MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Zdeněk

Posloupnosti úspěchů a náhodnost

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 04.06.2020

Pavel Zdeněk

Děkuji RNDr. Petrovi Čoupkovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost a pomoc s vytvořením této bakalářské práce.

Název práce: Posloupnosti úspěchů a náhodnost

Autor: Pavel Zdeněk

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci je uvedena metoda výpočtu rozdělení pěti náhodných veličin spojených s nepřetržitými posloupnostmi úspěchů, které lze pozorovat v posloupnosti nezávislých bernoulliovských pokusů. K tomu je využita technika vnoření náhodné posloupnosti do Markovova řetězce, která je oproti literatuře vylepšena. Pro každou náhodnou veličinu byl zkonstruován Markovův řetězec, byla ověřena definice vnoření a byl uveden postup, jak její rozdělení spočítat. U každé náhodné veličiny je uveden vyřešený příklad.

Klíčová slova: posloupnosti úspěchů, Markovův řetězec, vnoření

Title: Runs and Randomness

Author: Pavel Zdeněk

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis probability distribution of five random variables related to success runs in a sequence of Bernoulli trials was found. The techinque of imbedding random sequences into Markov chains is used and improved compared to existing results. For every run a Markov chain was constructed, the definiton of imbedding was verified, a method for computation of its distribution was stated and examples of distribution were computed.

Keywords: runs, Markov chain, imbedding

Obsah

Úvod

Práce se zabývá rozdělením různých náhodných veličin, které lze pozorovat v náhodné posloupnosti nezávislých veličin s alternativním rozdělením. K výpočtu jejich rozdělení využijeme princip vnoření náhodné posloupnosti do Markovova řetězce, který jsme oproti jiným autorům vylepšili. Nejdříve veličiny definujeme.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že pro každé $t \in \{1, \ldots, n\}$, X_t má alternativní rozdělení s $\mathrm{P}(X_t = 1) = w_t$ a $\mathrm{P}(X_t = 0) = 1 - w_t = z_t$, kde $w_t \in (0,1)$. Náhodnou veličinu X_k budeme nazývat *$k-$tým pokusem*. Hodnotu 1 nazýváme *úspěch* a hodnotu 0 nazýváme *neúspěch*. Dále definujeme náhodné veličiny $X_0 = 0$ a $X_{n+1} = 0$.

Nechť $n_0, k \in \mathbb{N}$ jsou taková, že platí $1 \leq k + n_0 - 1 \leq n$. Jev

$$[X_{n_0} = 1, X_{n_0+1} = 1, \ldots, X_{n_0+k-1} = 1]$$

nazveme *sekvencí úspěchů délky k* a jev

$$[X_{n_0-1} = 0, X_{n_0} = 1, X_{n_0+1} = 1, \ldots, X_{n_0+k-1} = 1, X_{n_0+k} = 0]$$

nazveme *řetězcem úspěchů délky k*. Takže zatímco sekvencí rozumíme jakoukoliv posloupnost úspěchů, řetězec je pouze ta nejdelší sekvence z řady úspěchů. Pokud mluvíme o *současné sekvenci úspěchů* (*současném řetězci úspěchů*), rozumíme tím sekvenci úspěchů (řetězec úspěchů), jehož je poslední pokus součástí. Tedy pokud se bavíme o $n-$tém pokusu a řekneme, že současný řetězec úspěchů má délku k, pak $n-$tý pokus je úspěch a před ním nastalo právě $k-1$ úspěchů. Pokud je délka současného řetězce 0, pak $n-$tý pokus je neúspěch.

Definujeme následující náhodné veličiny:

a) $N_{n,k}$ značí počet nepřekrývajících se sekvencí úspěchů délky k v n pokusech.
b) $M_{n,k}$ značí počet překrývajících se sekvencí úspěchů délky k v n pokusech.
c) $E_{n,k}$ značí počet řetězců úspěchů délky k v n pokusech.
d) $G_{n,k}$ značí počet řetězců úspěchů délky větší nebo rovno k v n pokusech.
e) L_n značí délku nejdelšího řetězce úspěchů v n pokusech.

Příklad. Nechť $n = 8$ a $k = 2$ a nechť máme pozorování 11101100. Potom $N_{8,2} = 2$, $M_{8,2} = 3$, $E_{8,2} = 1$, $G_{8,2} = 2$, $L_8 = 3$.

Tyto veličiny jsou charakteristiky celé náhodné posloupnosti bernoulliovských pokusů a můžeme je využít k různým testováním, například k testování zda jsou $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé a stejně rozdělené. Výhodou je, že nemusíme vědět, jak celá pozorovaná posloupnost vypadá, ale stačí nám k tomu znát hodnoty náhodných veličin definovaných výše.

Rozdělení různých sekvencí a řetězců v posloupnosti náhodných veličin se dá využít například ve výzkumu sekvencování DNA, v psychologii nebo například v ekologii (viz práce Schwager (1983)). Dříve se rozdělení počítaly kombinatoricky a výpočet byl velmi složitý. Vzorec pro $N_{n,k}$, respektive pro $M_{n,k}$, za předpokladu, že veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené, lze najít například v práci Godbole (1990), respektive v práci Hirano a kol. (1991). Tato práce je inspirována článkem Fu a Koutras (1994), ve kterém autoři zavedli postup vnoření pro všechny naše pozorované veličiny. My na tento postup navazujeme a přinášíme efektivnější přístup. V článku Lou (1996) je uveden postup, jak využít tuto teorii ke konstrukci kritických oborů testu nezávislosti posloupnosti alternativních veličin. V knize Balakrishnan a Koutras (2002) uvádějí, že pokud navíc uvažujeme náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_n$ stejně rozdělené s $\mathrm{P}(X_1 = 1) = w$ a $\mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - w = z$, potom podle Erdös a Rényi (1970) je hodnota veličiny L_n pro velká n velmi blízko hodnotě $\frac{\ln(nz)}{\ln(1/w)}$.

V první kapitole jsou uvedeny základní poznatky o Markovových řetězcích, poté nová definice vnoření a jak se pravděpodobnost takových vnořených posloupností počítá. Následuje kapitola, ve které nejdříve každou veličinu vnoříme do Markovova řetězce, ověříme definici vnoření a uvedeme způsob výpočtu spolu s příkladem pro malé n a k, pro která si čtenář může výsledky zkontrolovat přímým výpočtem.

1. Markovovy řetězce a vnoření

Definice 1 (Markovův řetězec)**.** *Náhodný proces* $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ *s nejvýše spočetnou množinou stavů* S *nazveme* Markovovým řetězcem s diskrétním časem*, jestliže pro každé* $n \in \mathbb{N}$; $i, j, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \in S$ *takové, že*

$$\mathrm{P}(Y_n = i, Y_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, Y_0 = s_0) > 0,$$

platí:

$$\mathrm{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i, Y_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, Y_0 = s_0) = \mathrm{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i).$$

Tuto podmínku nazýváme Markovovou vlastností*.*

Markovův řetězec je tedy náhodný proces, jehož rozdělení v čase $n_0 \in \mathbb{N}$ závisí pouze na tom, v jakém stavu se nacházel v čase $n_0 - 1$, a nezávisí na tom, v jakých stavech se nacházel předtím.

Nechť $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S. Pro každé $t \in \mathbb{N}$ a $j \in S$ označme $p_t(i,j) := \mathrm{P}(Y_t = j | Y_{t-1} = i)$ pokud $\mathrm{P}(Y_{t-1} = i) > 0$, jinak $p_t(i,j) = 0$. Matici $\boldsymbol{P}(t) := \Big(p_t(i,j)\Big)_{i,j \in S}$ nazýváme *maticí pravděpodobností přechodu v čase* t.

Matice $\boldsymbol{P}(t)$ tedy obsahuje podmíněné pravděpodobnosti takové, že se řetězec bude nacházet v daném stavu v čase t, pokud víme, v jakém stavu se řetězec nachází v čase $t-1$. Pro výpočet pravděpodobností v čase n využijeme Chapman-Kolmogorovu rovnost.

Věta 1 (Chapman-Kolmogorova rovnost)**.** *Nechť* $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ *je Markovův řetězec s množinou stavů* S*, maticemi pravděpodobností přechodu* $\boldsymbol{P}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{N}$ *a* $\pi_0 = \Big(\mathrm{P}(Y_0 = s_i)\Big)_{s_i \in S}$ *je jeho počáteční rozdělení. Pak pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $s_i \in S$ *platí:*

$$\mathrm{P}(Y_n = s_i) = \pi_0^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}(t) \right) e_i,$$

kde e_i *je sloupcový vektor, který má počet složek roven počtu stavů v* S *a na* i*-té pozici má* 1 *a všude jinde* 0*.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 0$ je rovnost zřejmá. Pro $n = 1$ si uvědomíme, že podle věty o úplné pravděpodobnosti platí:

$$\mathrm{P}(Y_1 = s_i) = \sum_{j : s_j \in S} \mathrm{P}(Y_1 = s_i | Y_0 = s_j) \mathrm{P}(Y_0 = s_j) = \pi_0^\top \boldsymbol{P}(1) e_i.$$

Nyní předpokládáme, že pro $n - 1$ platí:

$$\mathrm{P}(Y_{n-1} = s_i) = \pi_0^\top \left(\prod_{t=1}^{n-1} \boldsymbol{P}(t) \right) e_i.$$

Zkusíme pomocí indukčního předpokladu ověřit platnost věty pro n:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_n = s_i) &= \sum_{j:s_j\in S} \mathrm{P}(Y_n = s_i | Y_{n-1} = s_j)\mathrm{P}(Y_{n-1} = s_j) \\
&= \sum_{j:s_j\in S} \pi_0^\top \left(\prod_{t=1}^{n-1} \boldsymbol{P}(t)\right) e_j e_j^\top \boldsymbol{P}(n) e_i \\
&= \pi_0^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}(t)\right) e_i,
\end{aligned}$$

protože $\sum_{j:s_j\in S} e_j e_j^\top = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ značí jednotkovou matici.

