MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vít Hauser

C-metrika jako limita fotonové rakety

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30.7.2020 Vít Hauser

Rád bych poděkoval vedoucímu práce Mgr. Davidu Kofroňovi, Ph.D. za nabídnutí zajímavého tématu práce, dále za to že mi poskytl pomoc a konzultaci kdykoliv jsem požádal a také za doporučení odborné literatury.

Název práce: C-metrika jako limita fotonové rakety

Autor: Vít Hauser

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato práce se zabývá oblastí přesných řešení Einstenových rovnic. Toto téma zůstává po delší dobu předmětem soustředěného studia studia na MFF UK. Zaměřil jsem se na studium kosmické struny u metriky popisující akceleraci dvou černých děr, tzv. C-metriky.

Cílem práce je přehledně shrnout vlastnosti několika skupin řešení - Robinson-Trautmanových řešení obecně; specificky fotonových raket a C-metriky. Následně pak ověřit možnost převodu řešení založených na modelu fotonových raket na C-metriku. Zajímavou podúlohou je fokusace záření umožňující popis vakuové C-metriky. K řešení otázek v této oblasti se využívá systémů počítačové algebry k zjednodušování složitých výrazů.

V druhé části je předložen problém nalezení alternativního popisu strun v rámci těchto řešení. Rozveden je i jednodušší problém Schwarzschildovy metriky protaté kosmickou strunou. Podstatou řešení je hledání způsobu přechodu k těmto metrikám. Práce prezentuje a diskutuje řešení těchto úloh. Autorovi se, nicméně, nepodařilo popsat systematický způsob jak nalézat řešení s požadovanými vlastnostmi výsledné metriky.

Klíčová slova: Schwarzshildovo řešení, C-metrika, Bonnorova raketa, Kosmická struna

Title: C-metric as a limit of photon rocket

Author: Vít Hauser

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This work deals with the field of exact solutions of Einstein's equations. This topic remains the subject of concentrated study at the MFF UK for a long time. The thesis focuses on the study of a cosmic string at a metric describing the acceleration of two black holes: the so-called C-metric.

This work aims to summarize the properties of several groups of solutions - Robinson-Trautman solutions in general, photon rocket models, and the C-metric and. Subsequently, it seeks to verify the possibility of converting solutions based on the model of photon rockets to the C-metric. An interesting subproblem which ultimately enables the formulation of vacuum C-metrics is the focusing of radiation. Problems in this area are usually analyzed using computer algebra systems to aid the simplification of complex expressions.

The second part presents the problem of finding an alternative description of strings within these solutions. The simpler problem of Schwarzschild's metric intersected by a cosmic string is also elaborated. The essence of the solution is to find a way to transition to these metrics. The work presents and discusses the solution of these tasks. The author, however, failed to describe a systematic way to find a solution with the required properties of the resulting metric.

Keywords: Schwarzschild solution, C-metric, Bonnor rocket, Cosmic string

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá oblastí přesných řešení Einstenových rovnic. Toto téma zůstává po delší dobu předmětem soustředěného studia studia na MFF UK. V práci jsem se zaměřil na studium kosmické struny u metriky popisující akceleraci dvou černých děr, tzv. C-metriky.

Cílem práce je přehledně shrnout vlastnosti několika skupin řešení - Robinson-Trautmanových řešení obecně; specificky fotonových raket a C-metriky. Následně pak ověřit možnost převodu řešení založených na modelu fotonových raket na C-metriku. Zajímavou podúlohou je fokusace záření umožňující popis vakuové C-metriky. K řešení otázek v této oblasti se využívá systémů počítačové algebry k zjednodušování složitých výrazů.

V druhé části je předložen problém nalezení alternativního popisu strun v rámci těchto řešení. Zmíněn je i jednodušší problém Schwarzschildovy metriky probťaté kosmickou strunou. Podstatou řešení je hledání způsobu přechodu k těmto metrikám.

1. Úvod do teorie

V této kapitole se pokusíme popsat poznatky z teorie přesných řešeni Einsteinových rovnic, které budou dále využívány v dalších kapitolách. Obsah této kapitoly se bude hlavně opírat o [2] a bude využívat stejné konvence a značení.

