



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Novotný

**Sférický symetrický tepelný protiproud
supratekutého hélia**

Katedra fyziky nízkých teplot

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. David Schmoranzer, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Nejprve bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce Davidu Schmoranzerovi za pomoc s náročným měřením, zpracováním získaných dat a za podmětné konzultace. Také bych chtěl poděkovat Šimonu Midlikovi za pomoc při sepisování výsledků a práce samotné, rovněž děkuji Emilu Vargovi za uvedení do problematiky kvantové turbulence.

Název práce: Sféricky symetrický tepelný protiproud supratekutého hélia

Autor: Filip Novotný

Katedra: Katedra fyziky nízkých teplot

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. David Schmoranzer, Ph.D., Katedra fyziky nízkých teplot

Abstrakt: Hlavním cílem této práce byl výzkum kvantové turbulence v supratekutém heliu ve speciálním typu proudění, sféricky symetrickém tepelném protiproudu. Za tímto účelem byla navržena a na 3D tiskárně vyrobena sférická cela. Kvantová turbulence byla měřena tradiční metodou tlumení druhého zvuku. Sledován byl jak ustálený stav kvantové turbulence tak i její časový rozpad. Získaná závislost hustoty kvantovaných vírů L na rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} , kdy data sledují $L \propto v_{ns}^{3/2}$, neodpovídá očekávání dle Vinenovy rovnice, která předpovídá $L \propto v_{ns}^2$. Z měření rozpadu turbulence v závislosti na čase t byla zjištěna závislost $L \propto t^{-1}$, která v tomto případě paradoxně velmi dobře splňuje rozpadový mód vyplývající z Vinenovy rovnice. Sféricky symetrický tepelný protiproud tedy slibuje do budoucna zajímavé fyzikální otázky a bude i nadále předmětem vědeckého zájmu.

Klíčová slova: supratekuté helium, sféricky symetrické proudění, kvantová turbulence, tlumení druhého zvuku

Title: Spherically symmetrical thermal counterflow of superfluid helium

Author: Filip Novotný

Department: Department of Low-Temperature Physics

Supervisor: RNDr. David Schmoranzer, Ph.D., Department of Low-Temperature Physics

Abstract: The principal aim of this Thesis was the investigation of quantum turbulence in superfluid helium in a special type of flow, spherically symmetric thermal counterflow. To this end, a new cell was designed and 3D-printed. Measurements of quantum turbulence were realized using the traditional technique of second sound attenuation, focusing both on steady state of turbulence and its temporal decay. The measured dependence of the quantized vortex line density L versus the counterflow velocity v_{ns} , where the data clearly show that $L \propto v_{ns}^{3/2}$, does not agree with the Vinen equation, which predicts $L \propto v_{ns}^2$. On the other hand, the dependence of vortex line density on time t obtained during the decay measurements $L \propto t^{-1}$ is paradoxically in close agreement with the Vinen equation. For the future, spherically symmetrical thermal counterflow thus promises many interesting challenges and will remain an important topic of research.

Keywords: superfluid helium, spherically symmetrical flow, quantum turbulence, second sound attenuation

Obsah

Úvod	2
1 Teorie	3
1.1 Mechanika tekutin	3
1.1.1 Rovnice kontinuity	3
1.1.2 Navier-Stokesova rovnice	3
1.1.3 Klasická turbulence	4
1.2 Supratekuté ^4He	5
1.2.1 Dvousložkový model	6
1.2.2 Kvantování vírů a kvantová turbulence	7
1.2.3 Rozpad turbulence	8
1.2.4 Druhý zvuk a jeho tlumení	9
1.2.5 HVBK rovnice	9
1.3 Sférické rezonance	10
1.4 Výsledky numerické simulace	11
1.5 Klasická versus kvantová turbulence v He II	12
2 Experimentální aparatura	14
2.1 Kryostat a čerpání	14
2.2 PID regulace teploty	15
2.3 Sférická cela	16
2.4 Čidla druhého zvuku	16
2.5 Odporové topení	17
2.6 Odporové teploměry	18
3 Experimentální výsledky	19
3.1 Charakterizace aparatury	19
3.2 Použité rezonanční módy	20
3.3 Ustálený stav kvantové turbulence	22
3.3.1 Způsob zpracování ustáleného stavu	22
3.3.2 Závislost hustoty vírových čar na výkonu topení a rychlosti tepelného protiproudu	24
3.3.3 Prostorová citlivost sférických Besselových funkcí	26
3.3.4 Prostorové rozložení vírových čar	28
3.3.5 Vliv prostorového rozložení vírů na kvadratickou závislost $L \propto v_{ns}^2$	30
3.3.6 Teplotní profil	31
3.4 Rozpad kvantové turbulence	32
3.4.1 Způsob měření a zpracování rozpadu	32
3.4.2 Časový vývoj hustoty vírových čar během rozpadu turbulence	33
4 Závěr	36
Seznam použité literatury	38

Úvod

Helium je druhý nejlehčí prvek periodické soustavy prvků a za pokojových podmínek se jedná o plyn. V přírodě se vyskytují jeho dva izotopy ^4He (nebo též helium-4) a ^3He (helium-3). ^4He je zastoupeno majoritně, zatímco ^3He je jen 0,5 ppm.

^4He bylo poprvé zkapalněno dosažením teploty varu 4,2 K roku 1908 a zásluhu na tom má holandský fyzik Heike Kamerlingh Onnes. V následujících letech byly vlastnosti kapalného ^4He detailněji studovány. Při dosažení teploty 2,17 K (tzv. λ -bod) byl pozorován neobvyklý nárůst tepelné kapacity a její následný prudký pokles. Dochází k fázovému přechodu 2. druhu, k nespojitosti v 2. derivacích Gibbsovy volné energie a tedy právě v měrné tepelné kapacitě. Při teplotě pod λ -bodem přechází helium do supratekutého stavu (He II), jehož tepelná vodivost vzroste oproti heliu nad λ -bodem (He I) řádově 10^6 -krát, dochází také k výraznému poklesu viskozity. Fázový diagram je specifický absencí trojného bodu. Pohybujeme-li se tedy po křivce nasycených par, dochází hypoteticky ke snížení teploty supratekutého ^4He až do absolutní nuly. Supratekuté ^4He vykazuje několik experimentálně pozorovatelných vlastností, jedná se například o fontánový jev nebo o schopnost samovolně vytéct z nádoby [1].

S prvním teoretickým vysvětlením supratekutosti ^4He přichází London, který si popisované vlastnosti spojuje s Bose-Einsteinovým kondenzátem chladného plynu. ^4He má celkový spin 0 a jedná se tedy o boson. Prakticky současně s Londou přichází Tisza s tzv. dvousložkovým modelem, který tvrdí, že pod teplotou λ -bodu má ^4He jak supratekutou, tak normální složku. V limitě absolutní nuly je potom ^4He čistě supratekuté. Oproti Londonovi s Tiszou přichází Landau s modelem, který popisuje He II ideálním plynem termálních excitací: fononů a rotonů. Oba tyto modely jsou v souladu s moderním kvantově mechanickým popisem interagujícího Boseho plynu, kde právě interakce mezi jednotlivými atomy ^4He je pro vznik supratekutosti naprosto zásadní.

Obdobně jako u klasických kapalin se v supratekuté složce He II může vyskytovat turbulence, což bylo experimentálně potvrzeno. První s myšlenou turbulence v supratekuté složce přichází Onsager. Na něj navazuje Feynman, který vytváří rigorózní matematický popis a zavádí kvantování jednotlivých vírů. Dále tedy hovoříme o tzv. kvantové turbulenci. Kvantová turbulence je na rozdíl od klasické velmi dobře teoreticky popsána v limitě nulové teploty a poskytuje tedy dobrou možnost pro výzkum turbulence obecně. V minulosti byla kvantovaná turbulence měřena v podlouhlých kanálech nebo též v rotujících nádobách, či v oscilačních prouděních v okolí různých struktur (křemenné ladičky, rotující disky,...). Novým zajímavým způsobem je studium turbulence v sféricky symetrické cele, což je obsahem této práce.

1. Teorie

1.1 Mechanika tekutin

Tekutiny typicky popisujeme jako spojité kontinuum. Představa kontinua znamená, že i libovolně malý objem (částice) tekutiny dV ve srovnání s celkovým objemem tekutiny V obsahuje velmi velký počet mikroskopických elementů (molekul, v případě inertních plynů atomů).

Stav tekutiny je jednoznačně popsán třemi důležitým veličinami: rychlostním polem $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, tlakem $p = p(\vec{x}, t)$ a hustotou $\rho = \rho(\vec{x}, t)$. Každá z těchto veličin je obecně funkcí polohy \vec{x} a času t .

1.1.1 Rovnice kontinuity

Základní rovnicí popisující mechaniku tekutin je rovnice kontinuity, kterou Landau odvozuje [2] ve formě:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Rovnice kontinuity je vyjádřením zákona zachování hmoty. První člen v rovnici udává časovou změnu hmoty tekutiny v daném objemu V , zatímco druhý člen charakterizuje tok hmoty skrz hranici objemu ∂V rychlostí \vec{v} . Veličinu definovanou jako:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.2)$$

nazýváme hustotou hmotnostního toku. Rovnice (1.1) platí jak pro ideální, tak viskózní stlačitelnou kapalinu¹. Ideální kapalinou myslíme takovou kapalinu, která je nestlačitelná, homogenní a jejíž pohyb probíhá bez vnitřního tření.

1.1.2 Navier-Stokesova rovnice

Viskózní kapalina je na rozdíl od ideální charakteristická tím, že při jejím pohybu dochází k disipaci energie. Tento jev je důsledkem vnitřního tření a vedení tepla v objemu kapaliny. Pohybovou rovnici popisující proudění takovéto kapaliny nezávisle na sobě odvodili francouzský fyzik Claude-Louis Navier a anglo-irský fyzik George Gabriel Stokes. Landau s Lifshitzem uvádějí ve své knize [2] detailní odvození a výsledný tvar Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou kapalinu:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (1.3)$$

Z rovnice kontinuity (1.1) dostáváme v důsledku nestlačitelnosti:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.4)$$

Levá strana Navier-Stokesovy rovnice kromě časové derivace rychlostního pole obsahuje také nelineární inerciální člen, který je specifický právě pro dynamiku

¹V dalším výkladu se omezíme jen na kapaliny, neboť hlavním objektem zájmu je hélium kapalně.

kapalin. První člen na pravé straně je velikost tlakového spádu v kapalině, druhý člen potom zahrnuje právě její viskozitu. Veličinu η nazýváme dynamickou viskozitou, podíl dynamické viskozity a hustoty kapaliny

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.5)$$

potom kinematickou viskozitou.

Výsledný tvar proudění kapaliny potom závisí na okrajových podmínkách. U ideální kapaliny volíme na hranici oblasti normálovou složku rychlosti nulovou $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, \vec{n} je normála k hranici. U viskózních kapalin potom požadujeme úplné vymizení rychlosti na hranici $\vec{v} = 0$.

Bezrozměrný parametr charakterizující odpor kapaliny ve stacionárním proudění vůči tělesu se nazývá Reynoldsovo číslo a Landau [2] jej uvádí ve tvaru:

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu}, \quad (1.6)$$

kde ν je kinematická viskozita, u je střední rychlost proudění a l je charakteristický rozměr tělesa.

1.1.3 Klasická turbulence

Turbulence je komplikovaný chaotický pohyb kapalin. V nynější době stále neexistuje její přesná definice a většinou se charakterizuje výčtem některých vlastností. Turbulentní proudění kapaliny se vyznačuje nezanedbatelnou časovou změnou rychlosti v každém jejím bodě a rotačním pohybem na široké škále délkových měřítek. Ve vzniku turbulence hrají klíčovou roli Reynoldsova tečná napětí, která v turbulentním proudění značně převyšují příspěvek viskozity. Na základě Reynoldsova rozkladu:

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}' \quad (1.7)$$

uvádí Pope [3] Reynoldsoův napěťový tenzor² ve tvaru:

$$\tau_{ij} = \langle v'_i v'_j \rangle. \quad (1.8)$$

Ve vztahu (1.7) je $\langle \vec{v} \rangle$ střední rychlostní proudění a \vec{v}' rychlostní fluktuace.

Rovnici (1.3) můžeme definicí bezrozměrných proměnných pro stacionární proudění

$$\vec{u}' = \frac{\vec{v}}{u}; \quad \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{l}; \quad t' = \frac{tu}{l}; \quad p' = \frac{p}{\rho u^2} \quad (1.9)$$

přepsat do bezrozměrného tvaru:

$$(\vec{u}' \nabla') \vec{u}' + \nabla' p' = \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{u}', \quad (1.10)$$

tak jak to uvádí kupříkladu Skrbek a kol. [1]. Z takto přepsané Navier-Stokesovy rovnice vyplývá, že proudění s malým Reynoldsovým číslem jsou laminární, neboť dochází k potlačení vlivu nelineárního členu $(\vec{u}' \nabla') \vec{u}'$. S rostoucím Reynoldsovým

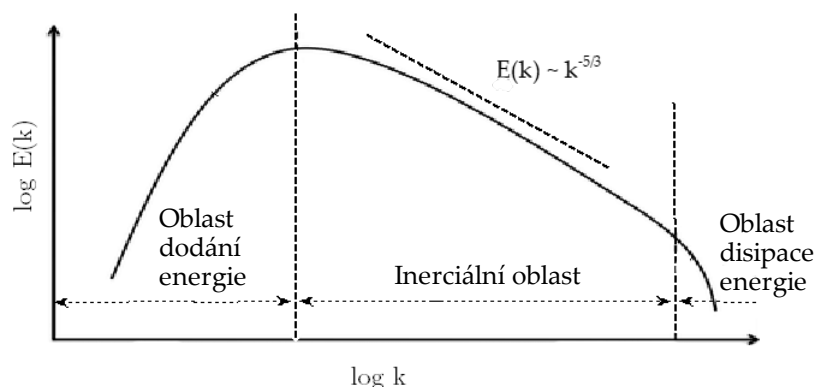
²Jedná se o symetrický tenzor druhého řádu, τ_{ij} jsou jednotlivé maticové elementy a $v'_{i,j \in \{1,2,3\}}$ jsou složky \vec{v}' .

číslem potom vliv nelineárního členu stoupá a proudění přechází z laminárního na turbulentní.

Turbulence se skládá z vírů různých rozměrů a pro každý z rozměrů l definujeme Reynoldsovo číslo Re_l . Re_l potom určuje poměr setrvačných a viskózních sil, tedy zda víry rozměru l mohou disipovat energii. U velkých víru maximálního rozměru L , který je dán například rozměry experimentální aparatury, nedochází k výrazné disipaci energie. Velké víry se rozpadají na menší se stejnou celkovou energií. Pro malé víry o rozměrech menších než λ_0 , která je dána $Re_{\lambda_0} = 1$, je potom vazkost dominantní a právě na těchto rozměrech dochází k disipaci energie. Celý tento proces přenosu a disipace energie se nazývá Richardsonova kaskáda. Pro dostatečně velká Reynoldsova čísla jsou rozměry λ_0 a L dostatečně vzdáleny a existuje tedy takzvaná inerciální oblast $\lambda_0 \ll l \ll L$, kdy na délkových škálách l je role viskozity minimální. V takovém případě veličiny popisující turbulenci mohou záviset jen na rozměru l a na energetickém toku $\varepsilon = -dE/dt$ v kaskádním procesu od větších k menším vírům. Spektrální hustotu energie $E(k)$, kde $k = 2\pi/l$ je vlnové číslo, dostáváme na základě rozměrové analýzy ve tvaru:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \quad (1.11)$$

Tato rovnice se též nazývá Kolmogorovův zákon a v tomto tvaru je uvedena v [1], detailnější odvození je možné najít v [2]. $C \approx 1,5$ je Kolmogorovova konstanta.



Obrázek 1.1: Kolmogorovovo energetické spektrum v logaritmicke škále, převzato z [4].

Dále pro turbulentní proudění zavádíme vířivost $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$. Jak již bylo uvedeno výše, energie se disipuje ve vírech, jejichž charakteristická velikost je λ_0 a menší. Za předpokladu homogenní a izotropní turbulence můžeme pro tuto disipaci energie psát:

$$\varepsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle, \quad (1.12)$$

kde počítáme se střední kvadratickou vířivostí $\langle \omega^2 \rangle$ z toho důvodu, že turbulence sama o sobě je velmi chaotická a je tedy výhodné pracovat se středními hodnotami veličin [2].

