UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE – PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

**POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

| | |
|---|---|
| Autor práce | *Veronika PROCHÁZKOVÁ* |
| Název práce | *Konvexní a konkávní funkce* |
| Autor posudku | *Mgr. Derek PILOUS, Ph.D.* |

**Cíle (stanovení, splnění, reflexe splnění)**

V Abstraktu je uvedeno, že cílem práce je „vytvořit srozumitelný a stručně psaný rozšiřující text respektive výukový materiál k předmětu matematické analýzy zaměřen na téma konvexní a konkávní funkce (*sic*)“, který je určen pro „žáky výběrových seminářů středních škol nebo pro studenty vysokých škol bakalářského studia oboru matematika“. Tento cíl autorka naplnila, byť s výhradami. Splnění cíle reflektuje z Závěru.

**Obsahové části (úplnost, relevance, řazení)**

Kromě Úvodu a Závěru práce obsahuje pět kapitol. V první autorka rekapituluje základní teorii funkcí od definice přes vlastnosti jako monotonie až po spojitost a derivace; chybí pouze konvexnost a konkávnost, jimž je věnována samostatná druhá kapitola.Třetí kapitola se věnuje vztahu derivace a konvexnosti/konkávnosti, čtvrtá, poněkud nepřesně nazvaná Užití konvexnosti a konkávnosti, obsahuje rozšiřující teorii, konkrétně Jensenovu, aritmeticko-geometrickou a Youngovu nerovnost. Obsahovou část práce uzavírá pátá kapitola, sestávající z řešených úloh na téma konvexnosti a konkávnosti.

Jak je uvedeno výše, práce má být rozšiřujícím materiálem (také) pro bakalářské studium matematiky. Ačkoli v některých směrech běžný sylabus účelně rozšiřuje (Jensenova a Youngova nerovnost), v jiných rozšíření spíše jen naznačuje (lokální kovexnost/konkávnost – pouze definice; konvexní množina není propojena s konvexní funkcí apod.) a v některých za běžným obsahem vysokoškolských kurzů zaostává (chybí ekvivalentní charakteristika konvexnosti/konkávnosti pomocí jednostranných derivací, ačkoli jsou zavedeny; neobsahuje teorii k nalézání maximálních intervalů ryzí konvexnosti/konkávnosti funkce ani řešené úlohy na toto téma).

Z hlediska relevance je problematická první kapitola – většina zavedených vlastností funkcí není dále ve vztahu je konvexnosti a konkávnosti nijak použita, ač by v některých případech mohla být, a to účelně (chybí např. věta o vlivu derivace na paritu; v Úloze 6 na str. 60 je použita definiční podmínka liché funkce, aniž by tak byla označena).

Řazení jak kapitol, tak jejich částí je přirozené a logické. Výhrady lze mít k první kapitole, kde autorka o zaváděných pojmech vyslovuje tvrzení ještě před jejich definicí (místo aby případně použila prekoncepty – např. když na str. 19 vysvětluje pojem limity, činí tak pouze pro limity vlastní, a pak náhle začne větu „Naopak pokud limita funkce $f$ je rovna $a = \infty$…“, místo aby kupříkladu napsala, že hodnoty funkce „rostou nade všechny meze“).

**Odborná část (matematika/didaktika: náročnost, správnost, výstavba, konzistence apod.)**

Práce neobsahuje původní matematické výsledky. Z metodického hlediska jsou problematická některá neformální vysvětlení matematických pojmů, zvláště pak popis limity, který je zmatený a zavádějící; vyznívá tak, že k okolí vzoru hledáme okolí limity (str. 19) a jako epsilonové je oproti tradičnímu značení označováno právě okolí vzoru. Metodicky zcela nevhodná je demonstrace limity na grafu identické funkce (str. 20), protože okolí vzoru se zobrazuje bijektivně na okolí limity a jejich poloměry jsou totožné. Oproti tomu podobný neformální popis derivace (str. 25–26) považuji za zdařilý, včetně obrazového doprovodu.