□

Toto nám z teorie Markovových řetězců k výpočtu rozdělení stačí. Nyní uvedeme definici vnoření.

Definice 2 (Vnoření)**.** *Nechť $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ a nechť máme posloupnost náhodných veličin $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takových, že $X_n \in \{0,1,\ldots,l_n\}$ P-skoro jistě. Nechť $Y = \{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec s množinou stavů S a označme*

$$S_{Y_n} := \{s \in S : \exists k \in \{0,1,\ldots,n\} : \mathrm{P}(Y_k = s) > 0\}.$$

Řekneme, že posloupnost X lze vnořit do Markovova řetězce Y, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují množiny $\{C_x^n\}_{x=0}^{l_n}$ takové, že $\bigcup_{x=0}^{l_n} C_x^n = S_{Y_n}$ a takové, že platí

$$\mathrm{P}(X_n = x) = \mathrm{P}(Y_n \in C_x^n)$$

pro každé $x \in \{0,1,\ldots,l_n\}$.

Nechť lze náhodnou posloupnost $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vnořit do Markovova řetězce $Y = \{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ a nechť pro pevné $n \in \mathbb{N}$ máme S_{Y_n} z definice 2. Pro každé $x \in \{0,1,\ldots,l_n\}$ označme

$$U(C_x^n) := \sum_{i:s_i\in C_x^n} e_i.$$

Tento vektor má tedy jedničky na pozicích, které odpovídají indexu stavů takových, že náleží C_x^n.

Věta 2. *Nechť lze náhodnou posloupnost $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ vnořit do Markovova řetězce $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{N}\}$ se stavovým prostorem S, maticemi pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a počátečním rozdělením π_0. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\boldsymbol{P}_n(t) := \Big(p_t(i,j)\Big)_{i,j\in S_{Y_n}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \{0,1,\ldots,l_n\}$ platí:*

$$\mathrm{P}(X_n = x) = (\pi_0^n)^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}_n(t)\right) U(C_x^n), \tag{1.1}$$

kde $\pi_0^n := \Big(\mathrm{P}(Y_0 = i)\Big)_{i\in S_{Y_n}}$.

Důkaz. Buď $n \in \mathbb{N}$. Z věty 1 víme, že pro každý stav $s_i \in S$ platí:

$$\mathrm{P}(Y_n = s_i) = \pi_0^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}(t)\right) e_i.$$

Protože pro všechny $s \in S \setminus S_{Y_n}$ máme $\mathrm{P}(Y_k = s) = 0$ pro každé $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$, tím pádem $\mathrm{P}(Y_n = s_i | Y_k = s) = 0$ a můžeme tedy matici $\boldsymbol{P}(t)$ redukovat na $\boldsymbol{P}_n(t)$ a π_0 redukovat na π_0^n. Protože X lze vnořit do Y, musí pro každé $x \in \{0,1,\dots,l_n\}$ platit:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n = x) = \mathrm{P}(Y_n \in C_x^n) = \sum_{i : s_i \in C_x^n} \mathrm{P}(Y_n = s_i) = \\
= \sum_{i : s_i \in C_x^n} (\pi_0^n)^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}_n(t) \right) e_i = (\pi_0^n)^\top \left(\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{P}_n(t) \right) U(C_x^n).
\end{aligned}
$$

□

Tato věta nám dává vzorec, jak spočítat rozdělení náhodné veličiny X_n, pokud lze celou posloupnost X vnořit do řetězce Y. Naším úkolem teď bude pro každou náhodnou veličinu sestrojit Markovův řetězec Y s příslušnou množinou stavů S, určit množiny S_{Y_n}, k tomu matice $\boldsymbol{P}_n(t)$, a poté lze použít vzorec ve větě 2.

2. Rozdělení náhodných veličin

Zajímá nás rozdělení náhodné veličiny $X_{n,k}$, kde $X \in \{N,M,E,G,L\}$ a n, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Zafixujeme tedy $k \in \mathbb{N}$ a uvažujeme posloupnost náhodných veličin$\{X_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$. O této posloupnosti ukážeme, že ji lze vnořit do jistého Markovova řetězce $Y^{(k)}$, který bude explicitně uveden, a následně pro výpočet rozdělení $X_{n,k}$ použijeme větu 2. Všechny stavové prostory budou tvořeny dvojicemi (x,i), jejichž význam se bude u různých veličin mírně lišit. Ve všech případech uvažujeme počáteční rozdělení $\mathrm{P}(Y_0^{(k)} = (0,0)) = 1$, které odpovídá tomu, že ještě nenastal žádný úspěch. Pro stavy (x,i), které jsou dosažitelné z počátku jen po právě n krocích, zavedeme $p_t((x,i),(x,i)) = 1$. Takové stavy nazýváme *absorpční* a vždy je v textu uvedeme a sdružíme do množiny A_n.

Oproti článku Fu a Koutras (1994) uvažujeme menší množiny stavů. Autoři článku v definici vnoření nevyžadují, aby v množině $S_{Y_n^{(k)}}$ byly jenom stavy, které jsou dosažitelné, a tím pádem mají jejich matice pravděpodobností přechodu větší rozměry a určení hledaných pravděpodobností je výpočetně náročnější. Náš přístup je tedy efektivnější.

V celé práci značí x přirozené číslo a i celé číslo.

2.1 Rozdělení náhodné veličiny $N_{n,k}$

Jako první se podíváme na náhodnou veličinu $N_{n,k}$, která udává počet nepřekrývajících se sekvencí délky k v n pokusech.

2.1.1 Globální řetězec

Nejdříve pro náhodnou posloupnost $\{N_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ vytvoříme vhodný Markovův řetězec $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)} : t \in \mathbb{N}_0\}$. Stavový prostor tohoto řetězce vypadá následovně:

$$S^{(k)} = \{(x,i) : x \in \mathbb{N}_0; 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Stav $(x,i) \in S^{(k)}$ značí, že nastalo právě x nepřekrývajících se sekvencí délky k a $i = m \bmod k$, kde m značí délku současného řetězce úspěchů. Tedy pokud $i = 0$, pak poslední pokus byl buď neúspěch nebo $ak-$tý úspěch v řadě pro nějaké $a \in \mathbb{N}$.

Pravděpodobnosti přechodu budou následující:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S^{(k)}$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq i \leq k-2$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,0)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

4) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

Situace 1) je pravděpodobnost, že pokus t bude neúspěch. V případě 2) nastane úspěch, který ale není ještě $ak-$tý v řadě pro nějaké $a \in \mathbb{N}$. 3) je případ, kde nastane úspěch, který je právě $ak-$tý v řadě pro nějaké $a \in \mathbb{N}$ a v tomto případě zvyšuje počet hledaných sekvencí o 1 a začínáme počítat novou sekvenci. Matice $\boldsymbol{P}(t)$ bude mít tvar:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{c} \\ \scriptstyle(0,0) \\ \scriptstyle(0,1) \\ \scriptstyle(0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle(0,k-2) \\ \scriptstyle(0,k-1) \\ \scriptstyle(1,0) \\ \scriptstyle(1,1) \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \scriptstyle(0,0) & \scriptstyle(0,1) & \scriptstyle(0,2) & \scriptstyle\dots & \scriptstyle(0,k-2) & \scriptstyle(0,k-1) & \scriptstyle(1,0) & \scriptstyle(1,1) & \scriptstyle\dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_t & 0 & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & 0 & \dots \\ z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_t & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & w_t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.1.2 Ověření definice

Nyní ověříme, že posloupnost $\{N_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ lze opravdu vnořit do Markovova řetězce $Y^{(k)}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ pevné. Nejdříve musíme určit množinu $S_{Y_n^{(k)}}$ z definice 2. Nejvyšší počet nepřekrývajících se sekvencí délky k v n pokusech je $l_n = n \operatorname{div} k$. Tedy stav $(l_n,0) \in S_{Y_n^{(k)}}$. Nejkratší trajektorie, jak se dostat do $(l_n,0)$ je zřejmě $T = \big((0,0),(0,1),\dots,(0,k-1),(1,0),(1,1),\dots(l_n,0)\big)$. Tedy všechny stavy v této trajektorii jsou dosažitelné z počátku. Nyní se podíváme na to, pro která $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$ je stav (l_n,i) dosažitelný. Minimální počet pokusů, abychom se ze stavu $(0,0)$ dostali do stavu (x,i), je $kx+i$. Protože máme n pokusů, musí platit:

$$i \leq n - l_n k = n \bmod k.$$

Pro jiné stavy bychom už potřebovali více než n pokusů. Celkem tedy dostáváme množinu:

$$S_{Y_n^{(k)}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n - 1; 0 \leq i \leq k-1\} \cup \{(l_n,i) : 0 \leq i \leq n \bmod k\}.$$

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ zkonstruujeme množiny C_x^n:

$$C_x^n = \{(x,i) := 0 \leq i \leq k-1\} \text{ pro každé } x = 0,1,\dots,l_n - 1,$$

$$C_{l_n}^n = \{(l_n,i) : 0 \leq i \leq n \bmod k\}.$$

Tyto množiny zřejmě splňují $\bigcup_{x=0}^{l_n} C_x^n = S_{Y_n^{(k)}}$. Navíc pro každé $x \in \{0,1,\dots,l_n\}$ je rovnost

$$\mathrm{P}(N_{n,k} = x) = \mathrm{P}(Y_n^{(k)} \in C_x^n)$$

zřejmá z konstrukce pravděpodobností přechodu a protože stavy v C_x^n zahrnují všechny možnosti, kdy by mohlo nastat x nepřekrývajících se sekvencí délky k.

