kde staví řadu soupeř a buď se mu snažil vyhnout, nebo mu stavění vědomě narušoval. Zároveň byla úspěšnost podmíněna úrovní chápání žáků a jejich individuálními předpoklady ke kombinatorickému uvažování. Mezi hráči byly patrné rozdíly v logickém myšlení, což se odráželo v rychlosti a schopnosti sestavování řad. Jistou úlohu, podmiňující vítězství a prohru, hrála i náhoda výběru karet. Čas jedné vyučovací hodiny byl dostačující. Většina hráčů dokončila první hru, ti rychlejší chtěli, a také jim bylo umožněno, hrát opakovaně. Při několikaminutové reflexi na konci hodiny děti hodnotily hru jako velmi zdařilou a zábavnou. Ocenily by však větší herní plán a více času na hraní, aby se mohly prostřídat a hrát tak i se svými dalšími kamarády.

Realizace hry *Zahrada tulipánů* v reálném prostředí školní třídy mi poskytla první ucelenou reflexi, potřebnou k dalšímu plánování a upravování organizace her ve vyučování. Didaktické hry tak získaly svou konečnou podobu a byly připraveny na experimentální šetření.

8 Tvorba výzkumných podkladů

8.1 Tvorba vstupních a výstupních testů

Vstupní a výstupní testy byly prostředkem k zjištění, zda didaktické hry ve výuce plní svou funkci – zda rozvíjejí kombinační myšlení a kombinatorické schopnosti žáků. Mimo jiné na základě komparace vstupních a výstupních testů se měla vyhodnotit účinnost didaktických her, tj. jestli napomáhají žákům pochopit základní kombinatorické vztahy, jako je opakování prvků a uspořádání prvků, a zda rozvíjejí řešitelské strategie žáků. Oba vstupní i výstupní testy s ukázkovým řešením uvádím v přílohách (viz přílohy č. 1, 2, 3 a 4).

Vstupní a výstupní testy byly vytvořené tak, aby spolu vzájemně korespondovaly. Každá úloha v testu vstupním je obdobou úlohy v testu výstupním. Je jen zasazená do jiné situace a do jiného prostředí. Pro lepší představu uvádím příklad:

Vstupní test č. 1, úloha č. 1

Tatínek nemůže otevřít svůj kufr, protože zapomněl číselný kód, kterým se zámek u kufru odemyká. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 1 a 2. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 1 a 2 může kufr otevřít?

Výstupní test č. 1, úloha č. 1

Petr stojí u zamčeného kola a nemůže si vzpomenout, který číselný kód zámek na kole odemkne. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 3 a 4. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 3 a 4 může zámek na kole otevřít?

Při tvorbě vstupních a výstupních testů jsem byla ovlivněna přednáškou paní docentky *Gabriely Pavlovičové* na téma *Význam obrázka pri riešení kombinatorickej úlohy*, kterou přednesla na matematické konferenci EME 2017 v Tále, které jsem se také účastnila.

Ve sborníku [18 s. 96–100] uvádí, že pokud je v zadání kombinatorické úlohy přítomen ilustrační obrázek, žáci úlohu řeší převážně formou kreslení všech možností řešení místo vypisování nebo symbolického znázorňování způsobů řešení. Analýza žákovských řešení jedné kombinatorické úlohy ve dvou třídách 3. ročníku ZŠ

[18 s. 96–100] ukázala, že žáci řešící úlohy s ilustrací jsou v řešení úspěšnější než žáci, v jejichž úlohách se doplňující obrázky nevyskytovaly. Můžeme tedy říci, že přítomnost obrázku v zadání úlohy má na strategii a správnost řešení dané kombinatorické úlohy značný vliv. Na základě této skutečnosti jsem všechny úlohy ve vstupních i výstupních testech sama ilustrovala.

Úlohy v jednotlivých testech jsou zaměřené vždy na jednu kombinatorickou oblast, jejíž rozvoj v řešení se sleduje. Pro lepší přehlednost je uvádím v následující tabulce:

Tabulka 1: Rozdělení úloh v jednotlivých testech

	Vstupní test 1	Vstupní test 2	Výstupní test 1	Výstupní test 2
Permutace bez opakování	Úloha č. 1		Úloha č. 1	
Permutace s opakováním	Úloha č. 2		Úloha č. 2	
Variace bez opakování	Úloha č. 3		Úloha č. 3	
Variace s opakováním	Úloha č. 4		Úloha č. 4	
Kombinování prvků		Úloha č. 1		Úloha č. 1
Kombinace s opakováním		Úloha č. 2		Úloha č. 2
Kombinace bez opakování		Úloha č. 3		Úloha č. 3
Kombinatorické pravidlo součinu		Úloha č. 4		Úloha č. 4

8.2 Tvorba dotazníků

Dotazníky byly vytvořené za účelem zjištění doplňujících informací o vstupních a výstupních testech. Byl vytvořen jeden dotazník (viz příloha č. 6), který měli žáci opakovaně vyplnit vždy po každém testu (po obou vstupních i výstupních testech), tj. každý žák měl celkem vyplnit 4krát stejný dotazník.

Dotazník se zaměřoval na žákovo hodnocení jednotlivých úloh ve vstupních i výstupních testech. U každé úlohy se sledovala míra obliby a náročnosti úlohy pro žáka. Zároveň měl žák určit, zda věděl, jak úlohu vyřešit. Tyto informace měly poskytnout zpětnou vazbu o zpracování, formulaci a přiměřenosti jednotlivých úloh. Podstatnou částí dotazníku byla otázka, zda žák někdy řešil podobnou úlohu. Na vyhodnocení této otázky jsem založila jeden z výzkumných předpokladů (viz výzkumný předpoklad P4).

9 Stanovení výzkumných předpokladů

Při realizaci didaktických her jsem se zaměřovala především na to, aby žáci snáze identifikovali kombinatorické úlohy, pochopili podstatu základních kombinatorických vztahů jako je opakování prvků a uspořádání prvků. Dále jsem svou pozornost zaměřila na rozvíjení řešitelských strategií žáků a na jejich úspěšnější řešení kombinatorických úloh. Didaktická hra tak byla prostředkem k rozvoji kombinačního myšlení žáků.

Na základě předchozích zkušeností a prostudované literatury jsem stanovila následující čtyři předpoklady:

P 1: *Většina sledovaných žáků nemá dostatečně rozvinuté kombinační a logické myšlení.*

Použitá metoda:

Vstupní testy pro žáky.

Komentář:

Tato skutečnost se projeví v neschopnosti správně vyřešit kombinatorické úlohy ve vstupních testech. Řešení kombinatorických úloh budu hodnotit z hlediska tří stupňů. Každému stupni odpovídá určitý počet bodů:

1. Nevyřešil/a, není zde ani jedna správná možnost řešení (1 bod)

2. Vyřešil/a, ale chybí některé správné možnosti řešení (2 body)

3. Vyřešil/a, řešení obsahuje veškeré možnosti řešení (3 body)

Za správné vypracování kombinatorických úloh budu pokládat až stupeň 3.

Předpoklad je postavený na tom, že ve vstupních testech žáci ve většině úloh nedosáhnou 3. stupně, resp. žáci ve většině úloh nezískají 3 body.

P 2: *Didaktická hra je vhodnou propedeutikou k uvědomění si podstaty uspořádaných a neuspořádaných skupin a možnosti opakování či neopakování prvků v daných skupinách.*

Použitá metoda:

Porovnání výsledků úloh ve vstupních a výstupních testech u jednotlivých žáků se zaměřením se na komparaci chybně vypracovaných úloh ve vstupním testu (kde chyba vznikla na základě špatného rozlišení skupin s opakováním a bez opakování prvků či rozlišení skupin, kde záleží nebo nezáleží na pořadí prvků) s výsledky v testu výstupním. Zpracování kazuistik s cílem identifikovat rozvoj schopnosti žáka řešit kombinatorické úlohy na základě správné identifikace klíčových prvků úlohy v průběhu experimentu.

Komentář:

Na základě realizace kombinatorických her žáci lépe identifikují uspořádané, resp. neuspořádané skupiny a rozliší situace s opakováním či bez opakování prvků.

P 3: Po *realizaci didaktických her dojde k rozvoji řešitelských strategií žáků.*

Použitá metoda:

Zpracování kazuistik jednotlivých žáků zaměřených na zjišťování úrovně kombinačního myšlení v průběhu experimentu a sledování řešitelských strategií u jednotlivých úloh ve vstupním i výstupním testu. Analýza vstupních testů a porovnání počtu nalezených možností řešení v úlohách s počtem objevených řešení v paralelních úlohách v testech výstupních, což odpovídá bodovému ohodnocení jednotlivých úloh v testech (viz výzkumný předpoklad P1).

Komentář:

Řešitelské strategie žáků budou po realizaci her systematičtější, tj. pořadí zobrazených možností řešení v jednotlivých úlohách ve výstupních testech bude mít daný řád, bude nenáhodné a účelně organizované.

To se zároveň projeví ve schopnosti objevit více možností řešení, resp. všech možností řešení úlohy. Po realizaci didaktických her žáci ve výstupních testech objeví více možností řešení než ve vstupním testu nebo dokonce všechny možnosti řešení úlohy.

P 4: *Kombinatorické úlohy nejsou běžně řešeny v rámci výuky.*

Použitá metoda:

Dotazníkové šetření pro žáky.

Komentář:

Většina žáků v dotaznících uvede, že se s podobnými úlohami jako jsou ve vstupních testech ještě nesetkala. V rámci řešení grantu SGS, jehož jsem byla spoluřešitelkou, jsme v prvním roce řešení projektu provedli analýzu učebnic a přijímacích testů s cílem identifikovat typy a četnost zařazení kombinatorických úloh. Ukázalo se, že procento zastoupení těchto úloh v porovnání s jinými typy úloh je výrazně menší. Proto předpokládám, že se tato skutečnost odrazí v odpovědích žáků ve vstupních dotaznících.

10 Experimentální ověření účinnosti didaktických her

10.1 Charakteristika experimentální základní školy a třídy

Pro realizaci experimentu jsem si vybrala základní školu v horské obci Pěčín u Rokytnice v Orlických horách. Jedná se o jednotřídní základní školu se čtyřmi ročníky. Všichni žáci jsou vzděláváni jednou paní učitelkou v jedné společné třídě. Hlavním důvodem výběru této základní školy byla skutečnost, že jsem mohla didaktické hry aplikovat ve více ročnících najednou.

Vyučování na této malotřídní škole je z pedagogického hlediska specifické. Výuka je založená na frontální řízené práci učitele s jedním ročníkem. Ostatní ročníky mezitím vykonávají zadanou samostatnou (či párovou nebo skupinovou) práci, kterou jim učitel předem zadá a následně ji s nimi zkontroluje. Řízená a samostatná práce se v rámci jedné vyučovací hodiny u jednotlivých ročníků střídá.

Zároveň je malotřídní škola zvláštní tím, že mezi žáky dochází při výuce k větší sociální kooperaci. Sociální kooperace se vyznačuje vzájemnou spoluprací a komunikací mezi žáky. K užším vzájemným vztahům dochází i ve vztahu mezi učitelem a žákem.

Organizace výuky umožňuje, aby se mladší žáci učili od starších přirozeně nápodobou. Mladší děti to tak posouvá v intelektuálním rozvoji, jelikož většinu látky, kterou mají teprve probírat, již odposlouchaly. Starší žáci jsou vedeni k tomu, aby mladším pomáhali. Prostředí a klima ve třídě je tedy nakloněno spíše ke spolupráci než k soutěživosti. Proto bylo také, dle mého názoru, toto prostředí vhodné pro realizaci kombinatorických didaktických her. Nejen, že je důležité, aby při hrách panovala pozitivní pracovní atmosféra, ale i soutěživost, jejíž prvky se v hrách objevují, musí být přiměřená, bez přílišné rivality.

Ve třídě byli tři žáci s specifickými poruchami učení. Všichni patřili do 4. třídy. Byli plně integrování, navštěvovali speciální hodiny reedukace a pracovali podle individuálních vzdělávacích plánů. Počet žáků ve třídě dle jednotlivých ročníků uvádím v následující tabulce (viz tabulka č. 2).

Tabulka 2: Počet žáků v jednotlivých ročnících

Ročník	Počet žáků
1. ročník	6
2. ročník	3
3. ročník	8
4. ročník	6
Celkem	23

10.2 Průběh realizace experimentu

Experimentální šetření účinnosti didaktických her proběhlo během šesti týdnů od 18. 4. do 26. 5. 2017 na základní škole v Pěčíně a bylo rozděleno do třech fází:

1. Vyplnění vstupních testů a dotazníků
2. Realizace didaktických her ve výuce matematiky
3. Vyplnění výstupních testů a dotazníků

Následovaly krátké rozhovory s žáky, které byly nahrávány pomocí nahrávací aplikace mobilního telefonu.[3] Realizovaly se individuálně s každým žákem po dopoledním vyučování v přirozeném prostředí školní třídy a trvaly nanejvýš 15 minut. Měly za úkol objasnit některé nejasné skutečnosti v řešení úloh jednotlivých žáků jak ve vstupních, tak ve výstupních testech a zjistit názor žáků na didaktické hry. Rozhovor nebyl pro všechny dotazované stejný, tj. neměl jednotnou strukturu. Odvíjel se od způsobu a správnosti řešení jednotlivých úloh daných žáků. Ptala jsem se především na řešení úloh, které byly ne zcela správně nebo špatně vyřešené a sledovala jsem, zda by žáci již úlohu dokázali správně vyřešit, či co bylo příčinou jejich neúspěchu. Na závěr byl každý žák dotazovaný, zda se mu hraní her líbilo, a kterou hru hodnotí jako nejvíce zábavnou.

V průběhu experimentu vznikaly podrobné kazuistiky vybraných žáků, zaměřené na mapování úrovně kombinačního myšlení a sledování rozvoje řešitelských strategií,

3 Záznamy všech rozhovorů se zkoumanými žáky nebylo kvůli jejich rozsahu možné začlenit do příloh této diplomové práce. Jejich úryvky jsou však součástí kazuistik jednotlivých žáků.

které vyvrcholily zjištěním individuálního pokroku v řešení kombinatorických úloh, založeného na konfrontaci vstupních a výstupních testů a individuálních rozhovorů.

Nebylo možné zadat žákům pouze jeden test vstupní a jeden test výstupní, jelikož by testy obsahovaly příliš mnoho úloh a jejich jednorázové vyplnění by bylo pro žáky příliš velkou zátěží. Bylo proto potřeba vždy jeden test rozdělit na dvě části.

Experiment byl na základě této skutečnosti rozdělen do dvou etap. V rámci první etapy byl žákům zadán první vstupní test s dotazníky, načež došlo k realizaci prvních tří didaktických her (v tomto pořadí: *Duha*, *Válka živlů*, *Zahrada tulipánů*) a vše uzavíral test výstupní s dotazníky. V etapě druhé byly dětem zadány druhé vstupní testy s dotazníky a po realizaci her zbývajících (v tomto pořadí: *Důl drahých kamenů*, *Pirátský poklad*, *Sahara*, *Ptačí slavnost*) žáci vyplnili druhé testy výstupní s dotazníky. Podrobnější popis experimentálního šetření uvádím v následujících řádcích.

První týden docházelo k seznamování se s žáky a k účelnému pozorování jejich vzdělávání především v hodinách matematiky. Na začátku druhého týdne byly dětem dány první vstupní testy s dotazníky. Původně měly být hry aplikovány na celou třídu – všechny ročníky. Ukázalo se však, že žáci prvních a druhých ročníků zadání kombinatorických úloh nerozumějí. Bylo pro ně těžké úlohu přečíst a pochopit její podstatu. Zkoumání pokroků těchto dětí na základě porovnávání jejich vstupních a výstupních testů by bylo neúčelné. Ukázku jednoho vstupního testu od žáka z druhého ročníku uvádím v příloze (viz příloha č. 5). Na základě této skutečnosti jsem jako experimentální skupinu vybrala pouze žáky třetího a čtvrtého ročníku. Jednalo se tak o 14 žáků ve věku od 8 do 10 let. V průběhu druhého a třetího týdne došlo s těmito žáky k realizace tří her (zaměřených na permutaci s i bez opakování a variaci s i bez opakování). Na konci třetího týdne byl dětem zadán výstupní test s dotazníkem. Tím byla ukončena první etapa experimentálního šetření.

Druhá část experimentu byla zahájena na začátku čtvrtého týdne zadáním druhých vstupních testů s dotazníky. V průběhu čtvrtého a pátého týdne došlo k realizaci zbývajících čtyř her (zaměřených na kombinaci s i bez opakování, vnímání a užívání kombinace prvků podle daných pravidel směňování a kombinatorické pravidlo součinu). Na konci pátého týdne byl žákům zadán druhý výstupní test s dotazníkem. Tak skončila i druhá etapa experimentu.

Během posledního šestého týdne se realizovaly řízené rozhovory, při kterých sledovaní žáci poskytovali zpětnou vazbu k didaktickým hrám a objasňovali některé nejasné skutečnosti v testech se vyskytující.

10.3 Realizace didaktických her spojená s reflexemi

Každou jednotlivou didaktickou hru jsme realizovala s vybranými žáky v jedné vyučovací hodině matematiky. Žáci byli na začátku hodiny aktivizováni motivační pohádkou, která je uvedla do prostředí dané hry. Následovalo vysvětlování pravidel her. Z předvýzkumu jsem měla osvědčené, že při vysvětlování pravidel je především nutné, pro lepší představu žáků, dodržovat zásadu názornosti. Proto jsem ke každé hře vytvořila prezentaci a žákům jsme pravidla krok po kroku promítala na interaktivní tabuli. Následně jsem jim vždy dala prostor na dotazy. Většinou všichni pravidla pochopili ihned.

Poté jsme přistoupili k samotné hře. Někteří žáci mi pomohli rozdat pomůcky (herní plány a další herní komponenty). Hry hráli žáci většinou ve dvojicích. Pokud na některého žáka nezbyla dvojice, připojil se k někomu do trojice. Nejprve si hráči rozestavěli herní kameny a další pomůcky do počátečního postavení na herní plán či vedle herního plánu. Názornou pomůcku prvotního rozestavění herních komponentů měli žáci promítnutou na interaktivní tabuli. Následovalo samotné hraní her. Jednotlivé skupiny hráčů jsem obcházela, sledovala jsem jejich hru, kontrolovala jsem dodržování pravidel nebo jsem některým žákům pravidla objasňovala a realizaci her jsem dokumentovala focením a natáčením žáků na mobilní telefon. Zároveň jsem si všímala, jak jednotliví žáci při hře strategicky postupují, kdo je v hře úspěšnější a kdo má naopak problémy. Nestalo se, že by některá dvojice hru v rámci vyčleněné jedné vyučovací hodiny nedohrála do konce. Často je naopak žáci hráli opakovaně. Na konci hodiny proběhla vždy reflexe formou diskuze, v které mi žáci sdělili, zda se jim hrálo s daným spolužákem dobře, jestli je hra bavila, co na ní oceňují a zda-li nemají připomínku k pravidlům či průběhu hry.

V následujících řádcích uvádím reflexe z realizace jednotlivých her a doplňuji je obrázky.

1. DUHA

Tato hra byla realizována jako první. Představovala tak úvodní vstup do rozvoje kombinačního myšlení a kombinatorických schopností prostřednictvím didaktických her. Měla silný motivační charakter. Žáci se po její realizaci neustále ptali, kdy budeme hrát hru další. Pravidla byla pro žáky srozumitelná a rychle je všichni pochopili. Časová dotace jedné vyučovací hodiny na hru stačila. Většina žáků hrála hru opakovaně.

Při sledování hry dětí jsem si všimla, že si hráči většinou vytvořili svou herní strategii, které se drželi. Taktiky dětí se zároveň prolínaly, jelikož tahy hráčů na sebe při hře navazují. Postřehla jsem také, že žáci většinou usilují pouze o přesun své figurky na druhou stranu herního plánu, aniž by se nesnažili protihráči uškodit – například tím, že by dlouho setrvávali na jednom místě a bránili tak soupeřově figurce v postupu.

Na závěr hry proběhly krátké aktivity, kdy žáci sestavovali možné kombinace ze tří barev bez opakování a ze čtyř barev, kde se jedna barva opakovala dvakrát. Žáci si s tím bez problémů poradili. Ve skupině každý přišel s nějakým nápadem a možné kombinace si žáci vzájemně doplňovali. Většinou žáci ve skupinách přišli na všechny barevné kombinace a pokud ne, pomohli jim ostatní spolužáci. U této hry není nic, co by se dalo vytknout.


Obrázek 42: Realizace hry Duha


Obrázek 43: Realizace hry Duha

2. VÁLKA ŽIVLŮ

Hra byla realizována jako druhá v pořadí. Již bylo znát, že žáci vědí, co čekat. Motivace splnila svůj účel. Pravidla hry žáci ihned pochopili. Časová dotace byla pro hru přiměřená. Hráči realizovali hru v jedné hodině opět opakovaně. V této hře záleží na předvídání tahů soupeře a logické úvaze. Žákům nedělalo problémy vymýšlet různé strategie, jak uspořádat své figurky kolem figurek soupeřů, a zároveň dávali pozor, aby jejich figurky nebyly zajaty. Také se děti snažily sevřít mezi své kameny, co nejvíce figurek svého soupeře. Při závěrečné diskuzi mi bylo objasněno, že tento způsob si žáci sami osvojili a považují ho za rychlejší a efektivnější, než postupovat po jedné.

Na závěr hry proběhly krátké aktivity, kdy žáci ve skupinách vybírali tři a čtyři herní kameny z celkového počtu a tvořili možné dvojice ze tří herních kamenů, kde se jedna barva opakovala dvakrát a možné trojice ze čtyř herních kamenů, kde se každá barva opakovala dvakrát. Opět bylo účinné, když se žáci mohli navzájem doplňovat. Tvoření těchto barvených kombinací už bylo pro žáky náročnější. Společně jsme však nakonec všechny možné kombinace našli. U této hry byly zjištěny určité nejasnosti v pravidlech. Proto byla pravidla doplněna o následující body:

1. Pokud při hře vznikne v rohu herního plánu tato barevná kombinace herních kamenů: Např.: MČM (modrá – červená – modrá), kde červený herní kámen je v rohu a modré herní kameny po obou stranách, červená figurka **nevypadává** ze hry. Aby mohl být herní kámen zajat, musí stát všechny herní kameny vedle sebe v jedné linii.

2. V případě, že se do zajetí dostane herní kámen sám, **vypadává** ze hry. Např. Vejde-li červený herní kámen mezi dva modré.

3. Pokud při hře nastane taková barevná kombinace, že mezi dvěma herními kameny stejné barvy se ocitnou dva herní kameny jiné barvy, **oba** tyto **herní kameny** ze hry **vypadávají**. Např.: ČMMČ. Toto pravidlo lze zobecnit na zajetí i více jak dvou soupeřových herních kamenů.

4. Pokud při hře vznikne situace, při níž vejde např. červený herní kámen do středu již uspořádaných modrých i červených herních kamenů ČM_MČ (po jeho vstupu vznikne barevná kombinace ČMČMČ), **vypadávají** ze hry **oba** modré **herní kameny**.

Obrázek 44: Realizace hry Válka živlů

Obrázek 45: Realizace hry Válka živlů

3. ZAHRADA TULIPÁNŮ

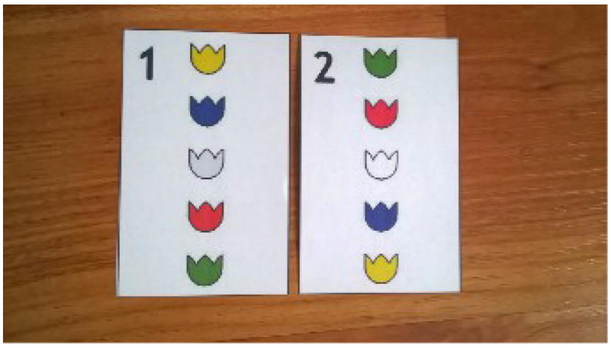
Žáci byli při této hře dostatečně motivováni. Bez problému pochopili pravidla a nedělalo jim problémy uvědomit si, jak nejrychleji a zároveň správně vytvořit z herních kamenů barevnou řadu na herním plánu. Časová dotace čtyřiceti pěti minut byla dostačující. Všichni hráči hru alespoň jedenkrát dohráli do konce. Někteří hráli opakovaně. Ve hře nejde jen o individuální sestavení řady. Hrací plán je menších rozměrů, a proto není možné, aby si každý hráč sestavil svou řadu bez ovlivnění sestavování řady soupeře. Je proto také důležité odhadnout, kde staví soupeř a buď se mu co nejvíce snažit vyhnout nebo mu stavění úmyslně narušovat. To už je součást taktiky dětí. Všimla jsem si, že si hráči brzy uvědomili tuto skutečnost a při opakovaných hrách si účelně vzájemně sestavování znemožňovali.