1.2 Supratekuté ^4He

Supratekuté ^4He vykazuje zajímavé v klasické kapalině neexistující jevy, jako je například kvantová turbulence. K vysvětlení těchto jevů je nutné na suprate-

kuté ${}^4\text{He}$ nahlízet z pohledu kvantové mechaniky. Do supratekutého stavu ${}^4\text{He}$ přechází při dosažení teploty λ -bodu (2,17 K). V do té doby kapalném, avšak nikoliv supratekutém, ${}^4\text{He}$ začne docházet k takzvané Bose-Einsteinově kondenzaci. Jednotlivé atomy ${}^4\text{He}$ začínají obsazovat nejnižší možný energetický stav. Při teplotě blízké λ -bodu je většina atomů nadkondenzátních (jejich energetický stav je vyšší než základní), se snižující teplotou potom přibývá atomů v základním stavu. Tento pohled na věc vedl Tiszu s Londonem k dvousložkovému modelu supratekutého ${}^4\text{He}$ [5]. Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, oproti nim přichází Landau s teorií, kdy popisuje supratekuté ${}^4\text{He}$ pomocí modelu ideálního plynu kvazičástic: fononů a rotonů. V konečném důsledku jsou oba dva popisy správně a vzájemně se doplňují.

1.2.1 Dvousložkový model

Dvousložkový model nahlíží na ${}^4\text{He}$ pod λ -bodem (He II) jako na kapalinu sestávající se ze dvou komponent: supratekuté a normální složky. Na tomto místě je důležité zmínit, že přiřazovat konkrétní atomy ke konkrétní složce je chybné, na He II je nutné nahlízet z kvantově mechanického pohledu jako na superpozici dvou různých stavů (v našem případě složek)[1]. Supratekutá složka se pohybuje bez vnitřního tření a nenese žádnou entropii, veškerá entropie systému je tedy obsažena v normální složce. Každá ze složek má vlastní hustotu, pro normální ji označme ρ_n a pro supratekutou ρ_s . Je zřejmé, že musí platit následující vztah:

$$\rho = \rho_n + \rho_s, \quad (1.13)$$

kde ρ je celková hustota kapalného ${}^4\text{He}$, kterou můžeme pod λ -bodem považovat za konstantní. Hodnota ρ uváděná v [6] je přibližně $145 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Obdobně každé ze složek přiřazujeme rychlostní pole \vec{v}_n a \vec{v}_s . Tyto dvě rychlostní pole jsou bez přítomnosti turbulence vzájemně nezávislá a analogicky se vztahem (1.2) můžeme psát:

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n. \quad (1.14)$$

V He II můžeme pozorovat tři podstatné typy proudění:

1. společné proudění obou složek (co-flow)
2. tepelný protiproud (counterflow)
3. proudění čistě supratekuté složky (superflow)

nebo jejich libovolnou kombinaci.

Naším hlavním objektem zájmu bude tepelný protiproud. Tepelný protiproud může být generován v oblasti, v jejímž jednom konci je umístěno například odporové topení způsobující zvýšení teploty o ΔT . Gradient teploty v He II vyvolává změnu tlaku a naopak, jedná se o termo-mechanický jev. Z hydrodynamických rovnic pro He II je v [1] pro vztah mezi teplotou a tlakem odvozen vztah:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho s, \quad (1.15)$$

kde s je entropie na jednotku hmotnosti. V případě tepelného protiproudu proudí složky He II proti sobě a platí tedy $\vec{j} = 0$. Supratekutá složka bude proudit

směrem k odporovému topení, kde se přemění na normální, která následně bude od topení proudit pryč. Jak bylo uvedeno výše, veškerou entropii odnáší normální složka He II a pro tepelný tok \dot{q} skrz plochu A ve směru její normály \vec{n} potom můžeme psát:

$$\dot{q} = \rho_s T v_n = \frac{\dot{Q}}{A}, \quad (1.16)$$

kde \dot{Q} je výkon topení. Ve sférické symetrii, kdy je odporové topení vyvedeno na supravodivých drátech do středu kulové cely, předpokládejme, že je proudění izotropní. Potom je velikost rychlosti ve vzdálenosti r od středu cely (polohy topení) dána vzorcem:

$$v_n = \frac{\dot{Q}}{4\pi\rho_s T r^2}. \quad (1.17)$$

Další důležitou veličinou, jež se definuje u tepelného protiproudu, je takzvaná rychlost tepelného protiproudu (counterflow velocity), která je v [1] definována jako:

$$\vec{v}_{ns} = \vec{v}_n - \vec{v}_s. \quad (1.18)$$

S využitím vztahů (1.13), (1.14) pro $\vec{j} = 0$ a (1.17) dostáváme pro velikost rychlosti tepelného protiproudu ve sférické symetrii:

$$v_{ns} = \frac{\dot{Q}}{4\pi\rho_s s T r^2}. \quad (1.19)$$

Hustota supratekuté složky ρ_s s klesající teplotou T výrazně roste a příslušné hodnoty lze nalézt zde [6].

1.2.2 Kvantování vírů a kvantová turbulence

Chování supratekuté složky ${}^4\text{He}$ pod teplotou λ -bodu můžeme popsat pomocí makroskopické vlnové funkce [1]. Tato funkce má obecně následující tvar:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_0(\vec{x}, t) e^{-iS(\vec{x}, t)}, \quad (1.20)$$

kde $\Psi_0(\vec{x}, t)$ je amplituda a $S(\vec{x}, t)$ je makroskopická fáze. Aplikováním operátoru hybnosti \hat{p} na (1.20) společně s předpokladem, že Ψ_0 není prostorově závislá, dostáváme (detailnější odvození v [1]) pro rychlost supratekuté složky následující důležitý vztah:

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S(\vec{x}, t), \quad (1.21)$$

kde m_4 je hmotnost jednoho atomu ${}^4\text{He}$ a \hbar redukovaná Planckova konstanta. Proudění supratekuté složky je tedy potenciálové a platí $\nabla \times \vec{v}_s = 0$. Na tomto základě zavádí Feynman [7] kvantování cirkulace jednotlivých vírů. Víry si představuje jako čarové singularity v prostoru vyplněném čistě supratekutým ${}^4\text{He}$. Pakliže budeme počítat cirkulaci \vec{v}_s po jisté uzavřené křivce γ , která neobepíná žádný z vírů, dostáváme nulovou hodnotu (z matematického hlediska se integrace provádí v jednoduše souvislé oblasti). Situace se změní, jestliže křivka bude obepínat nějaký z vírů:

$$\oint_{\gamma} \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi\hbar}{m_4} N = \kappa N. \quad (1.22)$$

Hodnota fáze se může změnit jen o násobek 2π , aby hodnota vlnové funkce zůstala nezměněna. Cirkulace je tedy kvantovaná v přirozených násobcích kvanta cirkulace $\kappa = 9,977 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$, N je kvantovací číslo. Většina vírů je jednou kvantovaná, neboť je to energetický výhodnější. Má-li vír vyšší kvantové číslo než $N = 1$, postupně se rozpadá na víry jednou kvantované. Samotné víry si můžeme představit jako úzká vlákna, v kterých absentuje supratekutá složka a kolem kterých dochází k její cirkulaci. Dle Kelvinova teorému [2] musí jednotlivá vlákna začínat a končit na hranicích oblasti nebo se mohou uzavírat sama do sebe a tvořit vírové kroužky.

Víry v supratekuté složce He II takto předpovězené Onsagerem a Feynmanem byly opravdu experimentálně pozorovány roku 1961 Vinenem [8].

Kvantová turbulence, jako klubko náhodně orientovaných vírů, může být generována pomocí tepelného protiproudu. Při překročení hodnoty kritické rychlosti protiproudu v_{ns}^c bude docházet k tvorbě kvantovaných vírů a to z důvodu energetické výhodnosti. Dle vztahu (1.19) můžeme kritické rychlosti přiřadit kritický výkon odporového topení \dot{Q}_c . Na základě experimentů a s pomocí rozměrové analýzy odvozuje Vinen [9] pro hustotu vírových čar L v protiproudé turbulenci diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\rho_n B}{2\rho} \chi_1 v_{ns} L^{3/2} + g(v_{ns}) - \frac{\kappa}{2\pi} \chi_2 L^2, \quad (1.23)$$

kde první člen na pravé straně úměrný $L^{3/2}$ udává generaci turbulence a B je teplotně závislý koeficient vnitřního tření [6]. Člen úměrný L^2 na druhou stranu udává rozpad turbulence. Koeficienty χ_1, χ_2 jsou konstanty dané geometrií systému a $g(v_{ns})$ je funkce zohledňující experimentálně potvrzenou skutečnost, že pod v_{ns}^c nedochází ke generaci žádných vírů.

V případě stacionárního stavu $\partial L/\partial t = 0$ a nadkritické rychlosti proudění, při níž můžeme člen $g(v_{ns})$ zanedbat, dostáváme pro hustotu vírových čar důležitý vztah:

$$L \approx \gamma^2 v_{ns}^2, \quad (1.24)$$

kde jsme označili $\gamma = (\pi\rho_n B\chi_1)/(\rho\kappa\chi_2)$. Tato závislost byla experimentálně pozorována při měření turbulence generované pomocí tepelného protiproudu v pravoúhlém kanále [10].

1.2.3 Rozpad turbulence

V protiproudé kvantové turbulenci byly experimentálně pozorovány [11] a následně teoreticky vysvětleny 2 typy rozpadu [1]. První rozpadový mód je podobný tomu v klasické kapalině. Jeho teoretický popis vychází z myšlenky, že na rozměrech větších než jsou rozměry kvantovaných vírů, mají supratekutá a normální složka He II podobná rychlostní pole kvůli síle vnitřního tření. Pro vířivost v takovém případě lze odvodit vztah:

$$\omega_s = \omega_n = \omega \simeq \kappa L. \quad (1.25)$$

S použitím vztahů (1.12), (1.25), $\varepsilon = -dE/dt$ a výsledku integrace vztahu (1.11) přes víry všech možných velikostí $(2\pi/L_o; \infty)$, kde L_o je rozměr oblasti, dostáváme [1]:

$$L(t) = \frac{L_o(3C)^{3/2}}{2\pi\kappa\sqrt{\nu_{eff}}}(t + t_0)^{-3/2}. \quad (1.26)$$

V této rovnici je t_0 virtuální čas začátku rozpadu turbulence o nekonečném L , ν_{eff} je teplotně závislá efektivní kinematičká viskozita He II, která je důsledkem toho, že za nenulových teplot se normální složka He II rozptyluje na kvantovaných vírech.

Druhý rozpadový mód vychází z Vinenovy rovnice (1.23). Nebude-li docházet ke generaci turbulence, budou dva první členy na pravé straně rovnice (1.23) nulové. Řešením diferenciální rovnice potom dostáváme:

$$L(t) \approx \frac{L_i}{t + t_0} + L_0, \quad (1.27)$$

kde L_i je hustota vírových čar ve stacionárním stavu a L_0 hustota remanentních vírových čar.

1.2.4 Druhý zvuk a jeho tlumení

V He II se může šířit několik různých neklasických vlnových módů, neboli zvukových módů. Tyto zvukové módy vyplývají z hydrodynamických rovnic a jejich detailnější odvození můžeme najít v [2] a [1]. V následujícím budeme potřebovat druhý zvuk. Ten je důsledkem právě dvousložkového chování He II, kdy dochází k oscilaci ρ_s a ρ_n v protifázi. Jelikož, jak již bylo zmíněno výše, veškerou entropii systému nese jen normální složka, dochází k oscilacím entropie s , což má za důsledek oscilace teploty T . Druhý zvuk se v He II šíří rychlostí u_2 , která je teplotně závislá viz obrázek 1.5.

Důležitou vlastností druhého zvuku je, že se absorbuje a rozptyluje na kvantovaných vírech. To se v experimentu projeví v poklesu amplitudy absorpční složky napětí na čidlech druhého zvuku, jsou-li nastavena na frekvenci odpovídající rezonanci druhého zvuku. Z hodnot maximální neutlumené měřené amplitudy A_0 , její rezonanční šířky čáry Δf_0 a utlumené amplitudy A potom můžeme, za předpokladu izotropního a homogenního rozmístění kvantových vírů, vypočítat L podle vzorce:

$$L = \frac{6\pi\Delta f_0}{\kappa B} \left(\frac{A_0}{A} - 1 \right). \quad (1.28)$$

Odvození tohoto vztahu lze nalézt v [12].

1.2.5 HVBK rovnice

Hall-Vinen-Bekarevich-Chalatnikovovy rovnice jsou zobecněná forma hydrodynamických rovnic pro dvousložkové He II za nenulové teploty. Rovnice vycházejí z představy, že částice kontinua He II je dostatečně velká na to, že obsahuje velké množství vírových čar orientovaných v jednom směru viz obrázek 1.2.

Rovnice též zahrnují vnitřní tření v He II a napětí vírových čar. Takto není možné popsat struktury, kde jsou vírové čáry náhodně orientovány v prostoru.

Donelly [13] uvádí HVBK rovnice pro nestlačitelné He II ($\nabla \cdot \vec{j} = 0$) v následující formě:

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + (\vec{v}_n \nabla) \vec{v}_n = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s}{\rho_n} s \nabla T + \nu_n \Delta \vec{v}_n + \frac{\rho_s}{\rho} \vec{F}_{ns} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \nabla) \vec{v}_s = -\frac{1}{\rho} \nabla p + s \nabla T + \vec{T} - \frac{\rho_n}{\rho} \vec{F}_{ns}, \quad (1.30)$$

kde \vec{F}_{ns} je síla vnitřního tření a platí pro ni vzorec:

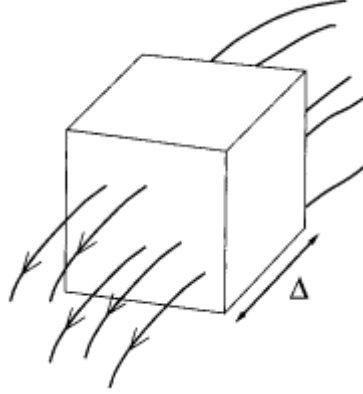
$$\vec{F}_{ns} = \frac{B}{2}\hat{\omega}_s \times (\vec{\omega}_s \times \vec{c}) + \frac{B'}{2}\vec{\omega}_s \times \vec{c}. \quad (1.31)$$

$$\hat{\omega}_s = \frac{\vec{\omega}_s}{|\vec{\omega}_s|}; \vec{c} = \vec{v}_n - \vec{v}_s - \nu_s \nabla \times \hat{\omega}_s. \quad (1.32)$$

$\vec{\omega}_s = \nabla \times \vec{v}_s$ je vířivost supratekuté složky a ν_s je napěťový parametr. Tyto rovnice tedy reflektují skutečnost, že bez přítomností kvantovaných vířů by nebylo vnitřní tření. Člen \vec{T} v rovnici (1.30) je napěťová síla na vírových vláknech a právě v tomto členu se HVBK rovnice odlišují od původních rovnic pro dvousložkové He II odvozené Landauem [2]. Pro napěťovou sílu platí:

$$\vec{T} = -\nu_s \vec{\omega}_s \times (\nabla \times \hat{\omega}_s). \quad (1.33)$$

Detailní odvození HVBK rovnic s příslušnými komentáři lze nalézt v článku Bekareviče a Chlatnikova [14].



Obrázek 1.2: Schématické znázornění He II v HVBK popisu, převzato z [13].