Tedy pro výpočet rozdělení náhodné veličiny $N_{n,k}$ můžeme využít Markovův řetězec $Y^{(k)}$ a vzorec (1.1).

2.1.3 Výpočet rozdělení

Nejdříve nalezneme všechny absorpční stavy. Už víme, že minimální počet pokusů potřebný na dosažení stavu (x,i) je $xk + i$. Tedy absorpční stavy jsou všechny stavy (x,i) takové, že $n = xk + i$. Takový stav je pouze jeden a to $A_n = \{(l_n,n \bmod k)\}$. Nyní ukážeme, jak vypadá matice $\boldsymbol{P}_n(t)$. Pravděpodobnosti přechodu jsou následující:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S_{Y_n^{(k)}} \setminus A_n$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $0 \le x \le l_n - 1$ a $0 \le i \le k-2$ a pro $x = l_n$ a $0 \le i \le (n \bmod k) - 1$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,0)) = w_t$ pro $0 \le x \le l_n - 1$,

4) $p_t((x,i),(x,i)) = 1$ pro $(x,i) \in A_n$,

5) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

Tvar matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ uvádíme v příloze (A.1).

Uvedeme tvrzení o velikosti $S_{Y_n^{(k)}}$, abychom zjistili rozměry matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ a měli představu o složitosti výpočtu.

Tvrzení 3. *Pro velikost množiny $S_{Y_n^{(k)}}$ platí:*

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = n + 1.$$

Důkaz. Velikost $S_{Y_n^{(k)}}$ získáme přímo výpočtem:

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = \sum_{x=0}^{l_n} |C_x^n| = \sum_{x=0}^{l_n-1} |C_x^n| + |C_{l_n}^n| = \sum_{x=0}^{l_n-1} (k) + n - l_n k + 1 = l_n k + n - l_n k + 1 = n + 1$$

$\square$

Jako poslední potřebujeme počáteční rozdělení:

$$(\pi_0^n)^T = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}).$$

Nyní máme všechno připravené k použití vzorce (1.1).

Příklad. Pro náhodnou veličinu $N_{6,3}$, která udává počet nepřekrývajících sekvencí délky 3 v 6 pokusech, máme $l_6 = 6 \text{ div } 3 = 2$ a

$$S_{Y_6^{(3)}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\}.$$

Množinu S rozdělíme na:

$$C_0^6 = \{(0,0),(0,1),(0,2)\},$$

$$C_1^6 = \{(1,0),(1,1),(1,2)\},$$

$$C_2^6 = \{(2,0)\}.$$

Absorpční stav bude $A_6 = \{(2,0)\}$ a matice pravděpodobností přechodu bude mít následující tvar:

$$\boldsymbol{P}_6(t) = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (1,0) & (1,1) & (1,2) & (2,0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_t & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & 0 & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pro použití vzorce potřebujeme ještě vektor počátečního rozdělení π_0^6 a poté vektory $U(C_x^6)$:

$$U(C_0^6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_1^6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_2^6) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pi_0^6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro ukázku uvedeme výsledky pro $w_t = 1/2 = z_t$ pro každé $t = 1,2,\dots,6$:

$$\mathrm{P}(N_{6,3} = 0) = 0{,}6875,\ \mathrm{P}(N_{6,3} = 1) \doteq 0{,}29688,\ \mathrm{P}(N_{6,3} = 2) \doteq 0{,}01562.$$

Pro $w_t = 3/4$ a $z_t = 1/4$ pro každé $t = 1,2,\dots,6$ dostaneme:

$$\mathrm{P}(N_{6,3} = 0) \doteq 0{,}26172,\ \mathrm{P}(N_{6,3} = 1) \doteq 0{,}56030,\ \mathrm{P}(N_{6,3} = 2) \doteq 0{,}17798.$$

2.1.4 Porovnání

V článku Fu a Koutras (1994) je zavedena množinu stavů pro vnoření $N_{n,k}$ jako:

$$\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n; 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Rozdíl je tedy jenom v množině $C_{l_n}^n$. Zatímco ve výše zmíněném článku autoři uvažují $\widetilde{C_{l_n}^n} = \{(l_n,i) : 0 \leq i \leq k-1\}$, my si vystačíme s $C_{l_n}^n = \{(l_n,i) : 0 \leq i \leq n \bmod k\}$. Velikost jejich množiny je $|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| = (l_n + 1)k$. Rozdíl velikosti naší a jejich množiny stavů je $|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| - |S_{Y_n^{(k)}}| = k - (n \bmod k) - 1$. Tedy například pro $N_{1000,500}$ vychází $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(500)}}}| = 1500$ a $|S_{Y_{1000}^{(500)}}| = 1001$ a pro $N_{1000,900}$ dostaneme $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(900)}}}| = 1800$ a $|S_{Y_{1000}^{(900)}}| = 1001$.

2.2 Rozdělení náhodné veličiny $M_{n,k}$

Nyní se podíváme na náhodnou veličinu $M_{n,k}$, která udává počet překrývajících se sekvencí délky k.

2.2.1 Globální řetězec

Vytvoříme Markovův řetězec $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)} : t \in \mathbb{N}_0\}$, do kterého vnoříme posloupnost $\{M_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$. Jeho stavový prostor vypadá následovně:

$$S^{(k)} = \{(x,i) : x \in \mathbb{N}_0; -1 \leq i \leq k-1\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

Stavem $(x,i) \in S^{(k)}$ pro $i = 0,1,\ldots,k-1$ rozumíme, že zatím máme x překrývajících se sekvencí délky k a i je délka současného řetězce úspěchů. Pokud by délka současného řetězce byla větší nebo rovna k, pak nastane stav $(x,-1) \in S^{(k)}$. Tento stav značí, že již nastalo alespoň k úspěchů v řadě, a tudíž každý další úspěch navyšuje počet překrývajících se sekvencí o 1.

Nyní uvedeme pravděpodobnosti přechodu:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S^{(k)}$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq i \leq k-1$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

4) $p_t((x,-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}$,

5) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

1) ukazuje pravděpodobnost, že pokus t bude neúspěch. Ve 2) nastane úspěch, který ještě není $k-$tý v řadě. 3) je situace, kdy nastane právě $k-$tý úspěch v řadě, a tím pádem se navyšuje počet hledaných sekvencí o 1. V případě 4) je současný řetězci delší než k a další úspěch přidá další sekvenci. V příloze (A.2) uvádíme část matice $\boldsymbol{P}(t)$.

2.2.2 Ověření definice

Nyní musíme ověřit, že posloupnost $\{M_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ lze vnořit do Markovova řetězce $Y^{(k)}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ pevné. Začneme s určením množiny $S_{Y_n^{(k)}}$. Maximální počet překrývajících se sekvencí délky k v n pokusech je $l_n = n-k+1$. Jediná možná trajektorie jak se k l_n dostat, je pokud nastanou samé úspěchy, tedy trajektorie $T = \big((0,0),(0,1),\ldots,(0,k-1),(1,-1),(2,-1),\ldots,(l_n,-1)\big)$. Tedy tyto stavy musí být v množině $S_{Y_n^{(k)}}$. Dále si uvědomíme, že pro stav (x,i), kde $1 \leq x \leq l_n$ a $-1 \leq i \leq k-1$, je nejkratší trajektorie $T = \big((0,0),(0,1),\ldots,(0,k-1),(1,-1),(2,-1),\ldots,(x,-1),(x,0),(x,1),\ldots,(x,i)\big)$. Tedy je potřeba alespoň $k+x+i$ pokusů. Pokud zafixujeme x, zjistíme, pro jaké $0 \leq i \leq k-1$ stavy $(x,i) \in S_{Y_n^{(k)}}$ z nerovnice:

$$i \leq n-x-k.$$

Celkem tedy dostaneme

$$S_{Y_n^{(k)}} = \{(0,i) : 0 \leq i \leq k-1\} \cup \{(x,i) : 1 \leq x \leq l_n; -1 \leq i \leq \min(k-1,n-x-k)\}.$$

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ zkonstruujeme množiny C_x^n jako:

$$C_0^n = \{(0,i) := 0 \leq i \leq k-1\},$$

$$C_x^n = \{(x,i) : 0 \leq i \leq \min(k-1, n-x-k)\} \text{ pro každé } x = 1,2,\dots,l_n.$$

Zřejmě platí $\bigcup_{x=0}^{l_n} C_x^n = S_{Y_n^{(k)}}$. Rovnost

$$\mathrm{P}(M_{n,k} = x) = \mathrm{P}(Y_n^{(k)} \in C_x^n)$$

vyplývá pro každé $x \in \{0,1,\dots,l_n\}$ z konstrukce pravděpodobností přechodu řetězce a protože C_x^n obsahuje všechny možnosti, kdy by mohlo nastat x překrývajících se sekvencí délky k.