Nejvhodnější je hru hrát v počtu dvou hráčů. Žáci mají tak více prostoru na hru, obzvláště pokud ji hrají poprvé. Hra se dá hrát nejvýše ve čtyřčlenné skupině, je však již velmi náročná. Žáci si vzájemně překážejí a není tak snadné svou vlastní řadu tulipánů sestavit. Při této realizaci hry hru hrála jedna trojice žáků. Na její dokončení potřebovali více času a trpělivosti, jinak vše proběhlo bez problémů. S mladšími žáky, kteří jsou zároveň v této hře začátečníky, doporučuji však hru hrát pouze ve dvojicích. S postupem nabývajících zkušeností je možné počet hráčů zvyšovat.

Při představování pravidel hry je důležité zdůraznit, že se jednotlivé herní kameny nesmí mezi sebou přeskakovat. Děti jsou na přeskakování zvyklí z jiných deskových her (př. Dáma) a pokud jim zákaz nezdůrazníme, podvědomě ho aplikují. Jisté potíže se objevily v dodržování jednoho pravidla hry. Některým žákům se nelíbilo, že po tahu soupeře, který jim pohybem herního kamene narušil tvoření jejich barevné řady, nemohou stejný kámen posunout zpět na původní místo. Změna tohoto pravidla ve prospěch žáků by však nebyla možná. Žáci by se o konečnou pozici herního kamene mohli neustále přetahovat.

Při realizaci hry jsem si všimla, že dvě kartičky mají souhlasnou kombinaci barevné řady, akorát obráceně (viz obr. č. 46). Při tvorbě kartiček se tak stala chyba, která se musela napravit. Mohlo by se totiž stát, že jeden hráč sestaví na herním plánu barevnou řadu a druhý hráč si následně vezme z hromádky kartičku, kde je znázorněna stejná barevná řada, kterou již soupeř vytvořil.

Druhý hráč (pokud by si toho všiml) by tak měl stavění řady značně zjednodušené nebo úplně bez práce. Jednu kartu s danou barevnou kombinací (konkrétně kartu s dvěma body) jsem proto pro následné použití ze sady karet vyjmula.



Obrázek 46: Chybné karty se stejnou řadou barevných tulipánů

Obrázek 47: Realizace hry Zahrada tulipánů

Obrázek 48: Realizace hry Zahrada tulipánů

4. DŮL DRAHÝCH KAMENŮ

Hra *Důl drahých kamenů* se shledala s velkým pozitivním ohlasem. Při závěrečných rozhovorech byla dětmi hodnocena jako nejzábavnější. Žáci ocenili autentickou podobu drahokamu, který byl značně motivujícím prvkem. Hráči rychle pochopili pravidla hry. Čas na hru určený byl dostačující. Hra se hrála oproti ostatním hrám velice rychle. Všichni hráči ji hráli opakovaně několikrát za sebou. Kombinování a směňování jednotlivých drahokamů nedělalo žákům problémy. Pomocné kartičky, které měli žáci k dispozici, jim byly hlavně ze začátku dobrou pomůckou. Myslím si, že by při opakovaném hraní tato kartička, už ani nebyla potřeba. Žáci si v rámci hry, mimo jiné, osvojovali i názvy různě barevných drahokamů. Po této hodině (při reflexi a rozhovorech) jednotlivé kameny správně označovali jejich správnými názvy.

Jedinou připomínku měli žáci na možnost vzájemného vyhazování figurek při hře. Pokud by se figurky mohly mezi sebou na herním plánu navzájem vyhazovat, hra by se pro ně stala zajímavější. Tato zásada nebyla původně zcela upřesněna a na základě této poznámky byla do pravidel doplněna. Pokud při hře vstoupí figurka na pole, které je již obsazené soupeřem, jeho figurku vyřadí ze hry a zaujme její místo. Vyřazená figurka se musí vrátit na začátek (na start) a odtamtud smí pokračovat ve hře.

Obrázek 49: Realizace hry Důl drahých kamenů

Obrázek 50: Realizace hry Důl drahých kamenů

5. PIRÁTSKÝ POKLAD

Žáci byli na začátku hodiny dostatečně motivováni. Následné pochopení pravidel nebylo pro žáky obtížné. Časová dotace jedné vyučovací hodiny byla dostačující. Všechny dvojice i trojice hru v hodině dohrály do konce, některé skupiny hrály opakovaně. První část hry byla věnována sbírání mincí. Někteří hráči už z nich rovnou tvořili požadované trojice. Jiní si mince dávali na stranu vedle herního plánu a trojčlenné skupiny z nich začali sestavovat, až když se všechny žetony z herního plánu sesbíraly.

Bylo zadáno, že se z mincí mohou sestavovat trojice, které představují násobky 2 až 5 a lichá i sudá čísla. Před zahájením hry jsem si násobky 2 až 5 zopakovali a vysvětlili jsme si, co jsou to sudá a lichá čísla. Je potřeba žákům před realizací hry zdůraznit, že mohou sestavovat i více skupin od jednoho násobku nebo více skupin lichých a sudých čísel (Např. Mohu složit dvě a více skupin, které představují násobky dvou: 2, 4, 6; 10, 8, 20 atd.). Některé děti totiž tvořily vždy jen jednu trojici od každého násobku, jelikož si myslely, že více jich tvořit nemohou.

Několik žáků si velmi brzy všimlo, že určité skupiny mohou nazvat násobky dvou i sudými čísly. Přišli na to sami bez upozornění. Zároveň si rychle uvědomili, že se jednotlivá čísla ve skupině mohou opakovat a že nezáleží na jejich pořadí. Někteří žáci byli úspěšní a složili trojice ze všech nasbíraných mincí. Jednotlivá čísla přesouvali z jedné skupiny do druhé, až se jim je povedlo všechny zařadit. Jiným to dělalo problémy a složili trojčlenných skupin jen několik, přičemž jim spousta mincí zbyla. Při této hře byl zjištěn nedostatek v pravidlech a to v otázce vyhazování. Vzájemné vyhazování figurek by v této hře nebylo účelné, proto jsem do pravidel hry zařadila doplňující informaci, že se figurky mezi sebou nevyhazují. Na jednom políčku může stát i více figurek.

Obrázek 51: Realizace hry Pirátský poklad

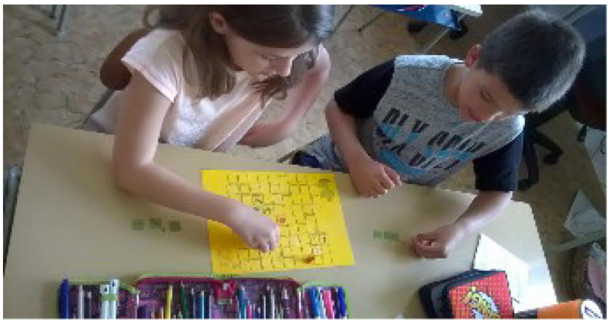
Obrázek 52: Realizace hry Pirátský poklad

6. SAHARA

Didaktická hra Sahara byla dostatečně motivována. Žáci neměli problém s pochopením pravidel, protože jim byl pohyb po herním plánu pro lepší představu názorně ukázán na interaktivní tabuli. Čas na hru vyčleněný byl dostačující. Jen některé dvojice i trojice hráčů hrály hru opakovaně, jednu hru však dokončili všichni. Žáci brzy přišli na to, že čísla na kartičkách nemusí převádět na litry, ale že stačí pracovat s první číslicí, která představuje celkový počet litrů. Hra měla rychlý spád, někteří hráči nasbírali 30 litrů, ještě než se stačily otočit všechny kartičky na herním plánu. Kombinace kartiček jim nedělala problémy. Věděli, že nezáleží na pořadí jednotlivých karet. Někteří žáci tvořili jednu velkou skupinu třiceti litrů, jiní sestavovali tři skupiny po deseti litrech.

Jako negativní stránku této hry považuji její přípravu, jelikož trvá delší dobu. Žáci musí jednotlivé kartičky otočit lícem dolů a pak je poskládat do řad a sloupců na herní plán. Zabralo to mnoho času, který mohl být věnovaný hře samotné. Zároveň manipulace s malými kartičkami (jejich zvedání z herního plánu a jejich otáčení) byla těžší. Žáci přišli na možnost braní kartiček jedním prstem – jeho přitisknutím na kartičku a zvednutím. Kartička se na prst přilepí a jde snadno zvednout z povrchu. Žáci, s kterými jsem hru realizovala, s tím neměli velké problémy, ale myslím si, že kdyby se jednalo o děti mladší či méně šikovné, mohlo by to narušit průběh hry.

Obrázek 53: Realizace hry Sahara

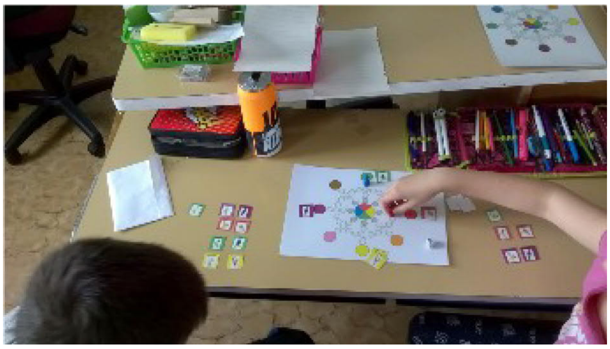


Obrázek 54: Realizace hry Sahara

7. PTAČÍ SLAVNOST

Hra ptačí slavnost byla realizována jako poslední. Motivační pohádka splnila svůj cíl. Pravidla hry byla žákům srozumitelná hned po prvním seznámení. Při přípravě herního plánu a třídění kartiček je důležité zkontrolovat, zda žáci kartičky správně rozdělili (zda jsou všechny samičky na jedné hromádce otočené lícem dolů a na herním plánu jsou u každé barvy příslušné kartičky pouze se samečky). Stalo se mi totiž, že některé děti kartičky špatně roztřídily a pak tvořily páry třeba ze dvou samečků či ze dvou samiček. Tomuto jevu je potřeba předejít.

Všichni rychle pochopili, jak mají získávat dvojice ke svým vybraným kartičkám. Po prvním kole hry jsem navazovala aktivitou, kdy si měli žáci uvědomit, že když tvoříme dvojice prvků z různě početných množin, za účelem zjištění celkového počtu těchto dvojic, stačí, když celkový počet prvků z jednotlivých množin mezi sebou vynásobíme. Někteří žáci na můj dotaz, týkající se vytvořených dvojic z kartiček s ptáčky (Měli jsme 4 samečky a 3 samičky. Vytvořili jsem z nich 12 různých dvojic. Jaký příklad je možné z těchto čísel vytvořit?), ihned reagovali odpovědí, že číslo 4 a 3 můžeme vynásobit, a tak získáme číslo 12. Bylo však patrné, že někteří žáci ještě dostatečně systému tvoření dvojic z prvků různých množin nechápou. Následovala druhá hra, do které jsme přidali dva samečky. Na moji otázku položenou po ukončení druhé hry, kolik dvojic jsme teď mohli vytvořit, když jsme měli 6 samečků a 3 samičky, již většina žáků okamžitě odpověděla 18. Jiní žáci si ještě tuto skutečnost ověřovali součtem svých i soupeřových dvojic a souhlasně kývali hlavou. Mohu říci, že většina žáků na konci druhé hry princip tvoření dvojic pochopila. Bylo by ale vhodné uskutečnit ještě jedno kolo hry, při kterém by se do hry přidaly i ostatní kartičky. Tím by došlo k úplnému upevnění sledovaného poznatku. Mě však již nestačil čas, jelikož hodina byla u konce. Lepší by bylo, kdyby byly na hru vyčleněné dvě vyučovací hodiny nebo je nutné se k ní třeba hned druhý den opětovně vrátit.



Obrázek 55: Realizace hry Ptačí slavnost

Obrázek 56: Realizace hry Ptačí slavnost

Na základě reflexí z realizací didaktických her mohu říci, že hry splnily jeden, z hlediska naplnění cíle této diplomové práce sice nepodstatný, ale pro samotné žáky velice významný, cíl. Byly shledány jako velice zajímavé a motivační. Učení matematiky se tak pro žáky stalo zábavnou hrou. Na jejich žádost jsem hry nechávala ve školní družině. Děti byly nadšené a hry hrály opakovaně i po vyučování.

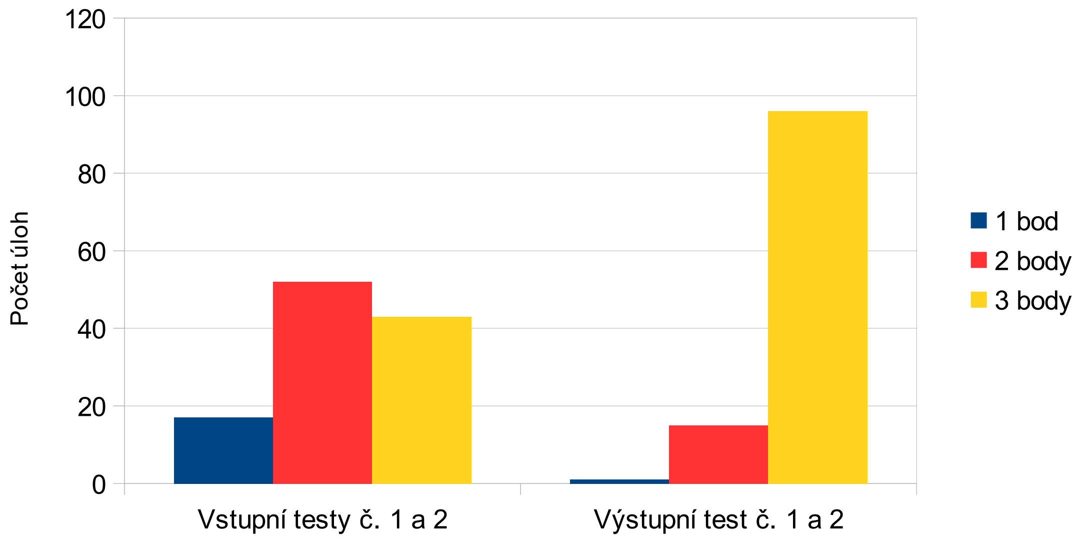
Z hlediska propedeutiky kombinatoriky bylo patrné, že si žáci při hraní her začínají uvědomovat, zda (ne)záleží na pořadí prvků (herních kamenů, samotných barev či čísel) a zda se mohou či nemohou opakovat. Po realizaci hry *Ptačí slavnost* bylo ihned sledovatelné, že většina žáků pochopila kombinatorické pravidlo součinu. Hry dále podporovaly hledání více možných variant řešení (viz *Válka živlů*, *Zahrada tulipánů*, *Pirátský poklad*, *Sahara*) a žáci si při jejich hraní vytvářeli vlastní herní strategie.

11 Vyhodnocení experimentu

11.1 Vyhodnocení vstupních a výstupních testů

Pro experiment jsem si vybrala žáky třetího a čtvrtého ročníku. O důvodu této volby se zmiňuji již výše (viz str. 91). Kvůli zachování jejich anonymity je při vyhodnocení vstupních a výstupních testů i v následných kazuistikách označuji písmeny D (dívka) a CH (chlapec), přičemž každému dítěti přiděluji identifikační číslo. Z třetího ročníku se na experimentu podíleli tři dívky (D1, D2, D3) a pět chlapců (CH1, CH2, CH3, CH4, CH5). Ze čtvrtého ročníku se experimentu zúčastnili tři dívky (D4, D5, D6) a tři chlapci (CH6, CH7, CH8). Celkem 14 žáků.

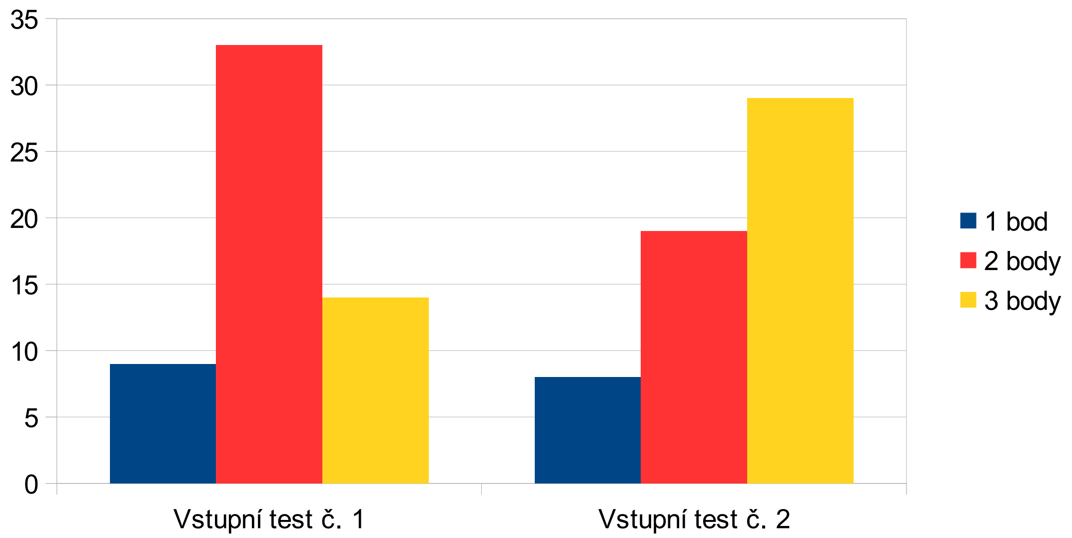
Řešení kombinatorických úloh v jednotlivých testech jsem u všech žáků hodnotila z hlediska tří stupňů. Pokud žáci úlohu nevyřešili, tzn. nenašli ani jednu správnou možnost řešení, dostali za ni 1 bod. Když úlohu vyřešili, ale chyběly jim některé možnosti řešení nebo některé možnosti řešení v jedné úloze uvedli vícekrát, dostali 2 body. Za řešení, které obsahovalo veškeré správné možnosti řešení získali žáci 3 body.[4]



Graf 1: Bodové ohodnocení úloh ve vstupních a výstupních testech u obou ročníků

4 Veškeré vyplněné vstupní a výstupní testy zkoumaných žáků nebylo možné, kvůli jejich množství, začlenit do příloh této diplomové práce. Poskytuji je však k nahlédnutí v přikládaném CD.

Jak je patrné z grafu č. 1, žáci třetího a čtvrtého ročníku ve většině úloh ve vstupních testech dosáhli 2. stupně. Ve výstupních testech hodnoty u 1. a 2. stupně značně klesly, na úkor rostoucích hodnot u 3. stupně. Stupně 3. dosáhla ve výstupních testech většina žáků. Žáci po realizaci didaktických her ve výstupních testech objevili více možností řešení než ve vstupních testech nebo všechny možnosti řešení.

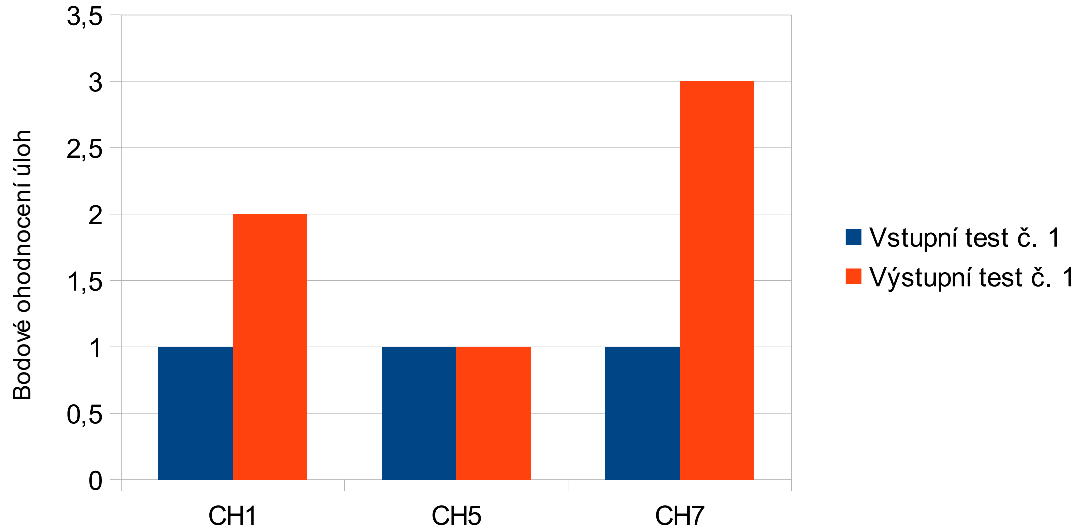


Graf 2: Srovnání bodového ohodnocení úloh ve vstupních testech č. 1 a 2

Když však zjištěné hodnoty ze vstupních testů rozdělíme do dvou částí na vstupní test č. 1 a vstupní test č. 2, zjistíme, že ve druhém vstupním testu žáci ve většině úloh dosáhli třetího stupně (viz graf č. 2 výše). Tuto skutečnost přisuzuji faktu, že realizace první sady didaktických her a předešlé vyplnění prvního vstupního a výstupního testu mělo na řešení úloh v druhém vstupním testu značný pozitivní vliv.

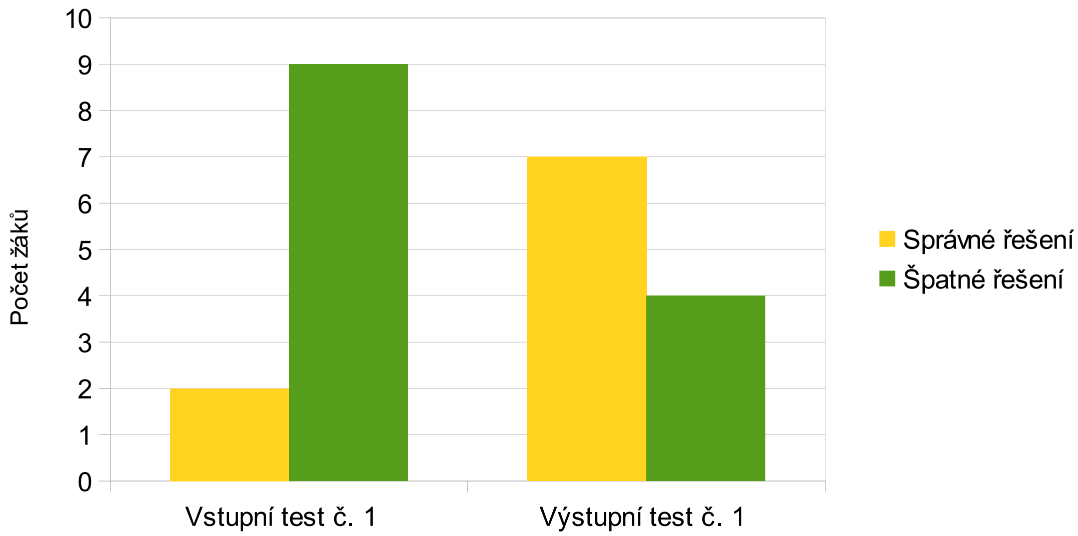
Dále jsem zmapovala, se kterými úlohami ve vstupních testech zaměřených na opakování a uspořádání prvků měli žáci problémy. Sledovala jsem, zda budou žáci po realizaci kombinatorických didaktických her v řešení paralelních úloh ve výstupních testech úspěšnější.

První problémovou úlohou byla v prvním vstupním testu úloha č. 2 s tímto zadáním: *Na parkoviště přijelo zelené auto, modré auto a dvě červená. Zbývala zde už však jen poslední čtyři volná místa vedle sebe. Jak mohou auta vedle sebe zaparkovat? Pokus se najít všechny možnosti.* Jednalo se o úlohu na permutaci s opakováním. Mezi žáky, kteří vykazovali v této úloze obtíže, jelikož měli problém s opakováním prvků, patří: CH1, CH7 a CH5.



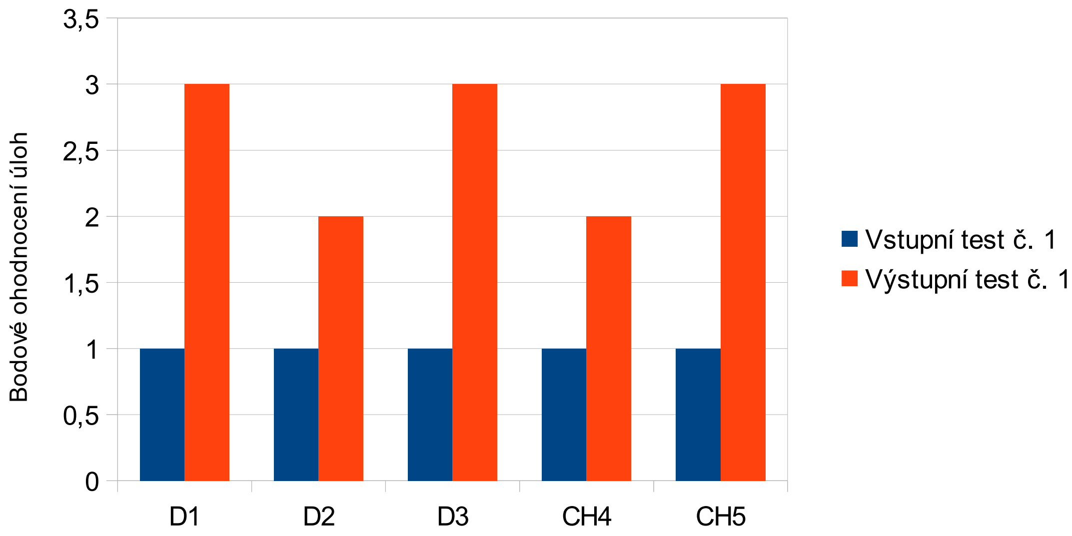
Graf 3: Vstupní test a výstupní test č. 1 - úloha č. 2 (vybraní žáci)

Po realizaci první sady didaktických her se dva žáci (CH1 a CH7) v řešení podobné úlohy ve výstupním testu zlepšili (viz graf č. 3). Místo jednoho bodu získal žák CH1 body dva a žák CH7 body 3. Žák CH5 však úlohu opětovně nedokázal vyřešit. Následují graf ukazuje, jak byli v řešení této úlohy úspěšní ostatní žáci.