1.3 Sférické rezonance

Šíření vlny $u(\vec{x}, t)$ o rychlosti v je popsáno vlnovou rovnicí:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \Delta \right) u(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.34)$$

Řešení vlnové rovnice můžeme hledat ve tvaru $u(\vec{x}, t) = X(\vec{x})T(t)$ [15]. Dosazením do (1.34) a volbou vhodné separační konstanty $-k^2$ potom dostáváme rovnici pro prostorovou funkci $X(\vec{x})$ a pro časovou $T(t)$, kdy k má fyzikální smysl vlnového čísla. Prostorová rovnice se nazývá Helmholtzova a popisuje stojatou vlnu, její tvar je:

$$(\Delta + k^2)X(\vec{x}) = 0. \quad (1.35)$$

Helmholtzova rovnice lze dobře řešit ve sférických souřadnicích. Přepisem (1.35) do nových souřadnic máme:

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 \right) X(\vec{x}) + \Delta_{\vartheta, \varphi} X(\vec{x}) = 0, \quad (1.36)$$

kde $\Delta_{\vartheta, \varphi}$ je úhlová část Laplaceova operátoru³. Řešení (1.36) uvažujeme obdobně jako v předchozím případě ve tvaru $X(\vec{x}) = R(r)V(\vartheta)U(\varphi)$. Při separaci na radiální a úhlovou část volíme separační konstantu $n(n+1)$. Úhlovou část potom řeší takzvané sférické harmonické funkce $Y_{nm}(\vartheta, \varphi)$ a za předpokladu sférické symetrie pro nás nehrají podstatnou roli, mimo vícenásobné degenerace frekvencí odpovídajícím jednotlivým radiálním funkcím. Tato degenerace může být v experimentu kvůli drobným nedokonalostem sférické symetrie sňata a mohou proto být pozorována vícenásobná rezonanční maxima (multi-peaky). Důležitá je rovnice pro radiální funkci $R(r)$:

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + (k^2 r^2 - n(n+1)) \right) R(r) = 0. \quad (1.37)$$

Toto je Besselova rovnice a její řešení je následující:

$$R(r) = A j_n(kr) + B n_n(kr), \quad (1.38)$$

kde $j_n(kr)$ jsou sférické Besselovy funkce, $n_n(kr)$ sférické Neumannovy funkce a A, B konstanty. Pro nás jsou relevantní jen $j_n(kr)$, jelikož popisují stojatou vlnou bez zdroje v počátku. Neumannovy funkce mají v počátku singularitu.

V našem případě vyžadujeme nulovost R na hranicích kulové cely. Hodnotu argumentu, v němž nabývá Besselova funkce nulové hodnoty, označme x_0 . Pro x_0 potom zřejmě musí platit:

$$x_0 = k_0 R_0, \quad (1.39)$$

kde k_0 je vlnové číslo odpovídající dané rezonanční frekvenci a R_0 je poloměr cely. Pro rezonanční frekvenci f potom dostáváme:

$$f = \frac{u_2 x_0}{2\pi R_0}. \quad (1.40)$$

Hodnoty x_0 je možné nalézt v [16].

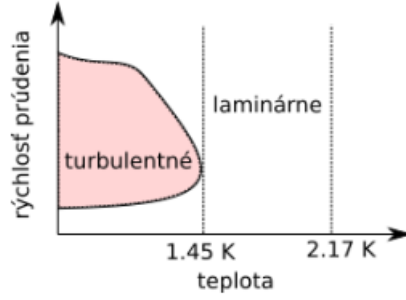
1.4 Výsledky numerické simulace

Počítačovou simulaci kvantové turbulence generované pomocí tepelného protiproudu v sféricky symetrickém případě provedl Varga [17]. Numerická simulace se zakládá na diskretizaci a postupné iteraci dynamických rovnic pro pohyb vlákna dle Runge-Kuttheho metody. Počáteční podmínka je dána klubkem náhodně orientovaných vírů kolem počátku.

Dle numerické simulace existuje ve sférickém symetrickém tepelném protiproudu horní kritická rychlost, nad níž nebyl pozorován další vývoj turbulentního klubka. Turbulence se tedy propaguje v jistém intervalu rychlostí tepelného protiproudu. Obdobně byla pozorována maximální teplota, při níž dochází ke generaci turbulence. Hodnota této teploty byla přibližně určena na 1,45 K.

Problémem numerického modelu je, že nezahrnuje turbulenci v normální složce He II. To je dáno tím, že takovýto postup by zahrnoval přílišné komplikace s ohledem na složitost modelu a především výpočetní čas.

³Úhlová část Laplaceova operátoru: $\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$



Obrázek 1.3: Fázový diagram sféricky symetrického tepelného proudění na základě výše zmíněné numerické simulace, převzato z [18].

1.5 Klasická versus kvantová turbulence v He II

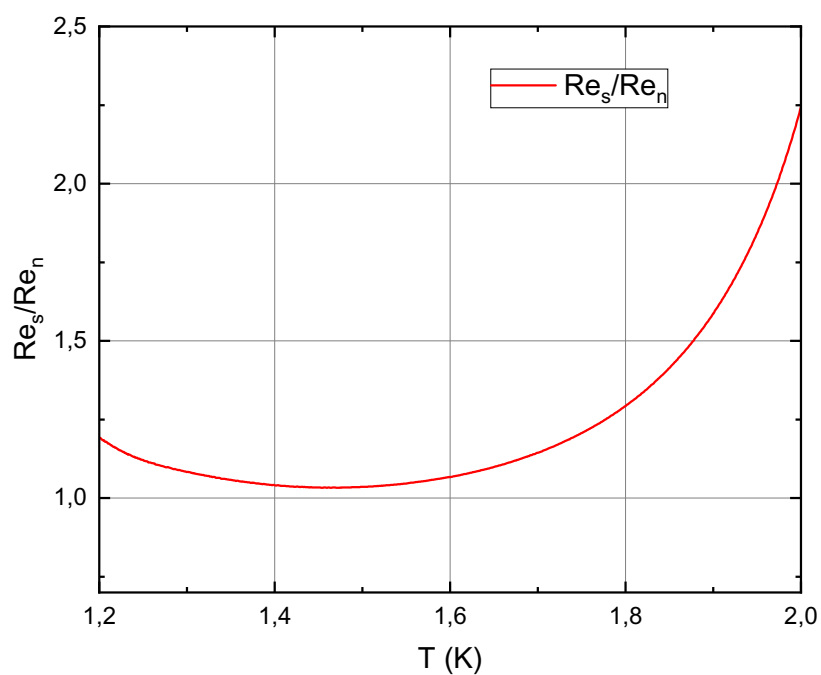
He II má normální a supratekutou složku a v oblastech nad teplotou 1 K, kdy je hodnota ρ_n nezanedbatelná, může v normální složce samozřejmě existovat turbulence. Tato turbulence potom může komplikovat samotné měření ve srovnání s numerickými simulacemi, neboť se nám díky ní generuje v supratekuté složce kvantová turbulence „navíc“. Plnohodnotná analýza stability proudění normální složky je nad rámec této práce, nicméně kvalitativní představu o případné turbulenci v normální složce nám poskytnou bezrozměrná podobnostní čísla. Reynoldsovo číslo normální složky Re_n se mění s teplotou. Ideální by tedy bylo měřit kvantovou turbulenci v oblastech takových teplot, kdy je Re_n co nejmenší a Reynoldsovo číslo pro supratekutou složku $Re_s = v_s l / \nu_{eff}$ co největší, kde použijeme odhadnutou hodnotu $\nu_{eff} \approx 0,1\kappa$ [19]. V grafu na obrázku 1.4 je vynesena poměr obou Reynoldsových čísel:

$$\frac{Re_s}{Re_n} = \frac{v_s \nu_n}{v_n \nu_{eff}}, \quad (1.41)$$

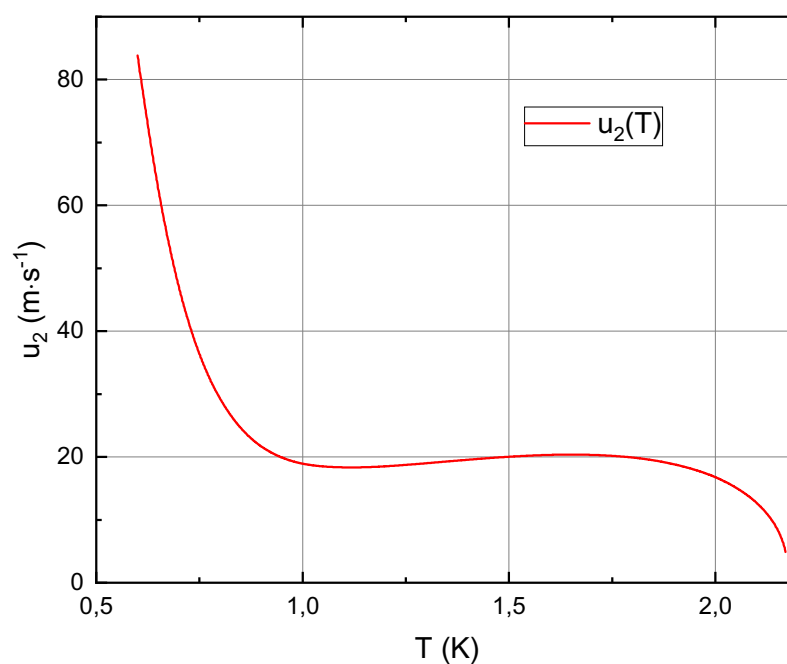
kde v_s v případě sféricky symetrického tepelného protiproudu vypočítáme jako:

$$v_s = \frac{\dot{Q}}{4\pi s T r^2} \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (1.42)$$

Na základě 1.4 je zřejmé, že kvantová turbulence je nejméně ovlivňována klasickou turbulencí při co nejnižších teplotách a teplotách blízkých λ -bodu. Z experimentálního hlediska je ale při teplotách nižších než 1,2 K velmi náročné generovat tepelný protiproud, aniž by došlo vlivem příkonu do lázně k výraznějšímu zvýšení její teploty. Problém nastává i u teplot blízkých λ -bodu, kdy máme jen velmi malé množství supratekuté složky v systému. Z toho lze usuzovat, že nejlepší teploty pro měření kvantové turbulence v tepelném protiproudu s ohledem na porovnání výsledků s numerickými simulacemi jsou buď v intervalu (1,2 - 1,4) K nebo (1,6 - 1,8) K.



Obrázek 1.4: Poměr Reynoldsových čísel supratekuté a normální složky He II při sféricky symetrickém tepelném protiproudu ve vzdálenosti 1 mm od středu cely. Tepelný protiproud je buzen výkonem 20 mW a hodnoty ρ_s , ν_n , s jsou převzaty z [6]. $\nu_{eff} \approx 0,1\kappa$ a můžeme tuto hodnotu dle experimentálně naměřených dat [19] považovat v daném intervalu teplot za konstantní.



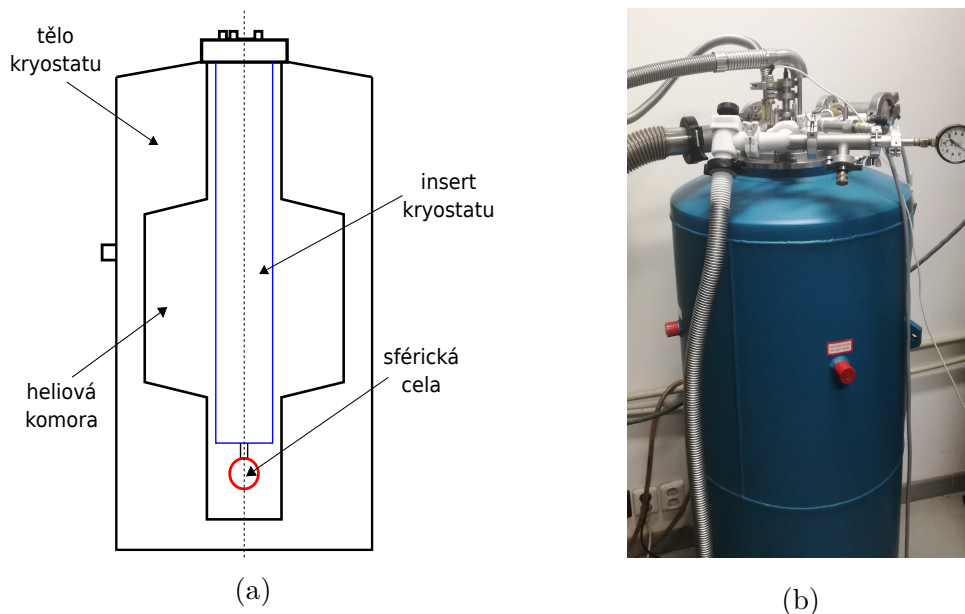
Obrázek 1.5: Závislost rychlosti druhého zvuku u_2 na teplotě T , data převzata z [6].

2. Experimentální aparatura

2.1 Kryostat a čerpání

Měření probíhalo v kryostatu od firmy Precision Cryogenics cylindrického tvaru o vnitřním objemu přibližně 60 l viz obrázek 2.1. Vnější část kryostatu je nerezová. Vnitřní komora kryostatu, která se plní kapalným heliem, je od okolí odizolována prostorem (tělo kryostatu) odčerpávaným na vakuum a vyplněným izolačním materiálem, aby nedocházelo k tepelným ztrátám zářením a vedením.

Do heliové komory je zaveden takzvaný insert kryostatu, jehož fotografii uvádíme na obrázku 2.2. Jedná se o systém trubek a ocelových přírub navrhovaný tak, aby byly minimalizovány tepelné ztráty ve vertikálním směru, kde chybí izolační materiál. Insert je z kryostatu plně vyjmutelný a je na něm umístěno veškeré elektrické vedení, topení, odporové teploměry a experimentální cela, jež je blíže popsána v části 2.3.



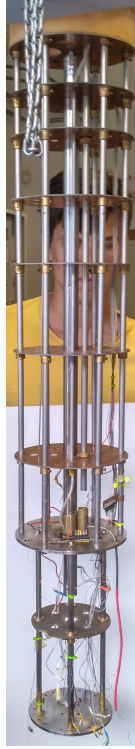
Obrázek 2.1: Schéma a fotografie použitého nerezového kryostatu.

Zásobování kapalným He je zabezpečováno zkapalňovačem MFF UK, odkud je přepravováno v Dewarových nádobách. Z nádoby je potom helium transportováno do kryostatu, po jeho důkladném prochlazení heliovými parami za použití speciálního sifónu s vakuovým meziprostorem, aby byly limitovány tepelné ztráty. Tlak nasycených heliových par v kryostatu je měřen přístrojem Baratron, který se skládá ze dvou částí: měřící hlavy¹ (model 690A s rozsahem 1000 Torr) a řídicí jednotky² (model 670C). Pro snížení teploty helia pod teplotu λ -bodu jsou páry čerpány a odváděny zpět do zkapalňovače pomocí systému pump. Nejprve se uvádí do provozu rotační olejová vývěva, která se využívá pro snížení teploty helia pod λ -bod. Za sníženého tlaku je již bezpečné použít výkonnou Rootsou

¹<https://www.mksinst.com/f/690a-reference-absolute-capacitance-manometers>

²<https://www.mksinst.com/f/670c-signal-conditioner-power-supply>

vývěvu, kterou jsme schopni teplotu helia snížit lehce pod 1,20 K. Míru čerpání jsme schopni regulovat pomocí ventilů.



Obrázek 2.2: Fotografie insertu kryostatu.

2.2 PID regulace teploty

Pro jakákoliv měření turbulence v supratekutém heliu je nutné dlouhodobě (v poměru k celkovému experimentálnímu času) udržet konstantní hodnotu teploty heliové lázně. Při změnách příkonu v experimentu může docházet k fluktuaci teploty heliové lázně, přičemž teplotu určuje rovnováha mezi výkonem pump a tepelným příkonem v experimentu. Výkon pump je možné regulovat pomocí otočných ventilů, jimiž jsou osazeny trubky spojující pumpu a kryostat, nicméně tento způsob regulace teploty je nepraktický, jelikož by vyžadoval neustálou přítomnost experimentátora a jeho včasné a přesné reakce na změnu teploty. V našem případě bylo v heliové lázni umístěno regulační topení tvořené několika centimetry odporového drátu o odporu přibližně 50 Ω . Naším cílem je držet teplotu lázně na teplotě T_0 a to právě pomocí výkonu $\dot{Q}_{reg}(t)$ regulačního topení. Okamžitou měřenou teplotu potom označme $T(t)$, kde t je čas. Okamžitý regulační výkon je dán PID (proportional-integral-derivative) algoritmem:

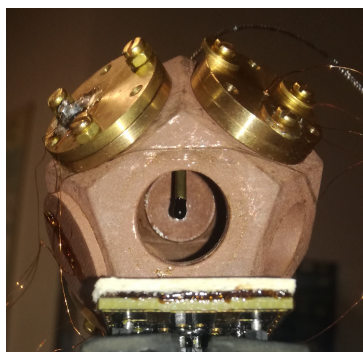
$$\dot{Q}_{reg}(t) = P(T_0 - T(t)) + I \int_0^t (T_0 - T(t')) dt' + D \frac{dT(t)}{dt}, \quad (2.1)$$

kde P, I, D jsou vhodně zvolené kladné parametry. Ve většině případů volíme $D = 0$ a $P > I$. Celý proces regulace je obstaráván automatizovaně pomocí programu

v LabVIEW. Ve finále jsme byli schopni ustabilizovat teplotu na hodnotě T_0 s přesností přibližně 1 mK.

