Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Exponenciální funkce – netradiční zavedení a úlohy

Exponential function – unconventional definiton and problems

Adéla Hájková

vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

studijní program: Specializace v pedagogice

studijní obor: Informační technologie – Matematika

2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Exponenciální funkce – netradiční zavedení a úlohy potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Mladé Boleslavi dne 20. 7. 2020

Adéla Hájková

Mé poděkování patří Mgr. Dereku Pilousi, Ph.D. za cenné rady a připomínky při psaní této bakalářské práce a dále za jeho vstřícnost a trpělivost.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na zavedení exponenciální funkce v oboru reálných čísel. V první části práce jsou uvedeny tradiční definice, které využívají prostředků diferenciálního počtu a následuje nestandardní zavedení pomocí rozšiřování definice umocňování, završeného použitím suprem. Následně je dokázána korektnost tohoto zavedení a ekvivalence s tradičními definicemi. V druhé části práce je uveden soubor příkladů a úloh, které slouží k procvičení exponenciálních rovnic, jejich soustav a slovních úloh, při jejich řešení je využita exponenciální funkce. V práci jsou uvedeny i výsledky ke cvičným úlohám.

KLÍČOVÁ SLOVA

exponenciální funkce, zavedení elementárních funkcí

ABSTRACT

The purpose of this bachelor thesis is to establish exponential function in the set of real numbers. The first section consists of conventional definitions that work with differential calculus. Furthermore, there is gradual expansion of exponentiation involving respective number sets. Lastly, the thesis encompasses definition of exponential function that omits differential calculus. Subsequently, the correctness of the definition is approved and other equivalent definitions that utilize differential calculus are shown. The second section includes set of examples and tasks that can be used to practice exponential equations, systems of equations and word problems that use exponential functions when being solved. The bachelor thesis also includes solutions to these tasks.

KEY WORDS

exponential function, definition of elementary functions

Obsah

Seznam použitého značení

$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená reálná osa
$\wedge$	logická spojka konjunkce
$\vee$	logická spojka disjunkce
$\Rightarrow$	logická spojka implikace
$\Leftrightarrow$	logická spojka ekvivalence
$a \in M$	a je z množiny M
$\emptyset$	prázdná množina
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou množiny B
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$a < b$	a je menší než b
$a \leq b$	a je menší nebo rovno b
$a > b$	a je větší než b
$a \geq b$	a je větší nebo rovno b
$\sup M$	supremum množiny M
$\inf M$	infimum množiny M
$\max M$	maximum množiny M
$\min M$	minimum množiny M
(a, b)	otevřený interval
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval

$(a,b\rangle$	polouzavřený interval
$\langle a,b)$	polouzavřený interval
$f(x)$	hodnota funkce v bodě x
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor funkce f
$\mathcal{H}(f)$	obor hodnot funkce f
f^{-1}	funkce inverzní k funkci f
$\lvert a\rvert$	absolutní hodnota čísla a
a^n	n-tá mocnina čísla a
$\sqrt[n]{a}$	n-tá odmocnina čísla a
e	Eulerovo číslo
$\log_a x$	logaritmus čísla x při základu a
$\log x$	dekadický logaritmus čísla x
$\ln x$	přirozený logaritmus čísla x
i	imaginární jednotka

Úvod

Definováním exponenciální funkce se v historii zabýval nejeden matematik. Záleželo na tom, z jakých poznatků vycházel a k čemu definici využíval. V literatuře tak lze dohledat minimálně pět zavedení exponenciální funkce, která jsou běžně používána. Tato bakalářská práce přináší další zavedení, které se od těch běžných trochu liší. Běžná zavedení (nebo jak budeme v této práci říkat tradiční zavedení) předpokládají znalost diferenciálního počtu. Pokud se k těmto zavedením dostane čtenář, který nemá potřebné znalosti, může mu jejich pochopení činit nemalé problémy. Ovšem naše definice (budeme také říkat netradiční zavedení) by měla být pro středoškolsky vzdělaného čtenáře srozumitelná. Celkově by tato práce mohla být vhodným doplňkovým materiálem pro učitele matematiky na středních školách nebo pro žáky středních škol v rozšiřujících hodinách matematiky. Při netradičním zavedení exponenciální funkce si vystačíme jen s pojmy suprema a infima. Ty sice nepatří do středoškolských osnov, ale jejich zavedení a uchopení na úrovni potřebné pro porozumění zavedení exponenciální funkce je výrazně jednodušší než v případě nástrojů diferenciálního počtu.

V první části se budeme zabývat potřebnou teorií. Způsobů, jak přistupovat k budování teorie exponenciální funkce je několik a my si je postupně ukážeme. Nejprve si uvedeme tradiční zavedení. Nebudeme je uvádět jako definice ale právě jako zavedení, protože bychom si exponenciální funkci při každém novém zavedení „předefinovali“. Tato zavedení nebudeme dále rozvádět, protože to není předmětem této práce. Co si ale rozvedeme, bude pojem mocniny a její rozšíření na jednotlivé číselné obory. S tímto přístupem se žáci setkávají již na základních školách a následně na středních školách. Žáci si tak lépe uvědomí, co pojem umocňování znamená a dokáží si lépe představit rozšíření umocňování na celá a racionální čísla. S tím souvisí i pojem odmocniny jako inverze k mocninné funkci, který si též definujeme. V této bakalářské práci si uvedeme i pár úskalí, která se při postupném zavedení mohou objevit.

Po postupném rozšiřování mocniny se přesuneme k netradičnímu zavedení exponenciální funkce. Mohlo by se zdát, že je to náhlý přesun od mocninné funkce k funkci exponenciální, ale vše si řádně odůvodníme. V kapitole týkající se netradičního zavedení si nejprve definujeme pojmy jako je supremum, infimum a vlastnosti s nimi související. Aby čtenář měl všechnu potřebnou teorii na jednom místě a nemusel si ji dohledávat v další literatuře. Netradiční zavedení si pak uvedeme jako definici a následně si dokážeme korektnost této definice a ekvivalentnost s jedním z tradičních zavedení. Vše budeme chtít dokázat jen pomocí pojmů suprema a infima, abychom ukázali, že hlubší znalost diferenciálního počtu není nezbytně nutná. Pokud žák střední školy porozumí pojmům suprema a infima, tak by tato definice pro něj neměla být problematická. Uvedeme si i vlastnosti, které pro reálné exponenty platí. Ve středoškolských učebnicích se jen konstatuje, že pro reálné exponenty platí stejné vlastnosti jako pro racionální exponenty, protože studenti nemají znalosti pro jejich dokázání. V této práci si tyto vlastnosti i dokážeme.

Když už si zavedeme exponenciální funkci od přirozených po reálné exponenty, tak by byla škoda skončit právě reálnými exponenty. Ukážeme, že se dá rozšířit i do oboru komplexních čísel. V této souvislosti si i odvodíme vztah mezi exponenciální funkcí a goniometrickými funkcemi. Rozšíření exponenciální funkce do komplexních čísel není tak přirozené, jako když jsme zaváděli postupné umocňování. Rozšíření se provádí formálně a je k tomu potřeba znalost nekonečných mocninných řad. Vše si ukážeme a popíšeme.

Poslední zastávkou v teoretické části bude logaritmická funkce. Logaritmická funkce je úzce spjata s exponenciální funkcí, protože je definována jako funkce k ní inverzní. I v počítání exponenciálních rovnic se využívá vlastností logaritmické funkce, proto ji nemůžeme vynechat.

V druhé části této práce se zaměříme na výpočet exponenciálních rovnic a využití exponenciální funkce v praxi. Exponenciální rovnice jsou součástí sylabu pro střední školy, takže žákům, kteří se s nimi setkali, by neměly činit problémy. Využití exponenciální funkce v praxi může být pro žáky lehce skryto. Objevuje se například ve slovních úlohách na procvičení geometrické posloupnosti či finanční matematiky. Tyto úlohy si zde též uvedeme.

Abychom zavedení exponenciální funkce dali řád, tak se v této práci budeme setkávat s Definicemi a Větami. Budeme je číslovat postupně tak, jak jdou za sebou. Takže například začneme Definicí 1 a budeme pokračovat Větou 2. Většinu vět si zde i dokážeme. Pokud je v důkazu uvedeno například D1 nebo V2, znamená to, že se odkazujeme na Definici 1 nebo na Větu 2. U některých vět důkaz není uveden. Je to proto, že se dá snadno dohledat v literatuře a jeho uvedení zde by bylo pouhým přepsáním.

Před tímto úvodem je i seznam značení, které se v práci vyskytuje. Nijak se neliší od značení, které je běžně používáno. Přesto ho uvádíme, aby se čtenář mohl ujistit, že je vše v souladu s jeho znalostmi.

Cílem této práce je tedy přinést středoškolským pedagogům a jejich žákům ucelený pohled na postupné zavedení exponenciální funkce, definování exponenciální funkce pro reálné exponenty a její rozšíření do komplexního oboru. Stejně tak je cílem vytvořit přehledný soubor úloh týkající se exponenciální funkce.

1. Definice exponenciální funkce

K zavedení exponenciální funkce můžeme přistupovat třemi způsoby: explicitně pomocí nástrojů diferenciálního počtu, pomocí vlastností exponenciální funkce nebo pomocí postupného rozšíření operace umocňování. Každý ze způsobů má své výhody a nevýhody. Zavedení pomocí diferenciálního počtu je explicitní zavedení a lze s ním dále snadno pracovat. Ovšem není vhodné pro žáky středních škol, kteří nemají dostatečné znalosti. Postupné zavedení je pro žáky více intuitivnější, a tak je i srozumitelnější. My si zde uvedeme všechny tři způsoby zavedení exponenciální funkce.

1.1 Tradiční zavedení exponenciální funkce

V této části si uvedeme první dva způsoby zavedení, a to pomocí diferenciálního počtu a pomocí vlastnosti exponenciální funkce. Tato zavedení lze snadno dohledat v literatuře. Autoři vždy zavádí exponenciální funkci tak, jak jim to pro dané použití nejvíce vyhovuje. Všechna zavedení shrnul například Bc. Tomáš Franc v diplomové práci Zavedení exponenciály a logaritmu z roku 2010. Exponenciální funkci tedy můžeme zavést pomocí funkcionální rovnice, jako řešení diferenciální rovnice, jako inverzní funkci k logaritmu, jako limitu určité posloupnosti s parametrem x, pomocí Taylorova rozvoje nebo přes umocňování Eulerova čísla e. V uvedené diplomové práci je dokázána korektnost jednotlivých zavedení a vzájemná ekvivalentnost.

Uvedená zavedení exponenciální funkce lze rozdělit na explicitní zavedení a deskriptivní zavedení. Explicitní zavedení za pomoci nástrojů diferenciálního počtu přímo vyjadřují funkční hodnotu pomocí argumentu. Deskriptivní zavedení exponenciální funkci vymezují nějakou její charakteristickou vlastností. Začneme zaveděními deskriptivními.

Zavedení 1 (Franc, 2010)**.** Funkci f, která vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

a podmínce

$$f(x) \geq x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme exponenciála.

Zavedení 2 (Franc, 2010)**.** Exponenciálou nazýváme funkci, která je maximálním řešením diferenciální rovnice

$$y' = y$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1.$$

Druhý způsob tvoří tedy zavedení explicitní.

Zavedení 3 (Franc, 2010)**.** Exponenciálou nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zavedení 4 (Franc, 2010)**.** Exponenciálou nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zavedení 5 (Franc, 2010)**.** Logaritmickou funkcí nazýváme funkci definovanou následovně

$$f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad x \in (0; \infty)\,.$$

Exponenciální funkce je inverzní funkce k logaritmické funkci.

Pro nás vhodným zavedením je vybudování operace obecné mocniny a definice exponenciální funkce pomocí ní. V diplomové práci, ze které čerpáme, se autor při zavedení exponenciální funkce přes Eulerovo číslo e odkazuje na definici obecné mocniny z (Jarník, 1974, s. 107). Tu si nyní uvedeme.

Definice 1 (Franc, 2010)**.** Pro každé a > 0, $x \in \mathbb{R}$ definujeme $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Takto definovanou funkci nazýváme obecná mocnina.

Poznámka. Tato definice není vhodně formulována. Problém spočívá v rovnosti $a^x = \lim a^{x_n}$. Operaci na levé straně definujeme pomocí vizuálně stejné operace na straně pravé, což by byla definice kruhem. Pokud budeme předpokládat, že umocnění na pravé straně je již definovaná operace s racionálními exponenty, pak ji připuštěním $x \in \mathbb{R}$ (a tedy i z $\mathbb{Q}$) redefinujeme. Správné by tedy bylo pokračovat v rozšiřování definice umocnění, zde pro iracionální x, a platnost rovnosti $a^x = \lim a^{x_n}$ pro racionální x vyslovit a dokázat jako větu. Stejně jako to je v (Jarník, 1974, s. 107 – 110), kde je ukázáno, že pokud je x racionální číslo, tak $\lim a^{x_n}$ je rovna a^x. Vzhledem k nevhodné formulaci této definice se v pozdějším textu budeme odkazovat nejen na tuto větu, ale i na (Jarník, 1974, s. 107 – 110), kde je vše řádně zadefinováno a dokázáno.

Zavedení 6 (Franc, 2010)**.** Exponenciálou budeme nazývat obecnou mocninu e^x s pevným základem e a proměnným exponentem $x \in \mathbb{R}$, kde

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Korektnost ani ekvivalenci jednotlivých zavedení si zde uvádět nebudeme. Pokud by o to měl čtenář zájem, může se podívat do uvedené diplomové práce (Franc, 2010).

1.2 Postupné zavedení umocňování

Třetím a ve středoškolských učebnicích používaným způsobem zavedením je zavedení přes operaci umocňování. Tento přístup je kognitivně patrně nejpřirozenější. Začneme zavedením umocňování pro přirozené exponenty.

Definice 2. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^1 = a, a^2 = a \cdot a, \dots\ , a^{n+1} \overset{\text{def}}{=} a^n \cdot a.$$

Definice je napsaná rekurzivně a neznamená nic jiného, než že umocňování je opakované násobení. Mohli bychom to zapsat i takto

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{krát}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pro mocnění s přirozeným exponentem platí určité vlastnosti, které si uvedeme v následující větě.

Věta 3. $\forall a \in \mathbb{R}\, \forall r, s \in \mathbb{N}:$

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
3. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, $r > s$

Poznámka. Větu budeme dokazovat způsobem vhodným pro střední školu, nikoli zcela formálně, tj. z axiomů příslušných číselných oborů. Ovšem důkazy přes axiomy se dají formalizovat až na naši úroveň.

Důkaz. 1. Výraz $a^r \cdot a^s$ si rozepíšeme podle definice umocňování.

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{s-\text{krát}}$$

Znamená to tedy, že počet a v prvním činiteli je r a v druhém činiteli jich je s. Takže celkový počet je $r + s$. Tedy $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

2. Výraz si opět rozepíšeme podle definice umocňování nejprve pro vnějšího mocnitele a následně pro vnitřního mocnitele.

$$(a^r)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r}_{s-\text{krát}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r-\text{krát}} \cdots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r-\text{krát}}}_{s-\text{krát}}$$

Vidíme, že s každým provedením vnitřní operace mocnění se počet a r-krát znásobí. Tedy platí, že $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

3. K důkazu poslední vlastnosti opět využijeme definice umocňování.

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{s-\text{krát}}}.$$

Za podmínky, že $r > s$, můžeme v čitateli s-krát a pokrátit a zbude tam $(r - s)$-krát a. A vlastnost (3) je dokázána.

$\square$

Výše uvedené vlastnosti jsou důležité pro následující rozšíření umocňování na celé a racionální exponenty. Souvisí to s konstrukcí samotných číselných oborů, kdy přirozená čísla vnořujeme do celých čísel za pomoci operace sčítání. A dále celá čísla vnořujeme do racionálních čísel za pomoci operace násobení. Při každém dalším rozšíření si tyto vlastnosti vždy dokážeme.