1.1 Schwarzschildovo a Vaidyaovo řešení

Schwarzschildův prostoročas byl prvním netriviálním řešením Einsteinových rovnic. Přesto se jedná o fyzikálně velmi významný model, který popisuje sféricky symetrický vakuový prostoročas. Jeho aplikace na pohyby planet v naší solární soustavě byla důležitá pro uznání obecné teorie relativity jako nástupce Newtonovy teorie gravitace. Dále pak posloužil například jako model silných gravitačních polí při studiu černých děr. Metrika tohoto prostoročasu je nejčastěji udávána ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{1.1}$$

Jediný volný parametr m se obvykle dá interpretovat jako hmotnost zdroje. Přechodem k Eddingtonovým-Finkelsteinovým souřadnicím získáme metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}u^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{1.2}$$

Jedním z důležitých rozšíření Schwarzschildovy metriky je Vaidyaova metrika [13]. Tato metrika popisuje sféricky symetrický systém jehož hmotný střed produkuje nulové záření. Volbou vhodných souřadnic jako v [2, kap. 9.5] je metrika zapsat jako

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{1.3}$$

zjevně se tedy jedná o zobecnění metriky (1.2). Funkce $m(u)$ je libovolná nerostoucí funkce retardovaného času u.

1.2 Robinsonova-Trautmanova třída řešení

Prostoročasy kterými se budeme v této práci zabývat patří mezi Robinsonova-Trautmanova řešení[12, 11]. Jedná se o širokou třídu řešení, která je geometricky definována existencí expandující nulové kongruence geodetik bez twistu a deformace. Obecný tvar metriky, obsahující nulové záření, nejprve zapíšeme v souřadnicích $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$, kde u je retardovaný čas, r je afinní parametr nulových geodetik a $\zeta, \bar{\zeta}$ jsou komplexní prostorové stereografické souřadnice.

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - 2H\mathrm{d}u^2 + 2\frac{r^2}{P^2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta} \tag{1.4}$$

kde

$$2H = \Delta\log P - 2r(\log P)_{,u} - \frac{2m}{r} \tag{1.5}$$

Funkce $P = P(u,\zeta,\bar{\zeta})$ a $m = m(u)$ vystupující v metrice musí splňovat Robinsonovu-Trautmanovu rovnici s nulovým zářením

$$\Delta\Delta(\log P) + 12m(\log P)_{,u} - 4m_{,u} = 16\pi n^2 \tag{1.6}$$

funkce $n(\zeta,\bar{\zeta},u)$ udává profil záření. Hustotu záření a tenzor energie a hybnosti je dán vztahy

$$\rho = \frac{n^2}{r^2} \tag{1.7}$$

$$T_{\mu\nu} = \rho k_\mu k_\nu \tag{1.8}$$

kde k_μ značí vektor tečný k nulovým geodetikám. Gaussova křivost ploch $u =$ konst. a $r = 1$ je jak ukázáno například v [7] je

$$K = \Delta \log P \tag{1.9}$$

Jak je ukázáno v [2, kap. 19.5.1] řešení algebraického typu D musí splňovat rovnici

$$P^2 K_{,\bar{\zeta}} = h(\zeta,u) \tag{1.10}$$

kde $h(\zeta,u)$ je libovolná funkce. V nejjednodušším případě kde $h = 0$, křivost K závisí pouze na u a existuje řešení ve tvaru

$$P = A(u) + B(u)\zeta + \overline{B}(u)\bar{\zeta} + C(u)\zeta\bar{\zeta} \tag{1.11}$$

$$K = 2(AC - B\overline{B}) \tag{1.12}$$

kde A,B,C jsou libovolné funkce. V případě kdy se jedná o konstanty, je možné P převést do jednoduchého tvaru

$$P = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\zeta\bar{\zeta} \tag{1.13}$$

s $\epsilon = \pm 1, 0$. Pro případ $\epsilon = +1$ jsou plochy kulové a přechodem k souřadnicím úhlového typu, substitucí