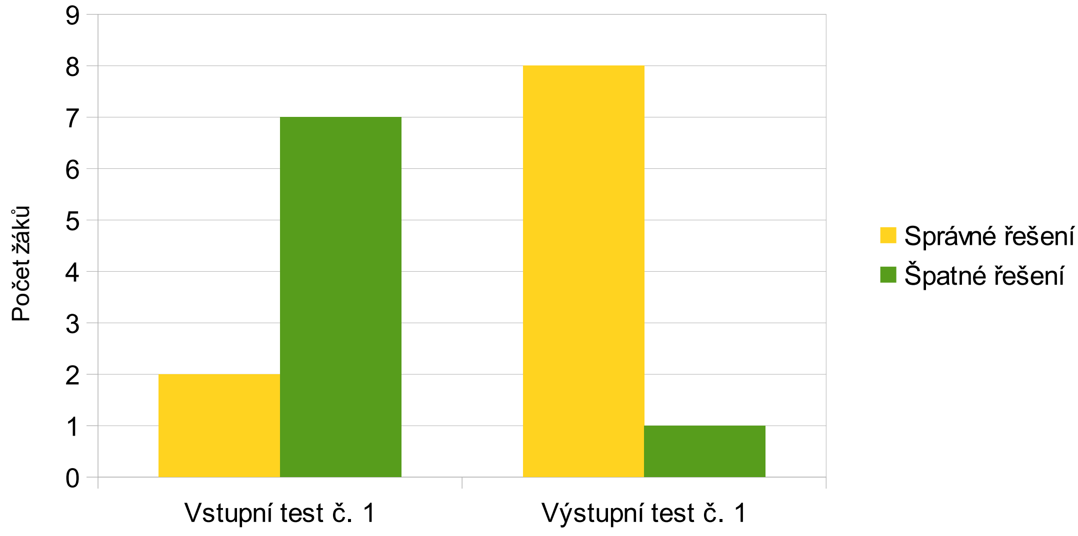
Graf 4: Vstupní a výstupní test č. 1 - úloha č. 2 (ostatní žáci)

Druhou problémovou úlohou byla v prvním vstupním testu úloha č. 4 s tímto zadáním: *Tatínek nemůže otevřít svůj kufr, protože zapomněl číselný kód, kterým se zámek u kufr odemyká. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 1 a 2. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 1 a 2 může kufr otevřít?* Jednalo se o úlohu na variaci s opakováním. Mezi žáky, kteří vykazovali v této úloze obtíže, jelikož měli problém s opakováním prvků, patří: D1, D2, D3, CH4 a CH5.



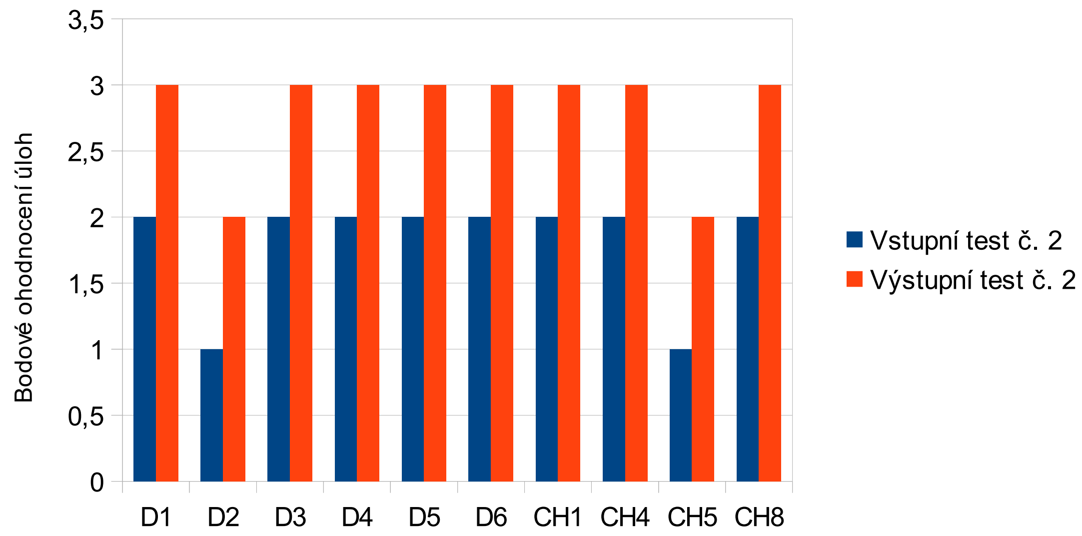
Graf 5: Vstupní a výstupní test č. 1 - úloha č. 4 (vybraní žáci)

Po realizaci didaktických her se tři žáci (D1, D3 a CH5) v řešení podobné úlohy ve výstupním testu výrazně zlepšili (viz graf č. 5). Místo jednoho bodu získali body tři. Žákyně D2 a žák CH4 paralelní úlohu ve výstupním testu zcela správně nevyřešili, jelikož jednu možnost řešení z nepozornosti napsali dvakrát (viz řešení úlohy č. 4 žákyní D2 a žákem CH4 v prvním výstupním testu na přikládaném CD). Následující graf ukazuje, jak byli v řešení této úlohy úspěšní ostatní žáci.



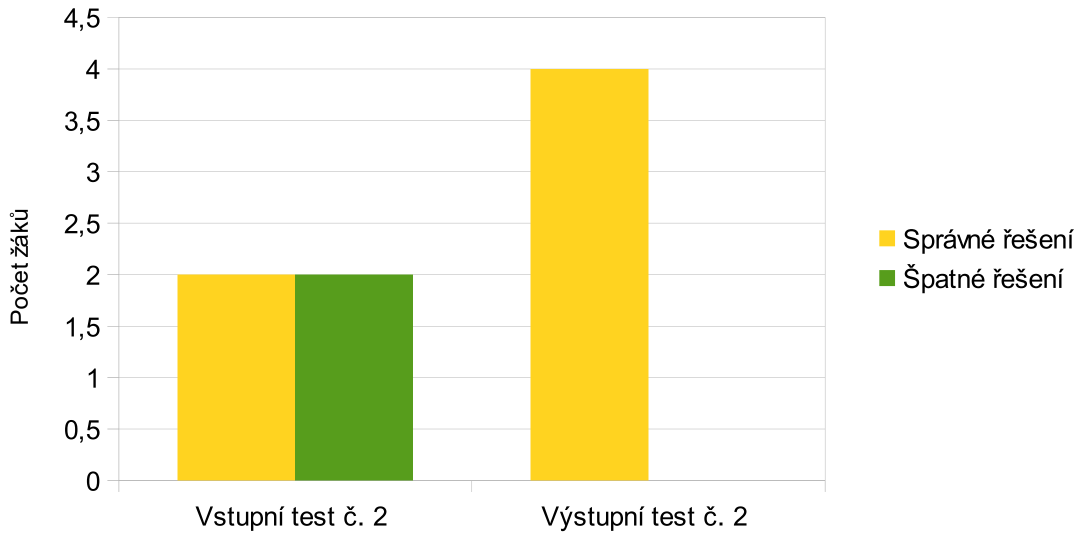
Graf 6: Vstupní a výstupní test č. 1 - úloha č. 4 (ostatní žáci)

Třetí problémovou úlohou byla v druhém vstupním testu úloha č. 2 s tímto zadáním: *V cukrárně prodávají tři druhy kopečkové zmrzliny: citrónovou, vanilkovou a pistáciovou. Toník si za peníze od maminky může koupit pouze dva kopečky zmrzliny. Kolik má možností, jaké kopečky zmrzliny si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva kopečky zmrzliny stejného druhu.* Jednalo se o úlohu na kombinaci s opakováním. Mezi žáky, kteří měli s touto úlohou problémy, jelikož nerozlišili, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků, patří: D1, D2, D3, D4, D5, D6, CH1, CH4, CH5 a CH8.



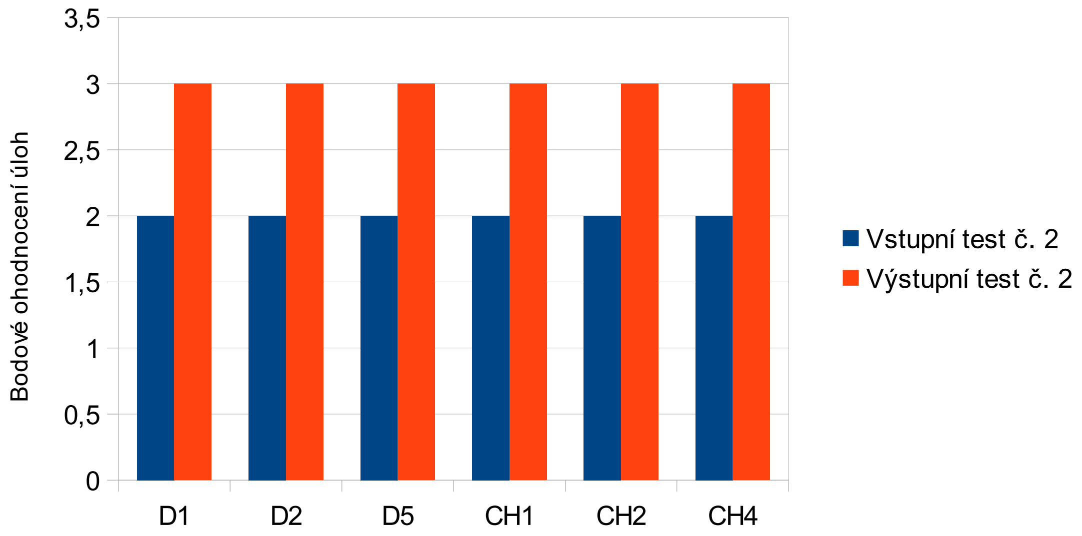
Graf 7: Vstupní a výstupní test č. 2 - úloha č. 2 (vybraní žáci)

Po realizaci didaktických her se osm žáků (D1, D3, D4, D5, D6, CH1, CH4 a CH8) v řešení podobné úlohy ve výstupním testu výrazně zlepšilo (viz graf č. 7). Místo jednoho bodu získali body tři. Žákyně D2 a žák CH5 v obdobné úloze nerozlišili, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků. Uvedli tři možnosti navíc tím, že pořadí prvků v řešení otočili. Naopak neuvedli tři možnosti, ve kterých se jeden prvek opakuje dvakrát (viz řešení úlohy č. 2 v druhém výstupním testu na přikládaném CD). Následující graf ukazuje, jak byli v řešení této úlohy úspěšní ostatní žáci.



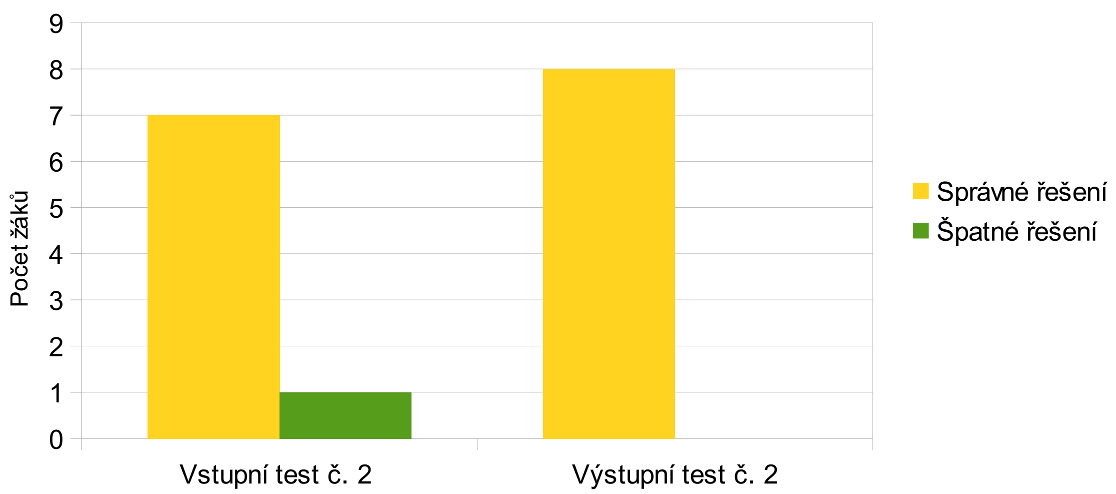
Graf 8: Vstupní a výstupní test 2 - úloha č. 2 (ostatní žáci)

Čtvrtou a poslední problémovou úlohou byla v druhém vstupním testu úloha č. 4 s tímto zadáním: *Po cestě do školy nastoupí do autobusu na jedné zastávce dvě dívky Terezka a Janička a dva chlapci Luděk a Jirka. V autobuse jsou pouze dvojmístné sedačky. Každý z chlapců chce sedět s děvčetem. Kolik je možností, jak se mohou po dvou posadit, aby seděl vždy chlapec vedle děvčete?* Jednalo se o úlohu k využití kombinatorického pravidla součinu. Mezi žáky, kteří měli v této úloze problémy patří: D1, D2, D5, CH1, CH2 a CH4.



Graf 9: Vstupní a výstupní test č. 2 - úloha č. 4 (vybraní žáci)

Po realizaci didaktických her se všichni žáci v řešení podobné úlohy ve výstupním testu zlepšili (viz graf č. 9). Místo dvou bodů získali body tři. Následující graf ukazuje, jak byli v řešení této úlohy úspěšní ostatní žáci.

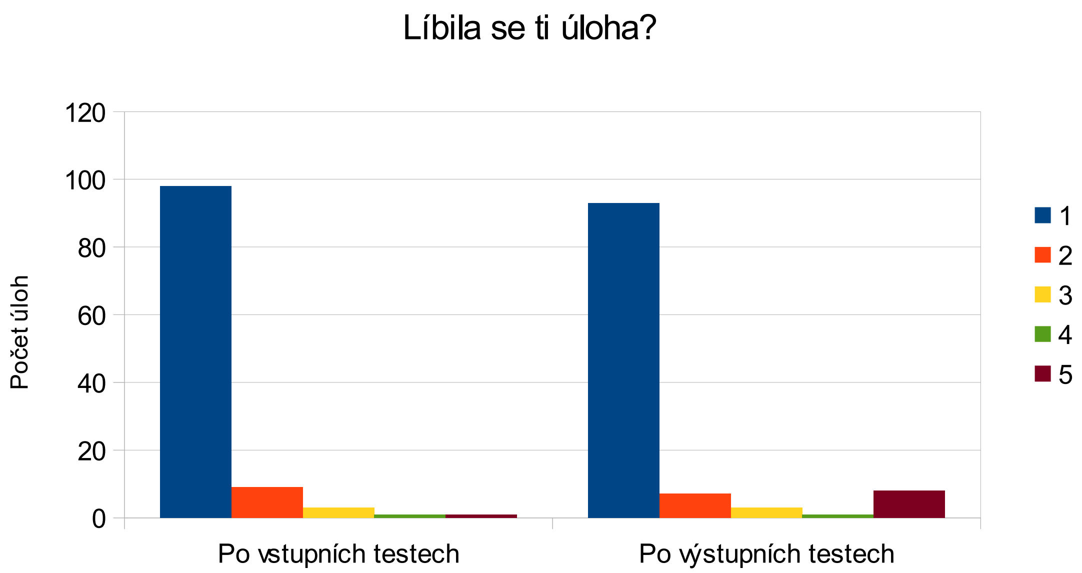


Graf 10: Vstupní a výstupní test č. 2 - úloha č. 2 (ostatní žáci)

Souhrnně by se dalo říci, že žáci měli v úlohách více problémy s uspořádáním prvků než s opakováním prvků. Domnívám se, že je to tím, že se v zadání úloh mnohdy uvádí, zda se prvky mohou či nemohou opakovat nebo je opakující se prvek v úloze jasně zřejmý. Zda záleží či nezáleží na pořadí prvků se již v zadání úloh často neobjevuje a je na žácích, aby se sami rozhodli, čímž se zvětšuje pravděpodobnost, že se spletou.

11.2 Vyhodnocení dotazníků

Dotazníky sloužily jako prostředek k hodnocení jednotlivých úloh v testech z pohledu žáků.[5] První otázkou se sledovala míra obliby úlohy. Žáci dle pokynů kroužkovali na stupnici číslo od 1 (líbí) do 5 (nelíbí). Následující graf srovnává ohodnocení jednotlivých úloh v obou vstupních a výstupních testech.

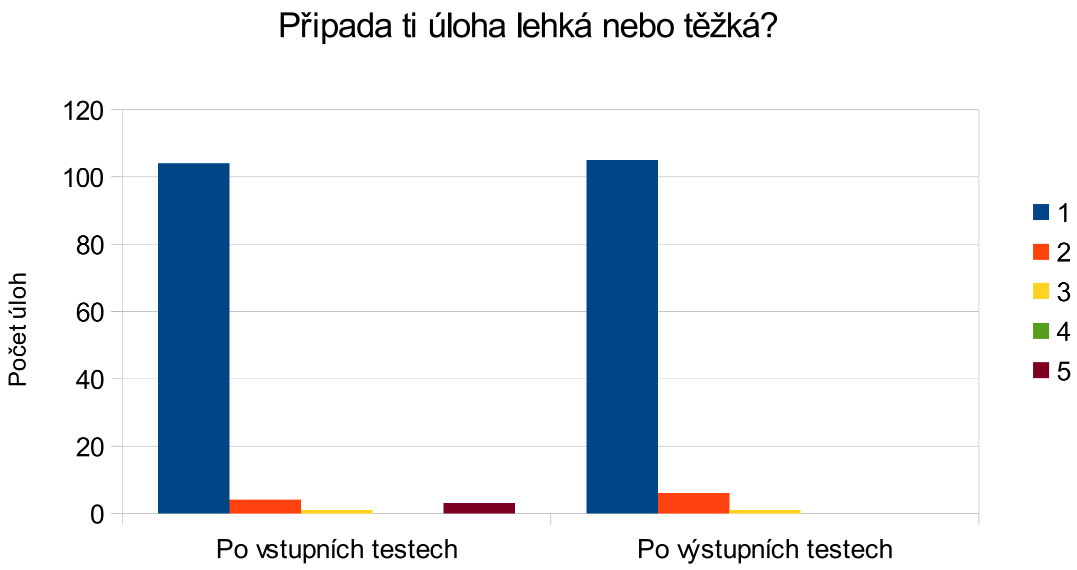


Graf 11: Míra obliby úloh

Obliba úloh se ve výstupních testech oproti testům vstupním mírně zhoršila, avšak rozdíly jsou minimální. Žáci ve vstupním tak výstupním testu většinou hodnotili úlohy pozitivně. Můžeme předpokládat, že je tato skutečnost ovlivněna tím, že se žáci s kombinatorickými úlohami v hodinách matematiky ještě nesetkali (viz níže vyhodnocení otázky: *Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu?*). Úlohy tak byly pro žáky nové a zajímavé.

5 Veškeré vyplněné dotazníky všech zkoumaných žáků nebylo možné kvůli jejich rozsahu začlenit do příloh diplomové práce. Poskytuji je však se vstupními a výstupními testy k nahlédnutí v přikládaném CD.

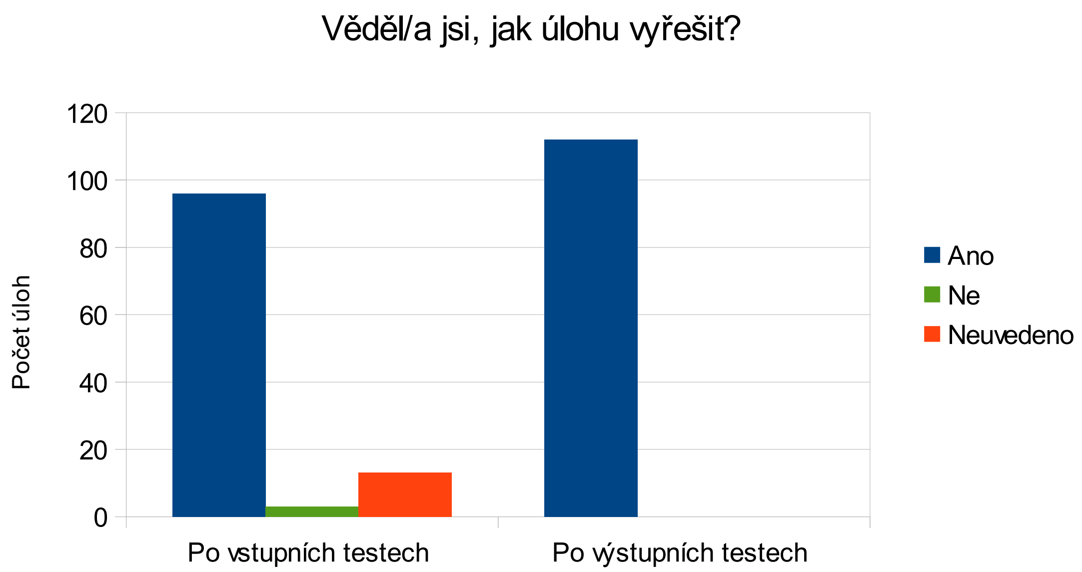
Druhá otázka byla zaměřena na míru obtížnosti úloh. Žáci dle pokynů kroužkovali na stupnici číslo od 1 (lehká) do 5 (těžká). Následující graf srovnává ohodnocení jednotlivých úloh v obou vstupních a výstupních testech.



Graf 12: Míra obtížnosti úloh

Obtížnost úloh se ve výstupních testech oproti testům vstupním mírně zlepšila, avšak rozdíly jsou minimální. Žáci ve vstupním i výstupním testu většinou hodnotili úlohy jako nenáročné. Součástí této otázky byl dodatek „*Proč*?“ (tj. Proč ti úloha připadala lehká či těžká?). Na tuto otázku většina žáků neodpověděla. U těch žáků, kteří odpověď napsali se objevovala tato tvrzení: „*Protože se mi líbí. Protože je lehká. Protože se při ní zamyslím a hned vím, jak se počítá. Protože mám podobné úlohy rád/a. Protože mě podobné úlohy baví*.“

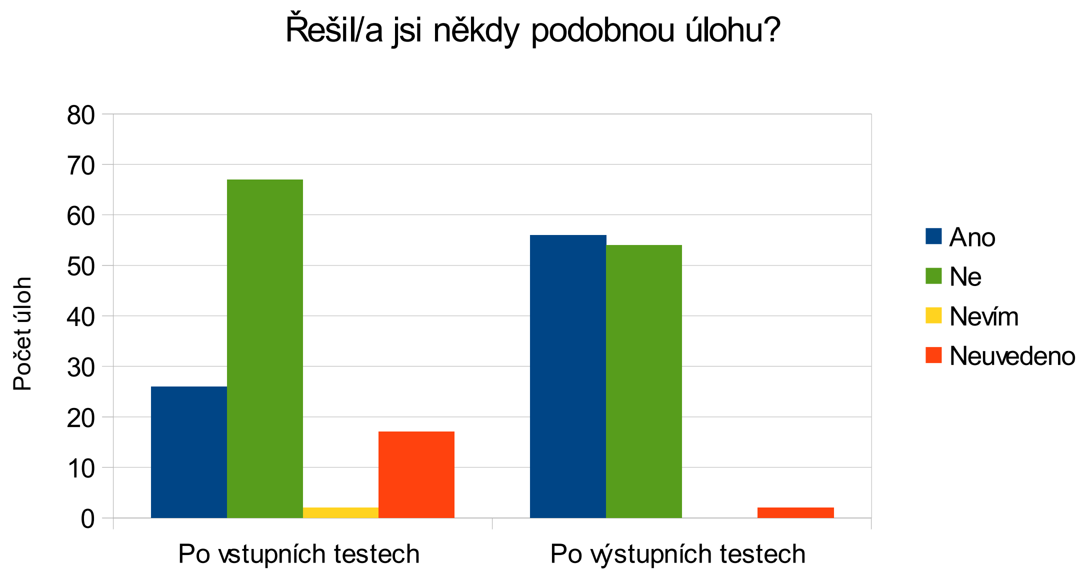
U třetí otázky měli žáci napsat, zda věděli, jak úlohu vyřešit. Zmapovala jsem, jak na tuto otázku žáci odpovídali po řešení úloh ve vstupních a výstupních testech.



Graf 13: Odpovědi na otázku: Věděl/a jsi, jak úlohu vyřešit?

Většina žáků ve vstupních i výstupních testech uvedla, že věděla, jak úlohy vyřešit. Aspirační úroveň žáků je však příliš vysoká a neodpovídá výsledkům úspěšnosti řešení úloh (viz srovnání grafu č. 1 a grafu č. 13).

Ústřední otázka dotazníku, jejíž odpovědi jsou podstatné a důležité, zněla takto: „*Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu?*“ Zmapovala jsem, jak na tuto otázku žáci odpovídali po řešení úloh ve vstupních a výstupních testech.