Definici pro celé exponenty si tedy odvodíme z vlastností Věty 3. Mějme $a \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{N}$, pak

$$a^r = a^{r+0} = a^r \cdot a^0.$$

Aby rovnost měla smysl, musí platit, že $a^0 = 1$. Tím jsme si vyřešili možnost, kdy je exponent roven nule. Další možností je, že je exponent záporný. Mějme $a \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{N}$, pak

$$a^r \cdot a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1.$$

Odtud musí platit, že $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Alternativně lze definici mocnění na celočíselné exponenty rozšířit rozšířením původní rekurentní definice. Jak jsme výše dokázali, tak tato definice požadované vlastnosti pro přirozené exponenty splňuje. Pokud bychom chtěli, aby splňovala vlastnosti i v celých číslech, tak si ji můžeme následovně upravit.

$$a^n = \frac{a^{n+1}}{a}, \qquad \text{pro } a \neq 0$$

Následně za n dosadíme celá kladná čísla, nulu a čísla celá záporná.

Pro celá kladná čísla se definice nijak nezmění, protože se jedná o čísla přirozená. Pro $n = 0$ si vztah snadno odvodíme dosazením: $a^0 = \frac{a^{0+1}}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Pro celá záporná čísla si vztah můžeme taktéž odvodit a to pomocí $n = -1$, které si dosadíme do rekurentního vzorce: $a^{-1} = \frac{a^{-1+1}}{a} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$. Obecně pro záporná celá čísla platí $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Což odpovídá rozšíření přes vzorce pro přirozená čísla.

Vše si formálně zavedeme v následující definici. Jak již bylo řečeno, pro celá kladná čísla se definice umocňování nijak nezmění, proto se zaměříme jen na $\mathbb{Z}_0^-$.

Definice 4. Pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a každé $n \in \mathbb{Z}_0^-$ definujeme

1. pro $n = 0 : a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$,
2. pro $n \in \mathbb{Z}^- : a^n \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Poznámka. V Definici 2 jsme mocnění definovali pro libovolný reálný základ. Jelikož umocňujeme jen na přirozená čísla a 0 za přirozené číslo nepovažujeme, tak to ničemu nevadí. Ale v literatuře se mohou objevit odlišnosti. V algebře se většinou 0 za přirozené číslo považuje (viz Peanovy axiomy [1]), ale v matematické analýze už tomu tak není. Tím se dostáváme k problému, že pokud bychom 0 za přirozené číslo považovali, tak už v Definici 2 bychom museli definovat výraz 0^0. I v tomto se literatura liší. Většinou záleží v jaké oblasti matematiky se pohybujeme. Pokud pracujeme s limitami, tak výraz 0^0 nezavádíme, protože je pro nás bezpředmětný. Uvedeme si to na následujících třech příkladech.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{-\frac{1}{n}} = \infty$$

[1] Peanovy axiomy (Blažek, 1983, s. 180)

1. Nula je přirozené číslo.
2. Ke každému přirozenému číslo existuje právě jeden následník.
3. Nula není následníkem žádného přirozeného čísla.
4. Jestliže se rovnají následníci přirozených čísel m, n, pak se rovnají i přirozená čísla m, n.
5. Nejsou jiná přirozená čísla než tak, která vzniknou z axiomů 1–4.

Na těchto příkladech je vidět, že když základ i exponent jdou k nule pro n jdoucí do nekonečna (dostali bychom tedy výraz 0^0), tak hodnota limity je vždy jiná. Ovšem pokud budeme pracovat s nekonečnými řadami, tak tam výraz 0^0 zadefinovaný máme a to, že $0^0 = 1$. Důvod si ukážeme na následujícím příkladu.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Tato rovnice platí pro $x \in (-1,0) \cup (0,1)$, ovšem pro $x = 0$ platí jen když $0^0 = 1$. My s výrazem 0^0 pracovat nebudeme, proto jsme se mu v Definici 4 vyhli tím, že jsme umocňování definovali pro nenulový základ.

Pro práci s celočíselnými exponenty se vlastnosti z Věty 3 zachovávají.

Věta 5. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall r, s \in \mathbb{Z}:$

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
3. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Důkaz. V důkazu se budeme věnovat jen záporným celým číslům, protože pro celá kladná máme vlastnosti dokázány viz Věta 3 a pro 0 je důkaz triviální. Při dokazování si musíme uvědomit, co to vlastně jsou záporná celá čísla. Jsou to opačná čísla k číslům kladným celým. A kladná celá čísla odpovídají přirozeným číslům. Pro nás je stěžejní důkaz vlastnosti (1), ostatní vlastnosti se pak dokazují obdobně.

- $r \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{Z}^-$: V důkazu využijeme toho, že záporná celá čísla jsou opačná ke kladným celým číslům a také vlastnosti (3) z Věty 3.

$$a^r \cdot a^s = a^r \cdot \frac{1}{a^{-s}} = \frac{a^r}{a^{-s}} = a^{r-(-s)} = a^{r+s}$$

- $r, s \in \mathbb{Z}^-$:

$$a^r \cdot a^s = \frac{1}{a^{-r}} \cdot \frac{1}{a^{-s}} = \frac{1}{a^{-r} \cdot a^{-s}} = \frac{1}{a^{-r+(-s)}} = \frac{1}{a^{-(r+s)}} = a^{r+s}$$

$\square$

1.2.1 Mocninné funkce

Máme definované umocňování na celočíselné exponenty a můžeme tak zadefinovat mocninou funkci.

Definice 6. Mocninnou funkci id^n pro $n \in \mathbb{Z}$ definujeme

$$\mathrm{id}^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n.$$

Tato definice shrnuje poznatky z předchozího textu o přirozených a celých exponentech. Pro mocninnou funkci tedy platí vlastnosti z Věty 3 a Věty 4. Dříve než přejdeme k definici pro racionální exponenty, tak si zadefinujeme funkci n-tou odmocninu.

Poznámka. Odmocninu chápeme jako funkci inverzní k funkci mocninné. Protože mocninné funkce se sudým exponentem nejsou prosté, inverze na celém $\mathbb{R}$ neexistuje. Proto přesně definujeme odmocninu jako inverzní funkci k mocninné funkci na maximálním podintervalu definičního oboru, který obsahuje nezáporná čísla a příslušná mocninná funkce je na něm prostá.

Definice 7. Funkci n-tou odmocninu $\sqrt[n]{\mathrm{id}}$ definujeme

1. pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ lichá: $\sqrt[n]{\mathrm{id}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{id}^n)^{-1}$,

2. pro pro $n \in \mathbb{N}$ sudá: $\sqrt[n]{\mathrm{id}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{id}^n|_{\langle 0;\infty)})^{-1}$ [2].

[2]Znakem | značíme restrikci funkce (zúžení funkce) na množinu uvedenou za tímto znakem.

V dalším textu budeme využívat vlastnosti odmocnin, proto si je zde uvedeme a dokážeme.

Věta 8. $\forall x, y \in \mathcal{D}(\sqrt[n]{\mathrm{id}})\, \forall m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

1. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
2. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
4. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$
6. $\sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{x^m}$

Důkaz. Budeme uvažovat, že vlastnosti platí na celém definičním oboru bez ohledu na to, zda jsou m, n, p lichá či sudá. Podle Definice 7 máme pro $x, y \in \mathcal{D}(\sqrt[n]{\mathrm{id}})$ a pro $a, b \in \mathcal{H}(\sqrt[n]{\mathrm{id}})$ tyto vztahy: $\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow a^n = x$, $\sqrt[n]{y} = b \Leftrightarrow b^n = y$.

1. Vychází z definice odmocniny jako inverzní funkce. Pokud složíme dvě funkce, které jsou k sobě vzájemně inverzní, dostáváme identitu.

2. Budeme využívat vlastností mocnin s přirozeným exponentem.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} &= a \cdot b \qquad /n \\
\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n &= (a \cdot b)^n \\
\left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot (\sqrt[n]{y})^n &= a^n \cdot b^n \\
x \cdot y &= a^n \cdot b^n \qquad / \sqrt[n]{} \\
\sqrt[n]{x \cdot y} &= \sqrt[n]{a^n \cdot b^n} \\
&= \sqrt[n]{(a \cdot b)^n} \\
&= a \cdot b
\end{aligned}$$

A tedy $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$.

3. Stejně jako předchozí.

4. Opět využijeme vlastností pro přirozené exponenty.

$$\sqrt[n]{x^m} \stackrel{?}{=} \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Celou rovnici umocníme na n.

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n = \left[\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right]^n$$

Podle vlastnosti (1) se nám levá strana zjednoduší.

$$\begin{aligned}
x^m &= \left[\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right]^n = \\
&= \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m \cdot n} = \\
&= \left[\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right]^m = \\
&= x^m
\end{aligned}$$

5. Dokážeme rovnost $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \stackrel{?}{=} \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Rovnici umocníme na $m \cdot n$.

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m\cdot n} = \left(\sqrt[m\cdot n]{x}\right)^{m\cdot n}$$

Využijeme zde opět vlastnosti (1).

$$\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\sqrt[m\cdot n]{x}\right)^{m\cdot n}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n} = x$$
$$x = x$$

Pro $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$ bychom to dokazovali stejně. A tudíž platí i konjunkce těchto rovností.

□

Odmocniny jsme si zavedli kvůli dalšímu rozšíření definice umocňování. Jako jsme rozšířili umocňování z přirozených exponentů na exponenty celé rozšířením platnosti vzorce (1) z Věty 5, rozšíříme mocninné funkce z celočíselných exponentů na exponenty racionální. A to za pomoci vzorce (2) z Věty 5. Pokud budeme požadovat jeho platnost pro racionální exponenty, bude platit $\left(x^{\frac{1}{k}}\right)^{k} = x^{\frac{1}{k}\cdot k} = x^{1} = x$. Složením $\frac{1}{k}$-té a k-té mocniny tedy vzniká identita. Takže umocňování na $\frac{1}{k}$ je inverzní funkcí k x^{k}, tedy k-tou odmocninou. A tak můžeme zadefinovat $x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$ a $x^{\frac{k}{l}} = x^{l\cdot\frac{1}{k}} = x^{l} \cdot x^{\frac{1}{k}}$.

Definice 9. Pro každé $x \in \mathbb{R}^{+}$ a každá $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$ definujeme

$$x^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{x^{m}}.$$

Poznámka. Oproti definici pro celočíselné exponenty je tu změna v tom, jaký základ připouštíme. Zde za základ bereme jen kladná reálná čísla. Na následujícím příkladu si ukážeme proč.

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^{2}} = 1$$

Zde se nám podařilo z čísla -1 „vyrobit“ číslo 1. Dvě vnější rovnosti jsou zjevně platné. Zabránit platnosti celé rovnice je tedy možno jednak tak, že „zakážeme“ prostřední rovnost, takže mocninu nebudeme přiřazovat racionálnímu číslu, nýbrž zlomku. To ovšem popírá účel rozšíření mocniny přes racionální až na reálné exponenty. Druhou a v souladu s naším programem jedinou možností je zakázat zbylé dvě rovnosti neboli přepis odmocnin záporných čísel na racionální mocniny.

Definici umocňování jsme rozšířili z celých na racionální exponenty tak, aby vztahy z Věty 5 zůstaly zachovány. Nyní si tuto skutečnost formálně vyslovíme a dokážeme.

Věta 10. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \forall r, s \in \mathbb{Q}:$

1. $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$
2. $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$
3. $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

Důkaz. $\forall n, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \, \forall m, k \in \mathbb{Z} \, \forall r, s \in \mathbb{Q} : r = \frac{m}{n}, s = \frac{k}{l}$:

1. Budeme vycházet z definice pro racionální exponenty a používat pravidla pro práci s odmocninami a přirozenými a celými mocninami.

$$x^r \cdot x^s \stackrel{?}{=} x^{r+s}$$
$$x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{k}{l}} \stackrel{?}{=} x^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = x^{\frac{m \cdot l + k \cdot n}{n \cdot l}} = \sqrt[n \cdot l]{x^{m \cdot l + k \cdot n}}$$
$$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[l]{x^k} \stackrel{?}{=} \sqrt[n \cdot l]{x^{m \cdot l + k \cdot n}}$$

Celou rovnici umocníme na $n \cdot l$.

$$\left(\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[l]{x^k}\right)^{n \cdot l} = \left(\sqrt[n \cdot l]{x^{m \cdot l + k \cdot n}}\right)^{n \cdot l}$$
$$(x^m)^l \cdot \left(x^k\right)^n = \left(x^{m \cdot l + k \cdot n}\right)$$

A protože v exponentu jsou celá čísla, tak můžeme využít vlastnosti (2) z Věty 5.

$$x^{m\cdot l} \cdot x^{k\cdot n} = x^{m\cdot l + k\cdot n}$$
$$x^{m\cdot l + k\cdot n} = x^{m\cdot l + k\cdot n}$$

A vidíme, že rovnost platí.

2. Budeme využívat stejná pravidla jako u vlastnosti (1).

$$(x^r)^s = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^k} =$$
$$= \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{x^{m\cdot k}}\right)} = \sqrt[l\cdot n]{x^{m\cdot k}} = x^{\frac{m\cdot k}{n\cdot l}} = x^{r\cdot s}$$

3. Použili bychom stejnou úvahu jako u vlastnosti (1).

□

Mezi další vlastnosti patří i monotonie mocninné funkce. Následující větu si rozdělíme podle toho, zda se jedná o monotonii základů (z) nebo exponentů (e).

Věta 11 (Věta o monotonii)**.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \, \forall p \in \mathbb{Q}^+ : x < y \Leftrightarrow x^p < y^p \tag{z}$$

Pro $p < 0$ je $x^p > y^p$.

$$\forall x > 1 \, \forall p, q \in \mathbb{Q} : p < q \Leftrightarrow x^p < x^q \tag{e}$$

Pro $x < 1$ je $x^p > x^q$.

Důkaz. Nejprve dokážeme implikace zleva doprava. Z Definic 2, 4 a 9 plyne, že $x > 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{Q} : x^p > 0$. Nyní si upravíme pravou stranu nerovnosti ze (z).

$$x^p < y^p \Leftrightarrow 1 < \frac{y^p}{x^p} = \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

Podíl $\frac{y}{x}$ je určitě větší než 1, to plyne z $x < y$. A p je větší než 0. Mocníme tedy něco většího než jedna na něco většího než nula.
Podívejme se na situaci pro (e).

$$x^p < x^q = x^p \cdot x^{q-p}$$

Pro výraz x^{q-p} opět platí, že mocníme něco většího než jedna (vychází z předpokladu pro x) na něco většího než nula (vychází z toho, že $p < q$). Pro obě části tedy stačí, aby platilo

$$\forall a > 1 \, \forall r \in \mathbb{Q}^+ : a^r > 1. \tag{1.1}$$

To budeme chtít dokázat. Důkaz bude korespondovat s tím, jak jsme zaváděli postupné umocňování. Začneme přirozenými exponenty.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ provedeme důkaz pomocí matematické indukce.

  1. Nejprve si ověříme, že nerovnost platí pro $n = 1$: $a^1 = a > 1$.
  2. Nyní si ukážeme, že nerovnost platí obecně.

     $$\forall a > 1 \, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0 : a^n > 1 \Rightarrow a^{n+1} > 1$$

     Bude nás zajímat nerovnost $a^{n+1} > 1$.

     $$a^{n+1} = \underbrace{a^n}_{>1} \cdot \underbrace{a}_{>1} > 1$$

     Že je $a > 1$ je zřejmé, a že $a^n > 1$ plyne z indukčního předpokladu. Tak máme dokázanou první implikaci zleva doprava.

Nyní si dokážeme opačné implikace. Pro (z) jsme dokázali, že $x < y \Rightarrow x^p < y^p$. Tudíž platí i nerovnost $x > y \Rightarrow x^p > y^p$ a samozřejmě i rovnost $x = y \Rightarrow x^p = y^p$. Ze všech případů, které mohou nastat, nastává nerovnost $x^p < y^p$ jen tehdy, když $x < y$. A tudíž obě podmínky v (z) jsou ekvivalentní.

Analogicky dokážeme i opačné implikace pro (e). Dokázali jsme, že platí $p < q \Rightarrow x^p < x^q$. Pro opačnou nerovnost tedy platí, že $p > q \Rightarrow x^p > x^q$. Stejně tak platí vztah pro rovnost $p = q \Rightarrow x^p = x^q$. Tudíž případ $x^p < x^q$ nastává jen pokud platí $p < q$. Podmínky z (e) jsou ekvivalentní.

Nyní budeme v důkazu pokračovat dokazováním platnosti (1.1) zleva doprava pro celé a racionální exponenty.