Ukázali jsme, že vnoření $\{M_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ do řetězce $Y^{(k)}$ je validní, a můžeme ho tedy využít k výpočtu rozdělení $M_{n,k}$ pomocí vzorce (1.1).

2.2.3 Výpočet rozdělení

Nejdříve určíme množinu A_n. Podíváme se na to, od jakého x_0 už stavy $(x,k-1) \notin S_{Y_n^{(k)}}$:

$$x_0 = n - 2k + 1.$$

Máme tedy $A_n = \{(x,i) : 1 \leq x \leq l_n \wedge n - 2k + 1 \leq x; i = n - x - k\}$. Pravděpodobnosti přechodu jsou následující:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S_{Y_n^{(k)}} \setminus A_n$,
2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x = 0$ a $0 \leq i \leq k-1$ a pro $1 \leq x \leq l_n - 1$ a $0 \leq i \leq \min(k-2, n-x-k-1)$,
3) $p_t((x,k-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq \max(0,n-2k)$,
4) $p_t((x,-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $1 \leq x \leq l_n - 1$,
5) $p_t((x,i),(x,i)) = 1$ pro $(x,i) \in A_n$,
6) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

Matici $\boldsymbol{P}_n(t)$ uvádíme v příloze (A.3).

V následujícím tvrzením dokážeme, jaká je velikost $S_{Y_n^{(k)}}$, což nám dá rozměry matice $\boldsymbol{P}_n(t)$.

Tvrzení 4. *Pro velikost množiny $S_{Y_n^{(k)}}$ platí:*

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = \begin{cases} n + kn + \frac{k-3k^2}{2} + 1, & \textit{pokud } n - 2k + 1 \geq 0, \\ \frac{n^2+3n+k^2-k}{2} - kn + 1, & \textit{pokud } n - 2k + 1 < 0. \end{cases}$$

Důkaz. Stavový prostor $S_{Y_n^{(k)}}$ rozdělíme na $R_1 = \{(x,i) : (x,k-1) \in S_{Y_n^{(k)}}\}$ a $R_2 = M_2 \setminus R_1$. Už víme, že pro všechna $x \in \{1,2,\dots,n-2k+1\}$ máme $C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq k-1\}$ a pro všechna $x \in \{n-2k+2, n-2k+3, \dots, l_n\}$ máme $C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq n-x-k\}$. Problém by mohl nastat, pokud $n - 2k + 1 < 0$, protože stavy s nulou máme započítané už v R_1. Rozdělíme si tedy důkaz na dva případy:

1) $n - 2k + 1 \geq 0$:
Zřejmě $|R_1| = k + (k+1)(n-2k+1)$. Nyní spočítáme $|R_2|$:

$$|R_2| = \sum_{x=n-2k+2}^{n-k+1} (n - x - k + 2) = \frac{k^2 + k}{2}$$

Celkem dostaneme:

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = |R_1| + |R_2| = n + kn + \frac{k - 3k^2}{2} + 1.$$

2) $n - 2k + 1 < 0$:
Protože $n - 2k + 1 < 0$, tak potom $R_1 = C_0^n$. Tedy $|R_1| = k$. Dále máme:

$$|R_2| = \sum_{x=1}^{l_n} (n - x - k + 2) = \frac{3l_n - l_n^2}{2} + l_n n - kl_n.$$

Celkem dostaneme:

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = |R_1| + |R_2| = \frac{n^2 + 3n + k^2 - k}{2} - kn + 1$$

$\square$

Jako poslední potřebujeme počáteční rozdělení:

$$\pi_0^{nT} = \begin{cases} (1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{n+kn+\frac{k^2+3k}{2}}), & \text{pokud } n - 2k + 1 \geq 0, \\ (1, \underbrace{0, \ldots\ldots\ldots, 0}_{\frac{n^2+3n+k^2-k}{2}-kn}), & \text{pokud } n - 2k + 1 < 0. \end{cases}$$

Nyní máme vše potřebné k použití vzorce (1.1).

Příklad. Ukážeme vnoření pro $M_{4,3}$. Zajímá nás tedy pravděpodobnostní rozdělení počtu překrývajících se sekvencí délky 3 ve 4 pokusech. Pro tento případ vychází $l_4 = 4 - 3 + 1 = 2$. Budeme tedy pracovat se stavovým prostorem

$$S_{Y_4^{(3)}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,-1),(1,0),(2,-1)\},$$

který rozdělíme na:

$$C_0^4 = \{(0,0),(0,1),(0,2)\},$$

$$C_1^4 = \{(1,-1),(1,0)\},$$

$$C_2^4 = \{(2,-1)\}.$$

Množina absorpčních stavů je $A_4 = \{(1,0),(2-1)\}$. Matice pravděpodobnostní přechodu bude vypadat následovně:

$$\boldsymbol{P}_4(t) = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle (0,0)} \\ {\scriptstyle (0,1)} \\ {\scriptstyle (0,2)} \\ {\scriptstyle (1,-1)} \\ {\scriptstyle (1,0)} \\ {\scriptstyle (2,-1)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} {\scriptstyle (0,0)} & {\scriptstyle (0,1)} & {\scriptstyle (0,2)} & {\scriptstyle (1,-1)} & {\scriptstyle (1,0)} & {\scriptstyle (2,-1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 \\ z_t & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pokud máme takto seřazené stavy, potom $U(C_x^4)$ a vektor počátečních pravděpodobností π_0^4 budou vypadat následovně:

$$U(C_0^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_1^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_2^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pi_0^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme si výsledky pro $w_t = 1/2 = z_t$ pro každé $t = 1,2,3,4$. Pak použitím vzorce dostaneme:

$$\mathrm{P}(M_{4,3} = 0) = 0{,}8125,\ \mathrm{P}(M_{4,3} = 1) = 0{,}125,\ \mathrm{P}(M_{4,3} = 2) = 0{,}0625.$$

Dále pro $w_t = 3/4$ a $z_t = 1/4$ pro každé $t = 1,2,3,4$ získáme výsledky:

$$\mathrm{P}(M_{4,3} = 0) \doteq 0{,}47266,\ \mathrm{P}(M_{4,3} = 1) \doteq 0{,}21094,\ \mathrm{P}(M_{4,3} = 2) \doteq 0{,}31640.$$

2.2.4 Porovnání

V článku Fu a Koutras (1994) autoři zavedli množinu stavů pro vnoření $M_{n,k}$ jako:

$$\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n - 1; -1 \leq i \leq k-1\} \cup \{(l_n, -1)\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

Vidíme, že oproti autorům článku se obejdeme bez velkého množství stavů, které jejich množina stavů obsahuje. Velikost stavového prostoru je $|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| = n + kn - k^2 + 1$. Rozdíl počtu stavů je následovný:

$$|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| - |S_{Y_n^{(k)}}| = \begin{cases} \frac{k^2-k}{2}, & \text{pokud } n - 2k + 1 \geq 0, \\ 2kn + \frac{k-n^2-n-3k^2}{2}, & \text{pokud } n - 2k + 1 < 0. \end{cases}$$

Tento rozdíl může být velký, například pro náhodnou veličinu $M_{1000,500}$ vychází $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(500)}}}| = 251001$ a $|S_{Y_{1000}^{(500)}}| = 126251$. Velké zlepšení nastane také u $M_{1000,900}$, kde dostaneme $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(900)}}}| = 91001$ a $|S_{Y_{1000}^{(900)}}| = 6051$.

2.3 Rozdělení náhodné veličiny $E_{n,k}$

Jako další se podíváme na náhodnou veličinu $E_{n,k}$, která udává počet řetězců délky k v n pokusech.

2.3.1 Globální řetězec

Náhodnou posloupnost $\{E_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ vnoříme do Markovova řetězce $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)} : t \in \mathbb{N}_0\}$, jehož množina stavů vypadá následovně:

$$S^{(k)} = \{(x,i) : x \in \mathbb{N}_0; -2 \leq i \leq k-1\} \setminus \{(0,-2)\}.$$

Stav $(x,i) \in S^{(k)}$ pro $i = 0,1,\ldots,k-1$ značí, že už nastalo x řetězců délky k a nyní máme i za sebou jdoucích úspěchů. Stav $(x,-1) \in S^{(k)}$ značí situaci, kdy na konci nastalo více než k úspěchů v řadě, a tedy tento řetězec bude mít délku větší než k a nebude se počítat. Čekáme tedy, až nastane neúspěch, abychom mohli počítat nový řetězec. Stav $(x,-2) \in S^{(k)}$ znamená, že současný řetězec má právě délku k, ale když nastane další úspěch, délka řetězce bude větší a tento řetězec nebudeme počítat. Tedy jestliže po stavu $(x,-2) \in S^{(k)}$ nastane úspěch, přesuneme se do stavu $(x-1,-1)$, v opačném případě se dostaneme do stavu $(x,0)$.