Graf 14: Odpovědi na otázku: Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu?

Většina žáků v dotaznících vyplněných po vstupních testech uvedla, že se s podobnými úlohami ještě nesetkala. U odpovědí „*ano*“ se pouze dvakrát objevilo upřesnění „ve *škole*“. V dotaznících vyplněných po výstupních testech odpověděla většina žáků „*ano*“, avšak rozdíl mezi počtem odpovědí „*ano*“ a „*ne*“ není příliš velký. U odpovědí „*ano*“ se dvacet devět krát objevilo upřesnění „*v minulém testu*“.

12 Kazuistiky zkoumaných žáků

Kazuistiky jsou zaměřené na mapování úrovně kombinačního myšlení před realizací her a po jejich realizaci. V zásadě byl zjišťován individuální pokrok žáků v řešení kombinatorických úloh, založený na konfrontaci vstupních a výstupních testů. Sledoval se také rozvoj jejich řešitelských strategií.

Kazuistiky jsou doplněny úryvky z rozhovorů, které jsem s žáky vedla na závěr po realizaci všech her a vyhodnocení všech vstupních i výstupních testů. Žáci mi objasňovali některé skutečnosti a nejasnosti v testech se vyskytující.

Zároveň se u každé kazuistiky objevuje žákovo konkrétní řešení jedné dvojice úloh, nejprve úlohy ze vstupního testu a následně k ní úlohy paralelní z testu výstupního, za účelem názorného poukázání na individuální rozvoj kombinačního myšlení u jednotlivých žáků.

12.1 Žáci třetího ročníku

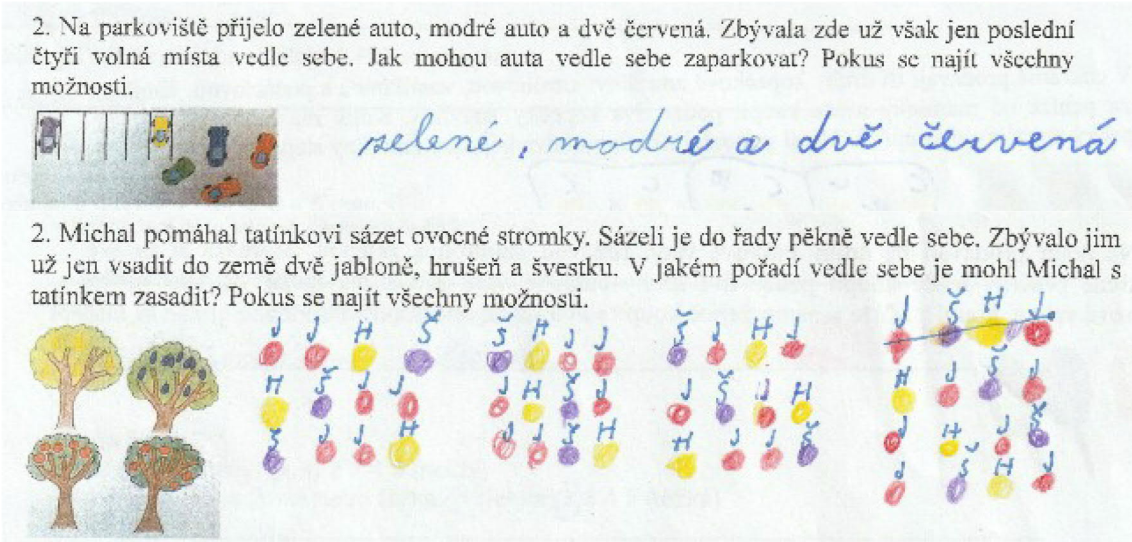
ŽÁKYNĚ – D1

Stručná charakteristika:

Této žákyni je 10 let. Je to pečlivá a šikovná dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. Patří mezi lepší žáky této třídy. Matematika jí nedělá problémy, všechno učivo z tohoto předmětu si bez problémů osvojuje. Je velice manuálně zručná. Krásně maluje a kreslí.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Dívka v prvním vstupním testu úlohám moc neporozuměla. Ani jednu úlohu nevyřešila zcela správně. V prvních třech úlohách našla pouze jedno možné řešení, které vypsala slovně. U úlohy čtvrté je vidět pouze náznak řešení, avšak bez pozitivního výsledku. Po realizaci první sady didaktických her je patrný značný posun v kombinačním myšlení této dívky (viz ilu. č. 1).



Ilustrace 1: Srovnání řešení úl. č. 2 z prvního vstupního a výstupního testu (D1)

Veškeré úlohy v prvním výstupním testu jsou vyřešeny správně. V první úloze dívka využila princip kódování. Úlohu řešila strategií výčtem všech možných řešení pomocí tiskacích písmen, označujících jednotlivá jména žáků, která se v úloze objevují. Ve druhé úloze použila pastelky a pomocí grafického záznamu, tj. barevných puntíků (označených zároveň i velkými tiskacími písmeny, aby rozlišila jednotlivé ovocné stromy) našla všechna možná řešení (viz ilu. č. 1). Využila též kódování. Úlohu řešila jak formou barev, tak i označením písmeny. Vzájemně tyto způsoby propojila. Třetí úlohu dívka opět řešila výčtem všech možností pomocí tiskacích písmen a v úloze čtvrté vypsala všechny trojice čísel do dvou sloupců pod sebe.

U: „*Když se podíváš na první test, který jsi psala. Ani jednu úlohu jsi neměla dobře. Teď už bys věděla, jak úlohy řešit?*“

Ž: „Jo… já sem předtim vůbec nevěděla, co s tim mám dělat. Teď už bych věděla asi.“

U: „*Podívej se třeba na tuto čtvrtou úlohu.*“ (Čtu dívce úlohu č. 4 z prvního vstupního testu.) „*Řekni nějaké možné řešení?*“

Ž: *„No… třeba 1, 2, 2 taky 1, 2, 1; 1, 1, 1; 2, 2, 2 a tak…, je jich moc.*“

Ve druhém vstupním testu měla dívka problém s úlohou druhou a čtvrtou, úlohu první a třetí vyřešila zcela správně. První úlohu řešila grafickým znázorněním králíků pomocí hnědých puntíků. Je evidentní, že vizualizace pro ni hraje důležitou roli – opět využívá barevné kódování. Podobně tomu bylo i u úlohy č. 3. V druhé úloze je viditelné, že dívka nedokáže rozlišit, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků. V úloze na pořadí, v jakém si Toník koupí dva kopečky zmrzliny, nezáleželo. Dívka však myslela, že na pořadí záleží a vypsala tak mnohem více způsobů řešení.

U: *„Podívej se tady na tu úlohu s kopečky zmrzliny.“* (Ukazuji dívce úlohu č. 2 ve druhém vstupním testu.) *„Nakreslila jsi tu více možných řešení, než je třeba. Víš, kde jsi udělala chybu?“*

Ž: „Sem to vždycky ještě otočila… každý ty dva kopečky. Správně bude jenom tady těch raz, dva, tři, čtyři pět, šest.„ (Ukazuje prstem správné možnosti řešení.)

Ve čtvrté úloze se tato skutečnost projevila také. Dívka vypsala mnohem více možností řešení, jelikož nerozlišila, že na pořadí prvků nezáleží. Po realizaci druhé sady didaktických her však tento princip pochopila a začala rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků ve skupině. Ve druhém výstupním testu už totiž chyby neudělala. Všechny úlohy už vyřešila správně. Použila stejné řešitelské strategie jako v předchozích testech – výpis všech možností pomocí velkých tiskacích písmen a grafické znázornění pomocí barevných puntíků.

Závěr:

Kombinatorické didaktické hry dívce pomohly především v tom, že si uvědomila, jak je možné kombinatorické problémy v podobě úloh řešit. Značně se zlepšily její řešitelské strategie. Oproti prvnímu vstupnímu testu začala v ostatních testech řešit úlohy formou výčtu prvků pomocí kódování (využití velkých tiskacích písmen zastupujících objekty z jednotlivých slovních úloh) a grafického záznamu (využití barevných puntíků). Dívka po realizaci her také začala rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků ve skupině.

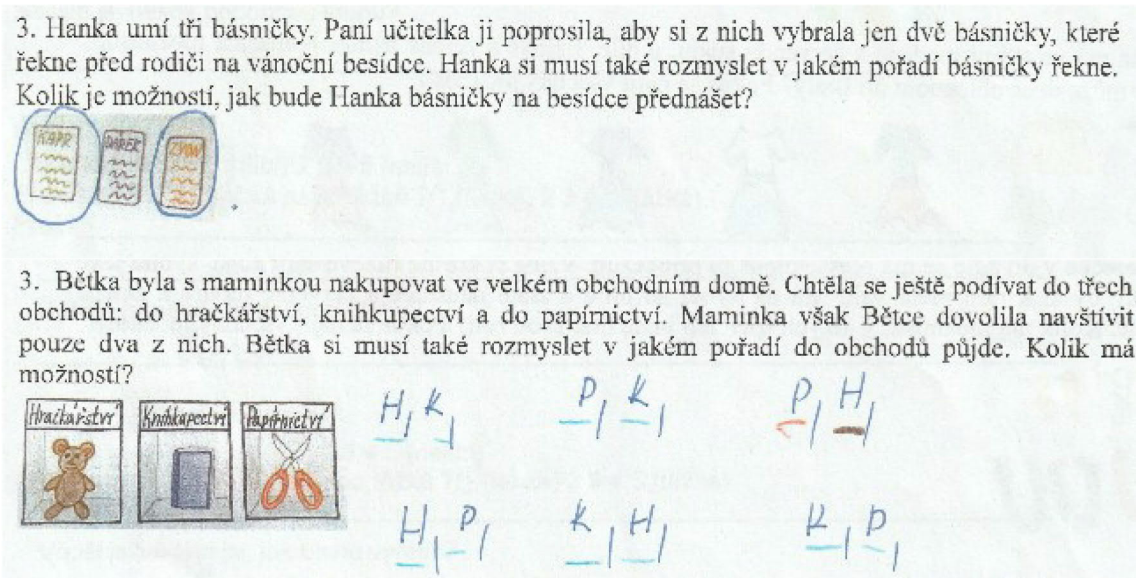
ŽÁKYNĚ – D2

Charakteristika:

Této žákyni je 9 let. Je to velice chytrá dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí nadprůměru. Každou práci dělá s rozmyslem a pečlivě. Její pracovní tempo je rychlejší než u ostatních žáků jejího věku. V matematice nemá žádné problémy. Veškeré učivo ovládá bez obtíží. Navštěvuje kroužek paličkování a ráda kreslí.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Její první vstupní test byl obdobou žákyně D1. Dívka ani jednu úlohu nevyřešila zcela správně. V prvních dvou úlohách našla pouze jedno možné řešení, které vždy vypsala slovně. U dvou dalších úloh nenašla ani jedno správné řešení. Po realizaci první sady didaktických her je u ní také patrný značný posun v kombinačním myšlení (viz ilu. č. 2).



3. Hanka umí tři básničky. Paní učitelka ji poprosila, aby si z nich vybrala jen dvě básničky, které řekne před rodiči na vánoční besídce. Hanka si musí také rozmyslet v jakém pořadí básničky řekne. Kolik je možností, jak bude Hanka básničky na besídce přednášet?

3. Bětka byla s maminkou nakupovat ve velkém obchodním domě. Chtěla se ještě podívat do třech obchodů: do hračkářství, knihkupectví a do papírnictví. Maminka však Bětce dovolila navštívit pouze dva z nich. Bětka si musí také rozmyslet v jakém pořadí do obchodů půjde. Kolik má možností?

Ilustrace 2: Srovnání řešení úl. č. 3 z prvního vstupního a výstupního testu (D2)

V prvním výstupním testu má první a třetí úlohu vyřešenou zcela správně. Našla zde všechna možná řešení. V úloze druhé a čtvrté uvedla více možností řešení než v paralelních úlohách v testu vstupním, ale nevšimla si, že některé možnosti řešení v těchto dvou úlohách zaznamenala dvakrát. K řešení úloh využila strategii výpisu všech možných řešení pomocí velkých tiskacích písmen označujících objekty v úloze uvedené (viz ilu. č. 2) nebo znázornila možná řešení pomocí pastelek barevnými puntíky. U čtvrté úlohy vypsala všechny trojice čísel do třech sloupců.

Ve druhém vstupním testu dělaly dívce problémy dvě úlohy – druhá a čtvrtá. Ve druhé úloze tvořila z kopečků zmrzliny trojice s tím, že nerozlišila, že na pořadí jednotlivých kopečků zmrzliny nezáleží. U úlohy čtvrté také, jako předchozí dívka (D1) vypsala mnohem více možností řešení, jelikož si myslela, že na pořadí záleží.

U: *„Podívej se na tuto úlohu s autobusem."* (Ukazuji dívce úlohu č. 4 z druhého vstupního testu a následně přečtu její zadání.) *„Myslíš, že jsi ji vyřešila správně?"*

Ž: *„Ne, já sem myslela, že je důležitý najít co nejvíc možností. Vlastně… jenom musí sedět kluk a vedle holka… budou správně jenom tady ty čtyři.“* (Ukazuje na správné možnosti řešení.)

První úlohu v druhém vstupním testu dívka vyřešila logickou úvahou. Uvedla jen správnou odpověď. V úloze třetí využila grafického záznamu pomocí obrázků, kdy nakreslila jednotlivé kombinace triček a sukní. Po realizaci druhé sady didaktických her vyřešila dívka ve druhém výstupním testu všechny úlohy správně kromě úlohy č. 2. Zde nerozlišila, že se jedná o úlohu, kde nezáleží na pořadí prvků a vytvořila tak několik možností navíc. Naopak dvojice vždy se stejných druhem cukrové vaty dívka vynechala. Úlohy řešila opět strategií výpisu všech možných řešení pomocí velkých tiskacích písmen nebo možnosti řešení znázornila pomocí pastelek barevnými puntíky.

Závěr:

Dívce pomohly didaktické hry k tomu, aby si také uvědomila, jak se dají kombinatorické úlohy řešit. Došlo k rozvoji jejích řešitelských strategií. Mimo první vstupní test řešila úlohy v testech formou výčtu prvků pomocí kódování (využití velkých tiskacích písmen zastupujících objekty z jednotlivých slovních úloh) a grafického záznamu (využití barevných puntíků a obrázků). Dívka po realizaci her stále nerozlišuje, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků ve skupině.

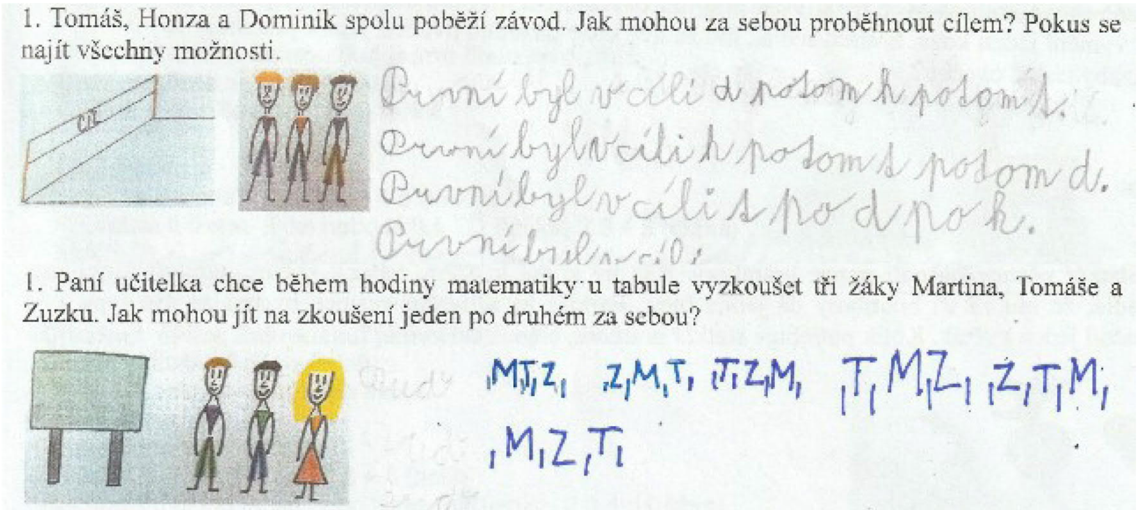
ŽÁKYNĚ – D3

Charakteristika:

Této žákyni je 8 let. Je to šikovná dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. Není příliš pečlivá a každou práci udělá raději rychle a ledabyle, jen aby jí nezabrala příliš mnoho času. Chybí jí vytrvalost. V matematice dělá časté chyby z nepozornosti, učivo si jinak osvojuje bez problémů. Má hudební nadání. Navštěvuje ZUŠ, kde hraje na housle.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu měla dívka jen jednu úlohu (č. 3) zcela správně vyřešenou. První úlohu řešila výpisem celých vět, kde popisuje postup, jak jednotliví chlapci mohli doběhnout do cíle. První tři věty ukazují, že dívka zadání rozumí a úlohu řeší správným způsobem. Čtvrtá věta však končí v půli a další řešení se už neobjevují. Při rozhovoru mi bylo sděleno, že si dívka myslela, že již žádná další řešení neexistují (viz ilu. č. 3). Druhou úlohu řešila pomocí znázornění barevných puntíků. Ač je postup správný, některá řešení chybí. Ve čtvrté úloze je patrný náznak řešení, kdy dívka začala tvořit dvojmístné kódy místo trojmístných výpisem číslic. Po realizaci první sady didaktických her byla dívka v řešení úloh značně úspěšnější. V prvním výstupním testu měla všechny úlohy již zcela správně vyřešené. Místo vypisování celých vět žákyně při řešení využila velká tiskací písmena, která zastoupila objekty z jednotlivých slovních úloh (viz ilu. č. 3) a barevné puntíky. Ve čtvrté úloze již správně tvořila trojice číslic podle zadání.


1. Tomáš, Honza a Dominik spolu poběží závod. Jak mohou za sebou proběhnout cílem? Pokus se najít všechny možnosti.

1. Paní učitelka chce během hodiny matematiky u tabule vyzkoušet tři žáky Martina, Tomáše a Zuzku. Jak mohou jít na zkoušení jeden po druhém za sebou?

Ilustrace 3: Srovnání řešení úl. č. 1 z prvního vstupního a výstupního testu (D3)

Ve druhém vstupním testu vyřešila zcela správně pouze úlohu č. 4. S první úlohou si vůbec nevěděla rady, místo řešení napsala slovo „nevím“. U druhé a třetí úlohy dívka nerozlišila, zda záleží nebo nezáleží na pořadí daných prvků. Vytvořila příliš mnoho možností tím, že pořadí jednotlivých prvků otáčela. V druhém výstupním testu si již s první úlohou na kombinování prvků podle pravidel směňování poradila. Správně znázornila hnědými puntíky počet brambor a svůj postup řešení doplnila o výpočet.

U: *„Teď už bys věděla, jak úlohu vyřešit?“* (Ukazuji dívce úlohu č. 1 ve druhém vstupním testu a následně čtu její zadání.)

Ž: *„Za jednu kozu to sou tři králíci. Tři a tři je šest… takže šest, šest králíků.“*

U druhé úlohy s cukrovými vatami (paralelní s úlohou s kopečky zmrzliny), už si uvědomila, že nezáleží na pořadí a uvedla jen správné možnosti řešení. Čtvrtá úloha byla také vyřešena správně. U třetí úlohy však dívka udělala chybu z nepozornosti. Uvedla v ní jedno řešení dvakrát a jedno správné řešení chybí. Jinak už si uvědomila, že nezáleží na pořadí prvků a ostatní možnosti řešení jsou správné. Co se týče jejích řešitelských strategií, dívka ustoupila od popisu řešení v celých větách (viz ilu. č. 3) a následující úlohy řešila několika řešitelskými strategiemi – výčtem prvků (využití velkých tiskacích písmen zastupujících objekty z jednotlivých slovních úloh, které jsou v některých úlohách doplněné o barevné puntíky) a grafickým záznamem (využití barevných puntíků a obrázků).

Závěr:

Didaktické hry se staly determinantem rozvoje řešitelské strategie této dívky. K řešení úloh začala využívat výčet prvků pomocí kódování (tiskacích písmen) a grafického záznamu (puntíků a obrázků). Začala zároveň rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků. V neposlední řadě si osvojila dovednost kombinovat prvky podle pravidel směňování, což je patrné u srovnání prvních úloh v druhém vstupním a druhém výstupním testu.

ŽÁK – CH1

Charakteristika:

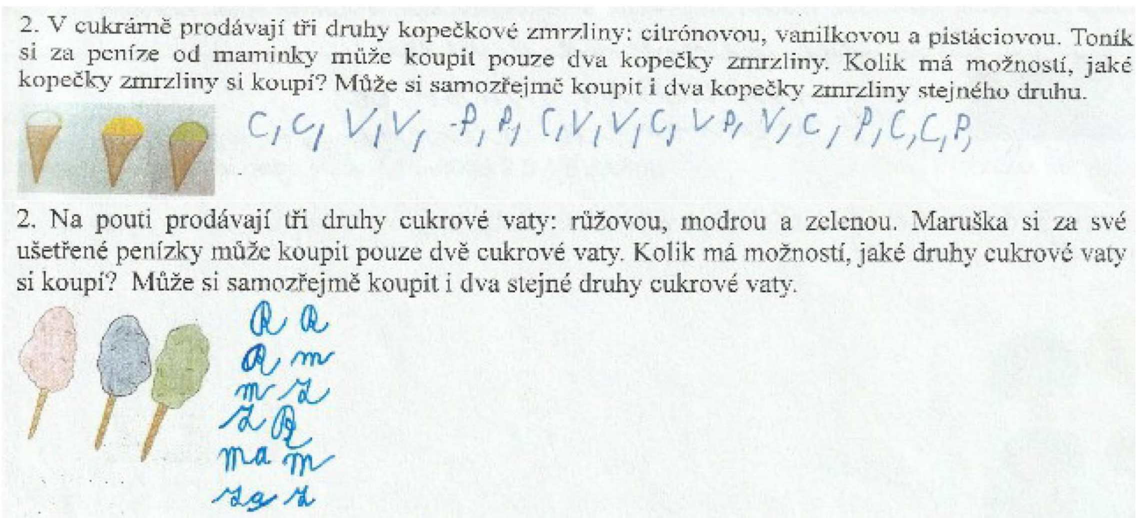
Tomuto žákovi je 8 let. Je to bystrý chlapec. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. Zadané úkoly má velmi brzy a správně hotové. Matematické učivo si osvojuje bez problémů. Často se hlásí. Je značně komunikativní. Rád sdílí své myšlenky s ostatními spolužáky i s učitelem.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Ani jednu úlohu v prvním vstupním testu nevyřešil tento chlapec zcela správně. U úloh č. 1, 3 a 4 postupoval v řešení správnou cestou, avšak nenašel všechna možná řešení. U druhé úlohy nepostřehl princip opakování, místo čtveřic tak tvořil trojice. Na jedno červené auto zapomněl. Všechny úlohy řešil výpisem všech možných řešení pomocí celých slov nebo čísel. Po realizaci první části didaktických her měl chlapec v prvním výstupním testu třetí a čtvrtou úlohu správně vyřešenou. Ve těchto úlohách našel všechna možná řešení. S úlohou první a druhou si poradil, ale některé možnosti řešení z nepozornosti uvedl dvakrát. V úloze druhé již však nevynechal opakující se prvek. Výrazně se změnila řešitelská strategie tohoto žáka. Místo vypisování všech možností celými slovy, využil kódování pomocí velkých tiskacích písmen.

Ve druhém vstupním testu vyřešil správně jen úlohu třetí. Pro její vyřešení využil výpis možností pomocí spojení počátečních písmen barev s počátečním písmenem kusů oblečení (bílé tričko – bt, sukně červená – sč). U úlohy první napsal odpověď na otázku, avšak se špatným výsledkem. V úloze druhé a čtvrté je patrné, že nerozlišil, kdy záleží a nezáleží na pořadí jednotlivých prvků (viz ilu. č. 4). Vypsal mnohem více možností, než bylo třeba – v druhé úloze velkými tiskacími písmeny, v úloze čtvrté velkými psacími písmeny.

Po realizaci druhé části didaktických her už měl chlapec všechny úlohy v druhém výstupním testu vypracované správně. Našel všechna možná řešení úloh. V první úloze místo prvotní strohé odpovědi znázornil své správné řešení pomocí příkladu, kde se objevuje kombinace čísel a obrázků zeleniny. Ze zápisu je patrné, že nejprve chtěl chlapec opět uvést číslo tři, pak se ale opravil a správně napsal číslo šest. U druhé a čtvrté úlohy, nyní už bez problémů, rozlišil, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků a uvedl tak správný počet řešení (viz ilu. č. 4). Jako strategii využil opět výpis začátečních písmen zastupujících objekty v úloze uvedené, ne však písmen tiskacích, ale psacích.


2. V cukrárně prodávají tři druhy kopečkové zmrzliny: citrónovou, vanilkovou a pistáciovou. Toník si za peníze od maminky může koupit pouze dva kopečky zmrzliny. Kolik má možností, jaké kopečky zmrzliny si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva kopečky zmrzliny stejného druhu.