- Nekladné celé exponenty nás v tomto důkazu nezajímají, protože důkaz provádíme pro kladný exponent a to máme dokázáno v předchozím bodě.
- Když jsme rozšiřovali na racionální exponenty, tak jsme si nejprve definovali výraz $x^{\frac{1}{k}}$. Stejně tak se nejprve zaměříme na n z množiny $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. A tedy
$$\forall n \in \mathbb{N} : a^{\frac{1}{n}} > 1 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a > 1^n = 1.$$
- Racionální číslo můžeme zapsat zlomkem, a pak
$$\forall m, n \in \mathbb{N} : x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} > 1.$$
To je pravda, protože pro $x^m > 1$ máme nerovnost dokázanou v prvním bodě, a že $z^{\frac{1}{n}} > 1$ $(z = x^m)$ máme dokázáno o bod výše.

Tím jsme tedy dokázali implikace zleva doprava. Opačné implikace bychom dokázali stejně jako v případě přirozených exponentů výše. Tím máme dokázanou nerovnost (1.1).

Nyní zbývá už jen dokázat platnost věty pro $p < 0$ ze (z) a pro $x < 1$ z (e). To se dokáže snadno pomocí převrácené hodnoty.
Pro $p < 0$:

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p} < y^{-p} = \frac{1}{y^p} \Rightarrow y^p < x^p.$$

Pro $x < 1$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^p = \frac{1}{x^p} < \left(\frac{1}{x}\right)^q = \frac{1}{x^q} \Rightarrow x^p < x^q.$$

Tím jsme dokázali celou větu. □

Nabízelo by se dále rozšiřovat umocňování a mocninnou funkci i pro reálná čísla (respektive pro čísla iracionální), případně pro čísla komplexní. Na to většinou středoškolské znalosti nestačí. V učebnicích (například v (Odvárko, 1999) nebo v (Polák, 1980) je uvedeno, jak při výpočtech dojít aspoň k přibližné hodnotě mocniny s iracionálním exponentem. Dělají se horní a dolní odhady iracionálního čísla a na tyto odhady se pak umocní základ. Takže přesná hodnota je někde mezi tím. V podstatě podobným způsobem si zadefinujeme exponenciální funkci pro reálné exponenty v následující kapitole. Tady může nastat otázka, jaká je souvislost mezi mocninnou funkcí a funkcí exponenciální. Hodnoty mocninné funkce i exponenciální funkce jsou výsledky umocnění. V případě mocninné funkce je základ proměnná a exponent je konstanta, kdežto u exponenciální funkce je to naopak. K tomu, abychom definovali mocninnou funkci tedy stačí, abychom uměli libovolné číslo umocnit na příslušnou konstantu (což pro racionální exponenty umíme), ale u exponenciální funkce potřebujeme danou konstantu umocnit na libovolné reálné číslo, což zatím neumíme.

1.3 Netradiční zavedení exponenciální funkce

V této kapitole se zaměříme na netradiční zavedení exponenciální funkce. Tedy bez pomoci diferenciálního počtu, jen za pomoci pojmů suprema a infima.

1.3.1 Supremum a infimum

Než přistoupíme k netradičnímu zavedení exponenciální funkce, tak si řekneme, co to vůbec supremum a infimum je, abychom s těmito pojmy mohli dále pracovat. Nejprve si ale zavedeme rozšířenou reálnou osu.

Definice 12 (Rozšířená reálná osa (Rudin, 1976, s. 11))**.** Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$. Rozšířená reálná osa zachovává uspořádání

$$-\infty < x < \infty$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Při zavádění rozšířené reálné osy se většinou dodefinovávají binární operace na $\mathbb{R}^*$. Toto dodefinování je velmi intuitivní. Ale protože my nebudeme aritmetiku na $\mathbb{R}^*$ využívat, tak jsme se tomu vyhnuli. Zvídavý čtenář si to může dohledat v literatuře, například v (Pilous, 2018) nebo v (Rudin, 1976, s. 11).

Definice 13 (Horní závora (Veselý, 2009, s. 23))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Číslo $h \in \mathbb{R}$ se nazývá horní závora množiny M právě tehdy, když $\forall x \in M : x \leq h$.

Definice 14 (Dolní závora (Veselý, 2009, s. 24))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Číslo $d \in \mathbb{R}$ se nazývá dolní závora množiny M právě tehdy, když $\forall x \in M : d \leq x$.

Definice 15 (Supremum (Veselý, 2009, s. 24))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Reálné číslo s se nazývá supremum množiny M právě tehdy, když

1. $\forall x \in M : x \leq s$,
2. $\forall s' \in \mathbb{R}^* : s' < s \Rightarrow (\exists x \in M : x > s')$.

Jinými slovy je supremum horní závorou množiny a podle podmínky (2) v definici dokonce nejmenší horní závorou množiny. Infimum množiny definujeme obdobně – jako největší dolní závoru množiny.

Definice 16 (Infimum (Veselý, 2009, s. 24))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Reálné číslo i se nazývá infimem množiny M právě tehdy, když

1. $\forall x \in M : x \geq i$,
2. $\forall i' \in \mathbb{R}^* : i' > i \Rightarrow (\exists x \in M : x < i')$.

Označení. Že s je supremum množiny M obvykle značíme jako $s = \sup M$. Stejně tak infimum, $i = \inf M$.

Definice 17 (Maximum (Veselý, 2009, s. 23))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Číslo $m \in M$ se nazývá maximum množiny M právě tehdy, když $\forall x \in M : x \leq m$.

Definice 18 (Minimum (Veselý, 2009, s. 24))**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Číslo $n \in M$ se nazývá maximum množiny M právě tehdy, když $\forall x \in M : n \leq x$.

Označení. Pokud je m maximem množiny M, tak to obvykle značíme jako $m = \max M$. Stejně tak minimum, $n = \min M$.

Poznámka. Mohlo by se zdát, že definice horní závory a maxima jsou totožné a liší se jen v označení. To je ale chybné pozorování, protože v definici horní závory množiny$M$ je prvek h brán z $\mathbb{R}^*$. To znamená, že může být z množiny M, ale také nemusí. Kdežto v definici maxima je prvek m právě z množiny M. Z toho je možné vypozorovat, že pokud je supremum prvkem množiny M, pak je jejím maximem. Stejně tak pro infimum a minimum.

Supremum a infimum nemusí v $\mathbb{R}$ vždy existovat. Například celá čísla nemají ani supremum, ani infimum. Podobně přirozená čísla nemají supremum, ale mají infimum a tím je číslo 1. To je dokonce i minimem. Dalším příkladem je prázdná množina. V případě prázdné množiny platí, že každé $a \in \mathbb{R}$ je horní (i dolní) závorou, ale nelze z nich vybrat nejmenší horní (největší dolní) závoru. Naopak pro neprázdné množiny, které jsou omezené nějakým prvkem (mají aspoň jednu horní nebo dolní závoru), supremum a infimum v $\mathbb{R}$ existuje vždy. Jako příklad si uvedeme interval $I = \langle 1; 5)$ – zde je $\inf I = 1$ a zároveň je 1 i minimem, protože je součástí intervalu a $\sup I = 5$. Pokud požadujeme, aby i neomezené množiny měly supremum a infimum, musíme tyto pojmy definovat na rozšířené reálné ose $\mathbb{R}^*$. Zde supremum a infimum existuje vždy, protože oproti reálnému oboru je zde přidáno ∞ a $-\infty$. Když se podíváme zpátky na číselné obory, tak $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\sup \mathbb{Z} = \infty$ a $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ atd. Pokud se vrátíme k prázdné množině, tak nejmenší horní závorou ze všech $a \in \mathbb{R}^*$ je $-\infty$, takže $\sup \emptyset = -\infty$ a obdobně pro infimum, $\inf \emptyset = \infty$.

Nyní si uvedeme některé vlastnosti suprem a infim, které budeme potřebovat.

Označení. $A, B \subseteq \mathbb{R}$:
$A + B = \{a + b,\ a \in A \wedge b \in B\}$
$A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A \wedge b \in B\}$

Věta 19. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$, pak $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$ a $\inf A \cdot B = \inf A \cdot \inf B$.

Důkaz. Vlastnost budeme dokazovat jen pro supremum. Pro infimum by se důkaz provedl obdobně. Nechť tedy $\alpha = \sup A > 0$ a $\beta = \sup B > 0$, pak z definice suprema platí, že pro každé $a \in A$ a $b \in B$ je $0 \leq a \leq \alpha$ a $0 \leq b \leq \beta$. Když nerovnosti vynásobíme, tak dostaneme $a \cdot b \leq \alpha \cdot \beta$. Z toho plyne, že $\alpha \cdot \beta$ je horní závorou $A \cdot B$, a tedy $\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta$. Tím jsme dostali první nerovnost.

Nyní si označíme $m = \sup A \cdot B$. Z definice pro supremum m plyne, že pro jakékoliv prvky $a \in A$ a $b \in B$ platí $a \cdot b \leq m$. Nerovnost si upravíme, podělíme ji a (to můžeme, protože a je reálné kladné číslo). Dostáváme, že $b \leq \frac{m}{a}$, z čehož plyne, že podíl $\frac{m}{a}$ je horní závorou B, a tedy $\beta \leq \frac{m}{a}$. Pokud si nerovnost znovu upravíme, vydělením β a vynásobením a, dostaneme $a \leq \frac{m}{\beta}$. Z toho opět plyne, že podíl $\frac{m}{\beta}$ je horní závorou A, a tedy $\alpha \leq \frac{m}{\beta} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \leq m = \sup A \cdot B$. Tím jsme dostali druhou nerovnost. Konjunkcí nerovností dostáváme $\sup A \cdot B = \alpha \cdot \beta$. Rovnost je tak dokázána. □

Věta 20 (Pilous, 2016)**.** Nechť $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^*$, pak $\sup M_1 \leq \sup M_2 \wedge \inf M_1 \geq \inf M_2$.

Věta 21 (Pilous, 2016)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$ je horní závora M. Pak $s = \sup M$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists x \in M : s - x < \varepsilon.$$

Věta 22. Pokud ke každému prvku množiny M_1 existuje v množině M_2 prvek alespoň stejně velký, je $\sup M_1 \leq \sup M_2$.

Formálně: $\forall x \in M_1 \; \exists y \in M_2$: $x \leq y \Rightarrow \sup M_1 \leq \sup M_2$.

Důkaz. Větu budeme dokazovat sporem.

Negujeme implikaci, takže předpoklad věty zanecháme a znegujeme důsledek. Tak dostáváme tvrzení, že pro každé $x \in M_1$ existuje větší nebo rovné $y \in M_2$

a platí $\sup M_1 > \sup M_2$. To by znamenalo, že najdeme $x \in M_1$ takové, že $\sup M_2 < x \leq \sup M_1$ (neboť libovolně blízko $\sup M_1$ musí být nějaký prvek M_1, jinak by existovala menší horní závora), a pro které nenajdeme větší $y \in M_2$ (protože žádný prvek množiny nemůže být větší než jeho supremum). A to je spor, protože podle předpokladu musí být vlastnost splněna pro všechna x.

$\square$

Lemma 23. Nechť M_1, M_2 jsou neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}$ a platí

1. $\forall x \in M_1 \, \forall y \in M_2 : x \leq y$, a zároveň
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M_1 \, \exists y \in M_2 : |y - x| < \varepsilon$,

pak $\sup M_1 = \inf M_2$.

Důkaz. Podmínka (1) říká, že každý prvek z M_1 je menší nebo roven než každý prvek z M_2. Z toho plyne, že M_2 je podmnožinou množiny horních závor množiny M_1 (množinu horních závor si označíme $\mathcal{S}(M_1)$). A podle Věty 20 platí, že $\inf M_2 \geq \inf \mathcal{S}(M_1)$. A protože $\inf \mathcal{S}(M_1) = \min \mathcal{S}(M_1)$ a minimum z horních závor je supremum, tak $\inf M_2 \geq \sup M_1$.
Podle podmínky (2) platí, že pro každé ε kladné existují prvky z M_1 a M_2, které jsou vzdáleny o méně než ε. Mezi množinami tedy není „díra“ a $\sup M_1 = \inf M_2$. Kdyby totiž $\sup M_1 < \inf M_2$, pak pro $\varepsilon = \inf M_2 - \sup M_1$ by podmínka nebyla splněna, neboť každé $x \in M_1$ je menší nebo rovno $\sup M_1$ a každé $y \in M_2$ je větší nebo rovno $\inf M_2$. Tudíž by platila nerovnost $y - x \geq \inf M_2 - \sup M_1 = \varepsilon$. $\square$

1.3.2 Další pomocné definice a věty

Ještě než přejdeme k samotné definici pomocí suprema a infima, tak si uvedeme pár definic a vět, které jsou nutné pro důkaz ekvivalence s tradičními zavedeními. Jde tedy o definice a věty, které jsou součástí diferenciálního počtu. Uvádíme je proto, že předpokládáme, že čtenář této práce se v teorii diferenciálního počtu nemusí orientovat, a tak by pro něj později mohlo být matoucí, z čeho vycházíme. Věty zde nejsou více rozebrány ani dokázány. Pokud by měl čtenář zájem, může si důkazy dohledat v literatuře.

Definice 24 (Jarník, 1974, s. 75)**.** Říkáme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$ a píšeme, že $\lim a_n = a$, pokud $\forall \varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon$.

Věta 25 (Limita monotónní posloupnosti (Pilous, 2018))**.** Je-li posloupnost (a_n) neklesající, pak $\lim a_n = \sup a_n$. Je-li posloupnost (a_n) nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf a_n$.

Věta 26 (Jarník, 1974, s. 99)**.** Ke každému reálnému číslu x existuje neklesající posloupnost racionálních čísel, mající x za limitu.

1.3.3 Definice exponenciální funkce pomocí suprema a infima

Myšlenka tohoto zavedení je uvedena například v (Rudin, 1976, s. 22, 188) a také odpovídá myšlence zavedení umocňování na reálná čísla, která se vyskytuje v některých středoškolských učebnicích.

Definice 27. Pro $M \subseteq \mathbb{Q}$ definujeme $a^M \overset{\text{def}}{=} \{a^q; q \in M\}$.

Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označíme $\mathbb{Q}_x^- = \{q; q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$, $\mathbb{Q}_x^+ = \{q; q \in \mathbb{Q} \wedge q \geq x\}$.[3]

[3] Toto rozdělení $\mathbb{Q}$ je podobné tzv. Dedekindovým řezům. Tento pojem se vyskytuje

Definice 28. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

1. pro $a \geq 1 : \operatorname{pwr}_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$,
2. pro $0 < a < 1 : \operatorname{pwr}_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\operatorname{pwr}_{\frac{1}{a}}(x)}$.

Definice má smysl jen tehdy, pokud platí pro $a \geq 1$ rovnost $\sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$. Dokažme si, že tomu tak je.

Věta 29 (Korektnost Definice 28)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ a $a \geq 1$ platí: $\sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$.

Důkaz. Ukážeme, že jsou naplněny předpoklady Lemmatu 23. Mějme $a > 1$ a $x \in \mathbb{R}$. (Pro $a = 1$ je důkaz triviální, protože dostaneme rovnost $1 - 1 = 0$, což je menší než každé kladné ε.) Dále mějme $\varepsilon > 0$. Zvolme $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 > x$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} \cdot a^{q_0}(a-1)$. Jistě existuje $m \in \mathbb{Z}$ takové, že $\frac{m}{n} \leq x$ a $\frac{m+1}{n} \geq x$, a tedy $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_x^-$ a $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}_x^+$. Pak

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{a^{\frac{m}{n}}(a-1)}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + a^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Poslední úprava vznikla tak, že jsme rozšířili výrazem ve jmenovateli a použili vzorec $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$. Dále si výraz

v teorii množin a používá se při množinové konstrukci reálných čísel. Jediným rozdílem je, že my připouštíme rovnost $q = x$ v obou množinách, kdežto množiny Dedekindova řezu jsou disjunktní.

Definice (Jarník, 1974, s. 40): Dvojici číselných množin A, B nazveme řezem, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. Žádná z množin A, B není prázdná.
2. Každé číslo leží v právě jedné z množin A, B.
3. Je-li $a \in A$ a $b \in B$, je $a < b$.

omezíme shora. Pro první sčítanec jmenovatele určitě platí $1 \leq a^{\frac{n-1}{n}} \leq a$ (podle Věty 11). Dokonce to platí pro každý sčítanec ve jmenovateli. A protože výraz chceme omezit shora, tudíž omezit výrazem, který bude větší, tak jmenovatele musíme zmenšit. A protože pro všechny členy jmenovatele platí, že jsou větší než 1 nebo rovno 1 a jejich počet je n, můžeme je nahradit právě n.