Pravděpodobnosti přechodu zavedeme následovně:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S^{(k)}$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq i \leq k-2$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,-2)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

4) $p_t((x,-2);(x-1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}$,

5) $p_t((x,-1);(x,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

6) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

1) značí situaci, kdy pokus t bude neúspěch. Ve 2) nastane úspěch, který ale ještě není $k-$tý v řadě. 3) je situace, kde máme $k-1$ úspěchů v řadě a další úspěch nám dá řetězec délky k. 4) je případ, ve kterém máme právě řetězec délky k a další úspěch tento řetězec prodlouží a my tedy o jeden délky k přijdeme. 5) značí případ, kdy máme řetězec délky větší než k a další úspěch jenom řetězec prodlouží a počet hledaných řetězců se tedy nemění. Matici $\boldsymbol{P}(t)$ uvádíme v příloze (A.4).

2.3.2 Ověření definice

Ukážeme, že posloupnost $\{E_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ lze opravdu vnořit do Markovova řetězce $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)} : t \in \mathbb{N}_0\}$. Nejdříve pro pevné $n \in \mathbb{N}$ určíme množinu $S_{Y_n^{(k)}}$. Nejvyšší počet řetězců délky k, které můžeme nalézt v n pokusech je $l_n = (n+1)$ div $(k+1)$. Jedna z možných trajektorií jak se k l_n dostat je $T = \big((0,0),(0,1),\ldots,(0,k-1),(1,-2),(1,0),(1,1),\ldots,(l_n,-2)\big)$. Všechny tyto stavy tedy leží v množině $S_{Y_n^{(k)}}$. Nyní se podíváme, pro jaké $x \in \{0,1,\ldots,l_n\}$ leží $(x,-1)$ v hledané množině. Aby nastal stav $(x,-1)$, potřebujeme alespoň $xk+x+k+1$ pokusů. Tedy musí platit:

$$x \leq \frac{n-k-1}{k+1}.$$

Protože $x \in \mathbb{N}_0$, tak platí $(x,-1) \in S_{Y_n^{(k)}}$, pokud $0 \leq x \leq (n-k-1)$ div $(k+1)$. Dále se podíváme na to, pro jaké $i \in \{0{,}1,\dots,k-1\}$ leží stavy (l_n,i) v $S_{Y_n^{(k)}}$. Pro stav (l_n,i) potřebujeme $l_nk + l_n + i$ pokusů. Musí tedy platit:

$$i \leq n - l_n(k+1).$$

Celkem dostaneme:

$$S_{Y_n^{(k)}} = \{(x,-2) : 1 \leq x \leq l_n\} \cup \{(x,-1) : 0 \leq x \leq (n-k-1) \text{ div } (k+1)\} \cup$$
$$\cup \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n - 1; 0 \leq i \leq k-1\} \cup \{(l_n,i) : 0 \leq i \leq n - l_n(k+1)\}.$$

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ označme $a = (n-k-1)$ div $(k+1)$. Množiny C_x^n zavedeme jako:

$$C_0^n = \begin{cases} \{(0,i) : 0 \leq i \leq k-1\}, & \text{pokud } a < 0, \\ \{(0,i) : -1 \leq i \leq k-1\}, & \text{pokud } a \geq 0, \end{cases}$$
$$C_x^n = \begin{cases} \{(x,i) : -2 \leq i \leq k-1\}, & \text{pro } 1 \leq x \leq a, \\ \{(x,i) : i = -2 \wedge 0 \leq i \leq k-1\}, & \text{pro } 1 \leq x \wedge a < x \leq l_n - 1\ , \end{cases}$$
$$C_{l_n}^n = \{(l_n,i) : i = -2 \wedge 0 \leq i \leq n - l_n(k+1)\}.$$

Rovnost $\bigcup_{x=0}^{l_n} C_x^n = S_{Y_n^{(k)}}$ zřejmě platí a rovnost

$$\mathrm{P}(E_{n,k} = x) = \mathrm{P}(Y_n^{(k)} \in C_x^n)$$

platí pro každé $x \in \{0{,}1,\dots,l_n\}$ z konstrukce pravděpodobností přechodu a protože C_x^n obsahuje všechny stavy, které odpovídají situacím, jak získat x hledaných řetězců.

Posloupnost $\{E_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ tedy lze vnořit do Markovova řetězce $Y^{(k)}$ a můžeme pomocí vzorce (1.1) spočítat rozdělení veličiny $E_{n,k}$.

2.3.3 Výpočet rozdělení

Nejdříve určíme množinu absorpčních stavů A_n. Hledáme takové stavy, na které je potřeba minimálně n pokusů. To závisí na výrazu $n - l_n(k+1)$ následovně:

$$A_n = \begin{cases} \{(l_n, n - l_n(k+1))\}, & \text{pokud } n - l_n(k+1) > 0, \\ \{(l_n,0),(l_n-1,-1)\}, & \text{pokud } n - l_n(k+1) = 0, \\ \{(l_n,-2)\}, & \text{pokud } n - l_n(k+1) < 0, \end{cases}$$

Pravděpodobnosti přechodu vypadají následovně:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S_{Y_n^{(k)}} \setminus A_n$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq l_n - 1$ a $0 \leq i \leq k-2$ a pro $x = l_n$ a $0 \leq i \leq n - l_n(k+1) - 1$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,-2)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq l_n - 1$,

4) $p_t((x,-2);(x-1,-1)) = w_t$ pro všechna $(x,-2) \in S_{Y_n^{(k)}} \setminus A_n$,

5) $p_t((x,-1);(x,-1)) = w_t$ pro všechna $(x,-1) \in S_{Y_n^{(k)}} \setminus A_n$,

6) $p_t((x,i),(x,i)) = 1$ pro $(x,i) \in A_n$,

7) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

V příloze (A.5), (A.6) a (A.7) uvádíme všechny tři případy matic $\boldsymbol{P}_n(t)$ v závislosti na výrazu $n - l_n(k+1)$.

V následujícím tvrzení určíme velikost množiny $S_{Y_n^{(k)}}$ a získáme tím rozměry matice $\boldsymbol{P}_n(t)$.

Tvrzení 5. *Pro velikost množiny $S_{Y_n^{(k)}}$ platí:*

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = n + 2 + [(n-k-1) \text{ div } (k+1)].$$

Důkaz. Množinu $S_{Y_n^{(k)}}$ jsme definovali jako sjednocení čtyř množin. Označme postupně tyto množiny jako M_1, M_2, M_3, M_4. Je zřejmé že $|M_1| = l_n$ a $|M_3| = l_n k$. Protože $0 \leq k \leq n$ pak platí:

$$[(n-k-1) \text{ div } (k+1)] \geq [(n-n-1) \text{ div } (k+1)] \geq -1,$$

$$n - l_n(k+1) = n - [(n+1) \text{ div } (k+1)](k+1) \geq n - \frac{n+1}{k+1}(k+1) = n - n - 1 = -1.$$

Tedy $|M_2| = [(n-k-1) \text{ div } (k+1)] + 1$ a $|M_4| = n - l_n(k+1) + 1$ mají smysl, protože velikosti množin nikdy nebudou záporné. Protože jsou tyto množiny disjunktní, $|S_{Y_n^{(k)}}| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|$ a tedy:

$$|S_{Y_n^{(k)}}| = n + 2 + [(n-k-1) \text{ div } (k+1)]$$

□

Poslední co potřebujeme, je počáteční rozdělení:

$$(\pi_0^n)^T = (0,1,\underbrace{0,\ldots\ldots\ldots\ldots,0}_{n+[(n-k-1) \text{ div } (k+1)]}).$$

Máme tedy všechno potřebné k spočítání rozdělení pomocí vzorce (1.1).