2. Na pouti prodávají tři druhy cukrové vaty: růžovou, modrou a zelenou. Maruška si za své ušetřené penízky může koupit pouze dvě cukrové vaty. Kolik má možností, jaké druhy cukrové vaty si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva stejné druhy cukrové vaty.

Ilustrace 4: Srovnání řešení úl. č. 2 z druhého vstupního a výstupního testu (CH1)

U: „*Podívej se na tuto úlohu.*“ (Ukazuji chlapci úlohu č. 1 z druhého výstupního testu a následně čtu její zadání.) „*Jak jsi úlohu řešil?*“

Ž: „Šest brambor jsou dvě řepy a to je jeden květák. Takže brambor potřebuje šest.“

U: „A proč jsi sem nejdříve napsal tři?“

Ž: „Tři… jako tři za jednu řepu a… sem to poplet… sem zapomněl, že řepy musej bejt dvě.“

Závěr:

Didaktické hry pomohly chlapci v rozvoji řešitelských strategií. Místo výpisu všech možností slovy přešel na kódování pomocí písmen (jak tiskacích, tak psacích) a v jedné úloze (úloha č. 1 v druhém výstupním testu) využil i grafické znázornění pomocí obrázků. Chlapec začal rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků a začal vnímat princip opakování. Také schopnost řešit úlohu na kombinaci prvků podle pravidel směňování se u chlapce zlepšila.

ŽÁK – CH2

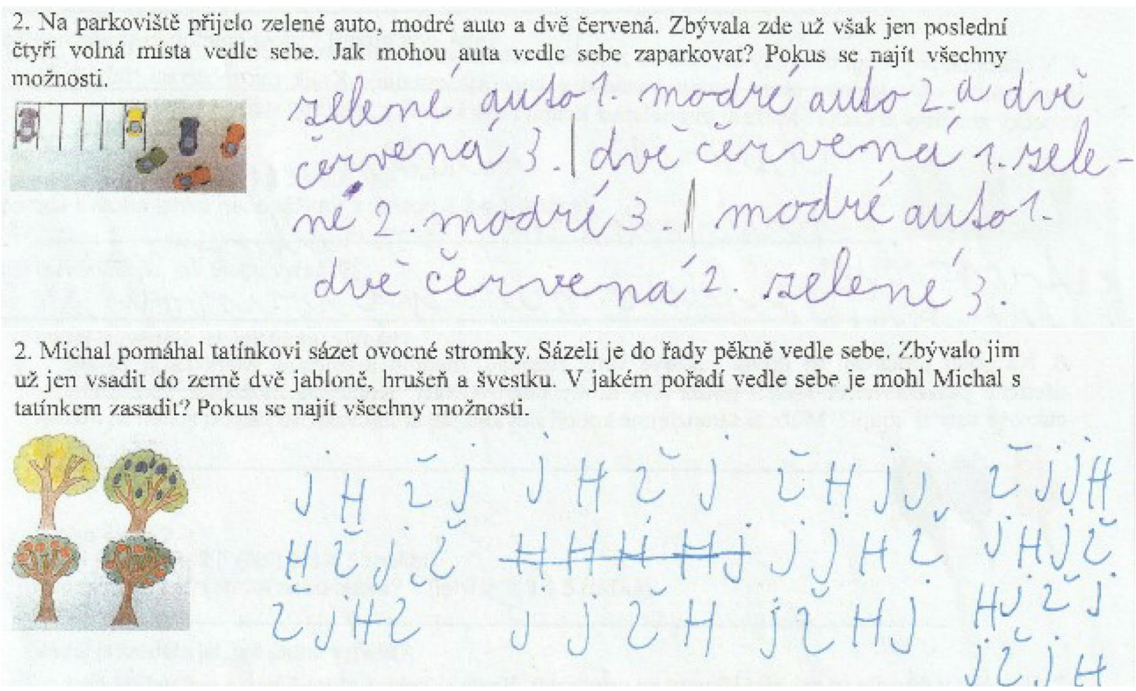
Charakteristika:

Tomuto žákovi je 9 let. Je to klidný, citlivý chlapec. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. V hodinách je velice tichý, málo se hlásí, téměř se nevyjadřuje. Při nesnázích často pláče. V matematice dosahuje dobrých výsledků. Na zadanou práci však potřebuje více času než ostatní spolužáci. Je nutné s ním vše častěji opakovat, dlouho neprobíranou látku mnohdy zapomíná.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu vyřešil tento chlapec zcela správně pouze úlohu č. 3. U ostatních úloh mu vždy chyběly některé možnosti řešení. Žák při řešení vypisoval nalezené možnosti celými slovy nebo čísly. Každou nalezenou možnost žák sice zpětně oddělil svislou čárou, přesto je však jeho řešení nepřehledné (viz ilu. č. 5). Po realizaci první sady didaktických her došlo k výrazné změně. Chlapec v prvním výstupním testu vyřešil úlohu č. 3 a 4 zcela správně. V úloze první a druhé uvedl některé možnosti řešení dvakrát. Chlapcova řešitelská strategie se výrazně zlepšila. U první úlohy je ještě patrné, že chtěl žák opět postupovat vypisováním celých slov, následně se však opravil a začal využívat kódování pomocí tiskacích i psacích písmen. Výsledek se stal přehlednější a čitelnější (viz ilu. č. 5).

Druhý vstupní test byl pro žáka náročnější. Nevyřešil ani jednu úlohu zcela správně. Kombinoval výpis všech možných řešení celými slovy s kódováním pomocí psacích písmen. V první úloze napsal přímo slovo „nevím“. U druhé úlohy zapomněl na jednu možnost. Jeho zápis je v této úloze opět nepřehledný. Třetí úlohu žák vůbec nepochopil. Kombinoval vzájemně mezi sebou jednotlivá trička i sukně. Ve čtvrté úloze je patrné, že nerozlišuje, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků. Po realizaci druhé sady didaktických her se žák opět výrazně zlepšil. V druhém výstupním testu má všechny úlohy zcela správně a přehledně vyřešené. Využil k jejich řešení kódování pomocí psacích i tiskacích písmen. První úlohu na kombinování prvků podle pravidel směňování už pochopil a uvedl jasný popis, jak k výsledku dospěl. U druhé úlohy už žádnou možnost nevynechal. Ve třetí úloze správně kombinoval jen náušnice s korály a v úloze čtvrté uvedl správný počet řešení na základě rozlišení, že v této úloze nezáleží na pořadí prvků.



Ilustrace 5: Srovnání řešení úl. č. 2 z prvního vstupního a výstupního testu (CH2)

U: *„Podívej se na tuhle úlohu."* (Ukazuji žákovi úlohu č. 1 z druhého vstupního testu a následně čtu její zadání.) *„Teď už bys věděl, jak úlohu vyřešit?"*

Ž: „Věděl. Potřebuje dvě kozy. Tři králíky za jednu kozu a tři králíky za jednu kozu, pak bude mít dvě... ty kozy. Takže šest králíků to bude."

Závěr:

Žák byl v řešení úloh po realizaci didaktických her úspěšnější. Ve výstupních testech mu již nedělala problémy žádná úloha. Uvědomil si, jak je možné kombinovat prvky podle pravidel směňování (viz úloha č. 1 v druhém vstupním i výstupním testu), a kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků. Jeho řešitelské strategie se výrazně změnily k lepšímu. Místo vypisování celých slov přešel žák ke kódování pomocí písmen (psacích i tiskacích). Řešení se tak stala čitelnější a přehlednější.

ŽÁK – CH3

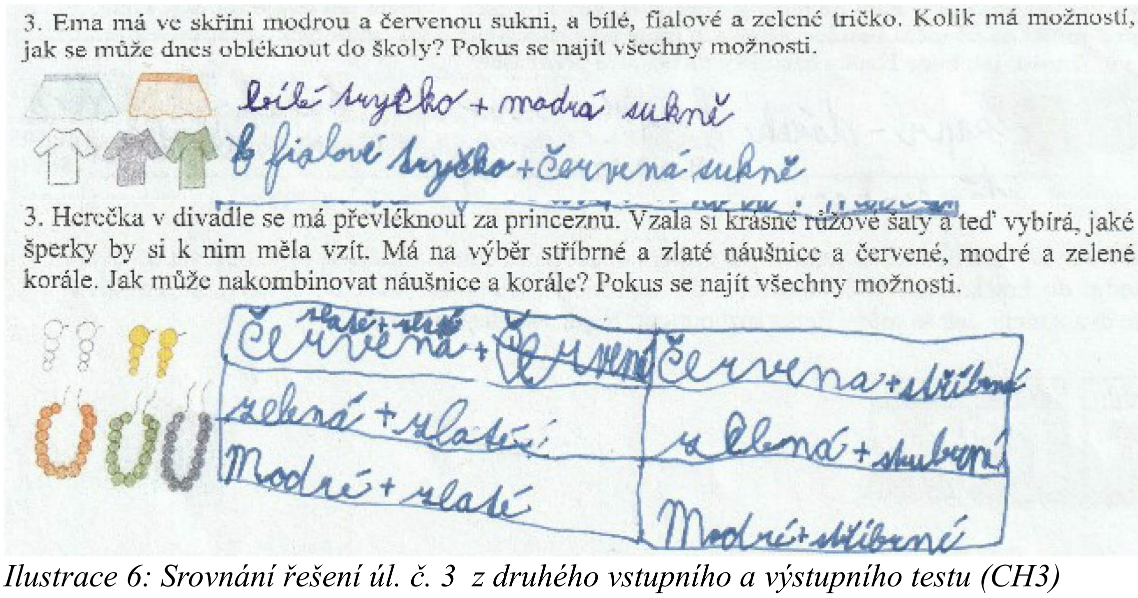
Charakteristika:

Tomuto žákovi je 8 let. Je to velice neposedný chlapec. Prospěchově se pohybuje v rozmezí podprůměru. Během výuky nedělá, co má. Jeho pracovní tempo je pomalé. Zadané úkoly nestíhá do konce hodiny splnit. Bývá pak často po škole a doplňuje si, co během vyučování nestihl. Často zapomíná pomůcky i domácí úkoly. Učivo z matematiky mu však nedělá problémy. Je to jediný předmět, kde má velmi dobré výsledky.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Ve vstupním testu žák vyřešil zcela správně pouze úlohu č. 3. Systematicky si řešení rozvrhl do tří sloupců. V každém sloupci celými slovy vypsal dvě možnosti řešení tak, že pořadí slov jednoduše obrátil. V ostatních úlohách našel jen některé možnosti řešení. První úlohu řešil schématickým nákresem postav, nad které uvedl velká tiskací písmena podle jmen chlapců, která se v úloze vyskytují. V druhé úloze si chlapec načrtl parkoviště (shodné s ilustrujícím obrázkem) a auta znázornil barevnými puntíky. Ve čtvrté úloze vypsal jen některé možné trojciferné kódy pomocí číslic. Po realizaci první sady didaktických her byl žák v prvním výstupním testu úspěšnější. Vyřešil všechny úlohy zcela správně až na úlohu č. 2. V ní však našel mnohem více způsobů řešení než v testu vstupním. První úlohu řešil opět pomocí výpisu velkých tiskacích písmen, nyní však bez znázornění postav. K řešení druhé úlohy si nakreslil rámečky a barevně je vyplňoval. U třetí úlohy je patrné, že jí chtěl řešil pomocí kresby. Od tohoto způsobu však ustoupil a jednotlivé možnosti vypsal pomocí velkých tiskacích písmen. Čtvrtá úloha byla řešena stejným způsobem jako ve vstupním testu (výpisem trojic číslic podle zadání).

Ve druhém vstupním testu měl žák veškeré úlohy správně vyřešené, kromě úlohy třetí. Zde uvedl jen některé možnosti řešení. Jako jeden z mála žáků tento chlapec správně vyřešil úlohu č. 2 a 4. Neměl problémy si uvědomit, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků. První úlohu doplnil kresbou, jinak druhou a třetí úlohu řešil výpisem všech možností pomocí celých slov (viz ilu. č. 6) a u úlohy čtvrté využil schématického nákresu postav, nad která uvedl velká tiskací písmena podle jmen osob, vyskytujících se v úloze. Druhý výstupní test žák vyřešil zcela správně. V úloze první své řešení opět doplnil obrázkem. Úlohu druhou a třetí řešil výpisem všech možností pomocí celých slov (viz ilu. č. 6) a při řešení úlohy čtvrté využil výpis možností pomocí velkých tiskacích písmena.



Ilustrace 6: Srovnání řešení úl. č. 3 z druhého vstupního a výstupního testu (CH3)

U: *„Podívej se na tuto úlohu."* (Ukazuji žákovi úlohu č. 3 z druhého vstupního testu, následně čtu její zadání.); (viz ilu. č. 6) *„Uvedl jsi sem pouze některé možnosti řešení. Věděl bys, které možnosti ti tu chybí?"*

Ž: „Jo… fialový triko a modrá sukně, a zelený triko, modrá sukně. Pak k červený sukni zelený a bílý triko."

Závěr:

Žák byl v řešení úloh po realizaci didaktických her úspěšnější. Ve výstupních testech našel v jednotlivých úlohách většinou všechny možnosti řešení. Výjimkou je úloha č. 2, kde však oproti testu vstupnímu objevil více možností. Řešitelské strategie tohoto žáka se nijak nezměnily. Stále střídal několik řešitelských strategií – výčet prvků celými slovy i kódováním pomocí tiskacích písmen, grafické znázornění za využití obrázku, schématický nákres postav s uvedením velkých tiskacích písmena podle jmen daných osob a náčrt možností pomocí různých tvarů s barevným rozlišením.

ŽÁK – CH4

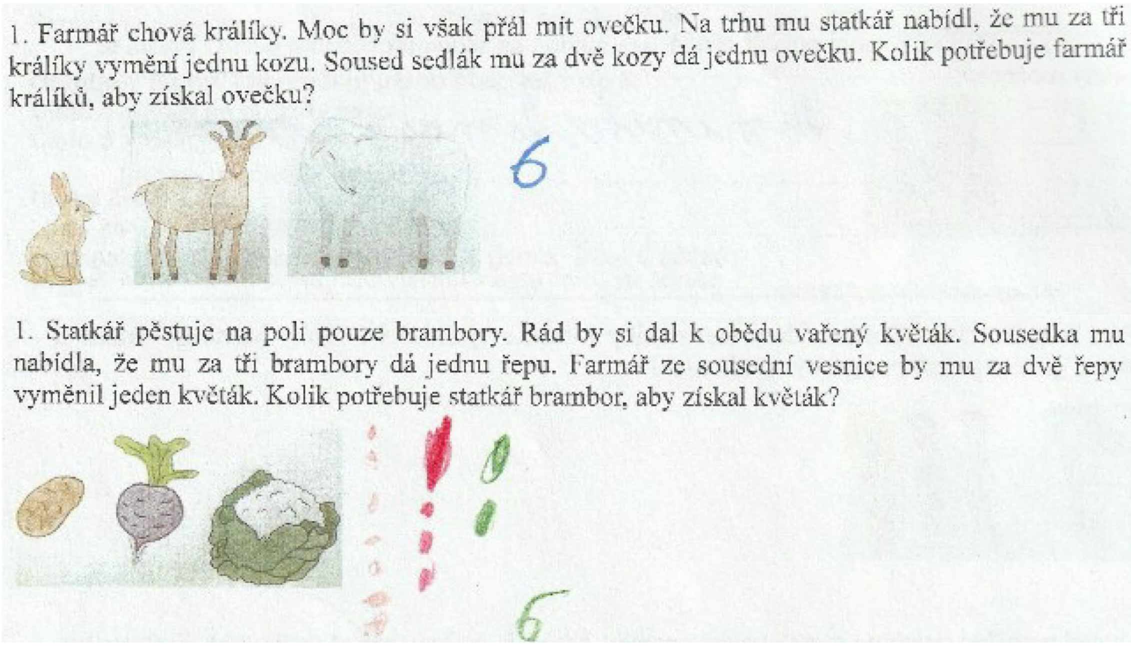
Charakteristika:

Tomuto žákovi je 9 let. Je to tichý, příliš se nevyjadřující chlapec. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. Při hodině často nedává pozor. Musí se mu individuálně připomínat, co a jak má dělat. Učivo si osvojuje pomaleji. Probírané látce mnohdy nerozumí. Chodí na doučování z českého jazyka a matematiky mimo výuku. Dobrý je v tělesné výchově. Navštěvuje kroužek vybíjené.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu nevyřešil chlapec ani jednu úlohu zcela správně. U každé úlohy uvedl pouze jednu správnou možnost řešení tím způsobem, že ji vypsal celými slovy nebo čísly. Po realizaci první části didaktických her už byl v řešení úloh úspěšnější. U úlohy první našel o jednu možnost více než v paralelním vstupním testu. Druhou a třetí úlohu v prvním výstupním testu vyřešil zcela správně, našel všechny možnosti řešení. Zároveň je u druhé úlohy patrný systematičtější postup. V úloze č. 4 uvedl všechny možnosti řešení, avšak přehlédl, že jednu možnost uvedl dvakrát. Ve výstupním testu se změnila i chlapcova strategie řešení. U první úlohy ještě vypisuje možnosti celými slovy, v následujících úlohách však celá slova nahrazuje začátečními písmeny (tiskacími i psacími), která označují objekty z úlohy.

V druhém vstupním testu vyřešil chlapec zcela správně pouze úlohu první a třetí. Druhou a čtvrtou úlohu žák nevyřešil správně, jelikož nerozlišil, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků. V obou úlohách tak napsal více možností řešení. Je patrné, že si žák již osvojil při hledání všech možností řešení úloh strategii kódování pomocí písmen místo vypisování celých slov. U první úlohy žák postupoval logickou úvahou, napsal jen správné číslo 6 bez uvedení postupu. Naopak v druhém výstupním testu je u této úlohy systematicky znázorněn celý správný řešitelský postup, i když své řešení rozvětvuje (viz ilu. č. 7). Žák využil barevné pastelky a znázornil, jak k číslu 6 dospěl. Využití barevných puntíků je vidět i v úloze č. 3, kde se řešení opět podobá systematickému záznamu všech možností řešení. Chlapec si systematicky znázornil nejdříve stříbrné a zlaté náušnice a pak k nim přiřazoval jednotlivé korále. U úlohy druhé a čtvrté použil k zápisu možností písmena. Veškeré úlohy v tomto druhém výstupním testu jsou vyřešeny zcela správně.



Ilustrace 7: Srovnání řešení úl. č. 1 z druhého vstupního a výstupního testu (CH4)

U: *„Podívej se na tyto dvě úlohy."* (Ukazuji žákovi úlohy č. 2 ze vstupního a výstupního testu. Následně čtu jejich zadání.) *„Co myslíš, jsou si podobné?"*

Ž: *„Jo"*

U: *„U úlohy se zmrzlinami jsi uvedl více možností řešení než u úlohy s cukrovými vatami. Která úloha je tedy správně vyřešená?"*

Ž: (Chvíli přemýšlí.) *„Tady ta s vatama.“*

U: „Dokázal bys říci proč?“

*Ž: (*Dívá se na úlohu se zmrzlinami.) *„Sem to tady… ty dvě zmrzliny vždycky ještě otočil. Takže tady mám nějaký navíc. (*Dívá se na úlohu s vatami.) *„U vat je to dobře. Musej bejt vždycky každý dvě barvy spolu.“*

Závěr:

Chlapec byl po realizaci didaktických her v řešení úloh ve výstupních testech úspěšnější než v testech vstupních. Posunul svou řešitelskou strategii od vypisování celých slov k využívání písmen a znázorňování pomocí barevných puntíků. V jeho řešení úloh se objevuje systematičnost, která výrazně ovlivňuje úspěšnost řešení. Chlapec začal rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků.

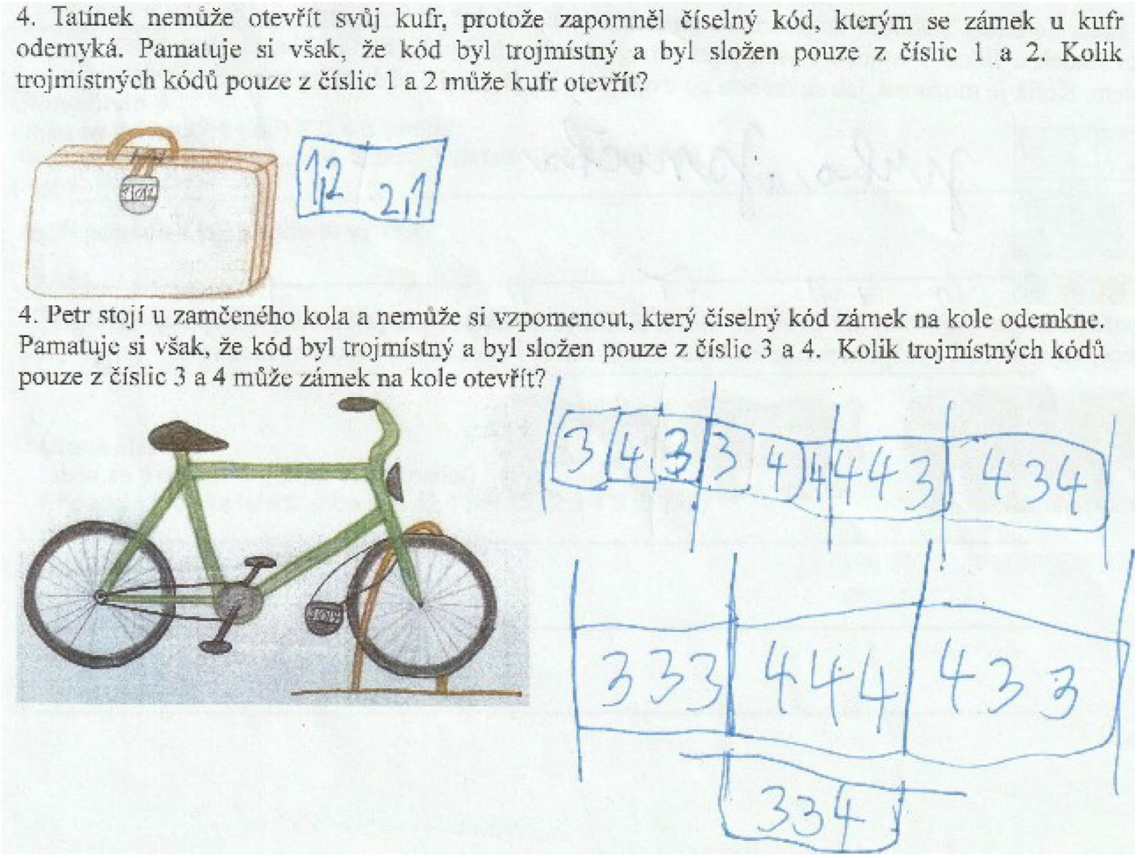
ŽÁK – CH5

Charakteristika:

Tomuto žákovi je 9 let. Je to tichý chlapec, který nechodí příliš často do školy. Prospěchově se pohybuje v rozmezí podprůměru. Na většinu látky chybí a nestíhá si ji doplňovat. Často nenosí ani domácí úkoly. Má problémy ve všech předmětech. Chodí po výuce na doučování.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu žák pochopil pouze první a třetí úlohu, ve kterých slovy vypsal jen některé možnosti řešení. Druhou úlohu nepochopil, napsal u ní slovo „nevím“ a u úlohy čtvrté tvořil ze zadaných číslic dvojice místo trojic (viz ilu. č. 8). Po realizaci první sady didaktických her se žák výrazně zlepšil. Třetí a čtvrtou úlohu v prvním výstupním testu vyřešil zcela správně. Místo výpisu celých slov zapsal ve třetí úloze jednotlivé možnosti řešení pomocí velkých tiskacích písmen. V úloze čtvrté správně uvedl trojmístné kódy, které od sebe oddělil svislými čarami (viz ilu. č. 8). U úlohy první neuvedl všechny možnosti řešení, avšak našel jich více než v testu vstupním. Úlohu druhou opět nevyřešil. Neuvedl zde ani jednu správnou možnost řešení.



Ilustrace 8: Srovnání řešení úl. č. 4 z prvního vstupního a výstupního testu (CH5)

U: *„Podívej se na tuto úlohu.“* (Ukazuji žákovi úlohu č. 2 v prvním vstupním testu a následně čtu její zadání.) *„Teď už bys věděl, jak úlohu vyřešit?“*

Ž: „Nevim“

U: „Tak já ti poradím. Například by mohlo zaparkovat zelené auto, vedle něj modré a pak vedle nich obě dvě červená. Zkus říci nějakou jinou možnost, jak můžou auta vedle sebe zaparkovat.“

Ž: „Dvě červený, zelený a modrý.“

Druhý vstupní test dopadl ještě hůře než vstupní test první. Nejen že žák nevyřešil správně ani jednu úlohu, ale náznak správného řešení se objevil jen u jedné úlohy (úloha č. 4.). V úloze čtvrté totiž našel alespoň dvě správné možnosti řešení. Úlohu první nedokázal vyřešit, uvedl slovo „nevím“. V úloze druhé tvořil místo dvojic trojice a v úloze třetí kombinoval vzájemně mezi sebou jen barevná trička. Všechny úlohy řešil výpisem možností celými slovy. Po realizaci druhé sady didaktických her je patrné, že mu v mnoha ohledech „otevřely oči“. Žák vyřešil zcela správně tři úlohy (č. 1, 3 a 4).