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}(a-1)}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + a^{\frac{1}{n}} + 1} \leq \frac{a^{\frac{m}{n}}(a-1)}{n}$$

Následující kroky jsou již triviální. Za n dosadíme výraz z předpokladu (čímž jmenovatel opět zmenšíme a celý výraz tak zvětšíme) a pokrátíme stejné výrazy.

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}(a-1)}{n} < \frac{\varepsilon}{a^{q_0}(a-1)} \cdot a^{\frac{m}{n}}(a-1) = \frac{\varepsilon}{a^{q_0}} \cdot a^{\frac{m}{n}}$$

Teď už stačí si uvědomit, jak jsme $\frac{m}{n}$ a q_0 volili: $\frac{m}{n} \leq x < q_0$. Pak platí $a^{\frac{m}{n}} \leq a^{q_0}$. A z toho plyne, že

$$\frac{\varepsilon}{a^{q_0}} \cdot a^{\frac{m}{n}} < \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt prvky $a^{\mathbb{Q}_x^-}$ a $a^{\mathbb{Q}_x^+}$, které se liší o méně než ε. Jsou tedy splněny předpoklady Lemmatu 23 a platí, že $\sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$. Naše definice je tedy korektní. $\square$

Nyní si dokážeme, že je naše funkce $\mathrm{pwr}_a(x)$ exponenciální funkcí, a to tak, že dokážeme, že je ekvivalentní s tradičními zavedeními této funkce. A to konkrétně ekvivalentní se Zavedením 6. Jak již bylo řečeno, toto zavedení se opírá o definici obecné mocniny (Definice 1). My se o tuto definici také opřeme a dokážeme, že naše definice exponenciální funkce pomocí suprema ($\mathrm{pwr}_a(x)$) definuje stejnou funkci jako definice exponenciální funkce pomocí limity přes racionální posloupnosti (a^x). Tím pak budeme mít dokázanou ekvivalentnost se Zavedením 6.

Věta 30 (Ekvivalence definic)**.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a pro každé $a > 0$ platí, že $a^x = \mathrm{pwr}_a(x)$.

Důkaz. Věta říká, že a^x a $\mathrm{pwr}_a(x)$ jsou jedna a ta samá funkce, a to funkce exponenciální. Pro jistotu si zde připomene obě definice.

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} : q_n \in \mathbb{Q} \land \lim_{n\to\infty} q_n = x\right) \Rightarrow a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} \tag{L}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall a \geq 1 : \mathrm{pwr}_a(x) = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+} \tag{S}$$

Pro racionální x jsou definice shodné, takže v tomto případě je rovnost triviální. Budeme pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a pro posloupnost (q_n) z (L) dokazovat, že $\lim a^{q_n} = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-}$.

Z (L) není zřejmé, jak posloupnost racionálních čísel vypadá a zda vůbec existuje taková posloupnost, která má $x \in \mathbb{R}$ za limitu. To je vyřešeno v (Jarník, 1974, s. 108), kde autor řeší korektnost této definice, tedy že na volbě posloupnosti (q_n) nezáleží. Při důkazu korektnosti se mimo jiné odkazuje na Větu 26. Podle této věty ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje neklesající posloupnost, která má x za limitu. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti zvolit (q_n) neklesající.

Z tohoto předpokladu ihned plyne, že $\forall n \in \mathbb{N} : q_n < x$ (neboť $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) a dále, že (q_n) je podmnožinou $\mathbb{Q}_x^-$, protože (q_n) je vybraná posloupnost z $\mathbb{Q}$ a zároveň všechny její členy jsou menší než x. Z Věty 20 tak platí, že

$$\sup q_n \leq \sup \mathbb{Q}_x^-.$$

Získáváme první nerovnost pro suprema.

Naopak ke každému prvku množiny $\mathbb{Q}_x^-$ existuje člen posloupnosti (q_n), který je větší, protože se tato posloupnost blíží k x libovolně blízko (a skoro všechny její členy jsou tedy blíže, než jakýkoliv pevně zvolený prvek $\mathbb{Q}_x^-$).

Formálně: Nechť $q \in \mathbb{Q}_x^-$. Limitou (q_n) je x, takže podle definice limity posloupnosti (Definice 24) píšeme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : |q_n - x| = x - q_n < \varepsilon.$$

Vezmeme-li $\varepsilon = x - q$, dostáváme že pro skoro všechna n je $x - q_n < x - q$ neboli $q < q_n$.

Ke každému prvku množiny $\mathbb{Q}_x^-$ tedy existuje větší prvek z (q_n) a podle Věty 22 je

$$\sup \mathbb{Q}_x^- \leq \sup q_n.$$

Tím jsme získali druhou nerovnost pro suprema.

Konjunkcí zjištěných nerovností mezi supremy dostáváme jejich rovnost neboli $\sup \mathbb{Q}_x^- = \sup q_n$. A podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 25) je $\sup q_n = \lim q_n$. Pak tedy $\lim a^{q_n} = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-}$. Pro infimum důkaz zvlášť provádět nemusíme, protože jsme při dokazování korektnosti definice $\mathrm{pwr}_a(x)$ dokázali, že $\sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$. Tím máme dokázanou celou větu, a tedy ekvivalenci definic. $\square$

Stejně jako pro přirozené, celé a racionální exponenty i zde platí vzorce pro mocnění. Dokazovat tyto vlastnosti z Definice 28 je dosti obtížné. Na ukázku to provedeme jen pro první vlastnost, a to $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Nejprve dokážeme, že vztah, kterým v Definici 28 definujeme a^x platí i pro exponenty racionální (teď už můžeme psát a^x místo $\mathrm{pwr}_a(x)$, protože jsme dokázali ekvivalenci definic).

Věta 31.

$$\forall a \geq 1 \, \forall x \in \mathbb{Q} : a^x = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$$

Důkaz. Pro x platí, že je maximem množiny $\mathbb{Q}_x^-$ a zároveň minimem množiny $\mathbb{Q}_x^+$ a podle Věty 11 je $a^x = \max a^{\mathbb{Q}_x^-} = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-}$ a zároveň $a^x = \min a^{\mathbb{Q}_x^+} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+}$. Tím je vztah dokázán i pro racionální x. $\square$

V následující větě si uvedeme vlastnosti exponenciální funkce.

Věta 32 (Vlastnosti exponenciální funkce)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \, \forall x, y \in \mathbb{R}:$

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$
5. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
6. $\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$
7. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

První vlastnost dokážeme dvěma způsoby. První způsob bude pomocí suprema a infima (tento důkaz bychom v literatuře obtížně dohledávali, autorem je vedoucí této práce) a druhý způsob bude pomocí limit. Čtenář si tak bude moci porovnat obtížnost důkazů. Zbylé vlastnosti budeme dokazovat už jen pomocí diferenciálního počtu. Jak bylo řečeno dříve, dokazovat všechny vlastnosti pomocí suprema a infima by bylo složité. A protože jsme dokázali ekvivalenci definice pomocí suprem s tradičními definicemi (Věta 30), tak nám v použití limit nic nebrání. V důkazu budeme hojně využívat Definici 1. Důkaz je převzat z (Jarník, 1974, s. 110 – 113) a autor v důkazu předpokládá, že čtenář zná některé vlastnosti limit. My příslušné věty zde uvádět nebudeme. Zvídavý čtenář si je může literatuře dohledat.

Důkaz. Nejprve důkaz pomocí suprema a infima pro vlastnost (1).

- Důkaz si rozdělíme na dvě části podle toho, zda budeme počítat se supremem nebo infimem.

  1. $a^x \cdot a^y = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} \cdot \sup a^{\mathbb{Q}_y^-} \overset{\text{V19}}{=} \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} \cdot a^{\mathbb{Q}_y^-} = \sup a^{\mathbb{Q}_x^- + \mathbb{Q}_y^-}$
  2. $a^x \cdot a^y = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+} \cdot \inf a^{\mathbb{Q}_y^+} \overset{\text{V19}}{=} \inf a^{\mathbb{Q}_x^+} \cdot a^{\mathbb{Q}_y^+} = \inf a^{\mathbb{Q}_x^+ + \mathbb{Q}_y^+}$

  Platí, že $\mathbb{Q}_x^- + \mathbb{Q}_y^- \subseteq \mathbb{Q}_{x+y}^-$ (protože součet racionálních čísel menších nebo rovných x (respektive y) je racionální číslo menší nebo rovno $x+y$) a $\mathbb{Q}_x^+ + \mathbb{Q}_y^+ \subseteq \mathbb{Q}_{x+y}^+$ a tudíž

$$a^x \cdot a^y = \sup a^{\mathbb{Q}_x^- + \mathbb{Q}_y^-} \leq \sup a^{\mathbb{Q}_{x+y}^-} = a^{x+y} =$$
$$= \inf a^{\mathbb{Q}_{x+y}^+} \leq \inf a^{\mathbb{Q}_x^+ + \mathbb{Q}_y^+} = a^x \cdot a^y.$$

  Tedy $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Nyní důkaz pomocí limit.

- Pro racionální čísla máme vlastnosti dokázány ve Větě 10. Mějme tedy $x, y \in \mathbb{R}$ a posloupnosti racionálních čísel $x_1, x_2, \ldots x_n$ a $y_1, y_2, \ldots y_n$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

  1. Nechť $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$, pak

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x \cdot a^y.$$

  2. Nechť $\lim_{n\to\infty} (x \cdot y_n) = x \cdot y$ a $(a^x)^{y_n} = a^{x \cdot y_n}$, pak

$$(a^x)^y = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x \cdot y_n} = a^{x \cdot y}$$

  3. Rovnost dokážeme pomocí vlastnosti (1):

$$a^y \cdot a^{x-y} = a^{y+x-y} = a^x$$

4. Tato vlastnost plyne z vlastnosti (3) tak, že $x = 0$.

5. Opět budeme vycházet z Definice 1.

$$a^x \cdot b^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot b^{x_n} = \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)^{x_n} = (a \cdot b)^x$$

6. Využijeme dokázané vlastnosti (5):

$$a^x \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^x = \left(a^x \cdot \frac{b}{a}\right)^x = b^x.$$

7. Tato vlastnost plyne z vlastnosti (6) tak, že $b = 1$.

$\square$

Věta 33 (Věta o monotonii)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \, \forall x \in \mathbb{R}^+ : a < b \Leftrightarrow a^x < b^x \tag{Z}$$

Pro $x < 0$ je $a^x > b^x$.

$$\forall a > 1 \, \forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow a^x < a^y \tag{E}$$

Pro $a < 1$ je $a^x > a^y$.

Důkaz. Důkaz bude obdobný jako pro přirozené, celé exponenty a racionální exponenty. Nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Předpokládejme, že platí: $a > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q} > a^x > 0$. Nyní si upravíme pravou stranu nerovnosti ze (Z).

$$a^x < b^x \Leftrightarrow 1 < \frac{b^x}{a^x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

Podíl $\frac{b}{a}$ je určitě větší než 1, to plyne z $a < b$. A x je větší než 0. Mocníme tedy něco většího než jedna na něco většího než nula.
Podívejme se na situaci pro (E).

$$a^x < a^y = a^x \cdot a^{y-x}$$

Pro výraz a^{y-x} opět platí, že mocníme něco většího než jedna (vychází z předpokladu pro a) na něco většího než nula (vychází z toho, že $x < y$). Pro obě části tedy stačí, aby platilo

$$\forall a > 1\, \forall x \in \mathbb{R}^+ : a^x > 1. \tag{1.2}$$

To budeme chtít dokázat, ale protože pro racionální exponenty to dokázáno máme ve Větě 11, stačí když důkaz provedeme pro exponenty iracionální.

Mějme tedy $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$. Podle Definice 28 a její ekvivalence s Definicí 1 můžeme vyjádřit $a^x = \sup a^{\mathbb{Q}_x^-}$. Protože je $x > 0$, tak existuje racionální číslo q takové, že $0 < q < x$. Tedy $q \in \mathbb{Q}_x^-$ a odtud plyne

$$a^0 = 1 < a^q \leq \sup a^{\mathbb{Q}_x^-} = a^x.$$

První nerovnost plyne z Věty 11 a druhá nerovnost plyne z toho, že supremum množiny je její horní závora. Je tedy větší nebo rovno všem prvkům této množiny. Tak máme dokázanou nerovnost (1.2), a tedy i první implikaci.

Nyní si dokážeme implikaci zprava doleva. Stejně jako pro racionální exponenty, i zde si obě části věty rozebereme na jednotlivé případy.

Pro (Z) jsme dokázali, že $a < b \Rightarrow a^x < b^x$. Tudíž platí i nerovnost $a > b \Rightarrow a^x > b^x$ a samozřejmě i rovnost $a = b \Rightarrow a^x = b^x$. Ze všech případů, které mohou nastat, nastává nerovnost $a^x < b^x$ je tehdy, když $a < b$. A tudíž obě podmínky jsou ekvivalentní.

Analogicky to dokážeme pro (E). Platí, že $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ a pro opačnou nerovnost tedy platí, že $x > y \Rightarrow a^x > a^y$. Stejně tak pro rovnost platí $x = y \Rightarrow a^x = a^y$. Tudíž případ $a^x < a^y$ nastává jen pokud platí $x < y$. Podmínky jsou ekvivalentní.

Dokázali jsme i druhou implikaci. Ještě zbývá dokázat, zda věta platí i pro $x < 0$ ze (Z) a $a < 1$ z (E). I zde důkaz provedeme stejně jako v případě racionálních exponentů. Přejdeme tedy k převrácené hodnotě.

Pro $x < 0$:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} < b^{-x} = \frac{1}{b^x} \Rightarrow a^x < b^x.$$

Pro $a < 1$:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} < \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y} \Rightarrow a^y < a^x.$$

$\square$

1.4 Rozšíření exponenciální funkce do komplexních čísel

Definice exponenciální funkce nekončí definováním pro reálné exponenty. Exponenciální funkci můžeme definovat i v komplexních číslech. Ovšem rozšíření nelze provést názorně, jako jsme to dělali pro reálná čísla, ale provádí se formálně pomocí Taylorovy řady (Zavedení 4). Zaměříme se tedy konkrétně na exponenciální funkci se základem e. Kromě rozvoje pro exponenciální funkci budeme využívat rozvoje pro funkce goniometrické, a to konkrétně pro funkce sinus a kosinus. K propojení exponenciální funkce s goniometrickými funkcemi postupně dojdeme.

Definice 34 (Jarník, 1974, s. 293)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\cos x \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Definice 35 (Jarník, 1974, s. 293)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\sin x \stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Definice 36 (Jarník, 1984, s. 551)**.** Pro $x, y \in \mathbb{R}$ rozumíme funkci komplexní exponencielu definovanou následovně:

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\cdot y} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y},$$

kde

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = 1 + \mathrm{i}\cdot y + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^n}{n!}.$$

Poznámka. Toto zavedení jsme udělali pomocí vlastnosti $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$. Tuto vlastnost požadujeme i od komplexní exponenciely a od Taylorovy řady ze Zavedení 4.

Nyní si uvedeme větu, která nám ukáže, jak jinak můžeme výraz e^{iy} vyjádřit.