Práce obsahuje poměrně velké množství matematických chyb a nepřesností, byť většinou nikoli zásadního charakteru. Např. na str. 14 tvrdí autorka o Dirichletově funkci, že její periodou je libovolné racionální číslo (ačkoli v definici na téže straně explicitně definuje periody jako kladné), definiční obor funkce z obr. 1.9 (str 16) je chybný, na str. 17 je dvakrát použit symbol náležení místo inkluze. Na téže straně autorka zavádí značení maxima funkce, ale nedefinuje, co maximum funkce je – pouze to, že funkce má na množině v bodě maximum. Níže pak chybně popisuje, co je lokální vlastnost funkce – tomuto popisu neodpovídají tvrzení o funkci na obr 1.11 na str. 18. Na str. 20 tvrdí, že pokud do funkce $1/x$ „dosazujeme postupně větší hodnoty, funkční hodnoty se ‚blíží' k nule", což platí jen pro kladná $x$. Definice 16 na téže straně označuje stejný bod nejprve $a$ a dále $x_0$ a zbytečně požaduje kladnost čísla $k$, čímž je chybná pro případ limity $-\infty$. Na str. 22 autorka tvrdí, že „nemůžeme jednoznačně určit, jaká je limita", ačkoli hned v další větě správně konstatuje, že limita v daném případě neexistuje. Větu o vztahu jednostranných a oboustranné limity na téže straně vyslovuje pouze pro vlastní limity, ovšem vzápětí (str. 23) ji aplikuje na funkci, jejíž jednostranné limity v daném bodě jsou nevlastní. Na str. 33 je v definiční podmínce konvexní množiny místo úsečky její délka. Z hlediska logické výstavby není zřejmé, proč je věta o vztahu ryzí a neryzí monotonie dokázána (str. 16), zatímco důkaz zcela analogické věty pro konvexnost a konkávnost je odbyt jako „zřejmý" (str. 33). Na str. 46 autorka říká: „Jak vidíme na obrázku 3.2, konvexnost se mění na konkávnost (a naopak) ve dvou bodech funkce $f$, tedy v $x = 3/2$ a v $x = -3/2$. Všimněme si, že graf přechází právě v těchto bodech z poloh pod tečnou do poloh nad tečnou (a naopak) hladce"; příslušný graf ovšem uvedenou polohu inflexních bodů na první pohled vyvrací a neobsahuje žádné tečny. Na str. 47 je uvedeno, že funkce z obr. 3.3 je konkávní na intervalu $(-\infty,-1\rangle$, ačkoli pro $x \leq -2$ není vůbec definovaná. Na str. 49 autorka tvrdí, že funkce $f(x) = x^2$ má druhou derivaci v nule nulovou. Na str. 51 autorka odkazuje na obrázek 2.1 a píše o bodech $X$ a $Y$, z nichž druhý obrázek vůbec neobsahuje, a chce přičítat k bodu v rovině číslo; následující věta (str. 51–52) odhaluje, že měla na mysli přičítání k první souřadnici, které však chybí index. Na str. 56 je aritmetický resp. geometrický průměr zmateně popsán jako „průměrná hodnota součtu resp. součinu $n$ čísel". Na začátku důkazy Věty 19 na str. 56 je použita totožná forma zápisu jednou ve smyslu „existuje" a jednou „pro všechna". Tentýž důkaz obsahuje tvrzení, že ln je konvexní funkce; zde však jde zjevně o přepis, protože v důkazu je správně použita Jensenova nerovnost pro konkávní funkce a v důkazu Youngovy nerovnosti na str. 57 je ln správně označena za konkávní. Zadání úloh na zjištění intervalů konvexnosti/konkávnosti funkce neobsahuje požadavek na nalezení všech takových intervalů ani na jejich maximalitu, takže výsledek není jednoznačný, ani na zjištění intervalů ryzí konvexnosti/konkávnosti. Proto není jasné, proč autorka hned v prvním příkladě na str. 58 používá ostrou nerovnost a zjišťuje tedy ryzí konvexnost. Dosti vážnou chybou je tvrzení v řešení Úlohy 7 na str. 61, že řešením rovnice $12x^2 > 0$ jsou všechna reálná čísla; správný závěr, že je vyšetřovaná funkce ryze konvexní, je tudíž vyvozen chybně.

**Přínos (originalita, použitelnost apod.)**

Oproti autorce se domnívám, že práce může být přínosná spíše pro učitele matematiky než bezprostředně pro studenty. Přístupné a korektní představení Jensenovy a Youngovy nerovnosti a některé překvapivé aplikace (jako Úloha 9 na str. 62), které nevyžadují znalost infinitezimálního kalkulu, umožňují využít práci i na střední škole; oproti tomu jako studijní materiál pro bakalářské studium oboru matematika jej považuji za mírně neúplný a vhodný spíše pro obory, kde je matematika podpůrným předmětem. Didakticky využitelné jsou kvalitní obrázky, které autorka vytvořila.

**Formální náležitosti (gramatika, styl, typografie, grafické části, odkazy a citace, celková úprava)**

Práce obsahuje malé množství překlepů („algegraickými", str. 37; „ř" místo znaku stupně, str. 62; druhá mocnina $x$ ve jmenovateli $f''(x)$) a pravopisných chyb (autorka zpravidla neukončuje vložené věty čárkou; „měly", str. 42; „z prava", str. 22). Styl je odborný, zvláště v méně formálních pasážích má autorka občas problémy s formulacemi (výše uvedený cíl práce; „Je zde vyvinuta analogie k monotonii a derivaci", taktéž v Abstraktu; „V 19. století se detailnějšímu studiu konvexních funkcí zabýval …", str. 8). Typografie je celkově dobrá, práce je přehledná a dobře čitelná; někdy je použit místo pomlčky spojovník (např. str. 28, 36), matematický výraz není (str.

19) nebo naopak je kurzívou (str. 59, „e“), tři tečky jsou i v seznamech na úrovni operace. Grafické části tvoří autorkou vytvořené obrázky grafů funkcí s pomocnými konstrukcemi, jako sečny a tečny; považuji je za velmi kvalitní. Odkazy a citace jsou v pořádku.

**Zdroje (reprezentativnost, relevance, použití)**

Práce obsahuje osm zdrojů, z toho jeden zahraniční. S výjimkou jednoho internetového zdroje jde o monografie. Vzhledem k ustálenosti zpracování tématu konvexnosti/konkávnosti považuji rozsah literatury i její odbornost za zcela postačující. Všechny zdroje jsou relevantní a autorka je používá korektně.

**Další poznámky**

**Vyjádření ke shodám v systému Theses:** Žádný shodný dokument. Podle Turnitin největší shoda 2 %, jde o obecné formální či matematické fráze a označené citáty.

**Hodnocení:** Práce splňuje podmínky kladené na závěrečnou práci. Práci doporučuji k obhajobě.

**Otázky k obhajobě**

1. Proč autorka v první kapitole zavádí vlastnosti, které potom v souvislosti s konvexností a konkávností nepoužívá?
2. Jak by autorka korektně došla (z teorie, kterou uvádí) k výsledku Úlohy 7, tedy ryzí konvexnosti na celém definičním oboru?

Datum a podpis autora posudku: 31.8. 2020, Derek Pilous