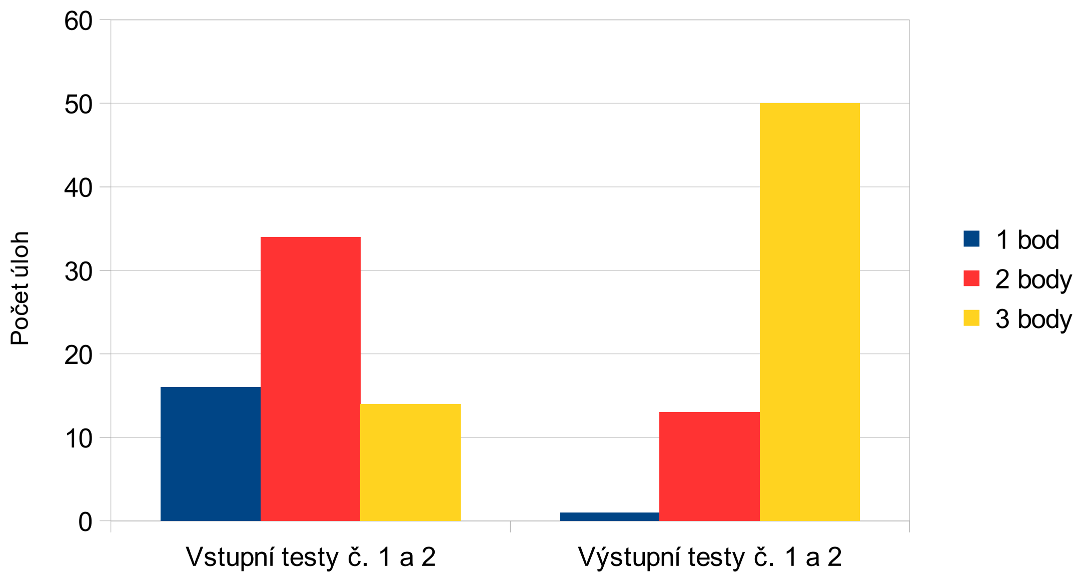
U úlohy první uvedl správný výsledek i s postupem (výpočtem). V úloze třetí a čtvrté vypsal celými slovy všechna možná řešení. Oproti tomu v úloze druhé nerozlišil, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků. Uvedl některé nesprávné možnosti řešení tak, že otočil pořadí jednotlivých druhů vat.

Závěr:

Žák se pomocí didaktických testů v mnoha oblastech výrazně zlepšil. Nacházel ve výstupních testech více možností řešení než v testech vstupních nebo je objevil všechna. Osvojil si dovednost kombinovat prvky podle pravidel směňování, což je patrné u srovnání prvních úloh v druhém vstupním a výstupním testu. Stále má však v určitých oblastech mezery. Pořád nerozlišuje, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků. Problémy má i pochopením principu opakování prvků. Řešitelské strategie tohoto žáka se výrazně nezměnily. Využívá výčet prvků celými slovy a v některých případech i kódování pomocí velkých tiskacích písmen (viz první a druhá úloha v prvním výstupním testu).

SHRNUTÍ

Souhrnně by se dalo říci, že byli žáci třetího ročníku v řešení úloh ve výstupních testech oproti testům vstupním úspěšnější. Toto tvrzení potvrzuje následující graf.



Graf 15: Rozdíl v úspěšnosti vypracování úloh u žáků 3. ročníku

Jednotlivé úlohy byly ohodnoceny jedním, dvěma nebo třemi body (viz výzkumný předpoklad P1). Ve většině úloh ve vstupních testech žáci třetího ročníku nenašli všechny správné možnosti řešení. Ve výstupních testech již většina žáků objevila veškeré správné možnosti řešení, čímž se zvýšil počet úloh, které byly ohodnoceny třemi body. Můžeme říci, že v testech výstupních oproti testům vstupním našli žáci více možností řešení nebo všechny možnosti řešení.

Žáci, kteří měli před aplikací didaktických her problémy s kombinováním prvků podle pravidel směňování nebo s chápáním podstaty opakování a uspořádání prvků, což se projevilo v nesprávně vypracovaných úlohách ve vstupních testech, které byly na tuto problematiku zaměřené, v těchto úlohách po realizaci didaktických her přestali chybovat. Výjimkou je žák CH5, u kterého problémy přetrvávaly.

Řešitelské strategie se ve smyslu způsobu řešení úloh vyjma žáků CH5 a CH3 po realizaci didaktických her výrazně změnily. Rozvoj řešitelských strategií je značně individuální. Pouze u žáka CH4 se v řešení úloh objevuje systematičnost, která výrazně ovlivňuje úspěšnost řešení. Jeho znázornění a pořadí prvků v řešení není náhodné, ale účelně organizované. U většiny žáků se ale změnil způsob záznamu všech možností řešení daných úloh. Zmapovala jsem, jaké řešitelské strategie žáci využívali v řešení úloh před a po realizaci první sady didaktických her. Srovnala jsem první vstupní testy s testy ostatními (s druhým vstupním testem a oběma testy výstupními).[6]

Žáci před první realizací didaktických her většinou využívali tyto řešitelské strategie:

- Výčet prvků/možností – výpis celých slov, čísel
- Grafický záznam – využití znaků (barevných puntíků)

Žáci po realizaci didaktických her většinou využívali tyto řešitelské strategie:

- Výčet prvků/možností – výpis celých slov, čísel + **kódování pomocí písmen** (psacích i tiskacích)
- Grafický záznam – využití znaků (barevných puntíků) + **využití obrázků**

6 Nebylo možné srovnávat řešitelské strategie obou testů vstupních s oběma testy výstupními, jelikož po realizaci první sady didaktických her již byly výsledky a tím i řešitelské strategie v druhém testu vstupním touto realizací her značně ovlivněné.

12.2 Žáci čtvrtého ročníku

ŽÁKYNĚ – D4

Charakteristika:

Této žákyni je 10 let. Je to šikovná, pečlivá dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí nadprůměru. V matematice si učivo osvojuje bez problémů. Má hudební nadání. Hraje na klavír a krásně zpívá.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu dívka vyřešila téměř všechny úlohy zcela správně. Pouze u úlohy třetí našla pouze dvě správné možnosti řešení, které znázornila pomocí obrázku. Úlohu první řešila žákyně kódováním pomocí velký tiskacích písmen. Je zřejmé, že postupovala systematicky, neboť vždy zaznamenala jednu možnost a k ní možnost druhou tím způsobem, že první prvek nechala na stejném místě a pořadí dalších dvou prvků otočila (tj. H, D, T – H, T, D). Druhou úlohu řešila grafickým záznamem pomocí barevných čtverců, jimiž rozlišila jednotlivá auta v zadání. U úlohy čtvrté vypsala trojmístné kódy do dvou řádků vedle sebe. Po realizaci první sady didaktických her vyřešila již dívka všechny úlohy v prvním výstupním testu zcela správně i úlohu třetí. Řešitelské strategie zůstaly nepozměněné, akorát v úloze druhé už je patrný systematičtější záznam jednotlivých možností řešení.

U: *„Podívej se na tuto úlohu.“* (Ukazuji dívce úlohu č. 3 v prvním vstupním testu a následně čtu její zadání.) *„Našla jsi tu jen dvě možnosti řešení. Teď už bys věděla, nějaké další možnosti?“*

Ž: „Sem na to předtim zapomněla. Kapr, dárek… dárek, kapr; kapr, zvon; zvon, kapr. To je všechno. “

V druhém vstupním testu dívka vyřešila všechny úlohy zcela správně, kromě úlohy č. 2. Zde pomocí obrázku znázornila více možností řešení, jelikož nerozlišila, že zde nezáleží na pořadí prvků (viz ilu. č. 9). Pomocí kresby řešila dívka i úlohu č. 3. Úlohu první řešila logickou úvahou a uvedla pouze stručnou správnou odpověď, úlohu čtvrtou vyřešila kódováním pomocí tiskacích písmen, jednotlivá písmena však pro přehlednost ještě rozlišila barevně. Po realizaci druhé sady didaktických her má dívka veškeré úlohy ve druhém výstupním testu zcela správně vyřešené. Dokonce u úlohy druhé již rozlišila, že nezáleží na pořadí prvků a prostřednictvím obrázků tak znázornila správný počet řešení (viz ilu. č. 9). V úloze první své řešení rozepsala, takže je patrné, jak k výsledku dospěla. Jinak použila řešitelské strategie jako v testu vstupním.

Ilustrace 9: Srovnání řešení úl. č. 2 z druhého vstupního a výstupního testu (D4)

Závěr:

Dívka byla již od začátku schopna řešit kombinatorické úlohy celkem úspěšně. Při řešení úloh ve vstupních testech systematicky znázorňovala jednotlivé možnosti řešení. Její řešitelské strategie se tedy nijak značně nerozvinuly. Už od začátku používala k řešení úloh výčet prvků čísly, kódování pomocí tiskacích písmen a grafické znázorňování barevnými geometrickými tvary i obrázky. Pokrok je zřejmý v úloze č. 3 v prvním výstupním testu, kde dívka našla více možností řešení než v prvním testu vstupním a začala rozlišovat, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků ve skupině, což je patrné ve srovnání úloh č. 2 v druhém vstupním a výstupním testu (viz ilu. č. 9).

ŽÁKYNĚ – D5

Charakteristika:

Této žákyni je 10 let. Je to tichá, ale velice pečlivá dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí nadprůměru. Na každou hodinu se svědomitě připravuje. Na neúspěch reaguje úzkostnými stavy a pláčem. V matematice si učivo osvojuje bez problémů. Navštěvuje několik kroužků – hru na klavír, tancování a paličkování.

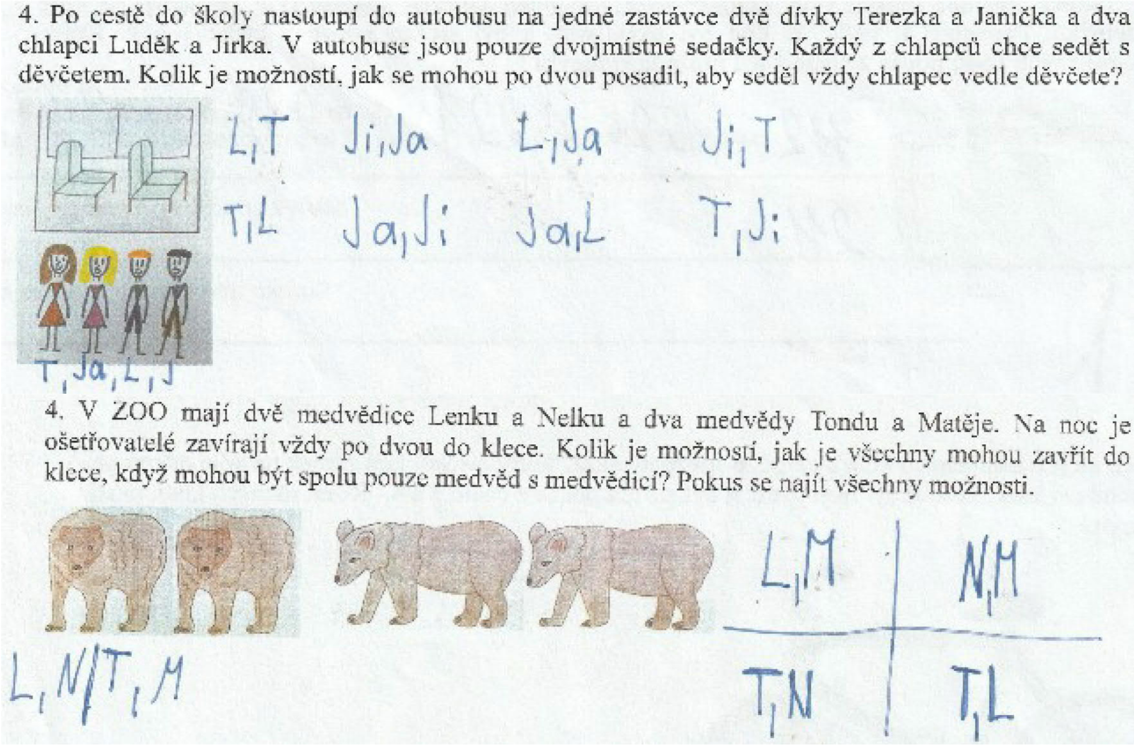
Rozbor vstupních a výstupních testů:

Ve vstupním testu žákyně našla ve všech úlohách všechna správná řešení až na úlohu č. 4. Zde jí chybí dvě možnosti řešení – dva číselné kódy. Tuto úlohu dívka řešila výpisem všech trojic čísel podle zadání. První úlohu řešila schématickým nákresem postav, nad které uvedla velká tiskací písmena podle jmen chlapců, která se v úloze vyskytují. Druhou úlohu řešila grafickým znázorněním za využití barevných puntíků zastupujících jednotlivá auta. Úloha třetí je vyřešena kódováním pomocí tiskacích písmen. Po realizaci první sady didaktických her se v řešení úloh objevuje systematičnost. Dívka v prvním výstupním testu vyřešila veškeré úlohy zcela správně. V úloze první, druhé a třetí využila stejné řešitelské strategie jako v testu vstupním, avšak je patrné, že její řešení má již jistý řád. Pořadí prvků není náhodné, ale účelně organizované. V úloze třetí dívka použila zcela novou strategii. Jednotlivé objekty označila pořadovými čísly a následně z těchto čísel tvořila dvojice.

Ve druhém vstupním testu dívka nevyřešila správně úlohy č. 2 a 4. Nerozlišila, zda záleží či nezáleží na pořadí prvků a u obou úloh uvedla více možností řešení (viz ilu. č. 10). První úlohu řešila výpočtem a uvedla stručnou správnou odpověď. V druhé úloze využila řešení prostřednictvím obrázku. Třetí úlohu řešila grafickým znázorněním (barevnými puntíky) a v úloze čtvrté použila kódování pomocí tiskacích písmen. Po realizaci druhé sady didaktických her vyřešila dívka již všechny úlohy zcela správně i úlohy č. 2 a 4 (viz ilu. č. 10). K jejich řešení využila obdobné strategie jako v druhém testu vstupním.

U: *„Podívej se na tuto úlohu.“* (Ukazuji dívce úlohu č. 4 v druhém vstupním testu a následně čtu její zadání.) *„Pokus se úlohu vyřešit znovu. Kolik to bude správných možností?“*

Ž: „Každej chlapec bude sedět s každou holkou. Luděk s Terezkou a Janičkou a Jirka s Terezkou a Janičkou. Čtyři?“



Ilustrace 10: Srovnání řešení úl. č. 4 z druhého vstupního a výstupního testu (D5)

Závěr:

Dívka byla již od začátku schopna řešit kombinatorické úlohy celkem úspěšně. Co se však u této dívky změnilo, jsou řešitelské strategie. Úlohy řešila obdobnými metodami – výpočtem, výpisem všech možností za využití číslic, kódováním pomocí tiskacích písmen, grafickým znázorněním (barevnými puntíky i obrázky). Staly se však systematičtějšími. Dívka při hledání všech možných řešení úloh ve výstupních testech oproti prvnímu testu vstupnímu účelně dbala na pořadí jednotlivých prvků při znázorňování. Začala také rozlišovat, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků ve skupině (viz ilu. č. 10).

ŽÁKYNĚ – D6

Charakteristika:

Této žákyni je 9 let. Je to velice aktivní a šikovná dívka. Prospěchově se pohybuje v rozmezí nadprůměru. Při hodinách se často hlásí. Nemá problémy v žádném předmětu. V matematice si učivo osvojuje bez obtíží.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Dívka vyřešila v prvním vstupním testu všechny úlohy zcela správně, kromě úlohy č. 2, kde neuvedla všechna možná řešení. Úlohu první řešila žákyně kódováním pomocí velký tiskacích písmen. Druhou úlohu řešila grafickým znázorněním, kdy si načrtla parkoviště a pomocí barevných čtverců na něm zobrazila jednotlivá auta. K řešení úlohy třetí využila kresbu obrázků. V úloze čtvrté vypsala trojmístné kódy z daných čísel do dvou řádků vedle sebe. Po realizaci první sady didaktických her vyřešila tato dívka všechny úlohy v prvním výstupním testu zcela správně. V úloze druhé už našla veškeré možnosti řešení. U úlohy čtvrté je patrný systematičtější záznam číselných kódů.

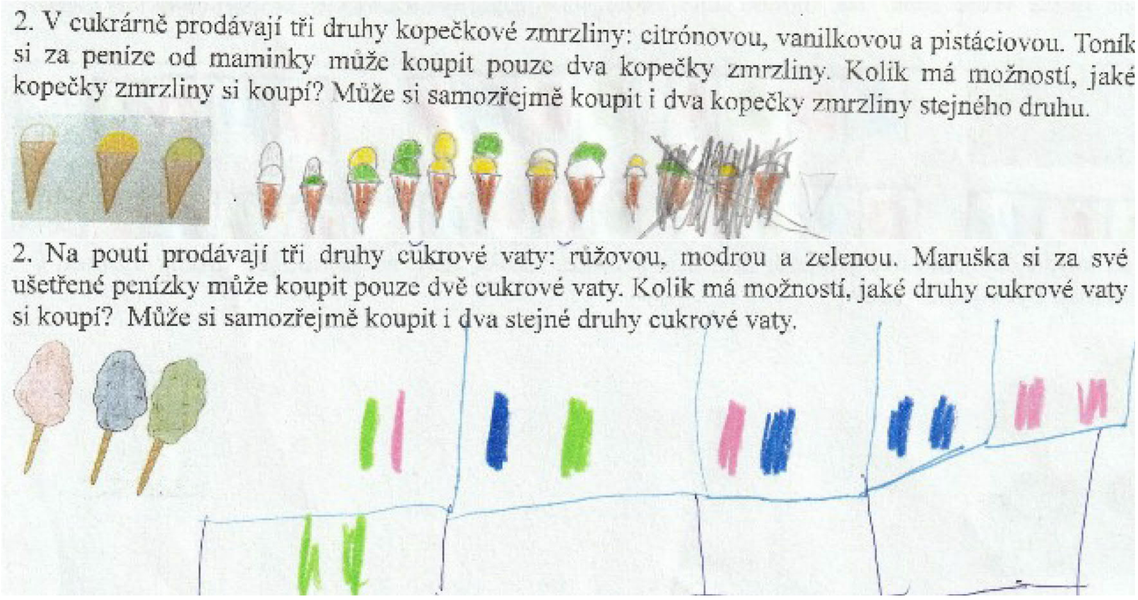
V druhém vstupním testu měla dívka opět všechny úlohy správně vyřešené kromě úlohy č. 2. Zde nerozlišila, že na pořadí prvků v úloze nezáleží a uvedla tak více možností řešení (viz ilu. č. 11). Úlohu první řešila logickou úvahou. Napsala pouze odpověď jedním číslem. Ostatní úlohy jsou řešené grafickým znázorněním formou obrázků. Po realizaci druhé sady didaktických her měla dívka všechny úlohy v druhém výstupním testu zcela správně vyřešené. V úloze druhé už rozlišila, že na pořadí prvků nezáleží (viz ilu. č. 11). V řešení úloh č. 2 a 4 se objevuje systematičnost. Žákyně při znázorňování všech možností řešení využívá přesný organizovaný postup.

U: *„Podívej se na tuto úlohu.“* (Ukazuji dívce úlohu č. 2 v druhém vstupním testu a následně čtu její zadání.); (viz ilu. č. 11) *„Pokus se úlohu vyřešit znovu. Kolik to bude správných možností?“*

Ž: „No… tři možnosti jsou, když mám dvě zmrzliny stejný. A pak tahle, ta a ta…“(Ukazuje na tři správné možnosti řešení.)

U: *„A co ty další možnosti, co jsi sem předtím nakreslila?“*

Ž: „Ty sou špatně, to je to samý jako ty co sem ukazovala. Jenom ty barvy jsou jinak nahoře a dole… jsou otočený.“



Ilustrace 11: Srovnání řešení úl. č. 2 z druhého vstupního a výstupního testu (D6)

Závěr:

Dívka byla již od začátku schopna řešit kombinatorické úlohy celkem úspěšně. V řešení se však začala objevovat systematičnost. Postup znázornění možností řešení v úlohách ve výstupních testech je značně organizovaný. Jinak dívka využívala k řešení stále stejné řešitelské strategie – kódování pomocí velký tiskacích písmen, grafické znázornění pomocí barevných geometrických tvarů i obrázků. Didaktické hry jí pomohly k tomu, aby začala rozlišovat, kdy záleží a nezáleží na pořadí prvků ve skupině.

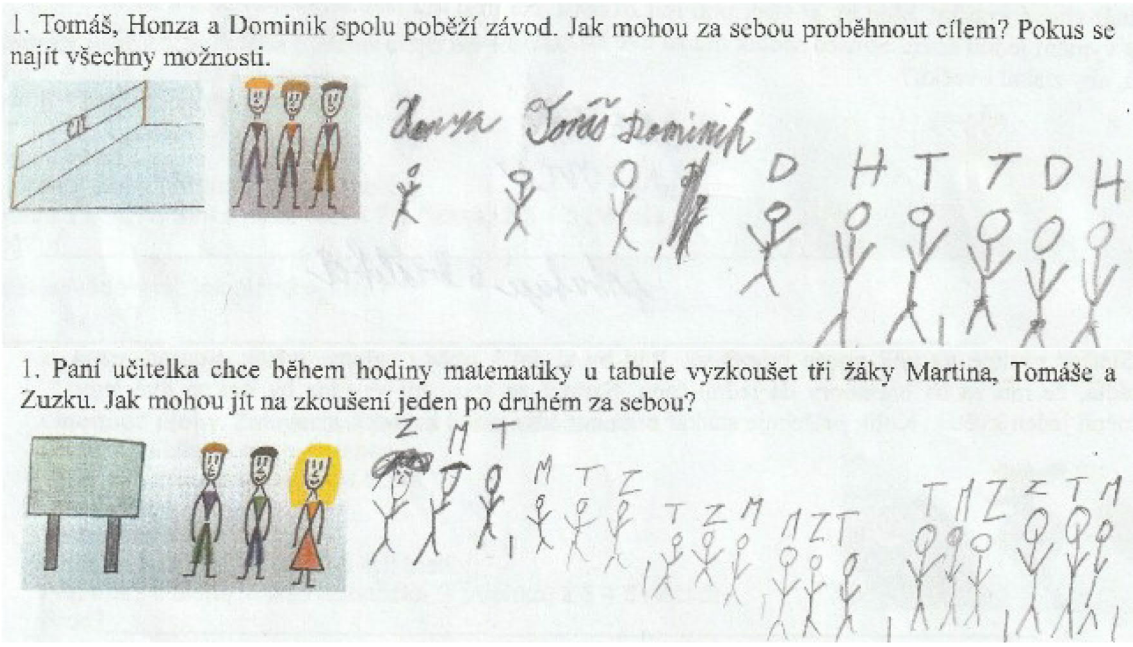
ŽÁK – CH6

Charakteristika:

Tomuto žákovi je 9 let. Byly mu diagnostikovány specifické poruchy učení – dyslexie a dysgrafie. Prospěchově se pohybuje v rozmezí průměru. Na matematiku je velice nadaný. Rád řeší problémové úlohy.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

V prvním vstupním testu žák vyřešil zcela správně pouze úlohu č. 3. V ostatních úlohách mu vždy chyběly některé možnosti řešení. Úlohu první řešil schématickým nákresem postav, nad které napsal jména chlapců z úlohy nejprve celými slovy a poté je už jen označil tiskacími písmeny (viz ilu. č. 12). V úloze druhé si načrtl parkoviště a barevnými puntíky do něho znázorňoval jednotlivá auta. Úlohu třetí řešil grafickým znázorněním formou obrázků, které barevně rozlišil a ještě označil tiskacími písmeny. V úloze čtvrté vypsal trojice číslic dle zadání do jedné řady. Po realizaci první sady didaktických her měl žák všechny úlohy v prvním testu výstupním správně vyřešené. V jednotlivých úlohách našel všechna možná řešení. Řešitelské strategie žáka se téměř nezměnily.



Ilustrace 12: Srovnání řešení úl. č. 1 z prvního vstupního a výstupního testu (CH6)

U: „*Podívej se na tuto úlohu.*“ (Ukazuji žákovi úlohu č. 1 v prvním vstupním testu a následně čtu její zadání.); (viz ilu. č. 12) „*Když jsi úlohu řešil, nenašel jsi všechna možná řešení této úlohy. Věděl bys, které možnosti ti chybí?*“

Ž: „Honza, Dominik, Tomáš; Tomáš, Honza, Dominik. To je všechno asi… ne vlastně ještě Dominik, Tomáš, Honza.“

V druhém vstupním testu měl žák všechny úlohy správně vyřešené bez jediné chyby. U úlohy první uvedl výpočet a napsal stručnou správnou odpověď. Úlohy ostatní řešil grafickým znázorněním formou obrázku a v poslední úloze využil kódování pomocí tiskacích písmen. Žák měl správně vyřešené i všechny úlohy v druhém výstupním testu. Úlohy řešil obdobným způsobem. Své řešení v některých úlohách zjednodušil. Místo obrázků využil znázornění pomocí barevných puntíků.