Věta 37 (Jarník, 1984, s. 551)**.** Pro každé $z \in \mathbb{C}$ a pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x} \cdot (\cos y + \mathrm{i}\cdot \sin y).$$

Důkaz. Komplexní číslo z je uspořádaná dvojice $(x; y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Můžeme ho tedy také zapsat jako $z = x + \mathrm{i}\cdot y$. Pak můžeme exponenciální funkci e^z zapsat ve tvaru $\mathrm{e}^{x+i\cdot y}$. A podle Definice 36 platí, že $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y}$. Výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y}$ máme z definice vyjádřený pomocí Taylorovy řady. Tedy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = 1 + \mathrm{i}\cdot y + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^3}{3!} + \cdots .$$

Trochu si ho upravíme.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^0}{0!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^1}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^3}{3!} + \cdots$$

Nyní přeuspořádáme členy tak, že k sobě dáme členy se sudými mocninami a s lichými mocninami.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \left(\frac{(\mathrm{i}\cdot y)^0}{0!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^2}{2!} + \cdots\right) + \left(\frac{(\mathrm{i}\cdot y)^1}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^3}{3!} + \cdots\right)$$

U lichých mocnin vytkneme i.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \left(\frac{(\mathrm{i}\cdot y)^0}{0!} + \frac{(\mathrm{i}\cdot y)^2}{2!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\cdot\left(\frac{(y)^1}{1!} + \frac{\mathrm{i}^2\cdot y^3}{3!} + \cdots\right).$$

Vidíme, že i je jen v sudých mocninách. A protože $\mathrm{i}^2 = -1$, tak se nám u členů, kde je i v $(4n+2)$-hé mocnině, změní znaménko.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\cdot\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots\right).$$

V první závorce jsme dostali rozvoj funkce kosinus podle Definice 34 a v druhé závorce rozvoj funkce sinu podle Definice 35.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots\right)}_{\cos y} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin y}.$$

A můžeme psát

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = \cos y + \mathrm{i}\cdot\sin y.$$

□

Rovnost, kterou jsme právě dokázali, se nazývá Eulerův vzorec nebo též Eulerova formule. Speciálním případem je pak Eulerova identita. Ta vzniká dosazením π za y.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi} + 1 = 0 \tag{1.3}$$

Když americký matematik Benjamin Peirce dokazoval tuto rovnost na svých přednáškách, tak řekl, že tato rovnost je paradoxní, protože ji nejsme schopni porozumět a nevíme, co znamená, ale dokázali jsme ji, tak to musí být pravda (Kasner & Newman, 2001, s. 103 – 104). Jedná se tedy čistě o formální rovnost. Jinými slovy jednoduchý vizuální přístup k zavedení exponenciální funkce v komplexním oboru není znám. A protože z hodnot reálné exponenciální funkce nelze přímo odvodit hodnotu pro žádný konkrétní imaginární exponent, nelze zde použít rozšiřování definice, jak jsme jej provedli v $\mathbb{R}$.

Eulerova formule nám ukazuje překvapivé propojení mezi exponenciální funkcí a funkcemi goniometrickými, o kterém jsme se zmínili na začátku kapitoly. Má i velmi praktické důsledky například při odvozování vzorců pro goniometrické funkce. Některé si zde ukážeme. Odvození lze snadno nalézt v literatuře, například v (Jarník, 1984, s. 551 – 552) nebo v (Veselý, 2009, s. 237 – 241). Začneme vyjádřením funkcí sinus a kosinus pomocí exponenciální funkce.

Odvození. Nejprve si vyjádříme výrazy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x}$ a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x}$ pomocí funkcí sinus a kosinus z Eulerovy formule.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} &= \cos x + \mathrm{i}\cdot\sin x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x} &= \cos x - \mathrm{i}\cdot\sin x \end{aligned}$$

V druhé rovnosti po dosazení $-x$ bychom dostali $\cos(-x)+\mathrm{i}\cdot\sin(-x)$. Protože funkce kosinus je sudá, tak pro záporná x nemění znaménko funkční hodnoty. Ale funkce sinus je lichá, tak ta znaménko mění. Takže po úpravě dostáváme uvedenou pravou stranu. Když obě rovnosti sečteme, můžeme vyjádřit $\cos x$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x} &= 2\cdot\cos x \\ \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x}}{2} \end{aligned}$$

Naopak když obě rovnosti odečteme, můžeme vyjádřit $\sin x$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x} &= 2\mathrm{i} \cdot \sin x \\ \sin x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x}}{2 \cdot \mathrm{i}} \end{aligned}$$

Dalším využití má Eulerova formule při odvození součtu funkcí sinus a kosinus.

Odvození. Opět budeme pracovat s výše uvedenými výrazy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x}$ a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x}$. Tentokrát se zaměříme na jejich součin. Jednou si ho vyjádříme pomocí goniometrických funkcí a podruhé pomocí vlastností exponenciální funkce z Věty 33.

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x} = (\cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x)(\cdot \cos x - \mathrm{i} \cdot \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x - \mathrm{i}\cdot x} = \mathrm{e}^0 = 1 \end{aligned}$$

Tak dostáváme rovnost

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Poslední odvození, které si zde ukážeme, bude odvození součtových vzorců pro sinus a kosinus. Zde to bude přirozenější, protože doposud jsme řekli, že budeme využívat výrazy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x}$ a $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot x}$, ale na počátku nemuselo být zřejmé proč. Nyní budeme vycházet z výrazu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}$.

Odvození. Jako v předchozím případě i zde si výraz vyjádříme nejprve pomocí goniometrických funkcí a následně pomocí vlastností exponenciální funkce. Druhou rovnost pak také upravíme pomocí goniometrických funkcí.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} &= \cos(x+y) + \mathrm{i} \cdot \sin(x+y) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y} = (\cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x) \cdot (\cos y + \mathrm{i} \cdot \sin y) = \\ &= \cos x \cos y + \mathrm{i} \cos x \sin y + \mathrm{i} \sin x \cos y - \sin x \sin y = \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \mathrm{i} \cdot (\cos x \sin y + \sin x \cos y) \end{aligned}$$

Když porovnáme reálné a imaginární části u obou rovností, dostáváme následující vztahy

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

Odvození těchto vztahů je užitečné pro práci s goniometrickými funkcemi například při integrování.

1.5 Logaritmická funkce

Když jsme si zavedli exponenciální funkci, tak nemůžeme opomenout funkci logaritmickou. Ta se v reálných číslech zpravidla definuje jako inverzní funkce k funkci exponenciální (i když, jak jsem viděli v Zavedení 5 na straně 15, je možno postupovat opačně a definovat naopak exponenciální funkci jako inverzní funkci k logaritmu, definovanému pomocí integrálu). Jejích vlastností se hojně využívá při řešení exponenciálních rovnic. Ovšem exponenciální funkci jsme definovali i v komplexních číslech a logaritmická funkce je v tomto číselném oboru problematická. Problém je v tom, že funkce sinus a kosinus jsou periodické funkce, a tudíž nejsou prosté. Tedy ani exponenciální funkce v komplexních číslech není prostá. To znamená, že k ní neexistuje inverze, jako tomu je v reálných číslech. Pokud bychom logaritmickou funkci chtěli v komplexních číslech definovat, museli bychom zúžit definiční obor na množinu, kde exponenciální funkce prostá je, a tedy je prostá i její imaginární část. Jinými slovy, imaginární část by byla například z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Druhý způsob definování logaritmické funkce v komplexních číslech je definování jako nekonečně hodnotové funkce. Toto zavedení však překračuje rámec bakalářské práce, takže se jím více zabývat nebudeme. Zvídavý čtenář si to může dohledat v (Jarník, 1984, s. 559). My se budeme věnovat pouze zavedení logaritmické funkce v reálných číslech.

Definice 38. Pro každé x kladné, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ platí, že $y = \log_a x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = a^y$.

Terminologie. Číslu $\log_a x$ říkáme logaritmus čísla x při základu a. Pokud je základ $a = 10$, tak místo $\log_{10} x$ píšeme $\log x$ a říkáme, že se jedná o dekadický logaritmus. Pokud je základ $a = \mathrm{e}$, tak nepíšeme $\log_{\mathrm{e}} x$, ale $\ln x$. Tomuto logaritmu říkáme přirozený.

Věta 39 (Vlastnosti logaritmické funkce)**.**
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \; \forall t \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
6. $\log_a x^t = t \cdot \log_a x$
7. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Důkaz je převzat z (Jarník, 1974, s. 117).

Důkaz. Budeme využívat Definice 38 a vlastností exponenciální funkce z Věty 32. Zavedeme si $p = \log_a x$ tedy $x = a^p$, $q = \log_a y$ tedy $y = a^q$.

1. Z definice platí: $a^1 = a \Leftrightarrow 1 = \log_a a$.

2. Opět z definice platí: $a^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_a 1$.

3. Využijeme vlastnosti exponenciální funkce a následně exponenciální funkci složíme s logaritmickou funkcí.

$$\begin{aligned} x \cdot y = a^p \cdot a^q &= a^{p+q} \qquad / \log_a \circ \\ \log_a x \cdot y &= \log_a a^{p+q} = p + q \\ \log_a x \cdot y &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

4. Provedeme stejný postup jako u vlastnosti (3).

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad / \log_a \circ \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a a^{p-q} = p - q \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

5. Zopakujeme stejný postup jako v předchozích případech.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{a^p} = a^{-p} \qquad / \log_a \circ \\ \log_a \frac{1}{x} &= \log_a a^{-p} = -p \\ \log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x \end{aligned}$$

6. I zde se budeme držet definice.

$$\begin{aligned} x^t &= (a^p)^t = a^{p \cdot t} \qquad / \log_a \circ \\ \log_a x^t &= \log_a a^{p \cdot t} = p \cdot n \\ \log_a x^t &= t \cdot \log_a x \end{aligned}$$

7. Zde si zavedeme $r = \log_b x \Leftrightarrow x = b^r$, pak podle předchozích vlastností platí:

$$\log_a x = \log_a b^r = r \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b.$$

Celou rovnici podělíme $\log_a b$. To můžeme, protože pokud by $\log_a b = 0$, tak by podle definice platilo $a^0 = b$, tedy $b = 1$, což odporuje předpokladu.

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \qquad / \cdot \frac{1}{\log_a b}$$
$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$$

$\square$

2. Úlohy s použitím exponenciální funkce

2.1 Exponenciální rovnice

V této kapitole se budeme věnovat exponenciálním rovnicím. Ty budou dále rozděleny podle toho, jak se řeší.

2.1.1 Jednoduché rovnice – se stejným základem

Rovnice se stejným základem jsou nejjednodušeji zadané exponenciální rovnice. Řeší se pomocí úpravy skládání s logaritmickou funkcí, která je obecně nazývána „zlogaritmování". Základ logaritmické funkce je stejný jako základ funkce exponenciální na obou stranách rovnosti. Názorně si to ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^x = 4.$$

Řešení. Výraz na pravé straně upravíme tak, abychom měli na obou stranách stejný základ.

$$2^x = 2^2$$

Dále obě strany rovnice složíme s $\log 2$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^2 \qquad / \log_2 \circ \\ \log_2 2^x &= \log_2 2^2 \end{aligned}$$

Podle vlastnosti (6) z Věty 39 si exponent převedeme před logaritmus.

$$x \log_2 2 = 2 \log_2 2$$

A z vlastnosti (1) plyne, že $\log_2 2 = 1$ a tedy:

$$x = 2.$$

Poznámka. Ve výpočtu zpravidla vynecháváme krok s výrazy v logaritmu a jejich úpravu pomocí vlastností logaritmu. Zde jsme si to ukázali jen názorně. V dalších příkladech tento krok zapisovat nebudeme.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že logaritmická funkce je funkce prostá, tak zlogaritmování je ekvivalentní úprava. To znamená, že složení s logaritmickou funkcí nám nepřidá kořeny rovnice, a tedy zkouška není nutná.

Příklad 2 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^x = \frac{1}{64}.$$

Řešení. Všimneme si, že jmenovatel lze upravit na mocninu se základem 4.

$$4^x = \frac{1}{4^3}$$

Podle vlastnosti (4) Věty 32 si pravou stranu upravíme.

$$4^x = 4^{-3}$$

Opět složíme s $\log_4$.

$$\begin{aligned} 4^x &= 4^{-3} \qquad / \log_4 \circ \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Příklad 3 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}.$$

Řešení. Stejně jako v předchozích příkladech i zde hledáme stejný základ. Zde základ tvoří zlomek.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^4}{4^4}$$

Opět využijeme vlastností exponenciální funkce z Věty 32.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

Složíme s $\log_{\frac{3}{4}}$.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \qquad / \log_{\frac{3}{4}} \circ$$
$$x = 4$$

Příklad 4 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^{3x-2} = 256.$$

Řešení. Příklad řešíme stejně jako předchozí. Najdeme si společný základ, to je v tomto případě 4 a složíme s logaritmem – $\log_4$.

$$4^{3x-2} = 4^4 \qquad / \log_4 \circ$$
$$3x - 2 = 4$$

Dále řešíme jednoduchou lineární rovnici.

$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Příklad 5 (Petáková, 2011, s. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech si najdeme společný základ a podle zavedení exponenciální funkce pro racionální čísla si odmocniny přepíšeme na zlomky v exponentu. To můžeme udělat, protože pod odmocninou máme kladné číslo.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{2^{2x}} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} &= \sqrt[6]{2^4} \\ 2^{\frac{2x}{4}} \cdot 2^{\frac{x-3}{3}} &= 2^{\frac{4}{6}} \end{aligned}$$

Podle vlastnosti (1) z Věty 32

$$2^{\frac{2x}{4}+\frac{x-3}{3}} = 2^{\frac{4}{6}}.$$

Opět složíme s $\log_2$ a řešíme lineární rovnici.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{2x}{4}+\frac{x-3}{3}} &= 2^{\frac{4}{6}} \qquad / \log_2 \circ \\ \frac{2x}{4} + \frac{x-3}{3} &= \frac{4}{6} \\ 6x + 4(x-3) &= 8 \\ 6x + 4x - 12 &= 8 \\ 10x &= 20 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Cvičení

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $5^x = 125$

   (b) $10^x = 0,0001$

   (c) $18^{2x} = \frac{1}{324}$

   (d) $9^{5x} = \frac{1}{729}$

   (e) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

   (f) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{2401}{81}$

   (g) $0,5^x = 0,03125$

2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $12^{3x+5} = 144$

   (b) $0,5^{x+2} = 4$

   (c) $8^{12-x} = 2,62 \cdot 10^5 + 12^2$

   (d) $3^{2x+3} \cdot 9^{x+1} = \left(\frac{1}{243}\right)^3$

3. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[3]{16^{3(x-2)}} \cdot \sqrt[5]{32^{x+3}}$

   (b) $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

   (c) $4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$

4. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $2 \cdot 0,5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$

   (b) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16 \cdot \sqrt{2}$

(c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$

(d) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

(e) $16^{\frac{x}{x+3}} = 4\left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}$

(f) $256^{\frac{1}{x^2-4}} \cdot \left(\frac{4}{2^x}\right)^{\frac{1}{x+2}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úloha 3. (c) ze sbírky (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212), úlohy 3. (b) a 4. (a) ze sbírky (Petáková, 2011, s. 34), úlohy 4. (b) – (f) ze sbírky (Janeček, 2012, s. 143 – 144).

2.1.2 Rovnice řešené pomocí vytýkání

V předchozím případě jsem měli rovnice zadané v součinovém tvaru. To ale není jediný způsob, jak rovnice zadat. Můžou být zadané i pomocí sčítanců. V tomto případě nemůžeme exponenciální funkci složit s logaritmickou, to lze pouze u rovnic v součinovém tvaru. Rovnice tedy řešíme tak, že si vytkneme základ s neznámou v exponentu, dostaneme součinový tvar a dále řešíme jako jednoduché rovnice. Při řešení opět budeme využívat vlastností z Věty 32 a Věty 39.