2.3 Sférická cela

K vytvoření sféricky symetrického proudění, které je objektem zájmu této práce, byla vyrobena speciální sférická cela. Na této cele byla umístěna čidla druhého zvuku a do středu je vyvedeno odporové topení generující v He II kvantovou turbulenci ve vyvolaném protiproudu. Cela byla vytisknuta ve dvou částech na 3D tiskárně od firmy PRUSA³ z materiálu PLA (polymléčná kyselina) obohaceného o částičky mědi z důvodu lepší teplotní vodivosti za nízkých teplot a snížení přílišného tepelného pnutí při ochlazování. Části cely byly pečlivě očištěny, zahlazeny krátkým leptáním v acetonu (30 s) a poté byl vnitřní povrch natřen epoxidovým lepidlem Stycast 1266. Následně byly obě části k sobě slepeny tím samým lepidlem.



Obrázek 2.3: Sférická cela s odporovým topením a čidla druhého zvuku použitá při měření.

Z vnějšku má cela tvar pravidelného dvanáctistěnu a to z toho důvodu, aby bylo možné jednoduše umístit detekční čidla, o nichž se více zmiňujeme v následující části 2.4, a závěs cely na insert kryostatu. Vnitřek cely má potom již sférickou geometrii s průměrem 36 mm s odchylkou přibližně 0,5 mm. Sférická geometrie cely je lehce narušena čidly druhého zvuku, které mají z konstrukčních důvodů rovinnou geometrii.

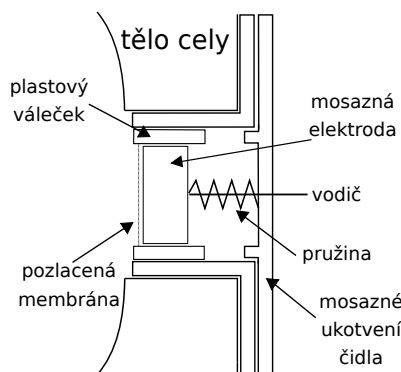
2.4 Čidla druhého zvuku

Pro měření kvantové turbulence jsme použili čidla budící a snímající stojaté vlny druhého zvuku 1.2.4. De facto se jedná o kondenzátory, kdy jedna elektroda je tvořena mosazným válečkem a druhá z jedné strany pozlacenou membránou s mikroskopickými póry. Mosazná elektroda je vsazena do plastového válečku, na nějž je pomocí malého plastového kroužku uchycena membrána. Vždy je potřeba použít pár čidel, kdy jedno funguje jako generátor druhého zvuku a druhé jako detektor. Čidla mají rovinnou geometrii s aktivní kruhovou plochou o průměru 8 mm a v cele jsou umístěna pomocí mosazných držáků ze dvou částí,

³<https://www.prusa3d.cz/>

kdy jedna část je do cely vlepena lakem GE Varnish a druhá je k ní přitažena šrouby. Mezi mosaznou elektrodou a držákem je umístěna pružina, která tlačí elektrodu proti nepozlacené straně membrány, což má za následek napnutí membrány na mosaznou elektrodu a zvýšení kapacity čidla.

Ke generaci druhého zvuku přivádíme na mosaznou elektrodu střídavé napětí $U_{ac} = U_0 \exp(i\omega t)$ z generátoru Agilent 33220A, kde U_0 je amplituda napětí a ω úhlová frekvence. Na mosazné držáky přivádíme konstantní napětí $U_{dc} = 100$ V, z důvodu linearizace a zesílení budící síly, která je úměrná U^2 , kde $U = U_{ac} + U_{dc}$. Takováto budící síla má za následek rozkmitání membrány čidla, které vyvolá oscilační proudění supratekuté a normální složky He II v protifázi, neboť membrána je propustná jen pro supratekutou složku He II. Oscilace složek He II vede k rozkmitání membrány detekčního čidla a tedy oscilaci napětí na něm. Jedná se tedy o buzený tlumený harmonický oscilátor a u nějž síla odpovídá budícímu napětí a rychlost elektrickému proudu procházejícímu čidlem. V souvislosti s tlumením druhého zvuku nás zajímá hlavně absorpční složka elektrického proudu (ve fázi s napětím). Detekční čidlo je připojeno k fázově citlivému zesilovači Lock-In (typ SR830⁴ od firmy Stanford research systems) synchronizovaného s generátorem napětí. Lock-In je schopen zaznamenávat absorpční a disperzní složku signálu, které jsou vůči sobě fázově posunuty o $\pi/2$.



Obrázek 2.4: Schéma čidla druhého zvuku použitého při měření.

2.5 Odporové topení

Odporové topení, jež bylo použito ke generaci tepelného protiproudu, tvořil malý rezistor o rozměrech $0,5 \times 0,5 \times 0,2$ mm³ a při pokojové teplotě o odporu 150 Ω. Rezistor byl pokryt lepidlem Stycats 2850FT⁵, čímž jsme dosáhli přibližně kulového tvaru o průměru 2 mm za účelem dosažení izotropního šíření tepla. Topení je do středu cely s odchylkou maximálně 1 mm vyvedeno na dvou vodičích. Při první etapě měření (měření ustáleného stavu turbulence) bylo topení vyvedeno na dvou měděných drátech, které byly před umístěním do cely napnuté a natřeny lakem GE Varnish, aby držely přímý tvar. Tím samým lakem byly dráty potom zalepeny do držáku v cele. Při druhé etapě (měření rozpadu turbulence) byly měděné drátky nahrazeny koaxiálním kabelem: mosaz v teflonové izolaci s CuNi

⁴<http://www.trinstruments.cz/lock%2Din%2Dzesilovace%2Dstanford%2Dresearch%2Dsystems%2Dsr810%2Da%2Dsr830>

⁵<http://www.cmr-direct.com/stycast-2850FT>

stíněním, neboť mosaz má menší tepelnou vodivost než měď a odvede méně tepla ze středu cely. Přitom je odpor mosazi a stínění za kelvinových teplot menší než 1Ω a jejich Ohmický ohřev vůči topení o 150Ω je tedy zanedbatelný. Koaxiální kabel byl natřen Stycastem 2850FT a umístěn do mosazné trubičky a zalepen do držáku viz obrázek 2.3.

Obdobné odporové topení o totožném odporu bylo lakem GE Varnish přilepeno na vnější stranu cely. Obě dvě topení byla napojena na jeden dvoukanálový programovatelný zdroj Keithley 2220G-30-1 s rozsahem 30 V a 5 A. Tento zdroj umožňoval kontinuálně přepínat mezi topením v cele a vně cely za účelem udržení konstantního příkonu v průběhu rozpadových měření, což je nezbytné pro udržení dostatečné stability PID algoritmu 2.2.

Dráty, kterými bylo vyvedeno topení, byly na jejich opačném konci připájeny na destičku s konektory připevněnou na cele viz 2.3, čímž nám bylo umožněno provádět měření odporu topení (při zanedbání odporu přívodních vodičů) čtyřbodově s pomocí multimetrů Keithley 2000 a 2100. Protože odpor topení může být závislý na použitém výkonu kvůli přehřívání, tak jsme jej vždy určovali z aktuálně měřeného napětí a proudu.

2.6 Odporové teploměry

Teplota v kryostatu a heliové lázni byla měřena odporovými teploměry. Při prochlazování kryostatu byly použity 3 odporové platinové teploměry umístěné na insertu kryostatu v horní, střední a dolní části. Pro měření teploty kapalného helia se tyto teploměry již spolehlivě použít nedají a proto byly dále instalovány teploměry polovodičové RuO_2 , jeden umístěný v cele a druhý v heliové lázni, a TTR-G od firmy Microsensor⁶ umístěný v lázni.

Odpor Pt teploměru byl obdobně jako v případě odporových topení zjišťován čtyřbodově za použití multimetrů Keithley 2000 a 2100. Odpor RuO_2 teploměrů buď opět pomocí zmíněných multimetrů Keithley, které byly použity při měření ustáleného stavu turbulence, nebo regulátorem teploty Lakeshore model 336. Ten byl schopen zároveň zaznamenávat odpor obou RuO_2 a byl potom použit až při měření rozpadu turbulence, při měření ustáleného stavu bohužel nebyl k dispozici. Měření odporu TTR-G bylo prováděno také regulátorem teploty Lakeshore model 332.

U TTR-G a RuO_2 v cele byla provedena kalibrace proti tlaku nasycených par helia s využitím hodnot [6].

⁶<http://microsensor.com.ua/products/ge-on-gaas-film-resistance-thermometers>

3. Experimentální výsledky

3.1 Charakterizace aparatury

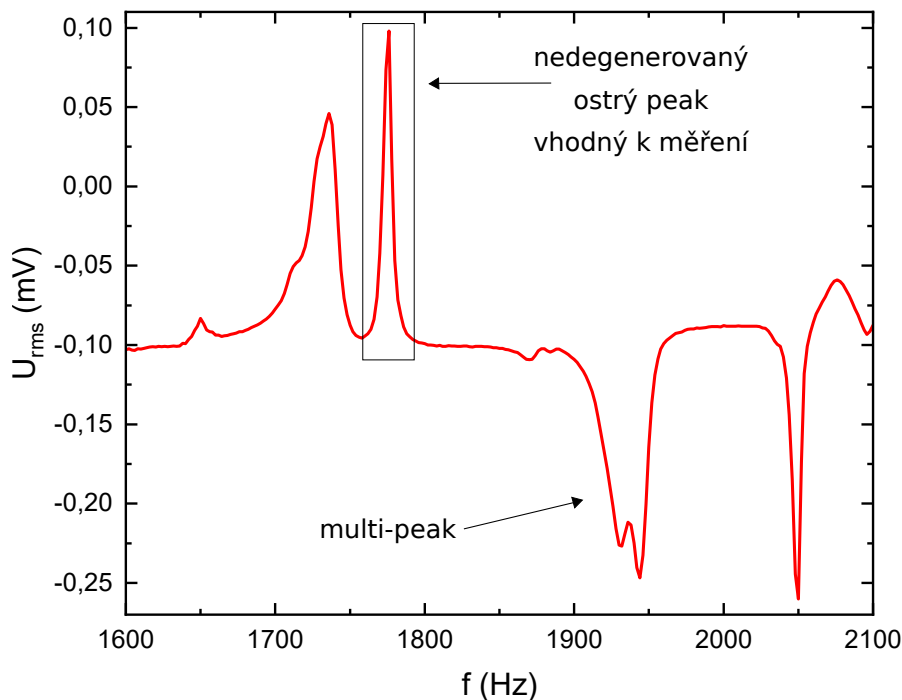
Pro detekci kvantové turbulence byly na celu instalovány 2 páry čidel druhého zvuku. Kapacita čidel byla změřena, jak před měřením na atmosférickém tlaku (750 torr) a pokojové teplotě, tak po zalití kapalným heliem při teplotách nižších než λ -bod, čemuž odpovídá tlak nasycených par 37,17 torr. Velikost kapacity čidel hraje důležitou roli v intenzitě měřeného signálu, neboť ta je kapacitě úměrná. Hodnoty kapacit se po zalití zvýšily. Při zanedbání okrajových jevů a za předpokladu homogenity a izotropie dielektrika platí pro kapacitu deskového kondenzátoru C známý vztah:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{l}, \quad (3.1)$$

kde ε_0 je permitivita vakua, ε_r relativní permitivita (dielektrická konstanta), S plocha kondenzátoru a l vzdálenost desek (mosazné elektrody a pozlacené vrstvy membrány), která je v případě dokonalého napnutí membrány 8 μm , což by odpovídalo kapacitě 56 pF. Zvýšení kapacit po zalití heliem můžeme tedy s přihlédnutím ke vztahu (3.1) interpretovat několika způsoby. Mohlo dojít ke změně vzdálenosti l mezi elektrodami a to v důsledku změny tlaku, která měla za následek přitlačení z jedné strany pozlacené membrány na mosaznou elektrodu. Na druhou stranu zde může hrát roli i teplotní kontrakce samotné mosazné elektrody, která by znamenala zmenšení kapacity. Teplotní kontrakce mosazi při heliových teplotách vzhledem k rozměru při pokojové teplotě je přibližně 0,36 % [20], zmenšení naší mosazné elektrody ve tvaru válečku o výšce přibližně 5 mm a poloměru 8 mm bude tedy v řádech jednotek μm , což je dost na to, aby změna kapacity byla měřitelná. Dále může mít vliv změna tuhosti pružiny, která tlačí mosaznou elektrodu proti membráně. Tuhost pružiny je úměrná Youngovu modulu pružnosti. Youngův modul pružnosti roste s klesající teplotou a tedy i síla, kterou pružina působí na elektrodu. Opačným efektem se avšak může projevovat teplotní kontrakce pružiny. To může mít za následek lehké posunutí elektrody v plastovém držáku jedním nebo druhým směrem a tedy změnu kapacity čidla. Na závěr nesmíme zapomenout na změnu dielektrika mezi elektrodami, kdy přecházíme od vzduchu ke kapalnému heliu. Relativní permitivita vzduchu je přibližně rovna 1, zatímco u kapalného helia se pohybuje mezi 1,057 a 1,058 [21]. Přítomnost He II jako dielektrika tedy zvyšuje kapacitu čidla.

Pro samotné měření byl potom na základě frekvenčního spektra (sweep) zvolen jeden pár protilehlých čidel, přičemž byly vyzkoušeny všechny možné kombinace, i ty, kdy čidla nejsou orientována přímo proti sobě. V tomto ohledu se nezdála být role kapacity příliš důležitá a hlavním určujícím kritériem bylo, zda měřená rezonanční maxima nejsou degenerovaná, zda mají vhodnou šířku v polovině maxima (FWHM) Δf , jejíž hodnota se ve většině případů pohybovala kolem 7 Hz a zda jsou dostatečně intenzivní. Intenzita rezonančního maxima je totiž úměrná rozlišení detekční metody druhého zvuku. Zdaleka ne všechna měřená rezonanční maxima z frekvenčního spektra se potom hodila k samotnému měření turbulence. Nakonec byla zvolena jen dvě různá, o nichž se detailněji zmiňujeme v následující části 3.2.

Hodnota odporu topení ve středu cely po zalití kapalným heliem klesla a pohybovala se přibližně okolo 125Ω . Této hodnotě byly přizpůsobeny výkony odporového topení tak, aby nedošlo vlivem příliš velkého výkonu k jeho zničení. Maximální možné výkony se pohybovaly v rozmezí 200 mW až 300 mW.



Obrázek 3.1: Část frekvenčního spektra při teplotě 1,30 K. V grafu je vyznačen typický příklad multi-peaku a také rezonančního maxima (peaku), které je vhodné k samotnému měření. Mezi frekvencemi 1700 - 1750 Hz potom pozorujeme maximum, které se k měření tlumení druhého zvuku použít nedá. Má příliš velkou rezonanční šířku, což může být způsobeno mírným sejmutím degenerace, a není tedy možné toto maximum spolehlivě proložit fitem.

Pozn.: U_{rms} v tomto i ostatních grafech značí efektivní hodnotu měřeného napětí tj. hodnotu napětí v amplitudě U_{amp} dělenou $\sqrt{2}$.

3.2 Použité rezonanční módy

Jak bylo uvedeno v části 1.3, rezonanční módy druhého zvuku v sféricky symetrické cele jsou dány nulovými body sférických Besselových funkcí. Pro rezonanční frekvenci potom platí vztah (1.40).

Pomocí fázově citlivého zesilovače Lock-In byla zaznamenávána jak disperzní, tak absorpční složka napětového signálu na detekčním čidle.

