Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Pythagorova čísla řádů v číselných tělesech
Autor: Veronika Hájková

Shrnutí obsahu práce

Práce dokazuje, že maximální řády v číselných tělesech mohou mít neomezeně velké Pythagorovo číslo; toto tvrzení bylo bez důkazu uvedeno v článku R. Scharlaua *On the Pythagoras number of orders in totally real number fields* z roku 1980. Scharlauova slabší konstrukce, která pracuje s nemaximálními řády, je v práci rovněž vysvětlena.

Celkové hodnocení práce

Text je rozčleněn do dvou kapitol. První z nich opakuje potřebné definice a tvrzení; druhá obsahuje jednak původní Scharlauovu konstrukci nemaximálních řádů s libovolně velkým Pythagorovým číslem, jednak hlavní část práce – důkaz, že totéž lze provést i pro maximální řády. Ten je založený na nové konstrukci, kterou si studentka sama vymyslela. Považuji za mírně nešťastné, že nebyly obě konstrukce odděleny do samostatných kapitol: Jednak vznikla kuriózní situace, kdy se podkapitoly 2.1 a 2.3 jmenují naprosto stejně, jednak se v polovině druhé kapitoly mění význam části značení. Na změnu významu je ale čtenář upozorněn, takže se nejedná o závažný problém. *Chtěl bych vyzdvihnout kvalitně sepsaný úvod a především závěr, v němž studentka srozumitelně shrnuje obsah práce a porovnává svou konstrukci se Scharlauovou.*

V první kapitole se studentka musela vypořádat s náročným úkolem – stručně a přitom výstižně shrnout všechny potřebné pojmy a poznatky z algebraické teorie čísel. Povedlo se jí to důstojně, ale ne bezchybně: V důkazech občas mlčky využívá vlastnosti, které z jejích definic nejsou jasné (například explicitní tvar normy a stopy v kvadratickém rozšíření, součinový vzorec pro stupeň rozšíření či aditivitu stopy – ta je využita v důkazu lemmatu 2.2.2 i věty 2.4.1, zatímco lemma 2.1.1 je zbytečně složitě dokazováno bez ní). Některá základní tvrzení měla podle mého názoru být vyslovena, ačkoli je práce explicitně nevyužívá (například tranzitivita celistvosti a charakterizace celistvých prvků pomocí minimálního polynomu), jiná tvrzení naopak nebylo nutné dokazovat – příkladem je lemma 1.5.2, které jednak platí obecně pro každé rozšíření číselných těles (a je dosti známé), jednak je jeho důkaz zbytečně dlouhý, protože se vyhýbá právě použití tranzitivity celistvosti a toho, že celistvý prvek má minimální polynom s celistvými koeficienty. *Na druhé straně je volba potřebných definic a tvrzení vždy nesnadná a zde je výsledek adekvátně dlouhý a srozumitelný.*

Důkazy ve druhé kapitole jsou prezentovány poměrně jasně, byť by bylo namístě oddělit z nich některé části jako pomocná tvrzení pro zvýšení přehlednosti. V důkazu klíčového lemmatu 2.2.2 je nepříjemná, ale jednoduše odstranitelná chyba způsobená tím, že autorka přehlédla existenci celistvých prvků s absolutní hodnotou menší než jedna. V hlavní větě 2.4.1 nefunguje indukční krok z $t = 0$ na $t = 1$, což je snadno napravitelné přehlédnutí.

Formální stránka práce je na důstojné úrovni. Občasné gramatické a stylistické nedostatky nesnižují srozumitelnost textu a prezentované definice i důkazy jsou zformulované matematickým jazykem odpovídajícím standardům bakalářských a diplomových prací. Z drobných formálních nedostatků uvedu jen některé: V práci jsou symboly $\subset$ a $\subseteq$ používány v tomtéž významu; v definici hlavního ideálu je uvedeno značení aR, ale jinde se bez vysvětlení používá (a); neslabičné předložky se občas vyskytují na konci řádku (což je zvlášť rušivé v nadpisu druhé kapitoly); autorka občas mluví o „naší“ a jindy o „své“ práci; na několika místech nefunguje diakritika (např. na straně 6 ve výrazu „[[13], *tvrzení* 25.3]“ a opakovaně ve vzorcích na straně 13). Na straně 7 se píše „speciální případ věty 1.4.2 s využitím věty 1.3.3 je následující věta“; nenásleduje ale věta, nýbrž definice, a její souvislost se jmenovanými větami navíc není jasná.

Připomínky a otázky

1. Vysvětlete, proč je použití absolutních hodnot v důkazu lemmatu 2.2.2 špatně, a navrhněte řešení.
2. Zdůvodněte, proč indukční krok z $t = 0$ na $t = 1$ ve větě 2.4.1 nefunguje, a objasněte, jak tuto chybu opravit.

Závěr

Práci považuji za dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci. Pokud budou otázky zodpovězeny uspokojivě, kloním se k hodnocení *velmi dobře*.

Jakub Krásenský
Katedra algebry MFF UK
6. července 2020