Příklad 6. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^{x+2} + 5^x = 650.$$

Řešení. Nejprve si jednotlivé sčítance rozložíme na součin podle vlastnosti (1) z Věty 32.

$$5^x \cdot 5^2 + 5^x = 650$$

Na levé straně se v obsou sčítancích vyskytuje 5^x, tak si tento výraz vytkneme abychom dostali součin, protože součin s logaritmickou funkcí složit lze. A upravíme.

$$\begin{aligned} 5^x\left(5^2+1\right) &= 650 \\ 5^x\,(25+1) &= 650 \\ 5^x \cdot 26 &= 650 \end{aligned}$$

Vydělíme 26 a pokračujeme jako u jednoduché rovnice.

$$\begin{aligned} 5^x &= 25 \\ 5^x &= 5^2 \qquad /\log_2 \circ \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 7 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448.$$

Řešení. Opět si jednotlivé sčítance rozložíme na součin.

$$2^x\cdot 2^{-1}+2^x\cdot 2^{-2}+2^x\cdot 2^{-3}=448$$

Vidíme, že se na levé straně všude vyskytuje 2^x. Vytkneme jej 2^x a rovnici budeme dále upravovat.

$$\begin{aligned} 2^x\left(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}\right) &= 448 \\ 2^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) &= 448 \\ 2^x\left(\frac{4+2+1}{8}\right) &= 448 \\ 2^x\cdot\frac{7}{8} &= 448 \end{aligned}$$

Budeme se snažit převést všechny členy na stejný základ. Protože 8 je třetí mocninou 2, tak zde je to bez problémů. Ale jak víme, tak 7 ani 448 nejsou mocninou 2. Ovšem když celou rovnici vydělíme 7, tak na pravé straně dostaneme 64 a to je mocnina 2. Popsané úpravy provedeme.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot \frac{1}{8} &= 64 \\
2^x \cdot 2^{-3} &= 2^6 \\
2^{x-3} &= 2^6 \qquad /\log_2 \circ \\
x - 3 &= 6 \\
x &= 9
\end{aligned}$$

Příklad 8 (Petáková, 2011, s. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5.$$

Řešení. Rovnici upravíme tak, abychom výrazy s x měli na jedné straně.

$$7 \cdot 4^{-x+2} - 3 \cdot 4^{-x+3} = -5$$

Dále bychom si sčítance rozložíme stejně jako v předchozích příkladech.

$$7 \cdot 4^{-x} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^{-x} \cdot 4^3 = -5$$

Teď vytkneme 4^{-x}.

$$\begin{aligned}
4^{-x}\left(7 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^3\right) &= -5 \\
4^{-x} \cdot (-80) &= -5 \\
4^{-x} \cdot 16 &= 1
\end{aligned}$$

Rovnici vynásobíme 4^x a řešíme jako jednoduchou rovnici.

$$\begin{aligned} 16 &= 4^x \\ 4^2 &= 4^x \qquad / \log_4 \circ \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Příklad 9 (Petáková, 2011, s. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}.$$

Řešení. Provedeme úpravu levé strany podle vlastnosti (5) Věty 32.

$$\begin{aligned} \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)^x + \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)^{x+1} &= \frac{5}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} &= \frac{5}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Následně vytkneme $\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^x \left(1 + \frac{3}{2}\right) &= \frac{5}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{5}{2} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Rovnici vydělíme $\frac{5}{2}$ a pravou stranu upravíme tak, abychom měli stejný základ. Rovnici dále řešíme obvyklým způsobem.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \frac{2}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \qquad / \log_{\frac{3}{2}} \circ \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Cvičení

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $3^{x+3} - 3^x = \frac{26}{81}$

   (b) $6^x - 6^{2+x} = -1\,260$

   (c) $3^x + 3^{x+1} = 108$

   (d) $3^{x+2} - 3^x - 24 = 0$

   (e) $4^{x-1} - 4^{x-2} + 4^{x-3} = \frac{52}{64}$

   (f) $3^{2x-1} - 3^{2x-2} + 3^{2x-4} = 315$

   (g) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$

   (b) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

   (c) $10 \cdot 2^{2x-1} - 7 \cdot 0,5^{-2x} = -2^{2x+2} + 16$

   (d) $4,5 \cdot 3^{5x-1} + 3^{5x+2} - \frac{5}{2} = 3^{5x+1}$

   (e) $1,5 \cdot 0,2^{x+1} + 0,8 \cdot 0,2^{x-1} = 0,172$

   (f) $\frac{4}{5} + 5^{-1} - 25^x + 20 \cdot 25^{x-1} = 0$

3. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

   (b) $7^x \cdot 3^{2x+1} - 7^{x+3} \cdot 3^{2x-2} = -2\,212$

   (c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot 6^{x-2} + 6^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = \frac{181}{5}$

   (d) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

(e) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

(f) $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$

(g) $8^{x+4} - 7 \cdot 8^{x+3} = 3^{x+2} + 6 \cdot 3^{x+1}$

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úlohy 1. (f) a 2. (a) ze sbírky (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212), úlohy 1. (c) a (g), 2. (f), 3. (a), (d) – (f) ze sbírky (Petáková, 2011, s. 34), úlohy 1. (d), 2. (b) – (e) ze sbírky (Janeček, 2012, s. 144).

2.1.3 Rovnice řešené pomocí substituce

V rovnicích tohoto typu vždy najdeme vhodný výraz, za který budeme moci substituovat. Tím převedeme rovnici na jednu z lehčích typů rovnic. Většinou na lineární nebo kvadratickou. Vypočteme rovnici s novou proměnnou a její kořeny pak dosadíme do substituce. V těchto případech si musíme vždy uvědomit, jak vypadá obor hodnot exponenciální funkce.

Příklad 10. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^{2x} - 2^{x+2} + 4 = 0.$$

Řešení. V tomto případě je vytýkání nevhodné, protože by nám vznikl výraz $2^x\left(2^x - 2^2\right) + 4 = 0$, který v řešení nepomůže, protože se vzniklý součin nerovná nule. Naopak pomůže, když si levou stranu zjednodušíme substitucí za 2^x.

$$2^x = a \tag{2.1}$$

$$a^2 - 2^2 a + 4 = 0$$
$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

Nyní vidíme, že jde o kvadratickou rovnici, kterou zde lehce vyřešíme úpravou na čtverec.

$$(a-2)^2 = 0$$
$$a_{1,2} = 2$$

Dosadíme do substituce (2.1) a řešíme jako jednoduchou exponenciální rovnici.

$$2^x = 2 \qquad / \log_2 \circ$$
$$x = 1$$

Příklad 11 (Petáková, 2011, s. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$5^{2x} \cdot \left(5^{2x} - 5\right) = 3 \cdot \left(5^{2x+1} + 5^{2x}\right) + 50.$$

Řešení. Stejně jako v předchozím případě je rovnici vhodné řešit substitucí. Provedeme substituci za 5^{2x} a dále budeme řešit jako kvadratickou rovnici.

$$5^{2x} = a \tag{2.2}$$

$$a\,(a-5) = 3\,(5 \cdot a + a) + 50$$
$$a^2 - 5a = 18a + 50$$
$$a^2 - 23a - 50 = 0$$

Rovnici lze snadno rozložit na součin. Kořeny jsou pak snadno viditelné.

$$(a-25)\,(a+2) = 0$$
$$a_1 = 25$$
$$a_2 = -2$$

Opět jednotlivé kořeny kvadratické rovnice dosadíme do substituce (2.2) a budeme řešit jednoduchou rovnici.

$$
\begin{aligned}
5^{2x} &= 25 \\
5^{2x} &= 5^2 \qquad / \log_5 \circ \\
2x &= 2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

$$5^{2x} = -2$$

Dosazovat do substituce -2 je zbytečné, protože obor hodnot exponenciální funkce jsou pouze kladná čísla. Kořenem rovnice je tedy $x = 1$.

Příklad 12 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 213)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$16^{x-1} + 4\,(4^x - 384) = 0.$$

Řešení. Pokud bychom se vrhli bez rozmyslu do substituce, hned bychom narazili. Oproti předchozímu příkladu zde brání využití substituce to, že tady jsou ve dvou členech dvě exponenciální funkce s různými základy. Abychom mohli substituovat potřebovali bychom, aby v obou členech byl stejný základ exponenciální funkce. Nastává tedy otázka, zda se jeden ze základů nedá převést na druhý. A taky že dá: $16^x = (4^2)^x = 4^{2x}$. Rovnici si tedy nejdřív upravíme.

$$
\begin{aligned}
16^x \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot 4^x - 4 \cdot 384 = 0 \\
4^{2x} \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot 4^x - 4 \cdot 384 = 0
\end{aligned}
$$

Provedeme substituci, tentokrát za 4^x.

$$4^x = a \tag{2.3}$$

$$a^2 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot a - 1536 = 0$$
$$a^2 + 64 \cdot a - 24576 = 0$$

A opět řešíme kvadratickou rovnici.

$$a_{1,2} = \frac{-64 \pm \sqrt{(-64)^2 - 4 \cdot (-24576)}}{2}$$
$$a_1 = 128$$
$$a_2 = -192$$

Postupně a_1, a_2 dosadíme do substituce (2.3). Dále budeme řešit jednoduchou rovnici.

$$\begin{aligned} 4^x &= 128 \\ 2^{2x} &= 2^7 \qquad / \log_2 \circ \\ 2x &= 7 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$4^x = -192$$

Stejně jako v předchozím příkladě, i zde je zbytečné do substituce dosazovat a_2. Takže řešením rovnice je $x = \frac{7}{2}$.

Příklad 13 (Janeček, 2012, s. 145)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3^{x^2+2x} - 3^{(x+3)\cdot(x-1)} = 26.$$

Řešení. Příklad budeme řešit jako předchozí. Nejprve si upravíme členy v exponentu, abychom mohli vhodně substituovat.

$$3^{x^2+2x} - 3^{x^2+2x-3x} = 26$$
$$3^{x^2+2x} - 3^{x^2+2x} \cdot 3^{-3x} = 26$$

Tentokrát budeme substituovat za 3^{x^2+2x} a budeme řešit jednoduchou lineární rovnici.

$$3^{x^2+2x} = a \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
a - 3^{-3}a &= 26 \\
a - \frac{1}{27}a &= 26 \\
27a - a &= 702 \\
26a &= 702 \\
a &= 27
\end{aligned}$$

Vypočtené a dosadíme do substituce (2.4) a přes řešení jednoduché exponenciální rovnice přejdeme k řešení kvadratické rovnice.

$$\begin{aligned}
3^{x^2+2x} &= 27 \\
3^{x^2+2x} &= 3^3 \qquad / \log_3 \circ \\
x^2 + 2x &= 3 \\
x^2 + 2x - 3 &= 0 \\
(x+3)(x-1) &= 0 \\
x_1 &= -3 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Řešením jsou dva kořeny $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$.

Cvičení

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $4^{2x} - 2^{2x+3} - 30 = 34 + 4^{x+1}$

   (b) $3^{2(2x+2)} - 3^{2(x+4)} = -3^4 + 9^x$

   (c) $3\left(9^{2x} + 1\right) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$

   (d) $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

   (b) $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$

   (c) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$

   (d) $2^{x^2} + 2^{13-x^2} = 528$

   (e) $5^3\left(5^{2\left(x^2-3x\right)} + 1\right) = 5^{x(x-3)} \cdot (5^6 + 1)$

   (f) $5 \cdot 5^{2x^2+10x+11} - \frac{26}{5} \cdot 5^{x^2+5x+7} + 25 = 0$

3. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $5 \cdot \sqrt[x]{64} - 6 \cdot \sqrt[2x]{64} = 8$

   (b) $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$

   (c) $\sqrt[x]{81} - 8 \cdot \left(\sqrt[2x]{81} - 2\right) = 1$

   (d) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

   (e) $\left[2 \cdot \left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

4. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $2^{2\cos x} - 3 \cdot 2^{\cos x} + 2 = 0$

(b) $3^{2\cdot 2^x+2} - 3^{2^x+4} = -\left(3^2 - 3^{2^x}\right)$

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úlohy 1. (c) a 3. (c) ze sbírky (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212 – 213), úlohy 1. (d), 2. (a) a (b) ze sbírky (Petáková, 2011, s. 34), úlohy 2. (c), (d) a (f), 3. (a), (b), (d) a (e) ze sbírky (Janeček, 2012, s. 145 – 146).

2.1.4 Rovnice s různými základy

Doposud jsme se setkávali s rovnicemi, které měly při skládání s logaritmickou funkcí stejný základ. Teď se podíváme na rovnice, které mají základ různý. Principy řešení těchto rovnic se nebudou nijak výrazně lišit od předchozích typů, jen výsledek bude ve tvaru logaritmu. Při úpravě výsledku můžeme použít vlastnost (7) z Věty 39.

Příklad 14 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$2^x = 100.$$

Řešení. V tomto případě nemůžeme převést pravou stranu na mocninu o stejném základu, protože číslo 100 není mocninou čísla 2. Takže celou rovnici složíme s logaritmem o základu 2.

$$\begin{aligned} 2^x &= 100 \qquad / \log_2 \circ \\ \log_2 2^x &= \log_2 100 \end{aligned}$$

Stejně jako u jednoduchých rovnic se stejným základem, i zde využijeme vlastností logaritmů a to vlastnosti (1) a (6) z Věty 39.

$$\begin{aligned} x \log_2 2 &= \log_2 100 \\ x &= \log_2 100 \end{aligned}$$

Výsledek bychom takto mohli nechat, ale pokud bychom chtěli znát přibližnou číselnou hodnotu, tak by se nám logaritmus se základem 2 špatně zadával do kalkulačky nebo případně špatně hledal v tabulkách. Proto je lepší si výsledek převést na dekadický nebo přirozený logaritmus. My si ho pro názornost převedeme na dekadický logaritmus, a to podle již výše zmíněné vlastnosti (6) z Věty 39.

$$x = \log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2}$$
$$x = \frac{2}{\log 2}$$

Příklad 15. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^{x+4} = 1000.$$

Řešení. Levou stranu si nejprve rozdělíme na součin a vydělíme celou rovnici tak, abychom na levé straně měli pouze výraz s x.

$$4^x \cdot 4^4 = 1000$$
$$4^x = \frac{1000}{4^4}$$

Rovnici složíme s $\log_4$ a dále budeme upravovat nám již známým způsobem.

$$4^x = \frac{1000}{4^4} \qquad / \log_4 \circ$$
$$x = \log_4 \frac{1000}{4^4}$$

Výsledek opět upravíme a to tak, že ho převedeme na dekadický logaritmus. Při následujících úpravách použijeme vlastnost (4) a (7) Věty 39.

$$\begin{aligned} x &= \log_4 \frac{1000}{4^4} \\ &= \frac{\log \frac{1000}{4^4}}{\log 4} \\ &= \frac{\log 1000 - \log 4^4}{\log 4} \\ x &= \frac{3 - 4\log 4}{\log 4} \end{aligned}$$

Příklad 16 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 213)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}.$$

Řešení. Tento příklad spadá do typu příkladů, kde se vytýká základ s neznámou. Rovnici si nejprve upravíme.

$$3^x + 3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 3^2 = 5^x + 5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2$$

Vidíme, že na levé straně můžeme vytknout 3^x a na pravé straně 5^x.

$$\begin{gathered} 3^x \left(1 + 3 + 3^2\right) = 5^x \left(1 + 5 + 5^2\right) \\ 3^x \cdot 13 = 5^x \cdot 31 \end{gathered}$$

Rovnici vydělíme 5^x a 13, abychom měli výrazy s x osamostatněné na jedné straně.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{31}{13}$$

Podle předchozích příkladů bychom si teď celou rovnici složili s $\log_{\frac{3}{5}}$ a upravovali bychom ji tak, abychom získali samotné x. My si zde ukážeme trochu jiný způsob, jak se dají tyto rovnice řešit. Využijeme další vlastnosti exponenciely a logaritmu a to: $a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$. Obě strany si podle této vlastnosti upravíme.

$$\mathrm{e}^{x \cdot \ln \frac{3}{5}} = \mathrm{e}^{\ln \frac{31}{13}}$$

Tím jsme si rovnici s různými základy převedli na rovnici o stejném základu a můžeme to řešit nám již známým způsobem.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x \ln \frac{3}{5}} &= \mathrm{e}^{\ln \frac{31}{13}} \qquad / \ln \circ \\ x \ln \frac{3}{5} &= \ln \frac{31}{13} \\ x &= \frac{\ln \frac{31}{13}}{\ln \frac{3}{5}} \end{aligned}$$

Pro přehlednost výsledek opět upravíme.

$$x = \frac{\ln 31 - \ln 13}{\ln 3 - \ln 5}$$

Příklad 17 (Petáková, 2011, s. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7.$$

Řešení. Pro tento příklad je vhodné použít substituci. Upravíme si rovnici na součiny a následně budeme substituovat.

$$3^x \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{3^x} = 7$$

$$3^x = a \tag{2.5}$$

Substituujeme 3^x a řešíme kvadratickou rovnici.

$$\begin{aligned}
3a + 2\frac{1}{a} &= 7 \\
3a^2 + 2 &= 7a \\
3a^2 - 7a + 2 &= 0 \\
a_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \\
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Dosadíme do substituce (2.5).

$$\begin{aligned}
3^x &= 2 \qquad / \log_3 \circ \\
x_1 &= \log_3 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^x &= \frac{1}{3} \\
3^x &= 3^{-1} \qquad / \log_3 \circ \\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Vypočtené x_1 opět můžeme upravit na dekadický nebo přirozený logaritmus.

$$x_1 = \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Cvičení

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.
   (a) $4^x = 36$
   (b) $5^x = 100\,000$
   (c) $3^{2x} = \mathrm{e}^2$
   (d) $2^{-x} = 1,8$
   (e) $5^{x+1} = 4$
   (f) $10^{5-3x} = 2^{7-2x}$
   (g) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$
   (h) $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$
   (i) $2^{3x-1} = 3^{2x-1}$
   (j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} = 3^x$
2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.
   (a) $5^{x+2} - 5^{x+1} = 125$
   (b) $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$
   (c) $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$
3. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.
   (a) $3^x + 2 = 3^{x+2}$
   (b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$
   (c) $4^x - 8 \cdot 2^x + 5 = 2^x$
   (d) $3^x\,(19 - 3^x) = 90$

(e) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 13$

(f) $6^{2x} + 3 \cdot 6^x - 6^x = 36$

(g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} - 7\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 6 = 0$

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úlohy 1. (d) a (f), 3. (e) ze sbírky (Vejsada & Talafous, 1969, s. 212, 219), úlohy 1. (e), (g), (h), 2. (b) a (c), 3. (b) ze sbírky (Petáková, 2011, s. 34), úlohy 1. (i) a (j), 3.(a) a (d) ze sbírky (Janeček, 2012, s. 146).