Závěr:

Žákovi už od začátku nedělaly kombinatorické úlohy problémy. Didaktické hry mu ale pomohly nacházet v úlohách všechna možná řešení. Využíval stále stejné řešitelské strategie – výpis číslic, kódování pomocí tiskacích písmen, grafické znázornění formou schématických nákresů postav, barevných puntíků a obrázků. Jeho řešitelské strategie se nestaly systematičtějšími, ale značně se zjednodušily.

ŽÁK – CH7

Charakteristika:

Tomuto žákovi je 11 let. Byla mu diagnostikována specifická porucha učení – dyslexie. Prospěchově se pohybuje v rozmezí podprůměru. Je to velice tichý chlapec, má nízké sebevědomí. O hodinách se příliš neprojevuje.

Rozbor vstupních a výstupních testů:

Žák v prvním vstupním testu nevyřešil ani jednu úlohu zcela správně. V úloze první, třetí a čtvrté, které řešil výčtem prvků pomocí číslic nebo celých slov, našel jen některé možnosti řešení. Úlohu druhou nepochopil, neuvedl zde ani jedno správné řešení (viz ilu. č. 13). Po realizaci první sady didaktických her, žák vyřešil všechny úlohy v prvním výstupním testu zcela správně kromě úlohy č. 4. Zde si nevšiml, že vypsal jeden číselný kód dvakrát. Druhou úlohu již pochopil a jednotlivé možnosti řešení znázornil systematicky pomocí barevných puntíků (viz ilu. č. 13), jinak v úlohách opět vypisoval jednotlivé možnosti celými slovy, čímž se jeho řešení stalo málo čitelné.

U: „*Podívej se na tuto úlohu.*“ (Ukazuji žákovi úlohu č. 2 v prvním vstupním testu a následně čtu její zadání.); (viz ilu. č. 13) „*Proč jsi tu napsal číslo 4?*“

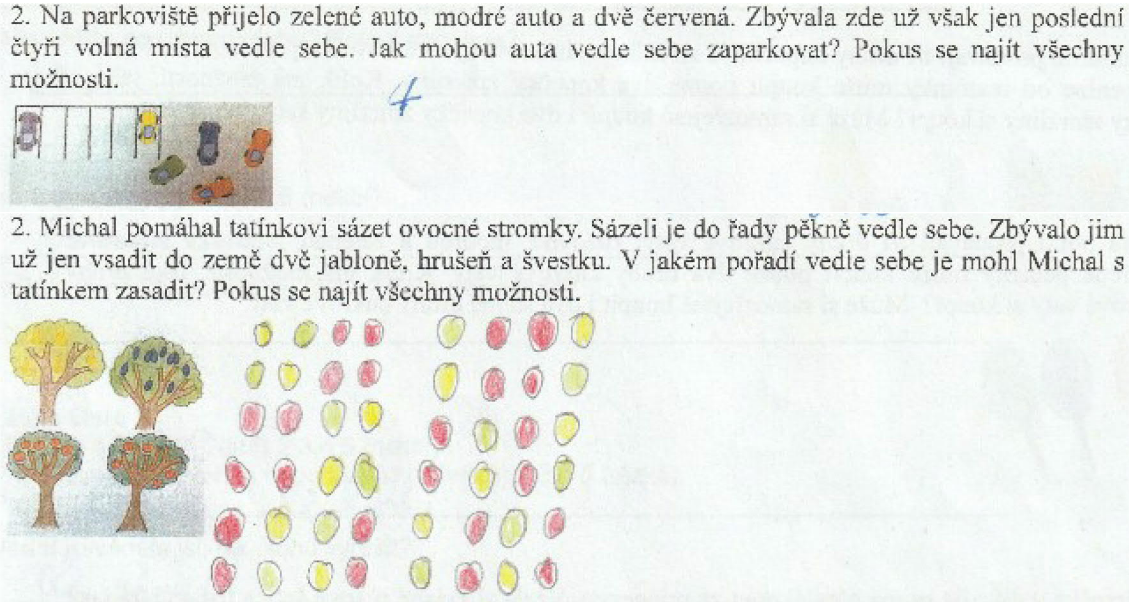
Ž: „*Jako čtyři možnosti. Sem si to tipnul. Sem nevěděl, jak to vyřešit.*“

U: „*A teď už bys věděl, jak úlohu vyřešit?*“

Ž: „*Jo.*“

U: „*Zkus říci nějaké možnosti řešení.*“

Ž: „Může zaparkovat zelený auto vedle modrý a pak ty dvě červený. Nebo zelený, červený, modrý, červený, taky červený, zelený, modrý, červený… bych si musel vzít pero a napsat si to, abych našel všechno.“



2. Na parkoviště přijelo zelené auto, modré auto a dvě červená. Zbývala zde už však jen poslední čtyři volná místa vedle sebe. Jak mohou auta vedle sebe zaparkovat? Pokus se najít všechny možnosti.

4

2. Michal pomáhal tatínkovi sázet ovocné stromky. Sázeli je do řady pěkně vedle sebe. Zbývalo jim už jen vsadit do země dvě jabloně, hrušeň a švestku. V jakém pořadí vedle sebe je mohl Michal s tatínkem zasadit? Pokus se najít všechny možnosti.

Ilustrace 13: Srovnání řešení úl. č. 2 z prvního vstupního a výstupního testu (CH7)

V druhém vstupním testu žák nevyřešil zcela správně pouze úlohu č. 2, kde mu jedna správná možnost řešení chybí. Úlohu první řešil logickou úvahou, uvedl jen stručnou správnou odpověď. V úloze druhé využil grafického znázornění pomocí barevných puntíků. V úloze třetí a čtvrté se však opět vrátil k výpisu možností celými slovy. Po realizaci druhé sady didaktických her vyřešil chlapec všechny úlohy v druhém výstupním testu zcela správně. V úloze druhé našel již všechny správné možnosti řešení. V úloze č. 2 a 3 místo výpisu celých slov využil znázornění pomocí barevných puntíků. Zároveň je v těchto úlohách patrný systematičtější postup v zaznamenávání možností řešení oproti paralelním úlohám v testu vstupním.

Závěr:

Didaktické hry pomohly žákovi pochopit a řešit úlohy s opakováním prvků. Umožnily mu také nacházet v úlohách všechny možnosti řešení. Řešitelské strategie tohoto žáka se staly systematičtějšími konkrétně v případech, kdy znázorňoval možnosti řešení barevnými puntíky. Stále ale ve většině případů využíval k řešení výčet prvků pomocí celých slov. Některá řešení úloh (i v testech výstupních) jsou nepřehledná a špatně čitelná.

ŽÁK – CH8

Charakteristika:

Tomuto žákovi je 10 let. Byly mu diagnostikovány specifické poruchy učení – dyslexie a dysgrafie. Prospěchově se pohybuje v rozmezí podprůměru. Často zapomíná domácí úkoly. O hodinách mnohdy nedává pozor. Má kázeňské problémy.

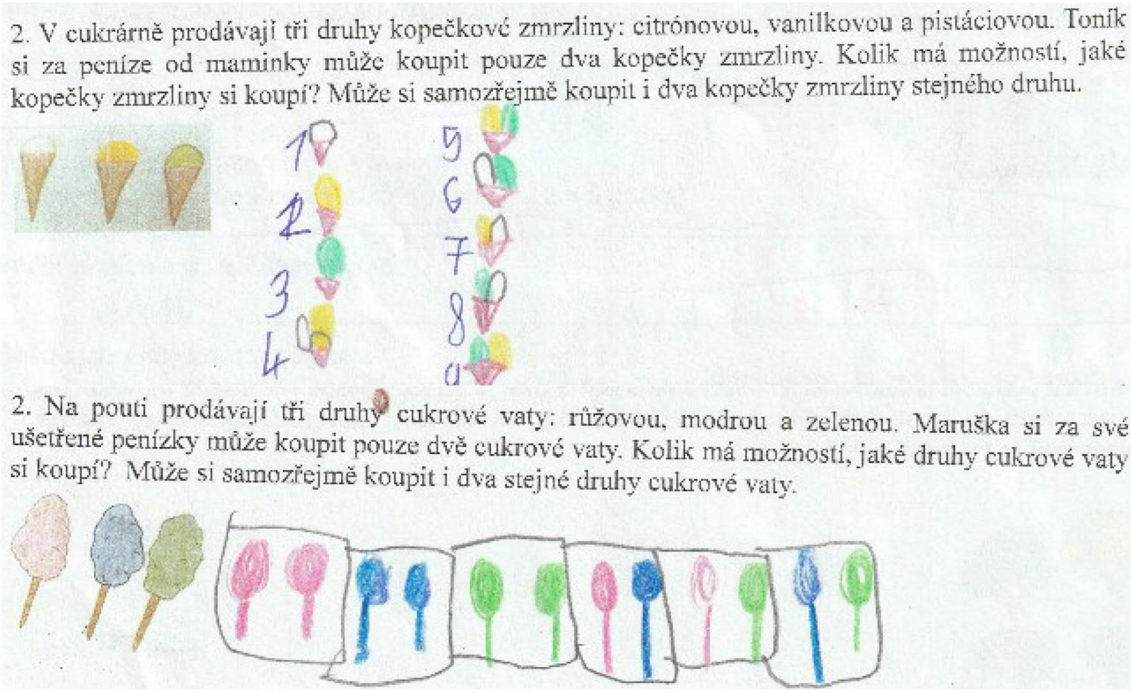
Rozbor vstupních a výstupních testů:

Žák v prvním vstupním testu vyřešil zcela správně pouze úlohu č. 3. Zároveň je v této úloze znát, že při řešení postupoval systematicky. Pomocí obrázků si znázornil jednu správnou možnost řešení a u možnosti druhé zaměnil pořadí prvků. V ostatních úlohách žákovi chybí některé správné možnosti řešení. Úlohu první řešil schématickým nákresem postav, nad které napsal tiskací písmena podle jmen chlapců z úlohy. V úloze druhé si načrtl parkoviště a barevnými puntíky do nich znázornil jednotlivá auta. Kolonek na auta si však v některých možnostech znázornil více, než bylo potřeba a mezi jednotlivými auty nechával prázdná místa. V úloze čtvrté vypsal trojice číslic dle zadání do jedné řady. Po realizaci první sady didaktických her žák vyřešil všechny úlohy v prvním výstupním testu zcela správně kromě úlohy č. 2. Zde znázornil jednu možnost řešení dvakrát. Řešitelské strategie žáka se téměř nezměnily až na úlohu č. 3. Zde použil stejnou řešitelské strategii jako žákyně D5. Jednotlivé objekty označil pořadovými čísly a následně z daných čísel systematicky tvořil dvojice.

U: *„Podívej se na tuto úlohu.“* (Ukazuji žákovi úlohu č. 4 v prvním vstupním testu a následně čtu její zadání.) *„Některé kódy ti tu chybí. Věděl bys které?“*

Ž: *„Tři jedničky a tři dvojky.“*

Ve druhém vstupním testu měl žák všechny úlohy správně vyřešené kromě úlohy č. 2. Zde nerozlišil, že na pořadí prvků nezáleží a uvedl více možností řešení, než je správně (viz ilu. č. 14). V úloze první slovy popsal, jak k řešení dospěl. Úlohu druhou a třetí řešil grafickým znázorněním pomocí obrázků a v úloze čtvrté schématicky nakreslil postavy, nad které napsal tiskací písmena podle jmen dětí z úlohy. Po realizaci druhé sady didaktických her žák vyřešil všechny úlohy v druhém výstupním testu zcela správně. První tři úlohy řešil grafickým znázorněním formou obrázků a v úloze čtvrté využil kódování pomocí tiskacích písmen. V řešení všech úloh v druhém testu výstupním se objevuje systematičnost. Žák zaznamenával možnosti řešení organizovaným postupem.



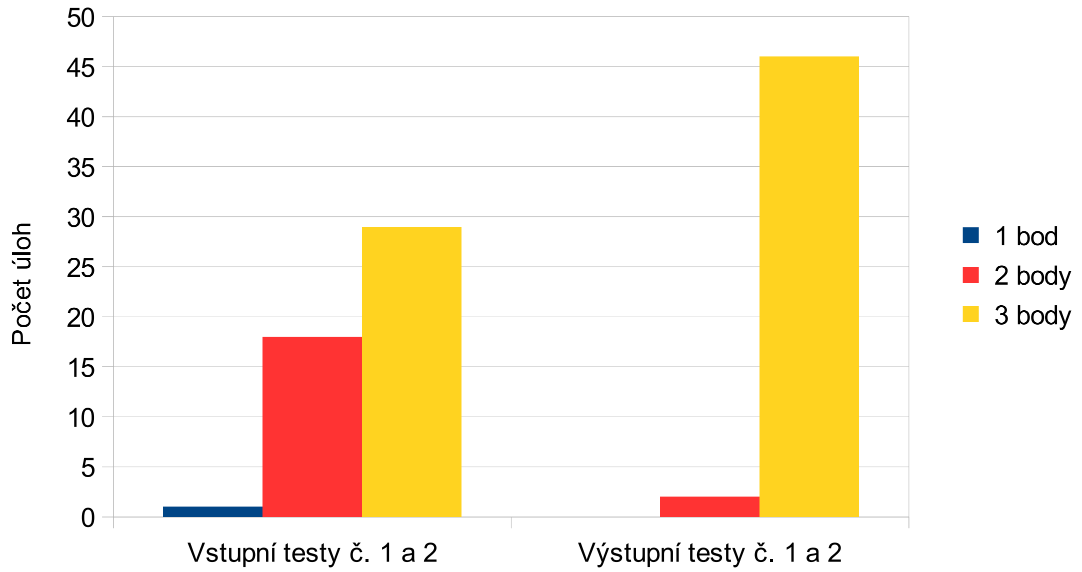
Ilustrace 14: Srovnání řešení úl. č. 2 z druhého vstupního a výstupního testu (CH8)

Závěr:

Didaktické hry pomohly žákovi rozlišovat, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků ve skupině (viz ilu. č. 14). Umožnily mu také nacházet v úlohách všechny možnosti řešení. V jeho řešení úloh se také začala objevovat systematičnost. Záznam možností řešení má daný řád a je účelně organizovaný. Chlapec již od začátku řešil úlohy výpisem číslic, kódováním pomocí tiskacích písmen, grafickým znázorněním formou schématických nákresů postav, barevných puntíků a obrázků.

SHRNUTÍ

Souhrnně by se dalo říci, že byli žáci čtvrtého ročníku v řešení úloh ve výstupních testech oproti testům vstupním úspěšnější. Toto tvrzení potvrzuje následující graf.



Graf 16: Rozdíl v úspěšnosti vypracování úloh u žáků 4. ročníku

V testech výstupních našli žáci více možností řešení než v testech vstupních nebo všechny možnosti řešení. Pokud měli žáci před realizací didaktických her problémy s chápáním podstaty opakování a uspořádání prvků, což se projevilo v nesprávně vypracovaných úlohách ve vstupních testech, na tuto problematiku zaměřených, po realizaci her již v těchto úlohách nechybovali. S kombinací prvků podle pravidel směňování neměli žáci čtvrtého ročníku oproti žákům třetího ročníku výrazné problémy.

Žáci čtvrtého ročníku již ve vstupních testech používali k zobrazení možností řešení úloh grafické znázornění formou obrázků, což se u žáků třetího ročníku objevovalo až v testech výstupních. Řešitelské strategie, ve smyslu způsobu záznamu možností řešení, se výrazně změnily jen u žáků CH7 a CH8, avšak ne globálně, nýbrž pouze v dílčích úlohách. Řešitelské strategie, které žáci čtvrtého ročníku využívali v řešení úloh před i po realizaci první sady didaktických her, jsou následující:

- Výčet prvků/možností – výpis celými slovy, číslicemi, kódování pomocí písmen (psacích i tiskacích)

- Grafický záznam – využití znaků (barevných puntíků), schématických nákresů, obrázků

Řešitelské strategie žáků čtvrtého ročníku se v polovině případů staly systematičtějšími. U žákyně D5 a žáků CH7 a CH8 má řešení úloh daný řád. Pořadí a zobrazení prvků není náhodné, ale účelně organizované.

13 Ověření výzkumných předpokladů

Na začátku experimentu jsem si stanovila čtyři výzkumné předpoklady. K jejich vyhodnocení jsem využila tyto metody:

- analýza a vyhodnocení vstupních testů
- komparace výsledků úloh ve vstupních a výstupních testech u jednotlivých žáků
- kazuistiky jednotlivých žáků
- rozhovory s žáky
- vyhodnocení dotazníků

Při ověřování výzkumných předpokladů již opětovně neopakuji všechny závěry z vyhodnocení vstupních i výstupních testů včetně dotazníků a rozhovorů či podrobných kazuistik, které se nacházejí v předchozích kapitolách. Pouze shrnuji a průběžně odkazuji na předchozí informace a příslušné grafy.

P 1: *Většina sledovaných žáků nemá dostatečně rozvinuté kombinační a logické myšlení.*
Výzkumný předpoklad se podařilo ověřit.
Komentář: Žáci ve většině úloh ve vstupním testu nedosáhli 3. stupně. Výzkumný předpoklad byl podpořen vyhodnocením vstupních testů (viz podkap. 11.1 Vyhodnocení vstupních a výstupních testů – str. 101–108, konkrétně grafem č. 1).

P 2: *Didaktická hra je vhodnou propedeutikou k uvědomění si podstaty uspořádaných a neuspořádaných skupin a možnosti opakování či neopakování prvků v daných skupinách.*
Výzkumný předpoklad se podařilo ověřit.
Komentář: Po realizaci didaktických her začali žáci lépe rozlišovat skupiny s opakováním a bez opakování prvků a již neměli problémy s uvědoměním si, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků v dané konfiguraci, což potvrzují závěry z kazuistik jednotlivých žáků, ilustrace kazuistik, úryvky z rozhovorů i celkové shrnutí kazuistik u daných ročníků (viz kap. 12 Kazuistiky zkoumaných žáků – str. 112–140, Shrnutí

kazuistik žáků třetího ročníku – str. 128–129, Shrnutí kazuistik žáků čtvrtého ročníku – str. 141–142). Úlohy, zaměřené na tuto problematiku (tj. opakování a uspořádání prvků), které byly problémové, žáci již ve výstupních testech vyřešili ve většině případů zcela správně, tj. našli všechna možná řešení úlohy (viz podkap. 11.1 Vyhodnocení vstupních a výstupních testů – str. 101–108). Konkrétně byl výzkumný předpoklad podpořen grafy č. 3, 5, 7, 9, 15 a 16.

P 3: Po *aplikaci didaktických her dojde k rozvoji řešitelských strategií žáků.*
Předpoklad se podařilo ověřit pouze částečně.
Komentář: Řešitelské strategie se v jednotlivých úlohách ve výstupních testech oproti vstupním testům pouze v několika případech (u žáků D5, D6, CH4, CH7 a CH8) podobají systematickému záznamu v hledání všech možností řešení, což je možné doložit závěry z kazuistik i celkového shrnutí kazuistik jednotlivých ročníků (viz kap. 12 Kazuistiky zkoumaných žáků – str. 112–140, Shrnutí kazuistik žáků třetího ročníku – str. 128–129, Shrnutí kazuistik žáků čtvrtého ročníku – str. 141–142). Systematičnost, která výrazně ovlivňuje úspěšnost řešení, se tak objevuje pouze u pěti sledovaných žáků ze čtrnácti.

Řešitelské strategie ve smyslu způsobu řešení úloh se zlepšily jen u osmi žáků ze čtrnácti. Značný posun ve způsobu řešení úloh je patrný u šesti žáků třetího ročníku (D1, D2, D3, CH1, CH2, CH4) a dvou žáků (CH1 a CH4) z ročníku čtvrtého. Výraznou změnou v řešení úloh se stalo používání kódování místo vypisování všech možných řešení celými slovy. Zkrácený stručný zápis se pro žáky stává prioritní na úkor dlouhého psaní. To jim umožňuje nalézt více možností řešení, resp. všechny správné možnosti řešení (viz kap. 12 Kazuistiky zkoumaných žáků – str. 112–140, Shrnutí kazuistik žáků třetího ročníku – str. 128–129, Shrnutí kazuistik žáků čtvrtého ročníku – str. 141–142).

Po realizaci didaktických her ve výstupních testech žáci objevili více správných možností řešení než v testech vstupních nebo všechny možnosti řešení (viz podkap. 11.1 Vyhodnocení vstupních a výstupních testů – str. 101–108). Konkrétně byl výzkumný předpoklad podpořen grafem č. 1.

P 4: *Úlohy tohoto typu nejsou běžně řešeny v rámci výuky.*
Výzkumný předpoklad se podařilo ověřit.
Komentář: Výzkumný předpoklad byl podpořen vyhodnocením dílčí informace z dotazníku (viz podkap. 11.2 Vyhodnocení dotazníků – str. 108–111), konkrétně grafem č. 14.)

Shrnutí:
Výzkumné předpoklady P1, P2 a P4 se podařilo ověřit. Výzkumný předpoklad P3 se podařilo ověřit pouze částečně.

Závěr

Zpracováním této diplomové práce jsem se snažila poukázat na to, že kombinatorika je nezbytnou součástí matematického vzdělávání na 1. stupni ZŠ a měla by se jí věnovat větší pozornost. Pokud bude kombinatorika vhodnými hravými formami více začleňována do hodin matematiky, žáci nejen že budou rozvíjet své logické a kombinační myšlení, ale získají i praktické dovednosti potřebné k řešení každodenních situací. Tím se matematické vzdělávání stane účinné a trvalé, jelikož poznatky žáci využijí i v běžném životě.

Hlavním cílem této diplomové práce bylo vypracovat soubor didaktických her, které budou rozvíjet logicko-kombinační myšlení žáků na 1. stupni ZŠ. Vytvořila jsem soubor celkem sedmi kombinatorických didaktických her a na základě jejich aplikace na 1. stupni ZŠ jsem ověřila jejich účinnost. Snažila jsem se objasnit, zda rozvíjejí logické a kombinační myšlení žáků i jejich řešitelské strategie. Pokusila jsem se zjistit, zda-li žákům usnadňují pochopení základních kombinatorických principů a uvědomění si podstaty opakování či neopakování prvků a uspořádání prvků v dané konfiguraci.

V rámci experimentálního šetření na malém vzorku žáků na malotřídní škole se podařilo ověřit tři ze čtyř výzkumných předpokladů. Díky vstupním testům byla zjištěna prvotní úroveň kombinačního myšlení žáků, která potvrdila mou domněnku. Žáci neměli dostatečně rozvinuté logicko-kombinační myšlení, jelikož k tomu neměli vhodné příležitosti a podnětné prostředí. Jak se zjistilo z rozboru dotazníků, kombinatorické úlohy nejsou běžně řešeny v rámci výuky matematiky na prvním stupni ZŠ, což potvrdily i výsledky zjištěné při řešení grantu SGS.

Následně bylo na základě analýzy vstupních a výstupních testů (jejich komparace) a vytvoření podrobných kazuistik žáků vyhodnoceno, zda jsou mnou vytvořené kombinatorické didaktické hry efektivním prostředkem k rozvoji logicko-kombinačního myšlení. Mohu konstatovat, že didaktické hry byly shledány účinnými. Po realizaci didaktických her byla většina žáků v řešení kombinatorických úloh úspěšnější. Žáci nacházeli více možných řešení úloh ne-li všechna řešení, začali rozlišovat skupiny s opakováním a bez opakování prvků a již neměli problémy s uvědoměním si, kdy záleží či nezáleží na pořadí prvků v daném uspořádání. I řešitelské strategie se u žáků výrazně zlepšily a značně změnily. Nepodařilo se však ověřit, zda-li se řešitelské strategie žáků po realizaci didaktických her stávají systematičtějšími.

Je důležité podotknout, že kladné výsledky získané ze sledování rozvoje logicko-kombinačního myšlení žáků po realizaci didaktických her jsou výrazně ovlivněné tím, že žákům bylo náhle zprostředkované vhodné podnětné a motivační prostředí. Bylo s nimi po krátkou dobu intenzivně pracováno, což jim opakovaným otevíráním podobných témat umožnilo proniknout do jádra problému a nenásilně si osvojit potřebné dovednosti. Nemůžeme však na základě několika vyučovacích hodin věnovaných této problematice usuzovat o zcela platném závěru. Kombinatorické didaktické hry, jak bylo zjištěno, jsou vhodnou a účinnou formou pro rozvoj kombinačního a logického myšlení. Zda-li se však v myslích žáků skutečně vytvoří poznatkové struktury, na které budou moci v průběhu dalšího vzdělávání navazovat a zda dovednosti, které si hraním her žáci osvojí, následně využijí v praktických záležitostech, to lze hodnotit pouze z dlouhodobého hlediska. Doufám však, že se mi podařilo vytvořit aktivity, které hravou formou rozvíjí žákovu osobnost v oblasti logiky a kombinatoriky nejen pro daný okamžik, ale i pro další vzdělávání a pro život.

Díky realizaci těchto didaktických her a zpětné vazbě mohu říci, že jsou pro žáky zajímavé a zábavné. Představují soubor aktivizujících činností, které žáky motivují a vzbuzují v nich zájem o danou problematiku. Ve školách není důležité pouze počítat příklady dle vzorů a určitých pravidel, ale je také nutné přimět děti, aby se do výuky aktivně zapojily, aby se nad způsoby řešení problémů zamýšlely a vytvářely si své vlastní strategie řešení.