Příklad. Nyní si ukážeme rozdělení $E_{6,2}$, tedy počet řetězců délky 2 v 6 pokusech. Maximální počet řetězců je $l_6 = (6+1) \text{ div } (2+1) = 2$. Stavový prostor bude tedy vypadat následovně:

$$S_{Y_6^{(2)}} = \{(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-1),(2,0)\}.$$

Množinu S rozdělíme na:

$$C_0^6 = \{(0,-1),(0,0),(0,1)\},$$

$$C_1^6 = \{(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1)\},$$

$$C_2^6 = \{(2,-2),(2,0)\}.$$

Protože $n - l_6(k+1) = 6 - 2(2+1) = 0$, množina $A_6 = \{(1-1),(2,0)\}$. Matice pravděpodobností přechodu bude mít tvar:

$$\boldsymbol{P}_6(t) = \begin{array}{c} \\ (0,-1) \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,-2) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (2,-2) \\ (2,0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} (0,-1) & (0,0) & (0,1) & (1,-2) & (1,-1) & (1,0) & (1,1) & (2,-2) & (2,0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} w_t & z_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & z_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pro výpočet jednotlivých rozdělení dále potřebujeme vektory $U(C_x^6)$ a π_0^6, které při našem seřazení vypadají takto:

$$U(C_0^6) = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, U(C_1^6) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, U(C_2^6) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \pi_0^6 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Například pro $w_t = 1/2 = z_t$ pro každé $t = 1,2,\ldots,6$ vyjdou pravděpodobnosti:

$$\mathrm{P}(E_{6,2} = 0) \doteq 0{,}60937,\ \mathrm{P}(E_{6,2} = 1) \doteq 0{,}34375,\ \mathrm{P}(E_{6,2} = 2) \doteq 0{,}04688.$$

Pro $w_t = 3/4$ a $z_t = 1/4$ pro každé $t = 1,2,\ldots,6$ dostaneme následující výsledky:

$$\mathrm{P}(E_{6,2} = 0) \doteq 0{,}67261,\ \mathrm{P}(E_{6,2} = 1) \doteq 0{,}26806,\ \mathrm{P}(E_{6,2} = 2) \doteq 0{,}05933.$$

2.3.4 Porovnání

V článku Fu a Koutras (1994) zavedli autoři množinu stavů pro vnoření $E_{n,k}$ jako:

$$\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n; -2 \leq i \leq k-1\} \setminus \{(0,-2)\}.$$

Velikost jejich množiny je $|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| = (l_n+1)(k+2)-1$. Rozdíl velikosti neuvádíme, protože se ve výrazu nic neodečte. Největší rozdíl nastává v množinách $\widetilde{C_{l_n}^n} = \{(l_n,i) : -2 \leq i \leq k-1\}$ a $C_{l_n}^n = \{(l_n,i) : i = -2 \wedge 0 \leq i \leq n - l_n(k+1)\}$. Pro $E_{1000,500}$ dostaneme množiny o velikosti $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(500)}}}| = 1003$ a $|S_{Y_{1000}^{(500)}}| = 1002$ a pro $E_{1000,900}$ získáme $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(900)}}}| = 1803$ a $|S_{Y_{1000}^{(900)}}| = 1002$.

2.4 Rozdělení náhodné veličiny $G_{n,k}$

Náhodná veličina $G_{n,k}$ značí počet řetězců délky větší než k v n pokusech.

2.4.1 Globální řetězec

Pro náhodnou posloupnost $\{G_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ máme Markovův řetězec $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)} : t \in \mathbb{N}_0\}$ se stavovým prostorem

$$S^{(k)} = \{(x,i) : x \in \mathbb{N}_0 : -1 \le i \le k-1\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

Stav $(x,i) \in S^{(k)}$, kde $i = 0,1,\dots,k-1$, znamená, že zatím máme x řetězců délky větší než k a délka současného řetězce úspěchů je i. Stav $(x,-1) \in S^{(k)}$ značí, že nastalo x řetězců délky větší než k a současný řetězec přesáhl délku k. Tedy čekáme na neúspěch, abychom se mohli přesunout do stavu $(x,0)$ a mohli začít počítat délku dalšího řetězce.

Pravděpodobnosti přechodu budou vypadat následovně:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S^{(k)}$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le i \le k-2$,

3) $p_t((x,k-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

4) $p_t((x,-1);(x,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}$

5) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

Přechod 1) značí situaci, kdy pokus t bude neúspěch. Situace 2) je případ, kdy nastane úspěch, ale délka současného řetězce úspěchů ještě nepřesáhla hodnotu k. V případě 3) nastane právě $k-$tý úspěch v řadě, počet řetězců délky větší než k se navyšuje o 1 a přesouváme se do stavu, kde čekáme na neúspěch. 4) je situace, kdy nastane úspěch a my už máme více než k úspěchů v řadě a další úspěch náš stav tedy nemění. Matici $\boldsymbol{P}(t)$ uvádíme v příloze (A.8).

2.4.2 Ověření definice

Ověříme, že $Y^{(k)}$ je vhodný řetězec pro vnoření posloupnosti $\{G_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$. Začneme s nalezením množiny $S_{Y_n^{(k)}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ pevné. Nejvyšší možný počet hledaných řetězců je $l_n = (n+1)$ div $(k+1)$. Jedna z možných trajektorií, jak se dostat k l_n, je $T = \big((0,0),(0,1),\dots,(0,k-1),(1,-1),(1,0),(1,1),\dots,(l_n,-1)\big)$. Stačí se tedy zabývat pro jaké $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$ může nastat (l_n,i). Aby nastal stav (l_n,i), potřebujeme alespoň $l_n(k+1)+i$ pokusů. Tedy musí platit:

$$i \le n - l_n(k+1).$$

Celkem dostáváme:

$$S_{Y_n^{(k)}} = \{(x,i) : 0 \le x \le l_n - 1; -1 \le i \le k-1\} \cup \\ \cup \{(l_n,i) : -1 \le i \le n - l_n(k+1)\} \setminus \{(0,-1)\}$$

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ zavedeme množiny C_x^n následovně:

$$C_0^n = \{(0,i) : 0 \le i \le k-1\},$$

$$C_x^n = \{(x,i) : -1 \le i \le k-1\} \text{ pro každé } x = 1,2,\dots,l_n - 1,$$

$C^n_{l_n} = \{(l_n,i) : -1 \leq i \leq n - l_n(k+1)\}.$

Dále $\bigcup_{x=0}^{l_n} C^n_x = S_{Y^{(k)}_n}$ zřejmě platí a pro každé $x \in \{0,1,\dots,l_n\}$ rovnost

$$\mathrm{P}(G_{n,k} = x) = \mathrm{P}(Y^{(k)}_n \in C^n_x)$$

vyplývá z konstrukce pravděpodobností přechodu a protože C^n_x obsahuje všechny stavy, které odpovídají situacím, jak získat právě x hledaných řetězců.

Ukázali jsme, že posloupnost $\{G_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$ lze vnořit do Markovova řetězce $Y^{(k)}$ a tedy můžeme využít vzorec (1.1) pro výpočet rozdělení veličiny $G_{n,k}$.

2.4.3 Výpočet rozdělení

Najít absorpční stavy je u $G_{n,k}$ jednoduché. Jediný stav, na který potřebujeme právě n pokusů je $A_n = \{(l_n, n - l_n(k+1))\}$. Dále si ukážeme prvky matice $\boldsymbol{P}_n(t)$. Ty jsou následující:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S_{Y^{(k)}_n} \setminus A_n$,
2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq l_n - 1$ a $0 \leq i \leq k-2$ a pro $x = l_n$ a $0 \leq i \leq n - l_n(k-1) - 1$,
3) $p_t((x,k-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq l_n - 1$,
4) $p_t((x,-1);(x,-1)) = w_t$ pro $1 \leq x \leq l_n - 1$ a pro $x = l_n$, pokud $(l_n,-1) \notin A_n$
5) $p_t((x,i),(x,i)) = 1$ pro $(x,i) \in A_n$,
6) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

V příloze (A.9) uvádíme, jak taková matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ vypadá.

V dalším tvrzení ukážeme velikost množiny $S_{Y^{(k)}_n}$.

Tvrzení 6. *Pro velikost množiny $S_{Y^{(k)}_n}$ platí:*

$$|S_{Y^{(k)}_n}| = n + 1.$$

Důkaz. Velikost $S_{Y^{(k)}_n}$ získáme přímo výpočtem:

$$\begin{aligned}
|S_{Y^{(k)}_n}| &= |C^n_0| + \sum_{x=1}^{l_n - 1} |C^n_x| + |C^n_{l_n}| \\
&= k + \sum_{x=1}^{l_n - 1} (k+1) + n - l_n(k+1) + 2 \\
&= k + (l_n - 1)(k+1) + n - l_n(k+1) + 2 \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

□

Poslední, co potřebujeme, je počáteční rozdělení:

$$(\pi_0^n)^T = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}).$$

Vše tedy máme připravené k použití vzorce (1.1).

Příklad. Pro náhodnou veličinu $G_{7,2}$, která představuje počet řetězců délky větší než 2 v 7 pokusech, vychází nejvyšší možný počet hledaných řetězců jako $l_7 = (7+1) \text{ div } (2+1) = 2$. Stavový prostor vypadá takto:

$$S_{Y_7^{(2)}} = \{(0{,}0),(0{,}1),(1,-1),(1{,}0),(1{,}1),(2,-1),(2{,}0),(2{,}1)\}.$$

Ten rozdělíme na:

$$C_0^7 = \{(0{,}0),(0{,}1)\},$$

$$C_1^7 = \{(1,-1),(1{,}0),(1{,}1)\},$$

$$C_2^7 = \{(2,-1),(2{,}0),(2{,}1)\}.$$

Absorpční stav bude v množině jeden a to $A_7 = \{(2{,}1)\}$. Matice pravděpodobností přechodu bude vypadat následovně:

$$\boldsymbol{P}_7(t) = \begin{array}{c} \\ (0{,}0) \\ (0{,}1) \\ (1,-1) \\ (1{,}0) \\ (1{,}1) \\ (2,-1) \\ (2{,}0) \\ (2{,}1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} (0{,}0) & (0{,}1) & (1,-1) & (1{,}0) & (1{,}1) & (2,-1) & (2{,}0) & (2{,}1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_t & z_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_t & z_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dále potřebujeme vektory $U(C_x^7)$ a π_0^7, které při našem seřazení stavů vypadají takto:

$$U(C_0^7) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_1^7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U(C_2^7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pi_0^7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud $w_t = z_t = 1/2$ pro každé $t = 1{,}2,\ldots,7$, pak dostaneme následující pravděpodobnosti:

$$\mathrm{P}(G_{7,2} = 0) \doteq 0{,}26563,\ \mathrm{P}(G_{7,2} = 1) = 0{,}59375,\ \mathrm{P}(G_{7,2} = 2) \doteq 0{,}14062.$$