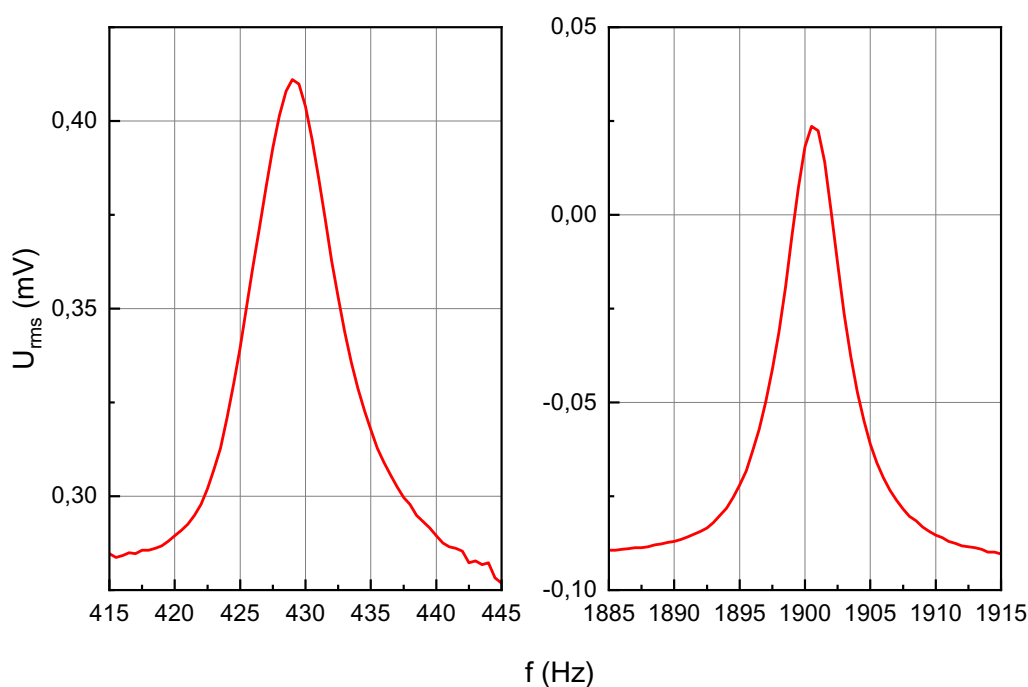
Mezi různými teplotami docházelo k frekvenčnímu posunu rezonancí a to z důvodu teplotní závislosti rychlosti druhého zvuku u_2 viz obrázek 1.5. Pro každou z teplot lázně helia tedy bylo nutné najít konkrétní rezonanční frekvence z měřeného rezonančního spektra zvlášť. Jak již bylo uvedeno výše, velká část měřených

rezonančních maxim z frekvenčního spektra nebyla použitelná. Vlivem nedokonalostí ve sférické geometrii docházelo k sejmutí degenerace a byly měřeny takzvané multi-peaky nebo byla maxima málo intenzivní, či měla příliš velkou šířku. Příklad širšího spektra je uveden na obrázku (3.1).

Další faktor, který se značně projevuje v měřeném signálu a je jej nutné zohlednit při zpracování dat je pozadí. To je způsobeno především kapacitní vazbou mezi vodiči v kryostatu i při pokojové teplotě nebo též blízkými okolními rezonancemi. Ve většině případů můžeme pozadí považovat za lineární a zohlednit ho takto ve fitu, což je detailněji popsáno v části 3.3.1.

Pro posuzování kvality rezonančního maxima se též zavádí takzvaný Q-faktor (quality factor), který je definovaný jako $Q = \Delta f / f_0$, kde Δf je šířka rezonančního maxima v polovině amplitudy a f_0 rezonanční frekvence. Q-faktor je také důležitým faktorem pro citlivost druhého zvuku. Pro nedegenerovaná ostrá maxima je tento faktor potom nejvyšší a na taková maxima dobře „sedí“ níže zmíněný fit 3.3.1.

Z frekvenčního spektra při teplotě 1,65 K byly vybrány dvě vhodná absorpční rezonanční maxima viz obrázek 3.2. Rezonanční frekvence jsou přibližně

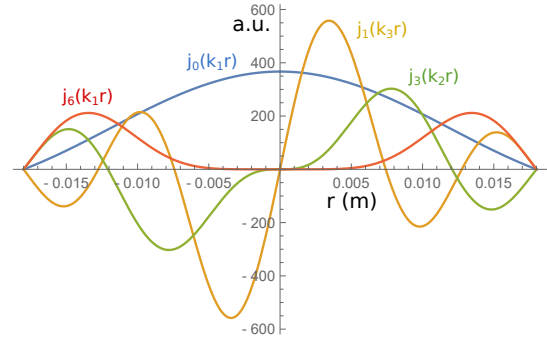


Obrázek 3.2: Vybrané rezonance druhého zvuku při teplotě helia 1,65 K. Q-faktor rezonančního maxima při nízkém módu je $Q_1 \approx 44$ a při vyšším potom $Q_2 \approx 345$.

430 Hz a 1900 Hz. Tyto hodnoty můžeme srovnat s těmi, které jsou dány analyticky viz tabulka na obrázku 3.3.

První z naměřených rezonančních maxim 430 Hz bude dle hodnot v 3.3 náležet prvnímu nulovému bodu Besselovy funkce nultého řádu. Hodnoty si přímo neodpovídají, což může být způsobeno odchylkami cely od dokonalé sféry. Druhému z naměřených maxim 1900 Hz potom nelze jednoznačně přiřadit některou z hodnot. Této hodnotě se nejvíce blíží třetí nulový bod funkce prvního řádu,

$n \setminus m$	1	2	3	4
0	565	1131	1697	2263
1	809	1391	1963	2533
2	1038	1638	2219	2794
3	1258	1876	2467	3048
4	1473	2108	2708	3296
5	1685	2335	2945	3539
6	1893	2558	3178	3779
7	2099	2779	3408	4015



Obrázek 3.3: Hodnoty rezonančních frekvencí v Hz vypočtených dle vztahu (1.40) při teplotě 1,65 K, kde n čísluje řád a m nulové body příslušné sférické Besselovy funkce. Barevné hodnoty označují rezonanční frekvence, jimž přiřazujeme rezonance vybrané na základě měření a vedle tabulky uvádíme jim náležící prostorové rozložení sférických Besselových funkcí v cele. Hodnoty nulových bodů funkcí x_0 a rychlosti druhého zvuku u_2 při dané teplotě jsou převzaty z [6],[16]. Poloměr sférické cely je $R_0 = 18$ mm.

druhý nulový bod funkce třetího řádu, anebo první nulový bod funkce šestého řádu. Tvar těchto sférických Besselových funkcí je také uveden na obrázku 3.3 společně s barevně vyznačenými rezonančními frekvencemi v tabulce.

Tato rezonanční maxima byla identifikována i u ostatních teplot heliové lázně v rozmezí 1,19 K až 1,80 K. Rezonanční frekvence se pohybovaly mezi 387 Hz až 430 Hz u nižšího módu a 1727 Hz až 1900 Hz u vyššího. Na těchto frekvencích byl měřen ustálený stav turbulence.

3.3 Ustálený stav kvantové turbulence

Kvantová turbulence v tepelném protiproudu byla vyvolána za použití odporového topení na měděných drátcích a měřena metodou tlumení druhého zvuku. Ustálený stav turbulence byl měřen při teplotách 1,19 K; 1,30 K; 1,42 K; 1,65 K a 1,80 K. Teplota v lázni byla určována na základě provedené kalibrace odporového polovodičového teploměru TTR-G a stabilizována pomocí regulačního odporového topení s využitím PID algoritmu, jak je popsáno výše 2.2. Při zapnutém topení docházelo v cele ke zvýšení teploty helia oproti lázni o jednotky až desítky mK, přičemž byl určen tepelný odpor cely 1 K/W viz obrázek 3.4. Tento ohřev způsobuje posun rezonanční frekvence při měření rezonance druhého zvuku, takže bylo nutné použít automatické sledování rezonanční frekvence viz 3.4.1.

3.3.1 Způsob zpracování ustáleného stavu

Pro určení hustoty vírových čar v ustáleném stavu kvantové turbulence je důležitá hlavně absorpční složka měřeného signálu, z níž jsou odečteny důležité parametry Δf_0 , A_0 a A , které jsou blíže popsány v části 1.2.4. Na Lock-Inu je nutné vyladit dodatečný posun fáze složek tak, abychom měřili čistě absorpční a disperzní složku signálu. To je ale obvykle netriviální a proto byl zaznamenaný signál fitován lineární kombinací funkcí popisujících absorpční a disperzní

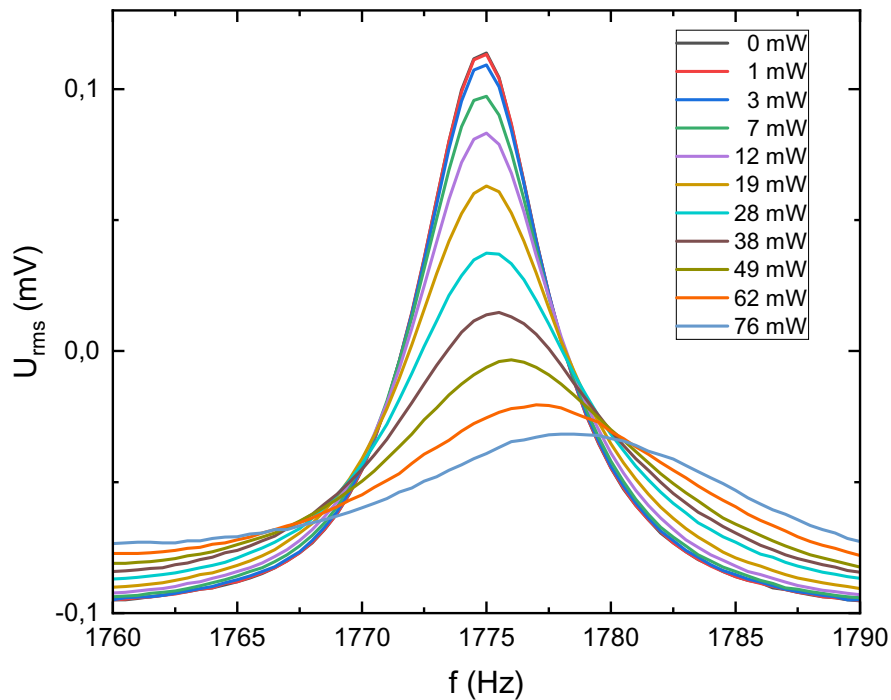
složku signálu:

$$y(f) = \cos(\varphi) \left[\frac{A}{\delta^2 + 1} + a \cdot f + b \right] + \sin(\varphi) \left[\frac{A}{\delta + 1/\delta} + c \cdot f + d \right], \quad (3.2)$$

kde $\delta = (f_0^2 - f^2)/(f \cdot \Delta f)$, φ je fázový posun představující rozdíl fáze měřeného signálu oproti ideálnímu nastavení, A amplituda, f_0 rezonanční frekvence a Δf je šířka rezonančního maxima. První člen na pravé straně (3.2) charakterizuje absorpční složku a druhý potom složku disperzní, členy $a \cdot f + b$, $c \cdot f + d$ odrážejí lineární pozadí signálu, a, b, c, d jsou volné reálné parametry. Správné odečtení lineárního pozadí bylo důležitým bodem při vyhodnocení měření.

Po provedení fitu byla ze zjištěných klíčových parametrů dle vztahu (1.28) vypočtena hustota vírových čar a to pro danou rezonanční frekvenci, teplotu a pro různé výkony odporového topení.

Celé zpracování probíhalo v programu v jazyce Python. Příslušná fitovací procedura využívala nelineární metodu nejmenších čtverců.



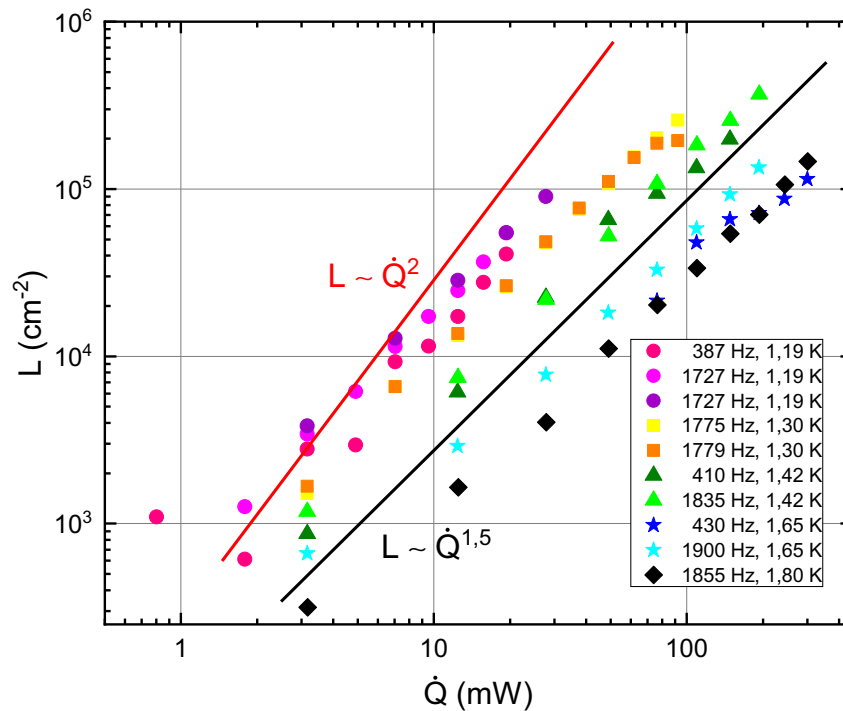
Obrázek 3.4: Příklad útlumu rezonančního peaku druhého zvuku při teplotě 1,30 K vlivem kvantové turbulence generované pomocí odporového topení o různých výkonech. Peak měřený při 0 mW je neutlumený a z něj tedy odečítáme parametry A_0 a Δf_0 . Rozdíl teplot heliové lázně mezi neutlumeným a plně utlumeným peakem dle frekvenčního posuvu odhadujeme na 77 mK. Z této hodnoty a hodnoty maximálního výkonu můžeme určit tepelný odpor cely, jehož hodnota je $R_Q \approx 1$ K/W.

3.3.2 Závislost hustoty vírových čar na výkonu topení a rychlosti tepelného protiproudu

Toto měření bylo provedeno pro několik výše zmíněných teplot a různých rezonančních frekvencí. Na obrázku 3.4 je uveden příklad měření metodou tlumení druhého zvuku při teplotě 1,30 K. Dobře je zde vidět mírný posun rezonanční frekvence směrem k vyšším frekvencím vlivem zvýšení teploty helia v okolí odporového topení a tedy nárůstu rychlosti druhého zvuku u_2 .

Hustota vírových čar L je dle vztahu (1.24) úměrná kvadrátu rychlosti tepelného protiproudu v_{ns}^2 , což bylo experimentálně pozorováno v pravoúhlých kanálech [22]. A jelikož je vztah mezi v_{ns} a výkonem topení \dot{Q} lineární, L by měla být kvadraticky úměrná i \dot{Q} . Je nutné si uvědomit, že hodnoty L dopočtené dle vztahu (1.28) jsou jen orientační, neboť vzniklé turbulentní klubko je velmi chaotický systém a nesplňuje předpoklady platnosti tohoto vztahu, tedy homogenitu a izotropii klubka kvantovaných vírů.

Dopočtené hodnoty hustoty vírových čar L jsou proti výkonu topení \dot{Q} zaneseny do grafu na obrázku 3.5 a to v logaritmické škále.



Obrázek 3.5: Závislost hustoty vírových čar L na výkonu odporového topení \dot{Q} v logaritmické škále pro různé teploty heliové lázně a různé použité rezonanční frekvence. Červenou přímkou je vyznačena očekávaná kvadratická závislost, zatímco černá příмка označuje závislost měřenou.

Z naměřených dat je jasné, že propagace turbulence ve sférické geometrii byla pozorována pro všechny teploty heliové lázně. To je v rozporu s numerickými simulacemi [17], z kterých vychází, že turbulence pro teploty vyšší než 1,45 K

je potlačena a dále se nerozvíjí. Možný důvod, proč kvantovou turbulenci nad 1,45 K pozorujeme, je přítomnost klasické turbulence v normální složce He II. S rostoucí teplotou roste hustota normální složky He II [6] a tedy její množství v celém objemu. Tato turbulence v normální složce potom má nejspíše za následek generaci turbulence ve složce supratekuté. Dochází tedy k turbulenci, která není přímým důsledkem dynamiky kvantovaných vírů.

Většina naměřených dat nevykazuje předpokládanou kvadratickou závislost mezi hustotou vírových čar L a výkonem topení \dot{Q} , nýbrž závislost s exponentem $3/2$. Data obecně splňující $L \propto \dot{Q}^{3/2}$ závislost se od ní odchyľují pouze ve dvou případech:

První případ jsou nízké výkony odporového topení. Hodnoty L jsou zde vyšší než by odpovídaly $L \propto \dot{Q}^{3/2}$ závislosti. To je nejspíše způsobeno existencí takzvaných remanentních vírů, které se přirozeně vyskytují v supratekuté složce He II. Z měřených hodnot hustoty vírových čar při ustáleném stavu není jednoduché hustotu remanentních vírů L_0 odhadnout. To je dáno tím, že referenčnímu neutlumenému rezonančnímu maximu přiřazujeme nulovou hustotu vírových čar, nicméně ve své podstatě je toto maximum již lehce utlumené prostřednictvím právě remanentních vírů, jejichž množství ovšem teoreticky nedokážeme předpovědět. Hustotu remanentních vírů L_0 jsme avšak schopni určit z měření rozpadu turbulence 3.4.2, kdy dostáváme přibližnou hodnotu L_0 , která se pohybuje v desítkách až stovkách cm^{-2} .