$$\zeta = \sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \tag{1.14}$$

přejde metrika (1.4),(1.5) do tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{1.15}$$

což je Vaidyaova metrika (1.3), kde pro vyzařování platí

$$n^2 = -\frac{1}{4\pi}m_{,u}. \tag{1.16}$$

Tedy pokuď $n = 0$ jedá se o Schwarzschildovu metriku

1.3 Fotonové rakety

Mezi Robinsonova-Trautmanova řešení také patří Kinnersleyova a Bonnorova raketa. Tyto prostoročasy je možné interpretovat jako pole bodových zdrojů které jsou urychlovány nulovým zářením.

1.3.1 Kinnersleyova raketa

Z rovnice (1.11) získáme axiálně symetrické řešení pro $h = 0$ a $K = 1$, zavedeme-li

$$\begin{aligned}\zeta &= e^{\sqrt{2}\tilde{\zeta}}\\ A(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\int \alpha(u)\mathrm{d}u)\\ B(u) &= 0\\ C(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\int \alpha(u)\mathrm{d}u),\end{aligned}$$

kde $m(u), \alpha(u)$ jsou dvě libovolné funkce. Vlnku nad ζ pro jednoduchost v následujícím opomeneme a získáme tak

$$P = \cosh\left(\int \alpha(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})\right) \tag{1.17}$$

Vhodnou volbou souřadnic θ,ϕ

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \tanh\left(\int \alpha(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})\right)\\ \phi &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\zeta - \bar{\zeta})\end{aligned}$$

zajistíme že

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} &= \sin\theta\\ (\log P)_{,u} &= \alpha\cos\theta\end{aligned}$$

a tedy společně s $\Delta \log P = K = 1$ dosazením do (1.4), (1.5), (1.6) dostáváme výraz pro metriku a profil záření

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(1 - \frac{2m(u)}{r} - 2\alpha r\cos\theta - \alpha^2 r^2 \sin^2\theta\right)\mathrm{d}u^2\\ +2\alpha r^2 \sin\theta \mathrm{d}u\mathrm{d}\theta + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$4\pi n^2(\theta,u) = 3\alpha m\cos\theta - m_{,u}. \tag{1.19}$$

Aby bylo zajištěno že n je reálné, musí být $m(u)$ ryze klesající. Pro $\alpha(u) = 0$ dostáváme Vaidyaovo řešení (1.15), (1.16). V limitním případě $m = 0$ se jedná o plochý Minkovského prostoročas s zkušební částicí v středu, jejíž zrychlení je udáváno funkcí $\alpha(u)$.

Podstatnou vlastností Kinnersleyovy rakety je že neprodukuje gravitační záření, jak bylo ukázáno v [14], jedná se o jedinou třídu axiálně symetrických, asymptoticky plochých, zářících řešení Robinsonova-Trautmanova typu která neobsahuje gravitační záření.

1.3.2 Bonnorova raketa

Zobecnění Kinnersleyovy rakety provedl v roce 1996 Bonnor [1], axiálně symetrické řešení Robinsonovy-Trautmanovy třídy, algebraického typu II s nulovým zářením. Jak je rzebráno v [2] volbou souřadnic

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\int \frac{\mathrm{d}x}{G(x,u)} + \int \alpha(u)\mathrm{d}u + i\phi\right) \tag{1.20}$$

kde $G(x,u)$ je libovolná funkce x,u a $\alpha(u)$ je libovolná funkce u. Provedeme Identifikaci

$$P(\zeta,\bar{\zeta},u) = G^{-1/2}\left(x(\zeta,\bar{\zeta},u),u\right) \tag{1.21}$$

Funkci $x(\zeta,\bar{\zeta},u)$ získáme invertováním (1.20)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{G(x,u)} = \int \alpha(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta}) \tag{1.22}$$

Těmito úpravami získá metrika (1.4) tvar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(-\frac{1}{2}G_{,xx} - \frac{2m(u)}{r} - r(bG)_{,x} - b^2Gr^2\right)\mathrm{d}u^2 \\ +2br^2\mathrm{d}u\mathrm{d}x + r^2\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{G} + G\mathrm{d}\phi^2\right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

kde

$$b(u,x) = -\alpha(u) - \int \frac{G_{,u}(x,u)}{G^2(x,u)}\mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

Zavedením $G(x) = 1 - x^2$, tak že $b = -\alpha(u)$ a přechodem k polární souřadnici $x = cos(\theta)$ získáme opět výrazy pro Kinnersleyovu metriku (1.18).