Pro $w_t = 3/4$ a $z_t = 1/4$ pro každé $t = 1{,}2,\ldots,7$ dostaneme výsledky:

$$\mathrm{P}(G_{7,2} = 0) \doteq 0{,}03101,\ \mathrm{P}(G_{7,2} = 1) \doteq 0{,}67236,\ \mathrm{P}(G_{7,2} = 2) \doteq 0{,}29663.$$

2.4.4 Porovnání

V článku Fu a Koutras (1994) zavedli autoři množinu stavů pro vnoření $G_{n,k}$ jako:

$$\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq l_n; -1 \leq i \leq k-1\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

Velikost množiny je $|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| = (l_n+1)(k+1)-1$. Oproti autorům článku zavádíme množinu $C_{l_n}^n$ menší. Zatímco oni počítají s množinou $\widetilde{C_{l_n}^n} = \{(l_n,i) : -1 \leq i \leq k-1\}$, my si vystačíme s množinou $C_{l_n}^n = \{(l_n,i) : -1 \leq i \leq n - l_n(k+1)\}$. Rozdíl počtu stavů je tedy:

$$|\widetilde{S_{Y_n^{(k)}}}| - |S_{Y_n^{(k)}}| = k+1-(n-l_n(k+1)+2) = (k+1)(1+l_n)-n-2.$$

Například pro $G_{1000,500}$ dostaneme stejný počet stavů $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(500)}}}| = 1001 = |S_{Y_{1000}^{(500)}}|$ a pro $G_{1000,900}$ vychází $|\widetilde{S_{Y_{1000}^{(900)}}}| = 1801$ a $|S_{Y_{1000}^{(900)}}| = 1001$.

2.5 Rozdělení náhodné veličiny L_n

Poslední náhodná veličina, jejíž rozdělení chceme nalézt, je L_n, tedy délka nejdelšího řetězce úspěchů v n pokusech. Její rozdělení lze spočíst dvěma způsoby. Jeden využívá již nalezené rozdělení náhodných veličin $N_{n,k}, M_{n,k}, G_{n,k}$ a druhý je přes vnoření do Markovova řetězce.

2.5.1 Alternativní způsob výpočtu rozdělení

V prvním případě nejdříve definujeme náhodné veličiny $N_{n,0} = M_{n,0} = G_{n,0} = 1$ a $N_{n,n+1} = M_{n,n+1} = G_{n,n+1} = 0$. Poté můžeme využít toho, že pro každé $k = 0,1,\dots,n$ platí

$$\mathrm{P}(L_n < k) = \mathrm{P}(N_{n,k} = 0) = \mathrm{P}(G_{n,k} = 0) = \mathrm{P}(M_{n,k} = 0).$$

Vlevo máme pravděpodobnost, že délka nejdelšího řetězce úspěchů je menší než k. První rovnost vychází z toho, že $\mathrm{P}(N_{n,k} = 0)$ je pravděpodobnost, že počet nepřekrývajících se sekvencí délky k je 0, což je pravděpodobnost, že nenastane více než nebo přesně k úspěchů v řadě, tedy délka nejdelšího řetězce musí být menší než k. Další rovnosti a postupy jsou analogické a proto uvedeme jenom případ využití rozdělení $N_{n,k}$. Dále je zřejmé, že

$$\mathrm{P}(L_n = k) = \mathrm{P}(L_n < k+1) - \mathrm{P}(L_n < k),$$

tedy platí rovnost

$$\mathrm{P}(L_n = k) = \mathrm{P}(N_{n,k+1} = 0) - \mathrm{P}(N_{n,k} = 0).$$

Tedy máme vzorec pro výpočet rozdělení náhodné veličiny L_n.

2.5.2 Globální řetězec

Druhý přístup je obdobný jako u předchozích náhodných veličin. Náhodnou posloupnost $\{L_t\}_{t=1}^{\infty}$ vnoříme do Markovova řetězce $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ se stavovým prostorem

$$S = \{(x,i) : x \in \mathbb{N}; -1 \leq i \leq x\} \cup \{(0,0)\}.$$

Stav $(x,i) \in S$, kde $i \neq -1$, znamená, že délka nejdelšího řetězce, který doposud nastal, je x a i je délka současného řetězce úspěchů. Situace $(x,-1) \in S$ znamená, že současný řetězec má délku x a tedy další úspěch řetězec prodlouží.

Pravděpodobnosti přechodu budou vypadat následovně:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}$ a $0 \leq i \leq x-1$,

3) $p_t((x,x);(x+1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}_0$,

4) $p_t((x,-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $x \in \mathbb{N}$,

5) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

1) je pravděpodobnost, že pokus t bude neúspěch. 2) značí situaci, že nastane úspěch, ale délka současného řetězce nepřesáhne délku již nalezeného nejdelšího řetězce. V případu 3) nastane úspěch a současný řetězec se stane novým nejdelším řetězcem. 4) je situace, kdy nastane úspěch a současný řetězec je nejdelší nalezený řetězec a další úspěch ho pouze prodlouží.

Matice $\boldsymbol{P}(t)$ bude vypadat následovně:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} (0,0) & (1,-1) & (1,0) & (1,1) & (2,-1) & (2,0) & (2,1) & (2,2) & (3,-1) & \ldots \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,0) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (2,-1) \\ (2,0) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,-1) \\ \vdots \end{array} &
\begin{pmatrix}
z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & 0 & w_t & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & 0 & w_t & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

2.5.3 Ověření definice

Začneme s určením množiny S_{Y_n} pro $n \in \mathbb{N}$ pevné. $L_n = n$ pouze pokud nastaly samé úspěchy. Tomu odpovídá trajektorie $T = \Big((0,0),(1,-1),(2,-1),\ldots,(n,-1)\Big)$. Aby nastal stav (x,i), kde $x \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ a $i \in \{0,1,2,\ldots,x\}$, potřebujeme alespoň $x+i+1$ pokusů. Tedy musí platit:

$$i \leq n - x - 1.$$

Množina S_{Y_n} bude tedy vypadat následovně:

$$S_{Y_n} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq n; -1 \leq i \leq \min(x,n-x-1)\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

Množiny C_x^n pro pevné $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně:

$$C_0^n = \{(0,0)\},$$

$$C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq \min(x,n-x-1)\} \text{ pro každé } x = 1,2,\ldots,n.$$

Rovnost $\bigcup_{x=0}^{n} C_x^n = S_{Y_n}$ zřejmě platí a rovnost

$$\mathrm{P}(L_n = x) = \mathrm{P}(Y_n \in C_x^n)$$

vyplývá z konstrukce matice $\boldsymbol{P}(t)$ a množin C_x^n pro každé $x \in \{0,1,\ldots,n\}$.

K výpočtu rozdělení L_n lze tedy využít vzorec (1.1).

2.5.4 Výpočet rozdělení

Potřebujeme množinu A_n, tedy stavy na které je potřeba přesně n pokusů. To budou stavy $(x,n-x-1)$ takové, že platí:

$$x \geq n-x-1$$
$$x \geq \frac{n-1}{2}.$$

Navíc musí být $x \geq 1$, protože stav $(0,0)$ nebude nikdy absorpční. Protože $x \in \mathbb{N}$, dostáváme tedy $A_n = \{(x,i) : \lceil\frac{n-1}{2}\rceil \leq x \leq l \wedge 1 \leq x; i = n-x-1\}$, kde $\lceil\cdot\rceil$ značí horní celou část čísla. Pravděpodobnosti přechodu v matici $\boldsymbol{P}_n(t)$ jsou následující:

1) $p_t((x,i);(x,0)) = z_t$ pro všechna $(x,i) \in S_{Y_n} \setminus A_n$,

2) $p_t((x,i);(x,i+1)) = w_t$ pro $1 \leq x \leq n-1$ a $0 \leq i \leq \min(x,n-x-1)-1$,

3) $p_t((x,x);(x+1,-1)) = w_t$ pro $0 \leq x \leq \lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 1$,

4) $p_t((x,-1);(x+1,-1)) = w_t$ pro $1 \leq x \leq n-1$,

5) $p_t((x,i),(x,i)) = 1$ pro $(x,i) \in A_n$,

6) $p_t((x,i);(y,j)) = 0$ jinak.

Tvar matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ uvádíme v příloze (A.10).

Tvrzení o velikosti množiny S_{Y_n} nám dá představu o složitosti výpočtu rozdělení.