Druhý případ tvoří měření na nižší rezonanční frekvenci za teplot 1,45 K a 1,65 K při výkonech topení vyšších než 80 mW. Tento jev je podrobněji diskutován v části 3.3.4.

Dalším pozorováním je, že naměřené hodnoty nevykazují žádnou hodnotu kritického výkonu pro vznik kvantové turbulence, což je vlastnost sférické geometrie, kdy v blízkosti topení je v_{ns} výrazně vyšší než ve zbytku objemu. V tomto případě plánujeme podniknout další měření v oblasti nižších výkonů.

Také si povšimněme, že různé detekční módy druhého zvuku nám dávají různou hustotu vírových čar. To může být důsledkem různé citlivosti sférických Besselových funkcí v různých místech cely. Tuto problematiku podrobněji diskutujeme v části 3.3.3.

Důležitější závislostí, která byla intenzivně studována u různých typů proudění v pravouhlých kanálech [22] je závislost hustoty vírových čar L na rychlosti proudění. V našem případě vyhodnocujeme v_{ns} ve vzdálenosti 1 mm od středu cely, což by mělo přibližně odpovídat povrchu topení, kde by měla být hodnota v_{ns} maximální. Hodnoty L proti v_{ns} jsou zaneseny do grafu na obrázku 3.6.

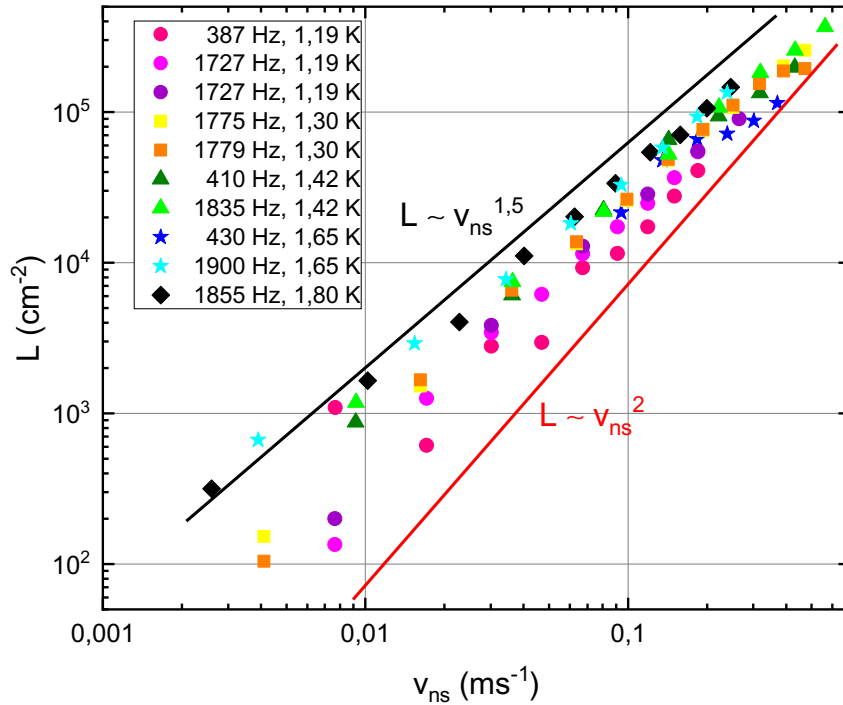
Na rozdíl od předchozí diskutované závislosti jsou hodnoty hustoty vírových čar za různých teplot více seskupeny. To potvrzuje, že důležitým parametrem pro vznik kvantové turbulence není výkon topení \dot{Q} , nýbrž rychlost tepelného protiproudu v_{ns} .

Většina měřených dat nespĺňuje předpokládanou kvadratickou závislost, ale spíše $L \propto v_{ns}^{3/2}$. Obdobně jako v předchozím případě je zde nesoulad s touto závislostí pro malé rychlosti a poté pro vyšší rychlosti při měření s nižším rezonančním módem na teplotách 1,42 K a 1,65 K, kdy pozorujeme anomálně se chovající vývoj hustoty vírových čar L . Jak již bylo zmíněno výše, to může být způsobeno přítomností remanentních vírů, respektive různou citlivostí rezonančních módů v různých místech cely 3.3.3 a prostorovým rozložením kvantovaných vírů 3.3.4. Dále

nepozorujeme žádnou dolní ani horní kritickou rychlost tepelného protiproudu pro vznik kvantové turbulence, jak bylo předpovězeno na základě numerických simulací, a tato skutečnost momentálně zůstává otevřeným problémem.

Pozorovaná závislost mezi L a v_{ns} není v souladu s experimenty v pravoúhlém kanále, které prováděl Varga [22], [23].

$L \propto v_{ns}^{3/2}$ není možné z rozměrových důvodů odvodit z Vinenovy rovnice (1.23), která avšak byla mnohými experimenty potvrzena a bylo by předčasné pochybovat o její správnosti. Navíc právě chaotické klubko kvantovaných vírů vznikající v okolí odporového topení by ji mělo velmi dobře splňovat. To proč je $L \propto v_{ns}^{3/2}$ závislost měřena může být způsobeno dvěma jevy a to buď různým prostorovým rozložením kvantovaných vírů a různé citlivosti sférických Besselových funkcí, nebo teplotním gradientem v prostoru cely. V následujícím 3.3.5 avšak ukážeme, že prostorové rozložení vírů by na kvadratickou závislost vliv mít nemělo. Teplotní gradient potom diskutujeme v části 3.3.6.



Obrázek 3.6: Závislost hustoty vírových čar L na rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} v logaritmické škále pro různé teploty heliové lázně a rezonanční frekvence. Hodnoty v_{ns} jsou dopočteny ve vzdálenosti 1 mm od středu cely dle vzatu (1.19) s využitím měřených výkonů \dot{Q} a hodnot [6]. Červenou přímkou je vyznačena očekávaná kvadratická závislost, zatímco černá příмка označuje závislost měřenou.

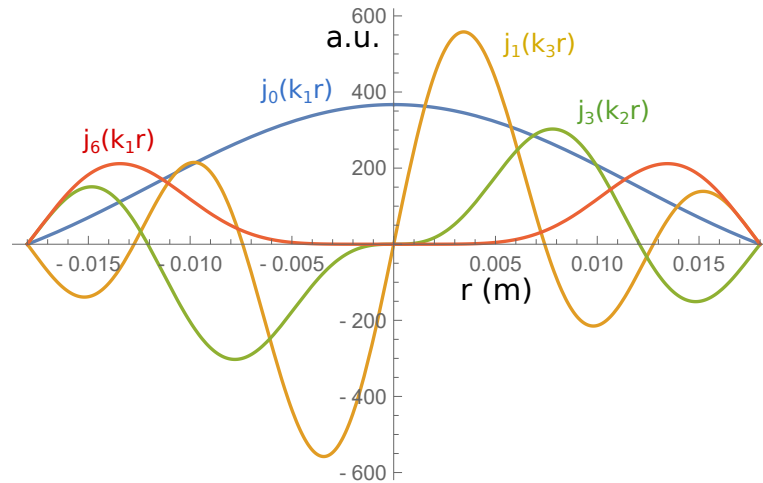
3.3.3 Prostorová citlivost sférických Besselových funkcí

Rezonance druhého zvuku jsou v sféricky symetrickém případě popsány sférickými Besselovými funkcemi detailněji viz část 1.3. Na těchto rezonancích potom

sledujeme míru útlumu, která je způsobena rozptylem a absorpcí druhého zvuku na kvantovaných vírech. Nicméně měřené hodnoty hustoty vírových čar při použití dvou různých rezonančních frekvencí za jedné teploty heliové lázně se liší viz obrázky 3.5, 3.6. V analogii s měřeními v pravoúhlém kanále [22] můžeme tvrdit, že různé rezonanční módy a jim odpovídající sférické Besselovy funkce mají různou citlivost v různých místech cely. Pro bližší náhled na věc je v grafu na obrázku 3.7 uvedeno prostorové rozložení sférických Besselových funkcí v ideálně sférické cele.

Z uvedeného rozložení rezonančních křivek můžeme usuzovat, že základní mód (funkce nultého řádu) má největší citlivost ve středu kulové cely, čili zde se nejvíce projeví utlumení rezonanční křivky a bude dobře rozlišitelné. Lokální citlivost jednotlivé rezonanční funkce je totiž na základě článku [22] úměrná kvadrátu amplitudy. Nicméně u tohoto módu se připravujeme o detekci vírů nacházejících se ve větší vzdálenosti od odporového topení. Opačným případem je potom funkce šestého řádu, která by mohla náležet vyššímu rezonančnímu módu a která je na poloměru do 5 mm od středu cely přimknutá k nulové hodnotě viz obrázek 3.7.

Zbylé dvě rezonanční křivky jsou v obou případech nulové v počátku, nicméně zde se v cele nachází topení a tedy žádné víry. Funkce prvního řádu je potom velmi citlivá v těsném okolí odporového topení a má další dvě vedlejší maxima. Je tedy možné do jisté míry detekovat kvantované víry v celém objemu. Obdobně je na tom i funkce třetího řádu, která je ovšem méně citlivá v okolí topení. Nutno ještě poznamenat, že velikost amplitud jednotlivých funkcí na obrázku 3.7 je jen orientační. Funkce jsou v dané oblasti normovány: $\frac{1}{N^2} \int_K j_n^2(k_m r) dV = 1$, kde N je normalizační konstanta.



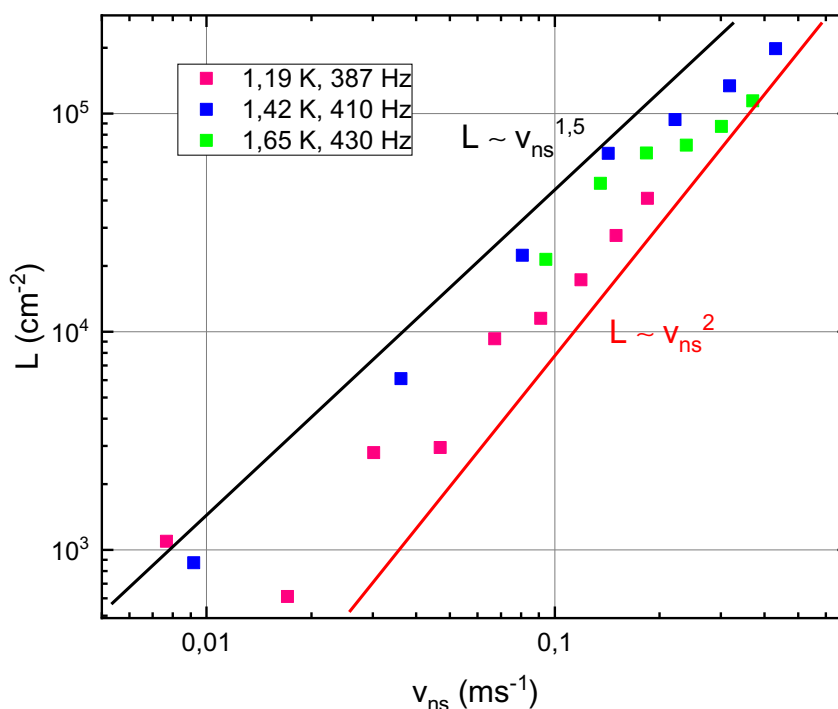
Obrázek 3.7: Prostorové rozložení sférických Besselových funkcí popisující rezonance druhého zvuku v sféricky symetrickém případě při teplotě 1,65 K s volbou okrajové podmínky $j_n(k_m R_0) = 0$, kde $R_0 = 18$ mm je poloměr sférické cely. Jednotlivým rezonančním funkcím odpovídají rezonanční frekvence uvedené v tabulce 3.3. Funkci $j_0(k_1 r)$ odpovídá nízký rezonanční mód (430 Hz). Ostatním by potom mohl náležet vyšší mód (1900 Hz), avšak zde nedošlo k přesné identifikaci, která z funkcí by mu měla náležet. Pravděpodobně se ale jedná o funkci $j_1(k_3 r)$, neboť my jsme k měření použili nejméně degenerovaný peak, na který má případná úhlová závislost nejmenší vliv.

Výše zmíněné je tedy možným vysvětlením, proč vyšší rezonanční frekvence vidí vyšší hodnoty hustoty vírových čar.

Obdobný problém s vyšší hustotou vírových čar při vyšší rezonanční frekvenci vyvstal i při měření turbulence v pravoúhlém kanále [22]. V článku je uveden i teoretický pohled na věc, kdy příčné rozložení hustoty kvantovaných vírů je aproximováno Fourierovou řadou a na tomto základě je potom odvozeno, že dostatečně vysoké rezonanční módy jsou schopny detekovat střední rozložení hustoty vírů v celém objemu. Analogicky tomu pravděpodobně bude i v našem případě, kdy použitím vyšších lichých rezonančních módů dostáváme střední rozložení L v cele.

3.3.4 Prostorové rozložení vírových čar

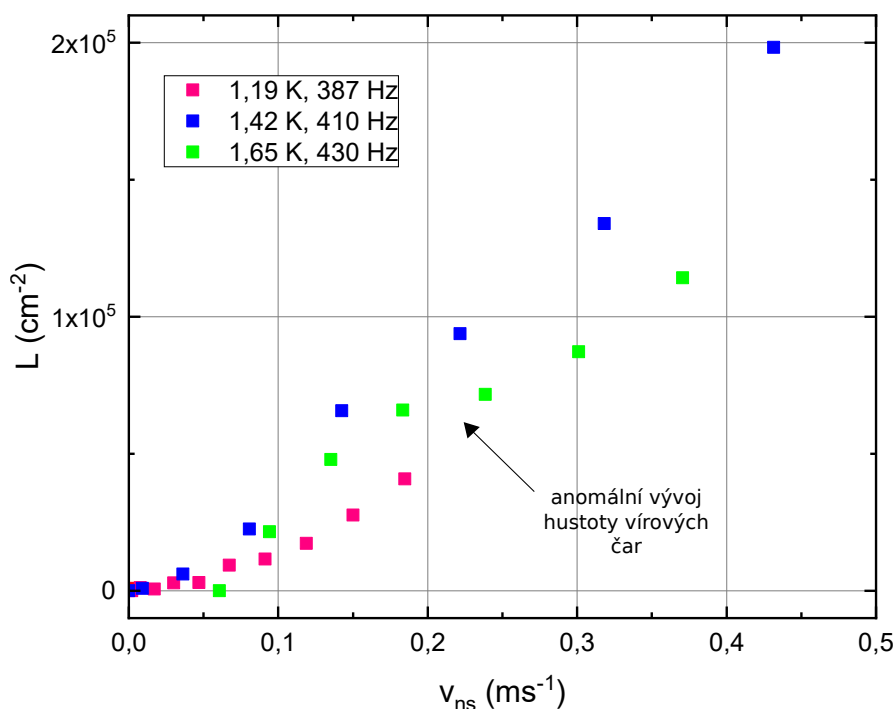
Rozložení hustoty vírových čar v objemu cely nám může pomoci vysvětlit anomální nárůst vírových čar při teplotách 1,42 K a 1,65 K v případě použití základního rezonančního módu viz obrázek 3.8. Pro větší názornost potom uvádíme graf závislosti L proti v_{ns} v lineárních osách 3.9. Je pravděpodobné, že bychom tento jev pozorovali i při teplotě 1,19 K, nicméně zde nebylo dosaženo dostatečně vysoké rychlosti tepelného protiproudu. Vysoké výkony topení by při takto nízké teplotě způsobovaly přílišný ohřev heliové lázně, který vzhledem k maximálnímu výkonu pump není možné dostatečně kompenzovat.



Obrázek 3.8: Vývoj hustoty vírových čar L proti rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} na základní rezonanční frekvenci. Červenou přímkou je vyznačena očekávaná kvadratická závislost, zatímco černá přímka označuje závislost měřenou.