Celou třídu fotonových raket pak Bonnor určil volbou

$$G(x,u) = (1 - x^2)\left(1 + (1 - x^2)h(x,u)\right) \tag{1.25}$$

kde $h(x,u)$ je libovolná, hladká, omezená funkce větší než -1. Touto volbou je zajištěno, že metrika je na ose $x = \pm 1$ regulární. Radiační profil (1.6) má v této situaci tvar

$$4\pi n^2(x,u) = -\frac{1}{8}(GG_{,xxx})_{,x} + \frac{3}{2}m(bG)_{,x} - m_{,u} \tag{1.26}$$

1.4 Kosmické Struny

Jednoduchý model kosmické struny založený na modifikaci Minkovského prostoru je prezentován v [2, kap. 3.4]. Standardní Minkovského metrika v cylindrických souřadnicích má tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.27}$$

kde $\varphi \in [0,2\pi)$. Nyní uměle odstraníme výřez o úhlu $2\pi\delta$ z prostoročasu tím že se omezíme na $\varphi \in [0,(1-\delta)2\pi)$ a identifikujeme strany $\varphi = 0$ a $\varphi = (1-\delta)2\pi$. Výsledný prostoročas je stále lokálně plochý s výjimkou osy, která je singulární. Označením $C = 1 - \delta$ a přechodem k souřadnici $\varphi = C\phi$, tak aby opět bylo $\phi \in [0,2\pi)$ dostaneme metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + C^2\rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1.28}$$

Kvůli tvaru nadploch $t =$ konst. a $z =$ konst. se takovýto typ singularity označuje jako konická singularita. Takovýto typ prostoročasu má přitažlivý vliv na geodetiky procházející kolem osy. Křivost zde nediverguje, ale distribuční výraz se objevuje v Ricciho tenzoru a odpovídá složce napětí v tenzoru energie a hybnosti. Pole tak můžeme považovat za pole nekonečné struny pod konstantním napětím, které je úměrné tzv. deficitnímu úhlu δ.

Plně relativistickou konstrukci struny provedl Hiscock [3]. On vycházel z válcově symetrické statické metriky, strunu simuloval válcem konstantní hustoty s konečným poloměrem. Zjištěním vnitřního a vnějšího řešení válce a zajištěním okrajových podmínek získal metriku vnějšího prostoru okolo válce

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2 + (1 - 4\mu)^2 r^2 \mathrm{d}\phi^2 \tag{1.29}$$

kde μ je hmotnost na jednotku délky struny, která je přímo úměrná deficitnímu úhlu konické singularity. V této metrice nijak explicitně nevystupuje poloměr ani hustota válce a je tedy možné limitou poloměru válce $\rho_0 \to 0$ přejít k zdroji v podobě distribuce.

1.5 C-metrika

Vakuové řešení jehož statická podoba byla rozpracována již v roce 1918 [8], [15]. Dále bylo podrobněji popsáno a interpretováno v [5] a [**?**], jako řešení popisující dvě černé díry které navzájem od sebe zrychlují působením struny na ose mezi nimi.

Metrika tohoto prostoročasu se nejběžněji udává ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2}\left(-\tilde{F}\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\tilde{F}} + \frac{\mathrm{d}x^2}{\tilde{G}} + \tilde{G}\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1.30}$$

kde G a F jsou kubické funkce

$$\tilde{G} = 1 - x^2 - 2MAx^3 \tag{1.31}$$

$$\tilde{F} = -1 + y^2 - 2MAy^3. \tag{1.32}$$

Metrika obsahuje 2 parametry M a A, pro $M = 0$ se jedná o Minkovského metriku. Aby funkce $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ měli nedegenerované reálné kořeny požadujeme podmínku $27M^2A^2 < 1$, čímž se omezíme na fyzikálně nejpodstatnější případy.