2.2 Soustavy exponenciálních rovnic

Řešení soustavy exponenciálních rovnic se nijak neliší od řešení jedné rovnice o jedné neznámé. Jde jen o to zvolit vhodný způsob výpočtu.

Příklad 18 (Janeček, str.147)**.** V oboru reálných čísel řešte soustavu:

$$\begin{aligned} 4^{x+y} &= 128, \\ 5^{3x-2y-3} &= 1. \end{aligned}$$

Řešení. Obě rovnice si upravíme tak, abychom na obou stranách měli stejný základ.

$$\begin{aligned} 2^{2(x+y)} &= 2^7 \\ 5^{3x-2y-3} &= 5^0 \end{aligned}$$

Tím jsme si situaci dost zjednodušili a každou z rovnic stačí složit s logaritmem o příslušném základu.

$$\begin{aligned} 2^{2(x+y)} &= 2^7 \qquad / \log_2 \circ \\ 5^{3x-2y-3} &= 5^0 \qquad / \log_5 \circ \end{aligned}$$

Nyní již řešíme soustavu lineárních rovnic.

$$
\begin{aligned}
2(x+y) &= 7 \\
3x - 2y - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

Rovnice si upravíme tak, abychom na levé straně měli neznámé a na pravé straně zbytek.

$$
\begin{aligned}
2x + 2y &= 7 \\
3x - 2y &= 3
\end{aligned}
$$

Rovnice sečteme a řešíme lineární rovnici.

$$
\begin{aligned}
2x + 3x &= 7 + 3 \\
5x &= 10 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Vypočtené x dosadíme například do první rovnice.

$$
4^{2+y} = 128
$$

Dostali jsme exponenciální rovnici, kterou umíme vyřešit. Rovnici upravíme na stejné základy.

$$
\begin{aligned}
2^{2(2+y)} &= 2^{7} \qquad / \log_2 \circ \\
2(2+y) &= 7 \\
4 + 2y &= 7 \\
2y &= 3 \\
y &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $\left[2; \frac{3}{2}\right]$.

Příklad 19 (Petáková, str. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte soustavu:

$$2^x + 5 \cdot 3^y = 53,$$
$$7 \cdot 2^x - 3^y = 47.$$

Řešení. Mohli bychom využít substituce, kdy bychom substituovali za 2^x a za 3^y. My příklad vyřešíme bez substituce, abychom ukázali, že není nezbytně nutná.

$$\begin{aligned} 2^x + 5 \cdot 3^y &= 53 \\ 7 \cdot 2^x - 3^y &= 47 \qquad / \cdot 5 \end{aligned}$$

Druhou rovnici jsme vynásobili 5 a nyní rovnice sečteme. Dále příklad řešíme jako exponenciální rovnici se stejným základem.

$$\begin{aligned} 36 \cdot 2^x &= 288 \qquad / \cdot \frac{1}{36} \\ 2^x &= 8 \\ 2^x &= 2^3 \qquad / \log_2 \circ \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vypočítali jsme první proměnnou x. Dosadíme ji do druhé rovnice a vypočítáme y.

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2^3 - 3^y &= 47 \\ 7 \cdot 8 - 3^y &= 47 \qquad / - 47 \,/ + 3^y \\ 9 &= 3^y \\ 3^2 &= 3^y \qquad / \log_3 \circ \\ 2 &= y \end{aligned}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[3; 2]$.

Příklad 20 (Petáková, str. 34)**.** V oboru reálných čísel řešte soustavu:

$$2^{x+1} + 3^y = 31,$$
$$2^x - 3^{y-2} = -1.$$

Řešení. Tento příklad se dá řešit stejně jako předchozí. Pro názornost si ho vyřešíme pomocí substituce. Budeme substituovat za 2^x a za 3^y. Nejprve si soustavu trochu upravíme.

$$2^x \cdot 2 + 3^y = 31$$
$$2^x - 3^y \cdot 3^{-2} = -1$$

$$2^x = a \tag{2.6}$$

$$3^y = b \tag{2.7}$$

Po substituci dostáváme

$$2a + b = 31$$
$$a - b \cdot \frac{1}{9} = -1$$

Rovnice upravíme tak, abychom nemuseli pracovat se zlomky. Druhou rovnici tedy vynásobíme 9.

$$2a + b = 31$$
$$9a - b = -9$$

Rovnice sečteme. Tím získáme lineární rovnici, kterou umíme vyřešit.

$$2a + 9a = 22$$
$$11a = 22$$
$$a = 2$$

Máme jednu neznámou ze substituce a dosadíme ji do jedné z rovnic, které nám ze substituce vznikly. Pro ukázku ji dosadíme do první rovnice.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + b &= 31 \\ 4 + b &= 31 \\ b &= 27 \end{aligned}$$

Tím jsme dostali $a = 2$, $b = 27$ a tyto neznámé dosadíme do substituce. Nejprve dosadíme do (2.6).

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \qquad / \log_2 \circ \\ x &= 1 \end{aligned}$$

A následně dosadíme do (2.7).

$$\begin{aligned} 3^y &= 27 \\ 3^y &= 3^3 \qquad / \log_3 \circ \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[1; 3]$.

Příklad 21. V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x^{-2} \cdot y^4 &= \frac{4}{9}, \\ x^3 \cdot y^{-3} &= 27. \end{aligned}$$

Řešení. Tato úloha sice nevypadá, že by spadala mezi exponenciální rovnice, protože neznámé nemáme v exponentu, ale i tak ji budeme podobně jako exponenciální rovnici. Díky tomu, že máme neznámé v součinu, tak celou rovnici můžeme složit s logaritmem. Pomocí vlastností logaritmu si pak součin upravíme na součet.

$$
\begin{aligned}
x^{-2} \cdot y^4 &= \frac{4}{9} \qquad / \log \circ \\
x^3 \cdot y^{-3} &= 27 \qquad / \log \circ
\end{aligned}
$$

Po zlogaritmování využijeme vlastnosti (3) a následně vlastnosti (6) z Věty 39.

$$
\begin{aligned}
-2 \log x + 4 \log y &= \log \frac{4}{9} \\
3 \log x - 3 \log y &= \log 27
\end{aligned}
$$

Jde o soustavu lineárních rovnic s neznámými $\log x$ a $\log y$, jak můžeme snadno nahlédnout, pokud za tyto výrazy zasubstitujeme nové neznámé. My substituovat nebudeme a budeme se soustavou pracovat jako s každou jinou. První rovnici si vynásobíme 3 a druhou rovnici vynásobíme 2.

$$
\begin{aligned}
-6 \log x + 12 \log y &= 3 \log \frac{4}{9} \\
6 \log x - 6 \log y &= 2 \log 27
\end{aligned}
$$

Rovnice sečteme.

$$
6 \log y = 3 \log \frac{4}{9} + 2 \log 27
$$

Rovnici budeme dále upravovat podle pravidel pro práci s logaritmy.

$$
\begin{aligned}
6 \log y &= \log \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \log 27^2 \\
6 \log y &= \log \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot 27^2\right] \qquad / \cdot \frac{1}{6} \\
\log y &= \frac{\log \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot 27^2\right]}{6} \\
\log y &= \log \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot 27^2\right]^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

Nyní se budeme chtít opět vrátit k neznámé y. To uděláme tak, že obě strany rovnice složíme s 10^n, kde za n dosadíme výraz na obou stranách.

$$\begin{aligned}\log y &= \log\left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot 27^2\right]^{\frac{1}{6}} \qquad /10^n\circ\\ y &= \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot 27^2\right]^{\frac{1}{6}}\\ &= \left[\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^2\right]^{\frac{1}{6}}\\ &= \left[\frac{2^6}{3^6} \cdot 3^6\right]^{\frac{1}{6}}\\ &= \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2\end{aligned}$$

Neznámá $y = 2$. Druhou neznámou zjistíme tak, že dosadíme do jedné z původních rovnic. My dosadíme do druhé rovnice.

$$\begin{aligned}x^3 \cdot 2^{-3} &= 27\\ \frac{x^3}{8} &= 27 \qquad / \cdot 8\\ x^3 &= 216\\ x &= \sqrt[3]{216} = 6\end{aligned}$$

Řešením je tedy uspořádaná dvojice $[6; 2]$.

Cvičení

Řešte rovnice s neznámými $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $2^{2x} + 3^y = 13$

   $2 \cdot 4^x - 3^y = -1$

2. $8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}$

   $5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$

3. $2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$

   $10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$

4. $16^{x+y} = 8$

   $16^x + 16^y = 6$

5. $5^{\frac{x+y}{2}} : 5^{\frac{x+y}{4}} = 625$

   $6^{\frac{x-y}{2}} : 6^{\frac{x+y}{4}} = 216$

6. $x^{-2} \cdot y^9 = 0,0625$

   $x \cdot y^{13} = 4$

7. $x^5 \cdot y^2 = 288$

   $27 \cdot x^7 \cdot y^{-3} = 128$

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úlohy 1 a 2 ze sbírky (Janeček, 2012, s. 147), úlohy 3 – 5 ze sbírky (Petáková, 2011, s. 34).

2.3 Slovní úlohy

Příklad 22 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 257)**.** V nádobě je m gramů radonu. Jaké množství radonu zbude v nádobě za 36 dní, je-li poločas rozpadu radonu 4 dny? (Za každé 4 dny se rozpadne polovina jeho množství.)

Řešení. Jak je v zadání uvedeno, tak za 4 dny se množství radonu zmenší na polovinu. To znamená, že při hmotnosti m gramů budeme mít po 4 dnech $\frac{m}{2}$ gramů. Tuto novou hmotnost si označíme m_1. Za další 4 dny, tedy za 8 dní, budeme mít opět o polovinu méně – $m_2 = \frac{m_1}{2}$. Pokud si za m_1 dosadíme, tak dostáváme

$$m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{\frac{m}{2}}{2} = \frac{m}{4}.$$

Pokud bychom takto postupovali dál, vždy bychom hmotnost z předchozích 4 dní násobily $\frac{1}{2}$ – tím by se jmenovatel vždy zdvojnásobil. A pokud mezi sebou násobíme stejná čísla, tak to odpovídá mocnění. Takže po prvním poločase rozpadu má jmenovatel hodnotu 2^1, po druhém poločase má hodnotu $4 = 2^2$, atd. až po n-tém poločase má hodnotu 2^n. Stačí tedy zjistit, kolik poločasů rozpadu proběhne. To je snadné, protože jeden poločas trvá 4 dny a za 36 dní jich proběhne $36 : 4 = 9$. Takže za 36 dní bude mít radon hmotnost

$$m_9 = \frac{m}{2^9} = \frac{m}{512} \quad \text{gramů.}$$

K řešení této slovní úlohy fakticky stačila exponenciální funkce na přirozených číslech, neboli geometrická posloupnost. Obecná exponenciální funkce by byla potřeba, pokud by zadaná doba rozpadu nebyla násobkem poločasu rozpadu.

Příklad 23 (Vejsada & Talafous, 1969, s. 257)**.** Tlaku vzduchu ubývá se stoupající výškou asi o $1,2\,\%$ na každých 100 m při stálé teplotě. Jaký je tlak na vrcholu Sněžky, je-li tlak na hladině moře 760 torr?

Řešení. Ve fyzice se tlak značí p, budeme ho taky tak značit. Tlak na hladině moře si vezmeme jako počáteční hodnotu p_0. Hodnotu tlaku p_1 ve výšce 100 metrů nad mořem zjistíme následovně

$$p_1 = p_0 - 0,012 \cdot p_0 = p_0 \cdot (1 - 0,012) = p_0 \cdot 0,988.$$

Pokud dosadíme za p_0 hodnotu 760 torr, dostaneme i číselné vyjádření p_1, a to $p_1 = 668,8$ torr.

Stejně bychom zjistili hodnotu tlaku p_2 ve výšce 200 m. n. m.

$$p_2 = p_1 - 0,012 \cdot p_1 = p_1 \cdot (1 - 0,012) = p_1 \cdot 0,988.$$

A po dosazení za p_1 dostaneme vztah mezi p_2 a p_0.

$$p_2 = p_1 \cdot 0,988 = p_0 \cdot 0,988 \cdot 0,988 = p_0 \cdot 0,988^2.$$

Když budeme takto pokračovat dále, tak se mocnina $0,988$ bude vždy zvětšovat o jedna. Tím se nám bude hodnota p_n zvětšovat exponenciálně. To znamená, že pro p_3 bude rovna $0,988^3$, pro p_4 bude rovna $0,988^4$ a tak dále, až pro p_n bude rovna $0,988^n$. Kde n označuje kolikrát vystoupáme o 100 metrů. To snadno spočítáme, když víme, že vrchol Sněžky je přibližně 1600 m.n.m, pak $n = 1600 : 100 = 16$. A tedy

$$p_{16} = p_0 \cdot 0,988^{16} = 760 \cdot 0,988^{16} \doteq 626.$$

Na vrcholu Sněžky je hodnota tlaku přibližně 626 torr.

Příklad 24. Z výšky 299 cm byla spuštěna pružná koule, která se od země vždy odrazila do $\frac{4}{5}$ výšky, ze které spadla. Po posledním odrazu odskočila přibližně do výšky $0,5$ m. Kolikrát se koule odrazila od země?

Řešení. Výšku, ze které byla koule spuštěna si označíme h_0. Po prvním odrazu koule odskočila do výšky h_1, která je rovna $\frac{4}{5} \cdot h_0$. Stejně tak pro výšku h_2. Když bychom si to měli vyjádřit jen pomocí h_0, dostáváme

$$\begin{aligned} h_0 &= 299 \\ h_1 &= \frac{4}{5} \cdot h_0 = \frac{4}{5} \cdot 299 \\ h_2 &= \frac{4}{5} \cdot h_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot h_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 299. \end{aligned}$$

Vidíme, že konstanta $\frac{4}{5}$ se znásobí tolikrát, kolikrát se koule odrazí od země. Vyjádření n-tého dorazu bude vypadat následovně

$$h_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot h_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot 299$$

Podle zadání víme, že při posledním odrazu koule odskočila do výšky 50 cm. Za h_n tedy můžeme dosadit. Získáme rovnici a řešíme ji standardním způsobem.

$$\begin{aligned}
50 &= \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot 299 \qquad / \cdot \frac{1}{299} \\
\frac{50}{299} &= \left(\frac{4}{5}\right)^n \qquad / \log_{\frac{4}{5}} \circ \\
\log_{\frac{4}{5}} \frac{50}{299} &= n \\
n &= \frac{\log \frac{50}{299}}{\log \frac{4}{5}} = \frac{\log 50 - \log 299}{\log 4 - \log 5} \doteq 8
\end{aligned}$$

Koule se od země odrazila 8-krát.

Příklad 25. Rybník zarůstá žabincem tak, že se každý den plocha žabince zdvojnásobí. Žabinec pokryje celou hladinu za 10 dní. Za jak dlouho by žabinec pokryl 8 takových hladin? Za jak dlouho by žabinec pokryl $\frac{1}{4}$ hladiny?

Řešení. Mohlo by se zdát, že když nevíme, jakou plochu hladiny pokrýval žabinec na začátku a jaká je celková plocha rybníka, tak tuto úlohu nejsme schopni vyřešit. Při řešení se přesvědčíme o opaku. To, jak byl velký žabinec na začátku, si označíme jako s_0. Po prvním dni se jeho obsah zdvojnásobil, tedy $s_1 = 2 \cdot s_0$. Stejně tak po druhém, třetím až desátém dni.

$$\begin{aligned}
s_1 &= 2 \cdot s_0 \\
s_2 &= 2 \cdot s_1 = 2 \cdot 2 \cdot s_0 = 2^2 \cdot s_0 \\
s_3 &= 2 \cdot s_2 = 2 \cdot 2^2 \cdot s_0 = 2^3 \cdot s_0 \\
&\vdots \\
s_{10} &= 2^{10} \cdot s_0
\end{aligned}$$

Takže obecně bychom si n-tý den mohli vyjádřit jako

$$s_n = 2^n \cdot s_0.$$

Pokud bychom chtěli pokrýt 8 stejných hladin, pak jejich plocha musí být osminásobná, než je plocha jedné hladiny, takže je rovna $8 \cdot s_{10}$. Ale protože nevíme, za kolik dní je pokryta, využijeme našeho obecného vzorce. A dostáváme rovnici.

$$\begin{aligned} s_n &= 8 \cdot s_{10} \\ 2^n \cdot s_0 &= 8 \cdot 2^{10} \cdot s_0 \qquad / \cdot \frac{1}{s_0} \\ 2^n &= 8192 \\ 2^n &= 2^{13} \qquad / \log_2 \circ \\ n &= 13 \end{aligned}$$

Žabinec by pokryl 8 hladin za 13 dní.