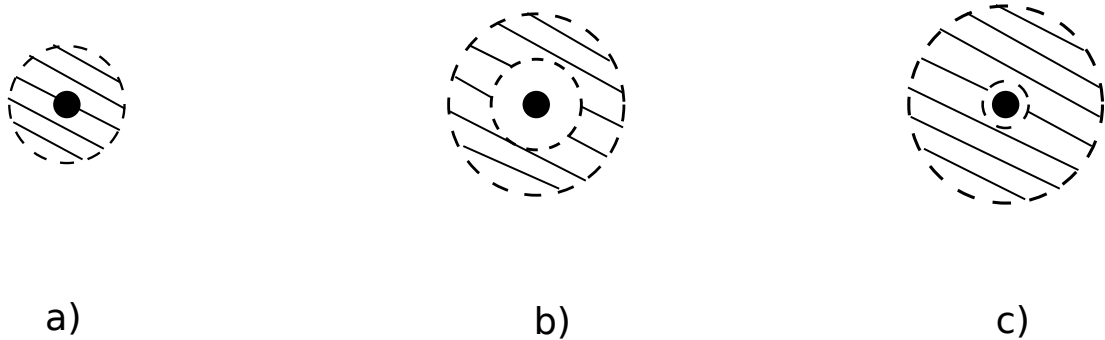
Při teplotě 1,65 K máme velmi dobrý poměr Reynoldsových čísel supratekuté a normální složky viz obrázek 1.4 a zřejmě právě z tohoto důvodu se anomálie projeví velmi jasně, neboť měření je minimálně zkresleno vlivem turbulence v normální složce. Právě turbulence v normální složce by potom mohl být důvod, proč je jev při 1,45 K mírně potlačen.

Anomálii vůbec nevidíme při měření na vyšší rezonanční frekvenci. To nás vede k myšlence, že množství vírových čar v objemu sice s rostoucím výkonem roste, nicméně vzhledem k měřené anomálii a různé citlivosti sférických Besselových funkcí v různých místech cely 3.3.3 se mění prostorové rozložení kvantovaných vírů v cele. To je i v souladu s numerickou simulací provedenou Inuim [24]. Pro rychlosti nižší než 0,15 m/s pozorujeme v prvním přiblížení nárůst dle $L \propto v_{ns}^{3/2}$ závislosti, což vzhledem k velké citlivosti základního rezonančního módu naznačuje, že kvantované víry jsou soustředěny v okolí odporového topení. Se zvyšující se rychlostí (výkonem) se pravděpodobně začne oblast s největší hustotou vírů přesouvat dále od topení a vytvoří se kulová slupka 3.10, přičemž na tyto víry není základní rezonanční mód dostatečně citlivý. To by vysvětlovalo zmíněnou anomálii. Tloušťka kulové slupky potom s dalším zvýšením rychlosti roste a její část začíná být opět lépe detekovatelná, což by mohlo vysvětlovat opětovný nárůst L po anomálii 3.9.



Obrázek 3.9: Vývoj hustoty vírových čar L proti rychlosti tepelného protiproudů v_{ns} na základní rezonanční frekvenci v lineárních osách.

Možným vysvětlením slupky kvantovaných vírů vznikající kolem odporového topení je dynamika vírových kroužků v tepelném protiproudě, což je i s provedenými numerickými výpočty uvedeno v článcích [17], [24]. Kroužky vznikající



Obrázek 3.10: Náčrt rozložení kvantovaných vírů v sférické cele v závislosti na rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} . Čárkované pole značí oblast s největší koncentrací kvantovaných vírů a \bullet odporové topení. a) Kvantované víry jsou koncentrovány hlavně v okolí odporového topení, oblast rychlostí do 0,15 m/s. b) Vytvoření kulové slupky kvantovaných vírů, 0,15 m/s až 0,30 m/s. c) Nárůst tloušťky slupky, oblast rychlostí vyšších než 0,30 m/s. Hodnoty rychlostí jsou velmi přibližně odhadnuty na základě měření při 1,65 K.

v bezprostřední blízkosti topení jsou od něj unášeny takzvanou vlastní indukovanou rychlostí, která s rostoucím poloměrem kroužku klesá. Proti pohybu kroužku působí směrem k topení proudící supratekutá složka He II společně s vzájemným třením mezi supratekutou a normální složkou. Kroužek o velkém poloměru je příliš pomalý na to, aby opustil topení a anihiluje na jeho povrchu. Naopak pokud je poloměr kroužku dostatečně malý, je kroužek schopen propagovat se v cele a buď se mu podaří dostat až na hranici cely, kde anihiluje, nebo je protiproudým polem zpomalen, což má za následek nárůst poloměru a natlačení kroužku zpět k topení.

Měřená anomálie se potom vyskytuje v oblasti takových rychlostí, kdy je příslušný kroužek pravděpodobně schopen docestovat do jisté vzdálenosti od topení, kde je zpomalen a vlivem interakcí s ostatními víry zadržen, pokud se v této oblasti významně mění citlivost použitého rezonančního módu, může se to projevit tak, jak vidíme na obrázku 3.5. Na závěr je ještě nutno poznamenat, že vírové kroužky mohou vznikat vlivem tepelného protiproudu v celém objemu cely, nicméně vzhledem k nejvyšší hodnotě v_{ns} u topení jich nejvíce vzniká právě zde.

3.3.5 Vliv prostorového rozložení vírů na kvadratickou závislost $L \propto v_{ns}^2$

Jak nyní ukážeme, prostorové rozložení kvantovaných víru by na kvadratickou závislost nemělo mít v ideálním případě žádný vliv. Předpokládejme nejprve, že hustota vírových čar L jako funkce radiální souřadnice r splňuje vztah (1.24) vyplývající z Vinenovy rovnice tj.:

$$L(r) = \gamma^2(T)v_{ns}^2(r). \quad (3.3)$$

Pro celkovou hustotu vírových čar měřenou pomocí tlumení rezonance druhého zvuku při použití příslušného rezonančního módu daného sférickou Besselovou

funkcí $j_n(k_m r)$ v analogii s tím, jak je uvedeno v [22], dostáváme:

$$L_{nm} = \frac{\int_K L(r) j_n^2(k_m r) dV}{\int_K j_n^2(k_m r) dV}, \quad (3.4)$$

kdy integrace se provádí přes objem koule K a $dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$. Do (3.4) nyní dosadíme vztah (3.3) pro $L(r)$ a následně za v_{ns} známý vztah (1.17). Za předpokladu, že žádná z veličin není úhlově závislá a s, T nezávisí na r , tedy dostáváme:

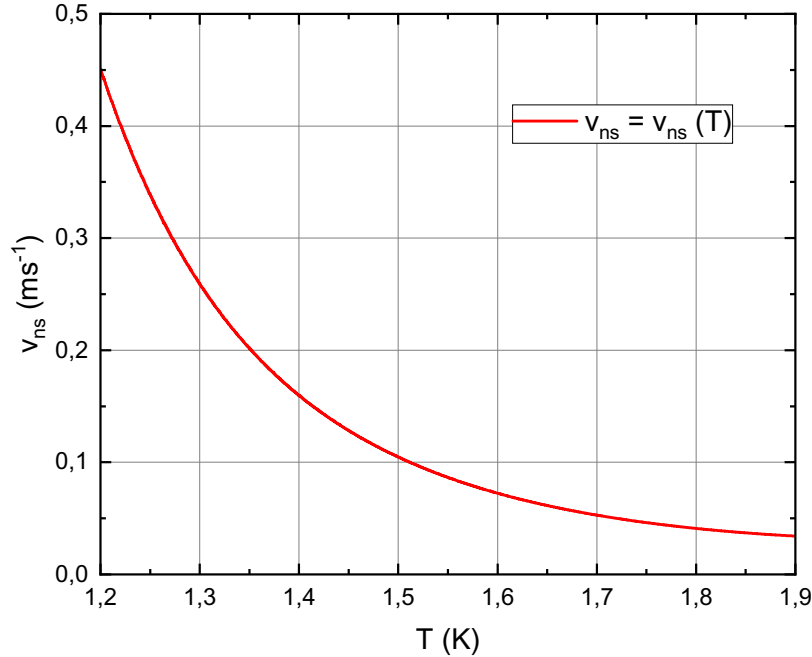
$$L_{nm} = \frac{C_2}{C_1} \frac{\gamma^2(T) \dot{Q}^2}{(4\pi s T \rho_s)^2}, \quad (3.5)$$

kde jsme označili konstanty $C_1 = \int_K j_n^2(k_m r) dV$ a $C_2 = 4\pi \int_{R_h}^{R_0} \frac{j_n(k_m r)}{r^2} dr$, R_h je poloměr topení a R_0 cely.

Výsledná hodnota hustoty vírových čar L_{nm} dle vztahu (3.5) stále vykazuje kvadratickou závislost, v tomto případě na výkonu topení \dot{Q} . Různé prostorové rozložení vírových čar tedy není vysvětlením pozorované závislosti.

3.3.6 Teplotní profil

Nehomogenní rozložení teploty ve sférické cele může být dalším důvodem, proč nedetekujeme očekávanou kvadratickou závislost mezi L a v_{ns} . Navíc přítomnost teplotního profilu je dle numerických simulací v cylindrické symetrii [25], [26] nutná k vytvoření ustálenému stavu kvantové turbulence, kdy v opačném případě numerické simulace nekonvergují.



Obrázek 3.11: Závislost rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} na teplotě T ve vzdálenosti 1 mm od středu cely pro výkon topení 50 mW. Data převzata z [6].

Výkon odporového topení ve středu cely způsobuje ve svém okolí zvýšení teploty helia. Směrem k hranicím cely potom teplota helia klesá na teplotu heliové lázně, která je udržována pomocí PID algoritmu. Právě zvýšení teploty v okolí odporového topení může mít vliv na rychlost tepelného protiproudu, která je dle vztahu (1.17) nepřímo úměrná teplotě T , ale také entropii s a hustotě supratekuté složky ρ_s , což jsou také teplotně závislé veličiny. Na grafu na obrázku 3.11 uvádíme závislost v_{ns} na povrchu topení proti T při konstantním \dot{Q} .

Vidíme, že i mírné zvýšení teploty má za následek nezanedbatelný pokles rychlosti tepelného protiproudu. A protože L závisí přímo úměrně na kvadrátu v_{ns} , dochází i k poklesu hustoty vírových čar v oblasti, kde se zvýšila teplota vůči teplotě lázně. Vzhledem k tomu, že se největší množství vírových čar vykytuje v blízkosti topení, může být výše popsané příčinnou, proč experimentálně změřená závislost mezi L a v_{ns} není kvadratická.

Konkrétní teplotní profil v cele nicméně bude jedním z předmětů budoucích měření.

3.4 Rozpad kvantové turbulence

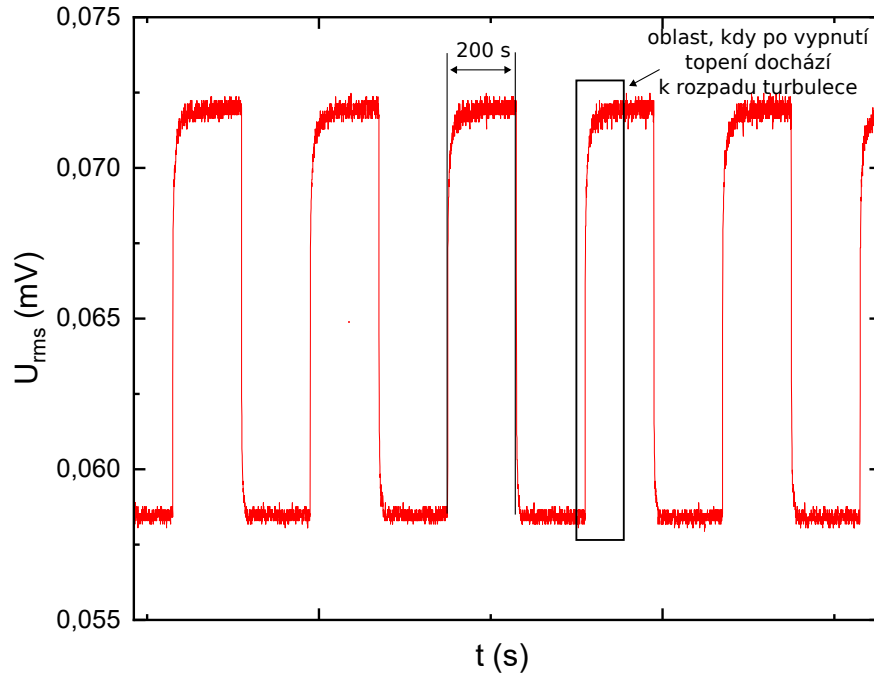
Před měřením rozpadu kvantové turbulence byly měděné drátky, na nichž bylo topení vyvedeno do středu cely, nahrazeny koaxiálním kabelem. Mosaz, z níž byl vyroben hlavní vodič, má vůči topení zanedbatelný Ohmický odpor viz kapitola 2.5. Měření bylo provedeno pro dvě různé teploty heliové lázně: 1,45 K a 1,65 K, které byly v průběhu měření udržovány pomocí PID algoritmu, a dva různé výkony topení 50 mW a 112 mW. Vzhledem k problémům s TTR-G teploměrem, byly pro měření průběhu teploty v lázni použity teploměry RuO₂.

3.4.1 Způsob měření a zpracování rozpadu

Před započítím samotného měření rozpadu turbulence bylo změřeno frekvenční spektrum, z něž bylo vybráno vhodné rezonanční maximum. Pro měření byl vybrán rezonanční mód, kterému při teplotě 1,45 K odpovídala frekvence 661 Hz a při 1,65 K frekvence 681 Hz. Pravděpodobně se nejedná o základní rezonanční mód, nýbrž o 1. nulový bod funkce 1. řádu viz tabulka 3.3. Rezonanční maximum bylo proloženo fitem a byla zjištěna rezonanční šířka a hodnota neutlumené amplitudy maxima. Měření poté probíhalo automatizovaně za pomoci programů v LabView, které periodicky zapínaly a vypínaly odporové topení v 200 s intervalech, kontrolovaly fluktuace rezonanční frekvence, tak aby byl kompenzován její posuv vlivem teplotních fluktuací, a sledovaly intenzitu měřeného maxima. Frekvence budícího napětí čidel druhého zvuku sledovala frekvenci skutečné rezonance pomocí PID algoritmu, kdy docházelo ke změnám přibližně o 1 Hz vlivem teplotní fluktuace zapínáním a vypínáním topení. Takto bylo proměřeno při daném výkonu topení 50 opakovaní. Příklad části měřeného signálu uvádíme na obrázku 3.12.

Zaznamenané hodnoty poté byly zpracovány v jazyce Python, kdy byl naměřený signál separován na jednotlivé úseky zahrnující vždy jeden rozpad turbulence, přičemž byl zahrnut časový posun tak, aby jednotlivé úseky začínaly ve stejný čas a měly stejné časové prodlevy mezi jednotlivými body. Pro každý z těchto úseků poté byla dle vztahu (1.28) vypočtena hodnota hustoty vírových

čar L . Následně pro každý čas t byly dopočtené hodnoty L zprůměrovány právě přes 50 opakování.

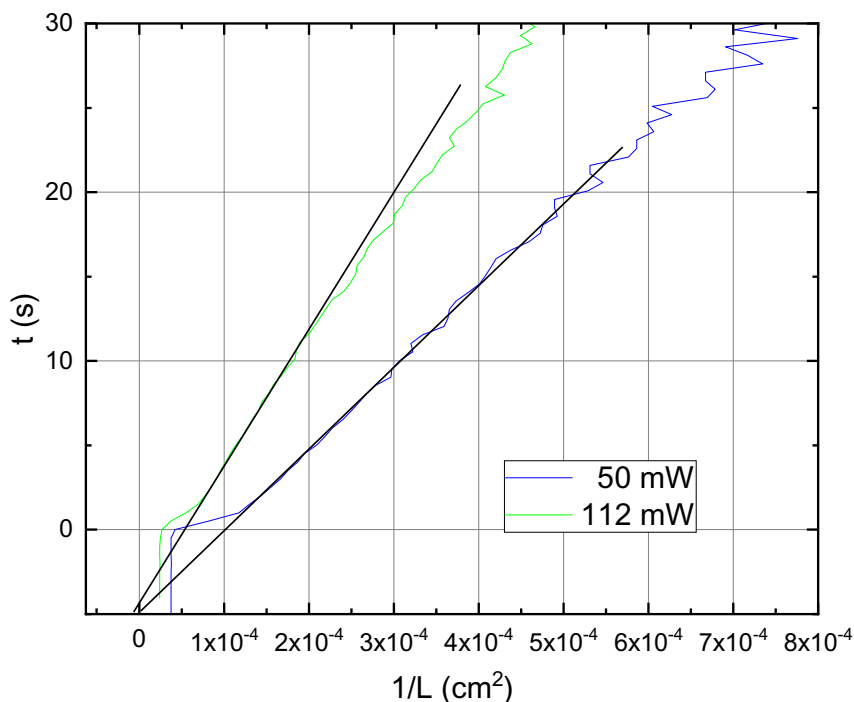


Obrázek 3.12: Část signálu při měření rozpadu kvantové turbulence při teplotě 1,45 K a výkonu topení 50 mW.