Tato podoba metriky byla volbou souřadnic upravena tak aby v kubických funkcích $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ nebyly lineární členy, v [4] je však této volnosti využito k získání podoby ve které kořeny kubických funkcí měly jednodušší podobu, konkrétně $\pm 1, -\frac{1}{2\alpha m}$. Metrika v těchto nových souřadnicích po provedeném přeškálování má podobu

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{\alpha^2(x+y)^2}\left(-F\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{F} + \frac{\mathrm{d}x^2}{G} + G\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{1.33}$$

kde

$$G = (1 - x^2)(1 + 2\alpha m x) \tag{1.34}$$

$$F = -(1 - y^2)(1 + 2\alpha m y). \tag{1.35}$$

Aby bylo zachováno správné pořadí kořenů,tak požadujeme $0 < 2\alpha m < 1$, zároveň pro zachování signatury metriky je nutné aby $G > 0$, tedy x musí ležet mezi odpovídajícími kořeny G. Vzhledem k tvaru metriky (1.33) fyzikální prostoročas splňuje buďto $x + y > 0$ nebo $x + y < 0$. Již zmíněná situace zrychlujících černých děr nastává právě pro $x \in [-1,1]$ s $x + y > 0$.

Pro vyšetřování některých dalších vlastností C-metriky je vhodné znát její podobu také v souřadnicích sférického typu. Substitucí

$$\begin{aligned} x &= -\cos\theta \\ y &= \frac{1}{\alpha r} \\ \tau &= \alpha t \end{aligned}$$

kde bereme $\theta \in [0,\pi]$. Získáme metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{(1 - \alpha r\cos\theta)^2}\left(-Q\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{Q} + \frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{P} + Pr^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{1.36}$$

kde

$$P = 1 - 2\alpha m\cos\theta \tag{1.37}$$

$$Q = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 - \alpha^2 r^2\right) \tag{1.38}$$

Vzhledem k nulové tetrádě odpovídající (1.36) je jediná nenulová složka Weylova tenzoru křivosti

$$\Psi_2 = -\left(\frac{1}{r} - \alpha\cos\theta\right)^3 = -m\alpha^3(x + y)^3. \tag{1.39}$$

Tedy pro $m \neq 0$ jediná neodstranitelná singularita je v $r = 0$. Kořeny Q v $r = 2m,1/\alpha$ jsou souřadnicové singularity. Z druhého výrazu v (1.39) je také jednoduše vidět že v konformním nekonečnu, tedy když $x \to -y$ je metrika plochá.

Vzhledem k podobnosti se Schwarzschildovým řešením v něž tato metrika přechází pro $\alpha = 0$ je možné interpretovat singularitu $r = 2m$ jako horizont událostí černé díry. Jak je ukázáno například v [2, kap. 14.1.4] pomocí Minkovského limity, parametr α odpovídá zrychlení bodového zdroje a souřadnicová singularita $r = 1/\alpha$ je horizont zrychlení.

C-metrika má v sférických souřadnicích Killingův vektor ∂_ϕ, ten vymizí v kořenech členu $g_{\phi\phi}$ metriky (1.36), tedy pro $\theta = 0,\pi$. Tím je dána osa symetrie tohoto prostoročasu, z tohoto důvodu je vhodné brát $\varphi \in [0,2\pi C)$ kde spolu identifikujeme okraje tohoto rozmezí.