V druhé části je úvaha stejná jako v předchozím případě. Pokud požadujeme, aby byla pokrytá $\frac{1}{4}$ plochy, tak to musí být rovno $\frac{1}{4} \cdot s_0$. Opět dostáváme rovnici.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{4} \cdot s_{10} \\ 2^n \cdot s_0 &= \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \cdot s_0 \qquad / \cdot \frac{1}{s_0} \\ 2^n &= 256 \\ 2^n &= 2^8 \qquad / \log_2 \circ \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Tedy čtvrtina rybníka by byla pokrytá žabincem za 8 dní.

Příklad 26. Pacientovi bylo podáno antibiotikum. Jeho koncentrace v krvi po podání byla $10\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{l}^{-1}$. Poločas přeměny tohoto antibiotika je přibližně 2 h. Za jak dlouho musíme podat pacientovi další dávku, jestliže při koncentraci menší než $0,5\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{l}^{-1}$ antibiotikum ztrácí účinnost?

Řešení. Řešení tohoto příkladu je podobné, jako řešení úlohy s poločasem rozpadu radonu. Každé dvě hodiny se koncentrace antibiotika v krvi sníží na polovinu. Koncentraci, kterou antibiotikum dosáhlo bezprostředně po aplikování si označíme c_0, a tedy $c_0 = 10$. Koncentraci po první přeměně si označíme c_1 a platí, že

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{2} = \frac{10}{2}, \\
c_2 &= \frac{c_1}{2} = \frac{\frac{c_0}{2}}{2} = \frac{c_0}{2^2} = \frac{10}{2^2}, \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{2^n} = \frac{10}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Jestliže nechceme, aby koncentrace v krvi klesla pod $0,5\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{l}^{-1}$, tak musíme zjistit, kolikrát musí dojít k přeměně, aby koncentrace klesla na tuto hodnotu. Tak dostáváme rovnici.

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{2^n} &= \frac{1}{2} \qquad / \cdot \frac{1}{10} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{20} \qquad / \log_{\frac{1}{2}} \circ \\
n &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{20} \\
&= \frac{\log 1 - \log 20}{\log 1 - \log 2} \\
n &\doteq 4,32
\end{aligned}
$$

Proměnná n vyjadřuje, kolikrát musí přeměna nastat, abychom získali koncentraci $0,5\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{l}^{-1}$. Pokud chceme vědět, kolik hodin to bude trvat, musíme n vynásobit 2, protože poločas přeměny antibiotika jsou 2 h. Výsledný čas zapíšeme jako $t = 2\cdot n = 2\cdot 4,32 = 8,64$. To znamená, že minimálně po 9 hodinách bude koncentrace menší než kritická hodnota. Takže antibiotikum musíme znovu podat po 8 hodinách.

Příklad 27. Do banky jsme na spořící účet s úrokem 2 % za rok uložili částku 100 000 korun. Za kolik let budeme mít k dispozici 250 000 korun?

Řešení. Předpokládejme, že úrok 2 % se vždy připisuje ke stávající částce a další rok se počítá z nově vzniklé částky. Počáteční vklad si označíme v_0. Po prvním roce bude situace vypadat následovně

$$v_1 = v_0 + 0,02 \cdot v_0 = v_0 \cdot (1 + 0,02) = v_0 \cdot 1,02.$$

Po druhém roce budeme počítat úrok z nové částky, tedy z v_1. A to budeme opakovat i pro další roky.

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_1 + 0,02 \cdot v_1 = v_1 \cdot 1,02 = v_0 \cdot 1,02 \cdot 1,02 = v_0 \cdot 1,02^2 \\
v_3 &= v_2 + 0,02 \cdot v_2 = v_2 \cdot 1,02 = v_0 \cdot 1,02^2 \cdot 1,02 = v_0 \cdot 1,02^3 \\
&\vdots \\
v_n &= v_0 \cdot 1,02^n
\end{aligned}$$

A my chceme vědět za kolik let bude částka rovna 250 000 korunám, tedy kolik je n.

$$\begin{aligned}
v_0 \cdot 1,02^n &= 250\,000 \\
100\,000 \cdot 1,02^n &= 250\,000 \qquad / \cdot \frac{1}{100\,000} \\
1,02^n &= \frac{250\,000}{100\,000} \qquad / \log_{1,02} \circ \\
n &= \log_{1,02} \frac{250\,000}{100\,000} \\
&= \frac{\log 1,02}{\log 250\,000 - \log 100\,000} \\
n &\doteq 31
\end{aligned}$$

Abychom získali částku 250 000 korun, musíme mít peníze na účtu uloženy minimálně 31 let.

Cvičení

1. Poločas rozpadu rádia C je asi 20 minut. Jaké množství rádia C zbude za 4 hodiny z původního množství 1 mg? Jaké množství zbude za dobu t (v hodinách)?

2. Počet bakterií se dělením za 1 hodinu zdvojnásobí. Vypočítejte, kolik bakterií vznikne z jedné bakterie za 24 hodin.

3. Původní generace mikroorganismů obsahuje 13 500 jedinců. S každou další generací se počet jedinců vždy zvětší o 10 %. V kolikáté generaci bude počet mikroorganismů 4-krát větší než v původní generaci?

4. Krápník nabývá na obejmu rychlostí zhruba 10 % svého původního objemu za 15 let. Krápník jsme začali sledovat na začátku roku 2020 a měl objem 1 cm^3. V jakém roce bude jeho objem trojnásobný?

5. Body mass index neboli BMI se vypočítá jako podíl hmotnosti (v kg) a druhé mocniny výšky (v m). Člověk s váhou 85 kg a výškou 170 cm má hodnotu BMI $29,4$, což spadá do kategorie obezita. Za jak dlouho by jeho BMI kleslo na hodnotu $20,8$, což je v pořádku, jestliže by každý měsíc zhubl patnáctinu váhy z předchozího měsíce?

6. V nádobě je 25 l vody s teplotou 100 °C. Odebere se 1 l a nalije se místo někoho 1 l vody s teplotou 0 °C. Pak se odebere z nádoby 1 l směsi a dolije se opět jedním litrem vody s teplotou 0 °C atd. Jakou teplotu má voda v nádobě, opakuje-li se tento postup desetkrát? Kolikrát je nutno postup opakovat, má-li teplota vody v nádobě klesnout na 50 °C? (Můžete využít kalorimetrickou rovnici: $m_1c_1(t_1 - t) = m_2c_2(t_2 - t)$)

7. Každý týden přibude 4 – 5 % nakažených nemocí Covid-19. Kolikrát

víc lidí bude nakažených po roce než na začátku v lepším případě (4 %) a v horším případě (5 %)?

8. Počet bakterií vzroste za 1 h o 27 %. Vyjádřete závislost počtu bakterií na čase t, jestliže počáteční hodnotu označíme p_0.

9. Je dán čtverec, jehož strana má délku a. Spojíte-li středy jeho stran, dostanete nový čtverec, spojíte-li středy stran tohoto nového čtverce, dostanete zase čtverec atd. Jak velký je obsah čtverce, který vznikne desátým členěním?

10. Vyjádřete obecně stav spořícího účtu I po n letech, jestliže úrok na něm je p % a počáteční vklad byl I_0.

Úlohy jsou vybrány z těchto sbírek: úloha 1., 6. a 9. ze sbírky (Vejsada & Talafous, 1969, s. 257), úloha 2. ze sbírky (Běloun, 2019, s. 63).

Výsledky cvičení

2.1 Exponenciální rovnice

2.1.1 Jednoduché rovnice – se stejným základem

1. (a) $x = 3$ (b) $x = -4$ (c) $x = -1$ (d) $x = -\frac{3}{5}$

(e) $x = 3$ (f) $x = -4$ (g) $x = 5$ **2.** (a) $x = -1$

(b) $x = 6$ (c) $x = -4$ (d) $x = -5$ **3.** (a) $x = 1$

(b) $x = -2$ (c) $x = 12$ **4.** (a) $x_1 = -2$ $x_2 = -\frac{2}{3}$

(b) $x_1 = -1,$ $x_2 = 7$ (c) $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

(d) $x = 10$ (e) $x_1 = 3,$ $x_2 = -\frac{7}{3}$ (f) $x = 0$

2.1.2 Rovnice řešené pomocí vytýkání

1. (a) $x = -4$ (b) $x = 2$ (c) $x = 3$ (d) $x = 1$

(e) $x = 1$ (f) $x = 3$ (g) $x = -2$ **2.** (a) $x = 3$

(b) $x = 2$ (c) $x = \frac{3}{2}$ (d) $x = -\frac{1}{5}$ (e) $x = 2$

(f) $x = \frac{1}{2}$ **3.** (a) $x = 2$ (b) $x = 1$ (c) $x = 2$

(d) $x = 1$ (e) $x = 3$ (f) $x = 2$ (g) $x = -3$

2.1.3 Rovnice řešené pomocí substituce

1. (a) $x = 2$ (b) $x_1 = 2,$ $x_2 = -1$ (c) $x_1 = -\frac{3}{2},$

$x_2 = \frac{3}{2}$ (d) $x = -2$ **2.** (a) $x = 0$ (b) $x_1 = \log\frac{2}{3},$

$x_2 = -1$ (c) $x = 2$ (d) $x_1 = -3,$ $x_2 = 3,$

$x_3 = -2,$ $x_4 = 2$ (e) $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2},$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

(f) $x_1 = -4,$ $x_2 = -3,$ $x_3 = -2,$ $x_4 = -1$

3. (a) $x = 3$ (b) $x = 3$ (c) $x = 2$ (d) $x = 35$

(e) $x = 9$ **4.** (a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $x_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (b) $x = 1$

2.1.4 Rovnice s různými základy

1. (a) $x = \log_2 6$ (b) $x = \frac{5}{\log 5}$ (c) $x = \frac{1}{\ln 3}$
(d) $x = \log_2 \frac{5}{9}$ (e) $x = \log_5 \frac{4}{5}$ (f) $x = \log_{250} \frac{3125}{4}$
(g) $\log_6 18$ (h) $x = \log_{\frac{16}{245}} 16$ (i) $x = \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}$
(j) $x = -\log_{\frac{3}{8}} 4$ **2.** (a) $x = 2\log_5 \frac{5}{2}$ (b) $x = \log_2 \frac{2}{49}$
(c)$x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{3}$ **3.**(a) $x = -\log_3 4$ (b)$x = \log_3 2$
(c) $x_1 = \log_4 \left(9 - \sqrt{61}\right)$, $x_2 = \log_4 \left(9 + \sqrt{61}\right)$ (d)$x_1 = 2$
$x_2 = \frac{1}{\log 3}$ (e) $x_1 = \log_6 \frac{3}{2}$, $x_2 = \log_6 \frac{2}{3}$
(f) $x = \log_6 \left(\sqrt{37} - 1\right)$ (g) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 2$

2.2 Soustavy exponenciálních rovnic

1. $[1; 2]$ **2.** $[\frac{3}{14}; \frac{1}{14}]$ **3.** $[3; 2]$ **4.** $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}]$ **5.** $[14; 2]$ **6.** $[4; 1]$ **7.** $[2; 3]$

2.3 Slovní úlohy

1. $\frac{1}{2^{12}}$ mg, $\frac{1}{2^{3h}}$ mg **2.** $2^{24} = 16\,777\,216$
3. v 15 generaci **4.** v roce 2193 **5.** za 5 měsíců
6. 66 °C, 17 krát **7.** při 4 % je to přibližně 8-krát, při 5 % je to přibližně 13-krát
8. $1,27^t \cdot p_0$ **9.** $S = \frac{a^2}{1024}$ **10.** $I = I_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

Závěr

Cílem práce bylo středoškolským pedagogům a jejich žákům přinést ucelený pohled na postupné zavedení exponenciální funkce, definování exponenciální funkce pro reálné exponenty a rozšíření do komplexních čísel. Ukázali jsme, jaká úskalí se při postupném zavedení umocňování mohou vyskytnout, a že definovat exponenciální funkci pro reálné exponenty není tak snadné, jak by se na první pohled mohlo zdát. Ale na druhou stranu ani tak obtížné v tom smyslu, že není nevyhnutelné použití diferenciálního počtu. Úvahy, které se při definování exponenciální funkce pro reálné exponenty objevují ve středoškolských učebnicích, jsme zformalizovali pomocí pojmů suprema a infima. Ukázali jsme, že definice exponenciální funkce pomocí suprema a infima je ekvivalentní s definicí exponenciální funkce pomocí limity posloupnosti racionálních čísel. Při důkazu vlastností exponenciální funkce jsme si ukázali, jak může být ekvivalence definic prospěšná, protože dokazovat vlastnosti pomocí definice se supremy je obtížné. A tak jsme využili již zmiňovanou definici pomocí limity posloupnosti racionálních čísel. Protože rozšiřování definice způsobem, kterým jsme to dělali v reálných číslech, není do komplexních čísel možné, tak jsme využili další definici exponenciální funkce, a to pomocí Taylorova rozvoje. V komplexním oboru jsme si i odvodili některé vztahy pro goniometrické funkce, protože jsou s exponenciální funkcí úzce spjaty a žáci na středních školách je hojně využívají. Stejně tak jsme v závěru teoretické části definovali logaritmickou funkci, protože se využívá při výpočtech exponenciálních rovnic. Cíle teoretické části této práce tak byly naplněny.

Dalším z cílů bylo vytvořit přehledný soubor úloh týkajících se exponenciální funkce. Úlohy jsme rozdělili na exponenciální rovnice, soustavy exponenciálních rovnic a slovní úlohy. V každé kapitole jsou uvedeny vzorové příklady a následně úlohy k procvičení. K úlohám je na konci práce uvedeno i řešení. Kapitolu exponenciální rovnice jsme dále rozdělili do podkapitol podle toho, jakým způsobem je rovnice vhodné řešit. Pro žáky by to měl být ucelený přehled toho, jak rovnice řešit od nejjednodušších po složitější. Všechny příklady a úlohy jsou sestaveny tak, aby jejich obtížnost gradovala. I tento cíl byl naplněn.

Literatura

[1] BĚLOUN, František.*Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* 8. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2019. ISBN 978-80-7196-104-8.

[2] BLAŽEK, Jaroslav, Emil CALDA, Milan KOMAN a Blanka KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

[3] FRANC, Tomáš. *Zavedení exponenciály a logaritmu.* Praha, 2010. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra matematické analýzy. Vedoucí práce Bárta, Tomáš.

[4] JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.* 5. vydání. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-360-8.

[5] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (I).* 6. vydání. Praha: Academia, 1974.

[6] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II).* 4. vydání. Praha: Academia, 1984.

[7] KASNER, Edward a James R. NEWMAN. *Mathematics and the imagination.*Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2001. ISBN 04-864-1703-4.

[8] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce.* 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-719-6164-7.

[9] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-099-7.

[10] PILOUS, Derek, 2016. *Doplňky k teorii suprema a infima [online].* [cit. 2020-07-20]. Dostupné z: `http://www.cynyc.net/Elementarni%20fce/Teorie%20doplnky.pdf`

[11] PILOUS, Derek, 2018 *Skripta [online].* [cit. 2020-07-15]. Dostupné také z: `http://www.cynyc.net/MA%20I/Skripta%20180530.pdf`

[12] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1980. ISBN 14-074-80.

[13] RUDIN, Walter. *Principles of mathematical analysis.* 3. vydání. New York: McGraw-Hill, 1976. International series in pure and applied mathematics. ISBN 00-705-4235-X.

[14] VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. ISBN 15-534-69.

[15] VESELÝ, Jiří. Základy matematické analýzy. Praha: Matfyzpress, 2009. ISBN 978-80-7378-063-0.