3.4.2 Časový vývoj hustoty vírových čar během rozpadu turbulence

Dle teorie pro rozpad turbulence existují dva možné rozpadové módy, jak jsme detailněji popsali v části 1.2.3. První z rozpadových módu je analogický s rozpadem turbulence v klasické kapalině a hustota vírových čar L je v tomto případě úměrná času jako $t^{-3/2}$ viz vztah (1.26). Druhý z rozpadových módu vyplývá z Vinenovy rovnice a dle vztahu (1.27) je L úměrná času jako t^{-1} .

Z rozpadu při středních hodnotách času a L (kde se neprojeví posun o L_0 a t_0) jednoznačně vyplývá, že pozorujeme závislost $L \propto t^{-1}$ viz obrázky 3.14, 3.15. V rámci dalšího zpracování bylo nutné správně odhadnout virtuální čas t_0 a hodnotu remanentních vírů L_0 . Virtuální čas jsme odhadli pomocí grafu t proti $1/L$, kdy jsme hodnoty proložili lineárním fitem a určili hodnotu průsečíku s y-ovou osou, jak uvádíme na grafu na obrázku 3.13. Hustotu remanentních vírů jsme byly nuceni odhadnout z logaritmického grafu $\log(L)$ vs. $\log(t - t_0)$, jelikož pomocí lineárního grafu L vs. $1/(t - t_0)$ jsme dostávali zápornou hodnotu L_0 z důvodu příliš malé citlivosti na změny v L . Hodnota hustot remanentních vírů L_0 se pohybovala v desítkách až stovkách cm^{-2} , což je srovnatelné s měření v pravoúhlém kanále [22].

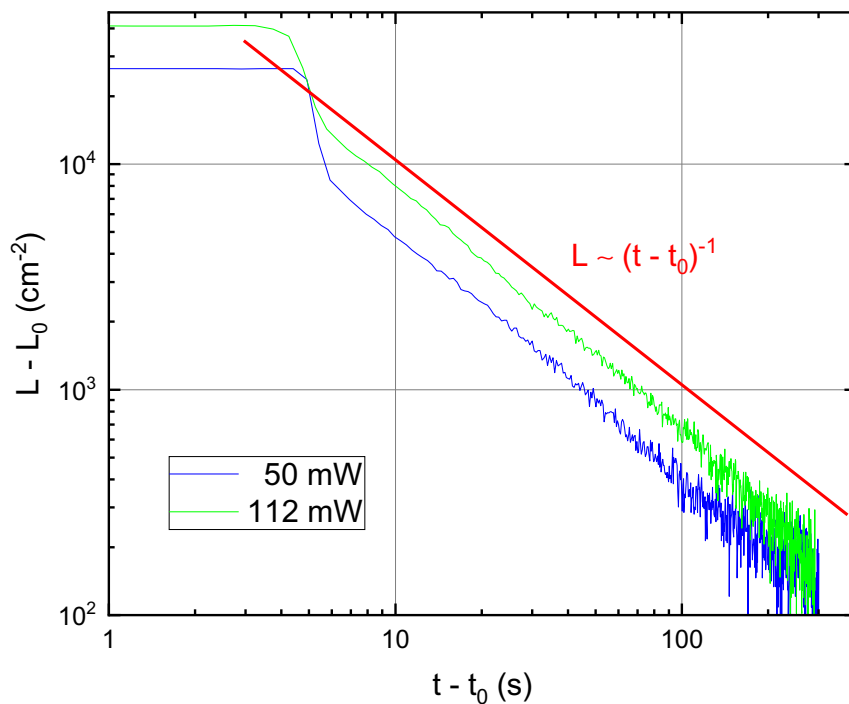


Obrázek 3.13: Graf znázorňující způsob odhadu virtuálního času t_0 při teplotě 1,45 K. Černé přímky znázorňují lineární fit části dat, jež jsme použili k odhadu.

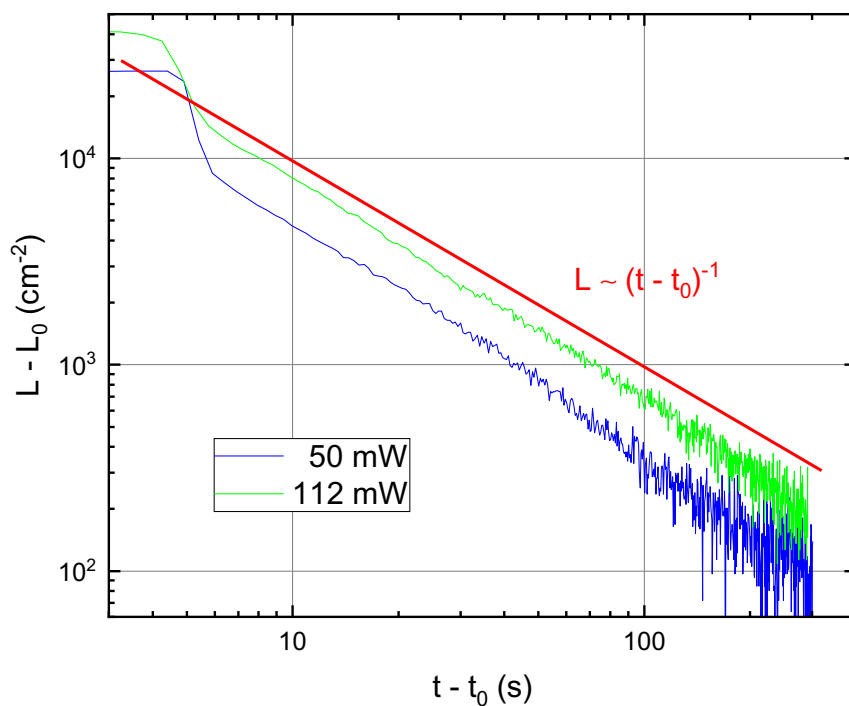
Kompenzovaná data uvádíme v grafech na obrázcích 3.14, 3.15, kdy téměř v celém rozsahu splňují očekávanou závislost.

Výjimku tvoří bezprostřední začátek rozpadu, kdy nastává největší pokles kvantovaných vírů pravděpodobně vlivem vyrovnávání teplotního profilu v cele 3.3.6, a závěr rozpadu, který je vlivem velkého počtu měřených hodnot a jejich přílišnému rozptylu značně zašuměný. Měřený mód rozpadu je v souladu s módem, jenž vyplývá z Vinenovy rovnice (1.23), který předpokládá anihilaci opačně orientovaných vírů v hustém chaotickém vírovém klubku. To však není překvapivé, neboť v případě sféricky symetrického tepelného protiproudu mají vírové kroužky tendenci se shlukovat v okolí odporového topení a tvoří velmi chaotické úhlově symetrické struktury, jak jsme již popisovali v části 3.3.4.

Výsledky můžeme srovnat s měřeními v pravoúhlém kanále [11], kdy byl pozorován mód rozpadu $L \propto t^{-1}$ hlavně v počáteční fázi a při nízké hodnotě rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} , jinak se turbulence rozpadala dle Richardsonovy kaskády a hustota kvantovaných vírů splňovala $L \propto t^{-3/2}$. Námi naměřená data sledují závislost $L \propto t^{-1}$ téměř během celého rozpadu. Dále můžeme provést srovnání s numerickou simulací [24], kdy je rozpadový mód daný Vinenovou rovnicí pozorovaný v prvních několika málo vteřinách po vypnutí odporového topení. Pro vyšší časy potom nelze pozorovat žádnou jasnou závislost, jelikož v těchto simulacích nebyl pozorován skutečně ustálený stav kvantové turbulence.



Obrázek 3.14: Hustota vírových čar L během rozpadu kvantové turbulence v závislosti na čase t při teplotě 1,45 K.



Obrázek 3.15: Hustota vírových čar L během rozpadu kvantové turbulence v závislosti na čase t při teplotě 1,65 K.

4. Závěr

Hlavním záměrem této práce je výzkum kvantové turbulence vznikající v důsledku sféricky symetrického tepelného protiproudu. Tepelný protiproud byl generován odporovým topením umístěným do středu sférické cely, která byla v rámci práce zkonstruována. Na celu byla umístěna čidla druhého zvuku. Rezonance druhého zvuku jsou ve sférické geometrii dány sférickými Besselovými funkcemi. Z širšího frekvenčního sweepu byla vybrána pro měření dvě nejvhodnější rezonanční maxima.

Jako první byl měřen ustálený stav kvantové turbulence v závislosti na výkonu topení při několika různých teplotách lázně. Výsledky byly porovnávány s numerickou simulací, kterou provedl Varga [17], a s výsledky měření v pravoúhlém kanále [22]. V rozporu se simulací jsme pozorovali, že kvantová turbulence se propaguje pro všechny teploty heliové lázně, což může být způsobeno vlivem turbulence v normální složce He II. Dále jsme nepozorovali žádnou dolní, či horní kritickou rychlost, které by dle simulace měly vymezovat oblast rychlostí, během nichž může docházet k turbulenci.

Dále byla sledována především závislost hustoty vírových čar L na výkonu topení \dot{Q} a rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} . Námi měřená závislost byla přibližně $L \propto v_{ns}^{3/2}$, což není v souladu s teorií. Jedno z možných vysvětlení souvisí s přítomností teplotního gradientu v cele. V okolí odporového topení pravděpodobně dochází ke zvýšení teploty, což vede ke snížení rychlosti tepelného protiproudu v_{ns} a tedy k poklesu hodnoty L . Při té příležitosti jsme také ukázali, že prostorové rozložení sférických Besselových funkcí by na kvadratickou závislost vliv mít nemělo. Námi měřený průběh L vůči v_{ns} se také neshoduje s měřením v pravoúhlém kanále [22], kdy je v tepelném protiproudu pozorována primárně kvadratická závislost $L \propto v_{ns}^2$.

Také jsme pozorovali vyšší hodnoty hustoty vírových čar při měření s vyšší rezonanční frekvencí, což jsme vysvětlili různou citlivostí sférických Besselových funkcí v různých místech cely, a v tomto ohledu jsme ve shodě s měřeními v pravoúhlém kanále. Zajímavým jevem je výskyt anomálie v nárůstu hustoty vírových čar, jak je vyznačeno na obrázku 3.9. Tuto anomálii si můžeme vysvětlit jako důsledek rozložení vírových čar v cele a citlivosti sférických Besselových funkcí na ně. V cele pravděpodobně vzniká kulová slupka, v níž je koncentrace vírů největší, což je i v souladu s numerickou simulací, jež byla provedena Inuim [24]. Vznik takovéto slupky je dán dynamikou vírových kroužků.

V druhé fázi měření byl zkoumán rozpad turbulence, kdy byl sledován průběh L na čase t po vypnutí odporového topení. Po odečtení virtuálního času t_0 a hodnoty hustoty remanentních víru L_0 , která se pohybuje v desítkách až stovkách cm^{-2} , jsme pro všechny měřená data pozorovali především závislost $L \propto t^{-1}$. Tento rozpadový mód je v souladu s Vinenovou rovnicí (1.23) a poukazuje tedy na vznik hustého chaotického klubka kvantovaných vírů v okolí odporového topení, kdy dochází k anihilaci opačně orientovaných vírů. To můžeme opět srovnat s měřeními v pravoúhlém kanále [22], kdy byl avšak primárně pozorován rozpadový mód $L \propto t^{-3/2}$ (1.26) vyplývající z klasické teorie turbulence a Kolmogorovova energetického spektra (1.11). Námi měřená závislost se též z části shoduje s Inuiho numerickou simulací [24].

Kvantová turbulence generovaná sféricky symetrickým tepelným protiproudem tedy ve většině směrů přináší nové a zajímavé výsledky, které jsou z části podloženy numerickými simulacemi. V budoucnu budou provedena další měření a numerické simulace mající za cíl problematiku sféricky symetrické turbulence více objasnit.

Seznam použité literatury

- [1] L. Skrbek a kolektiv. *Fyzika Nízkých Teplot*. I. část. Matfyzpress, Praha, 2010. ISBN 978-80-7378-168-2.
- [2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Second edition. Pergamon Press, 1987. ISBN 0-08-033933-6.
- [3] Stephen B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] N. Sinha. *Towards RANS Parameterization of Vertical Mixing by Langmuir Turbulence in Shallow Coastal Shelves*. PhD thesis, 2013.
- [5] L. Tisza. Transport phenomena in helium II. *Nature*, 141, 1938.
- [6] Russel J. Donnelly and Carlo F. Barenghi. The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 27, 1998.
- [7] R. P. Feynman. Application of quantum mechanics to liquid helium. *Progress in Low Temperature Physics*, 1:17–53, 1955.
- [8] W. F. Vinen. The detection of single quanta of circulation in liquid helium II. *Proceeding of the Royal Society A*, 260, 1961.
- [9] W. F. Vinen. Mutual friction in a heat current in liquid helium II III. theory of the mutual friction. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 243, 1957.
- [10] E. Varga, S. Babuin and L. Skrbek. Second-sound studies of coflow and counterflow of superfluid 4He in channels. *Physics of Fluids*, 27(6):065101, 2015.
- [11] J. Gao, W. Guo, V.S. L’vov, Pomyalov A., L. Skrbek, E. Varga, and W.F. Vinen. Decay of counterflow turbulence in superfluid He_4 . *JEET Letters*, 103:648–652, 2016.
- [12] S. Babuin, M. Stammeier, E. Varga, M. Rotter, and L. Skrbek. Quantum turbulence of bellows-driven 4He superflow: Steady state. *Phys. Rev. B*, 86, 2012.
- [13] Russel J. Donnelly. Cryogenic fluid dynamics. *J. Phys.: Condens. Matter*, 11 (40):7783–7834, 1999.
- [14] I. L. Bekarevich and I. M. Khalatnikov. Phenomenological derivation of the equations of vortex motion in He II . *J. Exptl. Theoret. Phys (U.S.S.R.)*, 13 (3), 1961.
- [15] E. Skudrzyk. *The Foundations of Acoustics*. Springer-Verlag, Wien, 1971.
- [16] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Tenth printing. U.S. Department of Commerce, 1972.

- [17] E. Varga. Peculiarities of spherically symmetric counterflow. *Journal of Low Temperature Physics*, 196, 2019.
- [18] E. Varga. Štúdium sféricky symetrickej turbulencie v supratekutom ^4He . https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/PDF/Projekty-Kmj/scf_project.pdf.
- [19] S. Babuin, E. Varga, L. Skrbek, E. Leveque, and P. Roche. Effective viscosity in quantum turbulence: A steady-state approach. *EPL*, 106, 2014.
- [20] F. Pobell. *Matter and Methods at Low Temperatures*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 10 3-540-46356-9.
- [21] C. E. Chase, E. Maxwell, and W. E. Millet. The dielectric constant of liquid helium. *Physica*, 27:1129–1145, 1961.
- [22] E. Varga, S. Babuin, and L. Skrbek. Second-sound studies of coflow and counterflow of superfluid ^4He in channels. *Phys. Fluids*, 27, 2015.
- [23] E. Varga. *Experimental and numerical investigation of quantum turbulence in He II*. PhD thesis, 2018.
- [24] S. Inui and M. Tsubota. Spherically symmetric formation of localized vortex tangle around a heat source in superfluid ^4He . *arXiv*, 2020.
- [25] Y. A. Sergeev and C. F. Barenghi. Turbulent radial thermal counterflow in the framework of the HVBK model. *EPL (Europhysics Letters)*, 128(2): 26001, 2019.
- [26] E. Rickinson, C. F. Barenghi, Y. A. Sergeev, and A. W. Baggaley. Superfluid turbulence driven by cylindrically symmetric thermal counterflow. *Phys. Rev. B*, 101:134519, 2020.