Vezmeme-li malý kroužek, konkrétně limitně malý $\theta \to 0$, okolo poloosy $\theta = 0$, s t,r konstantními dostaneme z metriky (1.36) poměr obvodu při $\varphi \in [0,2\pi C)$ ku poloměru θ

$$\frac{2\pi CP\sin\theta}{\theta} \to 2\pi C(1 - 2\alpha m) \tag{1.40}$$

Tedy nedostaneme přesně 2π, při obdobném výpočtu pro druhou poloosu$\theta = \pi$ získáme

$$\frac{2\pi CP\sin\theta}{\pi-\theta} \to 2\pi C(1+2\alpha m) \tag{1.41}$$

opět vychází hodnota rozdílná od 2π navíc jiná než kterou jsme dostali na opačné poloose. Vzhledem k diskusi v předešlé kapitole je jasné že na obou poloosách se nacházejí konické singularity, každá s jinou konicitou. Je podstatné potknout že volbou C je možné jednu z těchto singularit odstranit, nikdy ale ne obě najednou.

C-metrika také patří mezi Rovinsonova-Trautmanova řešení s $n = 0$, konkrétně algebraického typu D. Podle [10, 9] můžeme transformovat rovnici (1.4) pomocí

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\alpha(x+y)} \\ u &= \frac{1}{\alpha}\left(\tau + \int \frac{\mathrm{d}y}{F}\right) \\ \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau + \int \frac{\mathrm{d}y}{F} - \int \frac{\mathrm{d}x}{G} + i\varphi\right) \end{aligned} \tag{1.42}$$

kde za F, G bereme (1.34), (1.35), tím dostáváme metriku ve tvaru (1.33). Přes svojí podobnost jsou metriky fotonových raket a C-metrika odlišné, neboť C-metrika je vakuová na rozdíl od metrik raket, které obsahují nulový prach který vyzařují. Pro $n = 0$ prostoročasy raket prach neobsahují, ale naopak dostáváme $\alpha = 0$ a tedy Schwarzschildovo řešení.

2. Konstrukce prostoročasů pomocí Bonnorovy rakety

Cílem této kapitoly je prezentovat, jakým způsobem je možné z prostoročasu Bonnorovy rakety přejít do prostoročasu C-metriky postupnou aproximací. Ukážeme jak strunu, kterou je možné považovat za původce zrychlení černých děr popisovaných C-metrikou můžeme modelovat pomocí zářivého profilu n fotonové rakety. Tato kapitola přebírá výsledky z [6].

Bonnor zvolil podmínku (1.25), tak aby zajistil regularitu metriky. V následujícím bude tato podmínka uvolněna a bude uvažováno

$$G(x,u) = \left(1 - x^2\right)\left(1 + h(x,u)\right), \tag{2.1}$$

tak aby bylo možné zkoumat singularity na ose.

2.1 Zavedení funkcí použitých k aproximacím

Důležitým typem funkcí které budou využity, jsou hladké, ale neanalytické schodové funkce jako $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < x_0\,, \\ \dfrac{f\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}{f\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)+f\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)} & \text{for } x \in [x_0, x_1]\,, \\ 1 & \text{for } x > x_1\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

kde $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, což je schodová funkce mezi hodnotami x_0 a x_1. Další třídou funkcí které budeme využívat jsou polynomy řádu $2n+1$ s zadanými okrajovými podmínkami na jejich derivace.

Dále bude použita zvyšující-se schodová funkce $\nearrow\!\!\!\!S_{(a,b)}(x)$, která je nulová pro $x < a$ a má hladký přechod od 0 do 1 pro $x \in [a,b]$, přičemž pro $x > b$ je rovna 1; a snižující-se schodová funkce $\searrow\!\!\!\!S_{(a,b)}(x) = 1 - \nearrow\!\!\!\!S_{(a,b)}(x)$. V poslední řadě bude použita stolová funkce

$$T_{(a,b,c,d)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a\,, \\ \nearrow\!\!\!\!S_{(a,b)}(x) & \text{for } x \in [a,b]\,, \\ 1 & \text{for } x \in [b,c]\,, \\ \searrow\!\!\!\!S_{(c,d)}(x) & \text{for } x \in [c,d]\,, \\ 0 & \text{for } x > d\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tyto funkce budou následně v prostředí systémů počítačové algebry (CAS) využity k zavedení hladkých limitních přechodů.