Snažila jsem se o to, aby vytvořené hry byly využitelné v praxi pro všechny učitele na 1. stupni ZŠ, kteří mají zájem své hodiny matematiky vést netradičně a zábavně. Proto jsem je zpracovala do formy volné přílohy. Nechť jsou inspirací a vhodnou pomůckou pro každého, kdo má o ně zájem.

Věřím, že tento soubor didaktických her přispěje k tomu, aby matematické vzdělávání mělo pro každého žáka jasný význam, aby pro ně bylo prospěšné a zprostředkovávalo jim pocit uspokojení a radosti.

V budoucnu plánuji soubor didaktických kombinatorických her využívat ve své pedagogické praxi, postupně ho rozšiřovat a doplňovat o další podnětné aktivity.

Zdroje

[1] BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M. *Náměty k rozvíjení kombinačního myšlení: Metodický materiál pro učitele matematiky 1. stupně ZŠ*. Brno: Masarykova univerzita, 1998.

[2] BERÁNEK, J. *Kombinatorika ve vztahu k vyučování matematice na 1. stupni základní školy*. In: *Induktívne a deduktívne prístupy v matematike* [online]. Trnava: Trnavská univerzita, 2015, s. 13–19. [vid. 16. 9. 2017]. ISBN 80-8082-030-9. Dostupné z: https://www.muni.cz/vyzkum/publikace/591864

[3] CALDA, E., DUPAČ, V. *Matematika pro gymnázia*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.

[4] CIHLÁŘ, J., ZELENKA, M. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. 2. uprav. vyd. Praha: Fortuna, 1995. ISBN 80-716-8293-4.

[5] GRINSTEAD, Ch. M., SNELL J. L., *Introduction to probability* [online]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997. [vid. 22. 10. 2017]. ISBN 978-0821807491. Dostupné z: https://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf

[6] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. aktual. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

[7] HORÁK, J. *Tvořivost ve vyučování*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009. ISBN 978-80-7083-476-4.

[8] HOUŠKA, T. *Škola je hra*. 2. přeprac. a rozš. vyd. Praha: vl. n., 1993. ISBN 80-900-7049-3.

[9] HRABAL, V., MAN, F., PAVELKOVÁ, I. *Psychologické otázky motivace ve škole.* 2. uprav. vyd. Praha: SPN, 1989. ISBN 80-042-3487-9.

[10] CHAUVELOVÁ, D., MICHELOVÁ, V. *Náměty pro stolní hry dětí: rozvoj komunikace, vynalézavosti, myšlení a obratnosti dětí od 3 let*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-717-8353-6.

[11] KASÍKOVÁ, H. *Kooperativní učení a vyučování: teoretické a praktické problémy.* Praha: Karolinum, 2001. ISBN 80-246-0192-3.

[12] KREJČOVÁ, E. *Hry a matematika na 1. stupni základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN, 2014. ISBN 978-80-7235-548-8.

[13] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice*. 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. ISBN 80-704-1423-5.

[14] LANGR, L. *Úloha motivace ve vyučování na základní škole*. Praha: SPN, 1984.

[15] LOKŠOVÁ, I., LOKŠA, J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-717-8205-X.

[16] MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-731-5039-5.

[17] MEZINÁRODNÍ AKADEMIE VZDĚLÁVÁNÍ. *Efektivní učení ve škole*. Praha: Portál, 2005. ISBN 80-717-8556-3.

[18] PAVLOVIČOVÁ, G. *Význam obrázka pri riešení kombinatorickej úlohy.* In*: Primárne matematické vzdelávanie teória, výskum a prax* [CD]. Tále: FPV UMB, 2017, s. 96–100. ISBN 978-80-557-1236-9.

[19] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. 3. aktual. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-717-8579-2.

[20] PŘÍHONSKÁ, J. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 978-80-7494-017-0.

[21] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2013. [vid. 22. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433_1_1/

[22] SKÁLOVÁ, A. *Kombinatorické hry* [online]. Praha: MFF UK, 2014. [vid. 16. 9. 2017]. Dostupné z: http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/skalova.pdf

[23] ŠVRČEK, J. *Úvod do kombinatoriky*. 2. rozš. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. ISBN 978-80-244-2169-8.

[24] SCHÜRER, M. *Dítě a hra*. Praha: MONA, 1974.

[25] VANKÚŠ, P. *Didaktické hry v matematike* [online]. Bratislava: KEC FMFI UK, 2012. [vid. 16. 9. 2017]. ISBN 978-80-8147-002-8. Dostupné z: http://www.comae.sk/kega091UK_4_2012/didaktickehry.pdf

[26] VOGLOVÁ, Z. *Historie kombinatoriky.* In: *Historie matematiky* [online]. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2006, s. 72–73. [vid. 24. 10. 2017]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf

[27] VOLFOVÁ, M. *Didaktická hra ve vyučování matematiky: Náměty pro zájmovou činnost v matematice: Metodický materiál pro učitele matematiky na základních a středních školách*. Hradec Králové: Gaudeamus, 1992. ISBN 80-704-1492-8.

[28] ZAPLETAL, M. *Velká kniha deskových her.* Praha: Mladá fronta, 1991. ISBN 80-204-0188-1.

[29] ŽILKOVÁ, M. *Kombinatorické hry v školskej matematike* [online]. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2003. [vid. 19. 9. 2017]. Dostupné z: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Zilkova.pdf

Přílohy

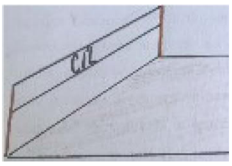
Seznam příloh

Příloha č. 1: Vstupní test č. 1 + ukázkové řešení

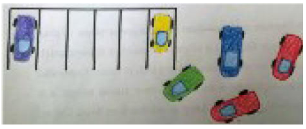
DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 1

Jméno a příjmení ___________________________

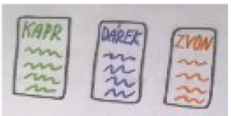
1. Tomáš, Honza a Dominik spolu poběží závod. Jak mohou za sebou proběhnout cílem? Pokus se najít všechny možnosti.




2. Na parkoviště přijelo zelené auto, modré auto a dvě červená. Zbývala zde už však jen poslední čtyři volná místa vedle sebe. Jak mohou auta vedle sebe zaparkovat? Pokus se najít všechny možnosti.



3. Hanka umí tři básničky. Paní učitelka ji poprosila, aby si z nich vybrala jen dvě básničky, které řekne před rodiči na vánoční besídce. Hanka si musí také rozmyslet v jakém pořadí básničky řekne. Kolik je možností, jak bude Hanka básničky na besídce přednášet?

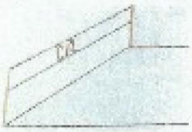


4. Tatínek nemůže otevřít svůj kufr, protože zapomněl číselný kód, kterým se zámek u kufr odemyká. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 1 a 2. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 1 a 2 může kufr otevřít?

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 1

Jméno a příjmení ______________________

1. Tomáš, Honza a Dominik spolu poběží závod. Jak mohou za sebou proběhnout cílem? Pokus se najít všechny možnosti.

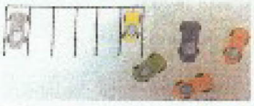


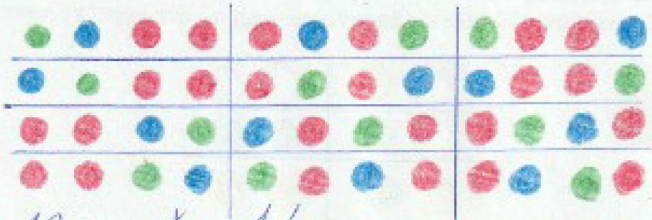
	1.	2.	3.
1.	T	H	D
2.	T	D	H
3.	H	T	D

	1.	2.	3.
4.	H	D	T
5.	D	H	T
6.	D	T	H

Celkem je to 6 možností.

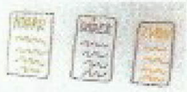
2. Na parkoviště přijelo zelené auto, modré auto a dvě červená. Zbývala zde už však jen poslední čtyři volná místa vedle sebe. Jak mohou auta vedle sebe zaparkovat? Pokus se najít všechny možnosti.





Celkem je to 12 možností.

3. Hanka umí tři básničky. Paní učitelka ji poprosila, aby si z nich vybrala jen dvě básničky, které řekne před rodiči na vánoční besídce. Hanka si musí také rozmyslet v jakém pořadí básničky řekne. Kolik je možností, jak bude Hanka básničky na besídce přednášet?



Celkem je to 6 možností.

4. Tatínek nemůže otevřít svůj kufr, protože zapomněl číselný kód, kterým se zámek u kufr odemyká. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 1 a 2. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 1 a 2 může kufr otevřít?

111 121
222 212
112 211
221 122

Celkem je to 8 trojmístných kódů.

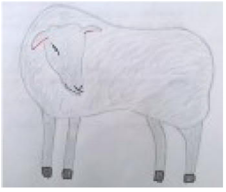
Příloha č. 2: Vstupní test č. 2 + ukázkové řešení

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 2

Jméno a příjmení ___________________________

1. Farmář chová králíky. Moc by si však přál mít ovečku. Na trhu mu statkář nabídl, že mu za tři králíky vymění jednu kozu. Soused sedlák mu za dvě kozy dá jednu ovečku. Kolik potřebuje farmář králíků, aby získal ovečku?





2. V cukrárně prodávají tři druhy kopečkové zmrzliny: citrónovou, vanilkovou a pistáciovou. Toník si za peníze od maminky může koupit pouze dva kopečky zmrzliny. Kolik má možností, jaké kopečky zmrzliny si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva kopečky zmrzliny stejného druhu.

3. Ema má ve skříni modrou a červenou sukni, a bílé, fialové a zelené tričko. Kolik má možností, jak se může dnes obléknout do školy? Pokus se najít všechny možnosti.

4. Po cestě do školy nastoupí do autobusu na jedné zastávce dvě dívky Terezka a Janička a dva chlapci Luděk a Jirka. V autobuse jsou pouze dvojmístné sedačky. Každý z chlapců chce sedět s děvčetem. Kolik je možností, jak se mohou po dvou posadit, aby seděl vždy chlapec vedle děvčete?

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 2

Jméno a příjmení ______________________

1. Farmář chová králíky. Moc by si však přál mít ovečku. Na trhu mu statkář nabídl, že mu za tři králíky vymění jednu kozu. Soused sedlák mu za dvě kozy dá jednu ovečku. Kolik potřebuje farmář králíků, aby získal ovečku?

$$K + K + K = K_o$$

$$\underbrace{K_o}_{K+K+K} + \underbrace{K_o}_{K+K+K} = O_v$$

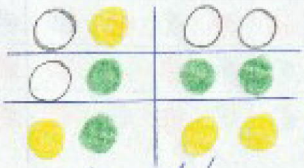
$2 \cdot 3 = 6$

nebo

$3 + 3 = 6$

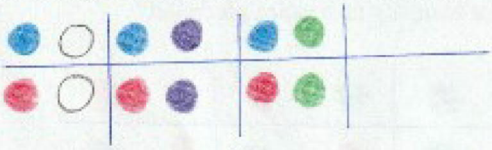
Farmář potřebuje 6 králíků.

2. V cukrárně prodávají tři druhy kopečkové zmrzliny: citrónovou, vanilkovou a pistáciovou. Toník si za peníze od maminky může koupit pouze dva kopečky zmrzliny. Kolik má možností, jaké kopečky zmrzliny si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva kopečky zmrzliny stejného druhu.



Toník má 6 možností.

3. Ema má ve skříni modrou a červenou sukni, a bílé, fialové a zelené tričko. Kolik má možností, jak se může dnes obléknout do školy? Pokus se najít všechny možnosti.



Ema má 6 možností.

4. Po cestě do školy nastoupí do autobusu na jedné zastávce dvě dívky Terezka a Janička a dva chlapci Luděk a Jirka. V autobuse jsou pouze dvojmístné sedačky. Každý z chlapců chce sedět s děvčetem. Kolik je možností, jak se mohou po dvou posadit, aby seděl vždy chlapec vedle děvčete?

T a Ji   Ja a Ji

T a L   Ja a L

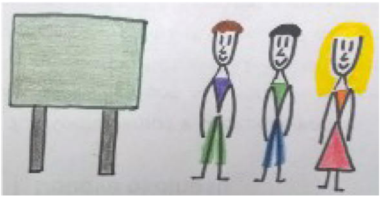
Celkem jsou to 4 možnosti.

Příloha č. 3: Výstupní test č. 1 + ukázkové řešení

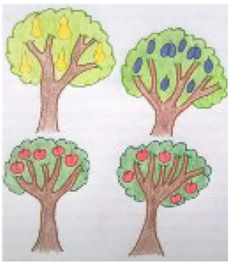
DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Výstupní test 1

Jméno a příjmení __________________________

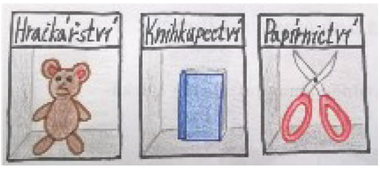
1. Paní učitelka chce během hodiny matematiky u tabule vyzkoušet tři žáky Martina, Tomáše a Zuzku. Jak mohou jít na zkoušení jeden po druhém za sebou?



2. Michal pomáhal tatínkovi sázet ovocné stromky. Sázeli je do řady pěkně vedle sebe. Zbývalo jim už jen vsadit do země dvě jabloně, hrušeň a švestku. V jakém pořadí vedle sebe je mohl Michal s tatínkem zasadit? Pokus se najít všechny možnosti.



3. Bětka byla s maminkou nakupovat ve velkém obchodním domě. Chtěla se ještě podívat do třech obchodů: do hračkářství, knihkupectví a do papírnictví. Maminka však Bětce dovolila navštívit pouze dva z nich. Bětka si musí také rozmyslet v jakém pořadí do obchodů půjde. Kolik má možností?

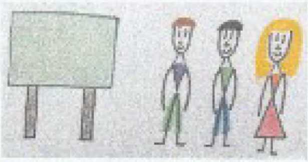


4. Petr stojí u zamčeného kola a nemůže si vzpomenout, který číselný kód zámek na kole odemkne. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 3 a 4. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 3 a 4 může zámek na kole otevřít?

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Výstupní test !

Jméno a příjmení: ______________________

1. Paní učitelka chce během hodiny matematiky u tabule vyzkoušet tři žáky Martina, Tomáše a Zuzku. Jak mohou jít na zkoušení jeden po druhém za sebou?

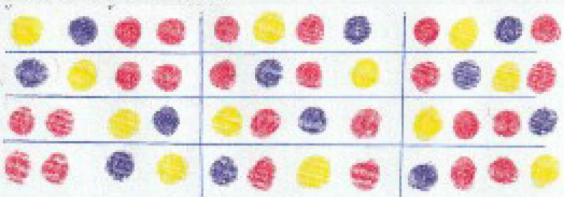


	1.	2.	3.
1.	M	T	Z
2.	M	Z	T
3.	T	M	Z

	1.	2.	3.
4.	T	Z	M
5.	Z	M	T
6.	Z	T	M

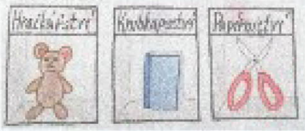
Celkem je to 6 možností.

2. Michal pomáhal tatínkovi sázet ovocné stromky. Sázeli je do řady pěkně vedle sebe. Zbývalo jim už jen vsadit do země dvě jabloně, hrušeň a švestku. V jakém pořadí vedle sebe je mohl Michal s tatínkem zasadit? Pokus se najít všechny možnosti.



Celkem je to 12 možností.

3. Bětka byla s maminkou nakupovat ve velkém obchodním domě. Chtěla se ještě podívat do třech obchodů: do hračkářství, knihkupectví a do papírnictví. Maminka však Bětce dovolila navštívit pouze dva z nich. Bětka si musí také rozmyslet v jakém pořadí do obchodů půjde. Kolik má možností?



Celkem je to 6 možností.

4. Petr stojí u zamčeného kola a nemůže si vzpomenout, který číselný kód zámek na kole odemkne. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 3 a 4. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 3 a 4 může zámek na kole otevřít?

333 343
444 434
334 344
443 433

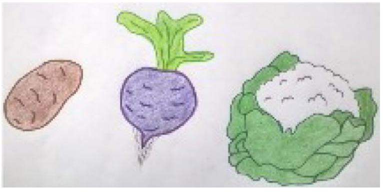
Celkem je to 8 trojmístných kódů.

Příloha č. 4: Výstupní test č. 2 + ukázkové řešení

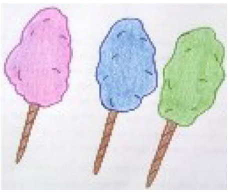
DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Výstupní test 2

Jméno a příjmení _________________________

1. Statkář pěstuje na poli pouze brambory. Rád by si dal k obědu vařený květák. Sousedka mu nabídla, že mu za tři brambory dá jednu řepu. Farmář ze sousední vesnice by mu za dvě řepy vyměnil jeden květák. Kolik potřebuje statkář brambor, aby získal květák?

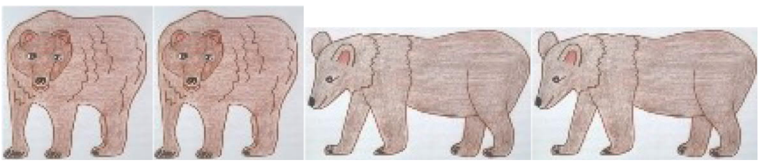


2. Na pouti prodávají tři druhy cukrové vaty: růžovou, modrou a zelenou. Maruška si za své ušetřené penízky může koupit pouze dvě cukrové vaty. Kolik má možností, jaké druhy cukrové vaty si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva stejné druhy cukrové vaty.



3. Herečka v divadle se má převléknout za princeznu. Vzala si krásné růžové šaty a teď vybírá jaké šperky by si k nim měla vzít. Má na výběr stříbrné a zlaté náušnice a červené, modré a zelené korále. Jak může nakombinovat náušnice a korále? Pokus se najít všechny možnosti.

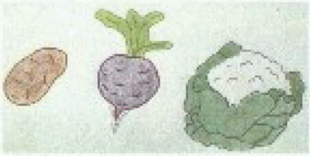
4. V ZOO mají dvě medvědice Lenku a Nelku a dva medvědy Tondu a Matěje. Na noc je ošetřovatelé zavírají vždy po dvou do klece. Kolik je možností, jak je všechny mohou zavřít do klece, když mohou být spolu pouze medvěd s medvědicí? Pokus se najít všechny možnosti.



DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Výstupní test 2

Jméno a příjmení ______________________________

1. Statkář pěstuje na poli pouze brambory. Rád by si dal k obědu vařený květák. Sousedka mu nabídla, že mu za tři brambory dá jednu řepu. Farmář ze sousední vesnice by mu za dvě řepy vyměnil jeden květák. Kolik potřebuje statkář brambor, aby získal květák?



B + B + B = Ř

$\underbrace{Ř}_{B+B+B} + \underbrace{Ř}_{B+B+B} = K$

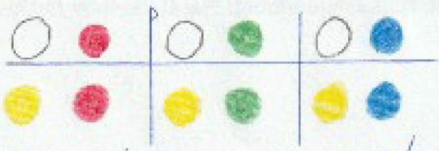
2 · 3 = 6
nebo
3 + 3 = 6

Statkář potřebuje 6 brambor.

2. Na pouti prodávají tři druhy cukrové vaty: růžovou, modrou a zelenou. Maruška si za své ušetřené penízky může koupit pouze dvě cukrové vaty. Kolik má možností, jaké druhy cukrové vaty si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva stejné druhy cukrové vaty.

Maruška má 6 možností.

3. Herečka v divadle se má převléknout za princeznu. Vzala si krásné růžové šaty a teď vybírá, jaké šperky by si k nim měla vzít. Má na výběr stříbrné a zlaté náušnice a červené, modré a zelené korále. Jak může nakombinovat náušnice a korále? Pokus se najít všechny možnosti.



Herečka má 6 možností.

4. V ZOO mají dvě medvědice Lenku a Nelku a dva medvědy Tondu a Matěje. Na noc je ošetřovatelé zavírají vždy po dvou do klece. Kolik je možností, jak je všechny mohou zavřít do klece, když mohou být spolu pouze medvěd s medvědicí? Pokus se najít všechny možnosti.

L a T   N a T
L a M   N a M

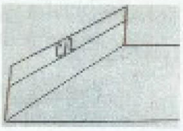
Celkem jsou to 4 možnosti.

Příloha č. 5: Řešení vstupního testu č. 1 a 2 žákem druhé třídy

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 1

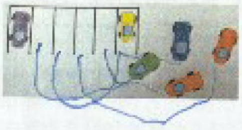
Jméno a příjmení

1. Tomáš, Honza a Dominik spolu poběží závod. Jak mohou za sebou proběhnout cílem? Pokus se najít všechny možnosti.



1 2 3

2. Na parkoviště přijelo zelené auto, modré auto a dvě červená. Zbývala zde už však jen poslední čtyři volná místa vedle sebe. Jak mohou auta vedle sebe zaparkovat? Pokus se najít všechny možnosti.



3. Hanka umí tři básničky. Paní učitelka ji poprosila, aby si z nich vybrala jen dvě básničky, které řekne před rodiči na vánoční besídce. Hanka si musí také rozmyslet v jakém pořadí básničky řekne. Kolik je možností, jak bude Hanka básničky na besídce přednášet?

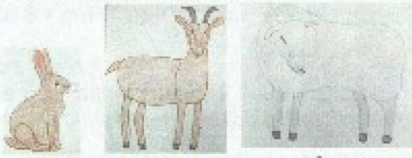
4. Tatínek nemůže otevřít svůj kufr, protože zapomněl číselný kód, kterým se zámek u kufr odemyká. Pamatuje si však, že kód byl trojmístný a byl složen pouze z číslic 1 a 2. Kolik trojmístných kódů pouze z číslic 1 a 2 může kufr otevřít?

21
12

DOKÁŽEŠ VYŘEŠIT VŠECHNY SLOVNÍ ÚLOHY?
Vstupní test 2

Jméno a příjmení

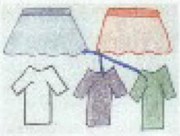
1. Farmář chová králíky. Moc by si však přál mít ovečku. Na trhu mu statkář nabídl, že mu za tři králíky vymění jednu kozu. Soused sedlák mu za dvě kozy dá jednu ovečku. Kolik potřebuje farmář králíků, aby získal ovečku?



3 2 1

2. V cukrárně prodávají tři druhy kopečkové zmrzliny: citrónovou, vanilkovou a pistáciovou. Toník si za peníze od maminky může koupit pouze dva kopečky zmrzliny. Kolik má možností, jaké kopečky zmrzliny si koupí? Může si samozřejmě koupit i dva kopečky zmrzliny stejného druhu.

3. Ema má ve skříni modrou a červenou sukni, a bílé, fialové a zelené tričko. Kolik má možností, jak se může dnes obléknout do školy? Pokus se najít všechny možnosti.



4. Po cestě do školy nastoupí do autobusu na jedné zastávce dvě dívky Terezka a Janička a dva chlapci Luděk a Jirka. V autobuse jsou pouze dvojmístné sedačky. Každý z chlapců chce sedět s děvčetem. Kolik je možností, jak se mohou po dvou posadit, aby seděl vždy chlapec vedle děvčete?

Příloha č. 6: Dotazník

DOTAZNÍK

Jméno a příjmení ________________________________ Věk ____________

Třída ___________

Ohodnoť úlohy. Zakroužkuj jedno číslo od 1 do 5.
Číslo 1 = líbila se mi; byla lehká.
Číslo 5 = nelíbila se mi, byla těžká.

Úloha číslo 1
Líbila se ti úloha? 1 (líbí) 2 3 4 5 (nelíbí)
Připadala ti úloha lehká nebo těžká ? 1 (lehká) 2 3 4 5 (těžká)
Proč?____
Věděl jsi/věděla jsi, jak úlohu vyřešit?
____
Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu? Pokud ano, kde?
____

Úloha číslo 2
Líbila se ti úloha? 1 (líbí) 2 3 4 5 (nelíbí)
Připadala ti úloha lehká nebo těžká? 1 (lehká) 2 3 4 5 (těžká)
Proč?____
Věděl jsi/věděla jsi, jak úlohu vyřešit?
____
Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu? Pokud ano, kde?
____

Úloha číslo 3
Líbila se ti úloha? 1 (líbí) 2 3 4 5 (nelíbí)
Připadala ti úloha lehká nebo těžká ? 1 (lehká) 2 3 4 5 (těžká)
Proč?____
Věděl jsi/věděla jsi, jak úlohu vyřešit?
____
Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu? Pokud ano, kde?
____

Úloha číslo 4
Líbila se ti úloha? 1 (líbí) 2 3 4 5 (nelíbí)
Připadala ti úloha lehká nebo těžká? 1 (lehká) 2 3 4 5 (těžká)
Proč?____
Věděl jsi/věděla jsi, jak úlohu vyřešit?
____
Řešil/a jsi někdy podobnou úlohu? Pokud ano, kde?
____