Druhým nástrojem bude rozvoj funkcí na intervalu $[-1{,}1]$ do báze Legendreových polynomů

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,, \tag{2.4}$$

s normalizační podmínkou

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, \underset{\cdot}{\mathrm{x}} \, . \tag{2.5}$$

V bázi Legendreových polynomů je možné taky vyjádřit některé distribuce – například Diracovu delta funkci

$$\delta(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x)\, P_n(a) \, . \tag{2.6}$$

2.2 Dynamický přechod

Jako jednodušší případ je možné popsat Schwarzschildovu černou díru, kterou protíná kosmická struna. Jak bylo uvedeno v předchozích kapitolách Schwarzschildova metrika je obsažena v metrice Bonnorovy rakety (1.23), stačí volit $b = 0$ and $G = (1 - x^2)$. K této metrice můžeme také zavést přeškálování $G \to KG$, které po přeškálování souřadnic vede k metrice v původním tvaru až na člen

$$K^2 \mathrm{d}\phi^2 \tag{2.7}$$

který ukazuje na přítomnost konické singularity. Zavedením

$$G(x,u) = \left(1 - x^2\right) \left(1 + 2w \cancel{S}_{(u_0,u_1)}(u) e^{-\frac{\bcancel{S}_{(u_0,u_1)}(u)}{1-x^2}}\right) \tag{2.8}$$

je možné dostat přechod od Schwarzschildovy metriky pro ($u < u_0$) přes radiační fázi fotonové rakety pro $u \in [u_0, u_1]$ k Schwarzschildově metrice s kosmickou strunou pro $u = u_1$.

C-metriku (1.33) je možné také zapsat po vhodné transformaci souřadnic zapsat jako

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + A^2 r^2 G\left(x - \frac{1}{Ar}\right) \mathrm{d}u^2 - 2Ar^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{G(x)} + G(x)\,\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{2.9}$$

kde pro G platí

$$G(x) = \left(1 - x^2\right)(1 + 2Amx) \, . \tag{2.10}$$

Tuto metriku je možné získat z metriky Bonnorovy rakety (1.23) zavedením

$$m(u) = m \, , \qquad b(x,u) = -A \, , \qquad G(x,u) = \left(1 - x^2\right)(1 + 2Amx) \, . \tag{2.11}$$

Přidáním hladkého přechodu do funkcí $G(x,u)$ a $A(u)$

$$G(x,u) = \left(1 - x^2\right) \left(1 + 2Amx \, \cancel{S}_{(u_0,u_1)}(u) e^{-\frac{\bcancel{S}_{(u_0,u_1)}(u)}{1-x^2}}\right) , \tag{2.12}$$

$$A(u) = A\cancel{S}_{(u_0,u_1)}(u) \, , \tag{2.13}$$

je možné dostat přechod od Schwarzschildovy metriky pro ($u < u_0$) přes radiační fázi fotonové rakety s regulární osou pro $u \in [u_0, u_1]$ k metrice která je difeomorfní c-metrice pro $u = u_1$, kdy je veškeré záření soustředěno ve směru osy. Tato metrika však neobsahuje druhou černou díru, jako C-metrika a nemůže na ni být analyticky rozšířena.

Tvar radiačního profilu (1.26) při takto provedené aproximaci je nemožné řešit analyticky a je pouze možné dosáhnout výsledku numerickou aproximací.

2.3 Přechod pomocí statických prostoročasů

Bonnorova raket vyzařováním ztrácí hmotu

$$\int r^2 \rho \, \mathrm{d}\Omega = \int n(x) \, \mathrm{d}\Omega \,. \tag{2.14}$$

jsou-li však uvažovány i záporné hodnoty radiačního profilu $n(x)$ pro $x \in [-1, 1]$, je možné dostat

$$\oint n(x) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \,, \qquad\qquad m(u) = m \,. \tag{2.15}$$

Pak díky volnosti v funkci h je možné vzít posloupnost statických prostoročasů daných

$$G(x{,}u) = \left(1 - x^2\right)\left(1 + 2Amx\left(1 - x^{2N}\right)\right), \tag{2.16}$$

$$A(u) = A\left(1 - \frac{1}{N+1}\right), \tag{2.17}$$

rozvojem do báze Legendreových polynomu a provedením limity $N \to \infty$ je možné získat výraz pro radiační profil

$$4\pi \, n(x) = A^2 m^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2n \left(2n + \frac{1}{2}\right)(2n+1) \, P_{2n}(x) + \tag{2.18}$$

$$Am \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\left(2n + \frac{3}{2}\right)(2n+2) \, P_{2n+1}(x) \,. \tag{2.19}$$

který je s pomocí využití vlastností Legendreových rozvojů a distribucí možné přepsat na

$$4\pi \, n(x) = -\, Am \, (Am + 1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \, \delta(x+1) + Am \, (Am - 1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \, \delta(x-1) \,. \tag{2.20}$$

Závěr

V předložené práci jsou studovány kosmické struny u metriky popisující akceleraci dvou černých děr, tzv. C-metriky. První kapitola zevrubně shrnuje vlastnosti několika skupin řešení - Robinson-Trautmanových řešení obecně; specificky fotonových raket a C-metriky. V druhé části je prezentováno převedení řešení založených na modelu fotonových raket na C-metriku., tj. včetně fokusace záření umožňující popis vakuové C-metriky. Autorovi se, nicméně, nepodařilo popsat systematický způsob jak nalézat řešení s požadovanými vlastnostmi výsledné metriky.

Seznam použité literatury

[1] Bonnor, W. B. (1996). Another photon rocket. *Classical and Quantum Gravity*, **13**(2), 277–282. doi: 10.1088/0264-9381/13/2/015. URL `https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F13%2F2%2F015`.

[2] Griffiths, J. B. a Podolský, J. (2009). *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511635397.

[3] Hiscock, W. A. (1985). Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, **31**, 3288–3290. doi: 10.1103/PhysRevD.31.3288. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.3288`.

[4] Hong, K. a Teo, E. (2003). A new form of the c-metric. *Classical and Quantum Gravity*, **20**(14), 3269–3277. doi: 10.1088/0264-9381/20/14/321. URL `https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F20%2F14%2F321`.

[5] Kinnersley, W. a Walker, M. (1970). Uniformly accelerating charged mass in general relativity. *Phys. Rev. D*, **2**, 1359–1370. doi: 10.1103/PhysRevD.2.1359. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1359`.

[6] Kofroň, D. (2017). Cosmic strings in axisymmetric black hole spacetimes; the c–metric "engines". URL `https://arxiv.org/abs/1705.01138`.

[7] Kolář, I. (2012). Prostoročasy s fotonovými raketami. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.

[8] Levi-Civita, T. (1918). ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, **27**.

[9] Podolský, J. (2008). Photon rockets in the (anti-)de sitter universe. *Phys. Rev. D*, **78**, 044029. doi: 10.1103/PhysRevD.78.044029. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.044029`.

[10] Podolský, J. c. v., Ortaggio, M. a Krtouš, P. (2003). Radiation from accelerated black holes in an anti–de sitter universe. *Phys. Rev. D*, **68**, 124004. doi: 10.1103/PhysRevD.68.124004. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.124004`.

[11] Robinson, I., Trautman, A. a Bondi, H. (1962). Some spherical gravitational waves in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **265**(1323), 463–473. doi: 10.1098/rspa.1962.0036. URL `https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1962.0036`.

[12] Robinson, I. a Trautman, A. (1960). Spherical gravitational waves. *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 431–432. doi: 10.1103/PhysRevLett.4.431. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.4.431`.

[13] VAIDYA, P. (1951). The gravitational field of a radiating star. *Proc. Indian Acad. Sci.*, **33**, 264. doi: 10.1007/BF03173260. URL `https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF03173260`.

[14] VON DER GÖNNA, U. a KRAMER, D. (1998). Pure and gravitational radiation. *Classical and Quantum Gravity*, **15**(1), 215–223. doi: 10.1088/0264-9381/15/1/016. URL `https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F15%2F1%2F016`.

[15] WEYL, H. (1919). Bemerkung über die axialsymmetrischen lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Annalen der Physik*, **364**(10), 185–188. doi: 10.1002/andp.19193641006. URL `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19193641006`.