Tvrzení 7. *Pro velikost množiny S_{Y_n} platí:*

$$|S_{Y_n}| = \begin{cases} \frac{n^2+6n+1}{4}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{n^2+6n}{4}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Důkaz. Potřebujeme zjistit, pro jaké $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ jsou množiny C_x^n „plné“, tedy $C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq x\}$, a pro jaká $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ nejsou C_x^n „plné“, tedy $C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq n-x-1\}$. To zjistíme z nerovnice:

$$x \leq \frac{n-1}{2}.$$

Protože tato x musí být přirozená, tak $x \leq (n-1)$ div 2. To se dá rozdělit na dva případy podle parity čísla n. Tedy

$$C_x^n = \{(x,i) : -1 \leq i \leq x\} = \begin{cases} \text{pro } x \leq \frac{n-1}{2}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \text{pro } x \leq \frac{n-2}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Pro n liché dostaneme:

$$\begin{aligned} |S_{Y_n}| &= |C_0^n| + \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} |C_x^n| + \sum_{x=\frac{n+1}{2}}^{n} |C_x^n| \\ &= 1 + \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} (x+2) + \sum_{x=\frac{n+1}{2}}^{n} (n-x+1) \\ &= 1 + \frac{1}{8}(n^2+8n-9) + \frac{1}{8}(n^2+4n+3) \\ &= \frac{n^2+6n+1}{4}. \end{aligned}$$

Pro n sudé dostaneme:

$$\begin{aligned} |S_{Y_n}| &= |C_0^n| + \sum_{x=1}^{\frac{n-2}{2}} |C_x^n| + \sum_{x=\frac{n}{2}}^{n} |C_x^n| \\ &= 1 + \sum_{x=1}^{\frac{n-2}{2}} (x+2) + \sum_{x=\frac{n}{2}}^{n} (n-x+1) \\ &= 1 + \frac{1}{8}(n^2+6n-16) + \frac{1}{8}(n^2+6n+8) \\ &= \frac{n^2+6n}{4}. \end{aligned}$$

□

Jako poslední potřebujeme počáteční rozdělení:

$$\pi_0^{nT} = \begin{cases} (1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{\frac{n^2+6n+1}{2}-1}), & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ (1, \underbrace{0, \ldots\ldots\ldots, 0}_{\frac{n^2+6n}{2}-1}), & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Máme vše připravené k použití vzorce (1.1) pro výpočet rozdělení L_n.

Příklad. Ukážeme rozdělení náhodné veličiny L_3. Stavový prostor vypadá následovně:

$$S_{Y_n} = \{(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-1),(2,0),(3,-1)\}.$$

Ten rozdělíme na:

$$C_0^3 = \{(0,0)\},$$

$$C_1^3 = \{(1,-1),(1,0),(1,1)\},$$

$C_2^3 = \{(2,-1),(2,0)\}$,

$C_3^3 = \{(3,-1)\}$.

Absorpční stavy budou $A_3 = \{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$. Matice pravděpodobností přechodu bude mít následující tvar:

$$\boldsymbol{P}_3(t) = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (2,-1) \\ (2,0) \\ (3,-1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (0,0) & (1,-1) & (1,0) & (1,1) & (2,-1) & (2,0) & (3,-1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_t & 0 & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_t & w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Jako poslední potřebujeme vektory $U(C_x^3)$ a počáteční rozdělení π_0^3:

$$U(C_0^3) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, U(C_1^3) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, U(C_2^3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, U(C_3^3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \pi_0^3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Například pro $w_t = 1/2 = z_t$ pro každé $t = 1,2,3$ vyjdou jednotlivé pravděpodobnosti následovně:

$$\mathrm{P}(L_3 = 0) = 0{,}125,\ \mathrm{P}(L_3 = 1) = 0{,}5,\ \mathrm{P}(L_3 = 2) = 0{,}25,\ \mathrm{P}(L_3 = 3) = 0{,}125.$$

Dále pro $w_t = 3/4$ a $z_t = 1/4$ pro každé $t = 1,2,3$ dostaneme výsledky:

$$\mathrm{P}(L_3 = 0) \doteq 0{,}01562,\ \mathrm{P}(L_3 = 1) = 0{,}28125,\ \mathrm{P}(L_3 = 2) = 0{,}28125,$$
$$\mathrm{P}(L_3 = 3) \doteq 0{,}42188.$$

2.5.5 Porovnání

V článku Fu a Koutras (1994) uvádějí pouze příklad řetězce pro $n = 3$. Z toho lze usoudit, jak by postupovali pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ a to můžeme porovnat s naším postupem. Množina stavů by vypadala následovně:

$$\widetilde{S_{Y_n}} = \{(x,i) : 0 \leq x \leq n; -1 \leq i \leq x\}.$$

Velikost této množiny je $|\widetilde{S_{Y_n}}| = \frac{n^2+3n}{2}$. Takže rozdíl naší a jejich množiny je:

$$|\widetilde{S_{Y_n}}| - |S_{Y_n}| = \begin{cases} \frac{n^2-1}{4}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{n^2}{4}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Dosahujeme téměř dvojnásobného zlepšení. Například pro $n = 1000$ vychází $|\widetilde{S_{Y_n}}| = 501500$ a $|S_{Y_n}| = 251500$.

Závěr

Nejdříve jsme v úvodu definovali pět náhodných veličin, jejichž rozdělení jsme chtěli spočítat. Potom jsme uvedli potřebnou teorii Markovových řetězců ke spočtení jejich rozdělení. Zavedli jsme novou definici pro vnoření a uvedli vzorec pro výpočet jednotlivých pravděpodobností vnořených veličin.

U každé veličiny jsme zavedli Markovův řetězec, ověřili platnost vnoření, ukázali jsme jak vypadá matice pravděpodobnostní přechodu, uvedli příklad pro pevné n a k a porovnali jsme velikost naší množiny stavů s množinou zavedenou v článku Fu a Koutras (1994). Vždy jsme potvrdili, že námi navržený postup je efektivnější.

Literatura

Balakrishnan, N. a Koutras, M. V. (2002). *Runs and scans with applications.* J. Wiley. ISBN 0-471-24892-4.

Erdös, P. a Rényi, A. (1970). On a new law of large numbers. *Journal d'Analyse Mathématique*, **23**(1), 103–111. ISSN 1565-8538. doi: 10.1007/bf02795493.

Fu, J. C. a Koutras, M. V. (1994). Distribution Theory of Runs: A Markov Chain Approach. *Journal of the American Statistical Association*, **89**(427), 1050–1058. ISSN 01621459. doi: 10.2307/2290933.

Godbole, A. P. (1990). Specific formulae for some success run distributions. *Statistics & Probability Letters*, **10**(2), 119–124. ISSN 01677152. doi: 10.1016/0167-7152(90)90006-S.

Hirano, K., Aki, S., Kashiwagi, N. a Kuboki, H. (1991). On Ling's binomial and negative binomial distributions of order k. *Statistics & Probability Letters*, **11**(6), 503–509. ISSN 01677152. doi: 10.1016/0167-7152(91)90115-8.

Lou, W. Y. W. (1996). On Runs and Longest Run Tests: A Method of Finite Markov Chain Imbedding. *Journal of the American Statistical Association*, **91** (436), 1595. ISSN 01621459. doi: 10.2307/2291585.

Schwager, S. J. (1983). Run Probabilities in Sequences of Markov-Dependent Trials. *Journal of the American Statistical Association*, **78**(381), 168–175. ISSN 01621459. doi: 10.2307/2287125.

A. Příloha

Zde uvádíme matice, které jsme definovali v textu, jejichž rozměry jsou tak velké, že pro přehlednost jsme je umístili do přílohy.

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $N_{n,k}$:

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots & (0,k-2) & (0,k-1) & (1,0) & (1,1) & \dots & (l_n-1,k-1) & (l_n,0) & (l_n,1) & \dots & (l_n,n \bmod k) \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ \vdots \\ (0,k-2) \\ (0,k-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ \vdots \\ (l_n-1,k-1) \\ (l_n,0) \\ (l_n,1) \\ \vdots \\ (l_n,n \bmod k) \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
z_t & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
z_t & 0 & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_t & w_t & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_t & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}. \tag{A.1}$$

Matice $\boldsymbol{P}(t)$ pro $\{M_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{c} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ \vdots \\ (0,k-2) \\ (0,k-1) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ \vdots \\ (1,k-1) \\ (2,-1) \\ (2,0) \\ \vdots \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & (0,k-2) & (0,k-1) & (1,-1) & (1,0) & (1,1) & \ldots & (1,k-1) & (2,-1) & (2,0) & \ldots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}. \tag{A.2}$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $M_{n,k}$:
Označme $a = n - 2k + 1$ a $b = n - x - k$. Potom:

$$
\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccccccc} \scriptstyle (0,0) & \scriptstyle (0,1) & \scriptstyle (0,2) & \scriptstyle \dots & \scriptstyle (0,k-2) & \scriptstyle (0,k-1) & \scriptstyle (1,-1) & \scriptstyle (1,0) & \scriptstyle \dots & \scriptstyle (1,k-1) & \scriptstyle (2,-1) & \scriptstyle \dots & \scriptstyle (a,-1) & \scriptstyle \dots & \scriptstyle (a,b-1) & \scriptstyle (a,b) & \scriptstyle (a+1,-1) & \scriptstyle \dots & \scriptstyle (l_n-1,-1) & \scriptstyle (l_n-1,0) & \scriptstyle (l_n,-1) \end{array} \\
\begin{array}{c} \scriptstyle (0,0) \\ \scriptstyle (0,1) \\ \scriptstyle (0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle (0,k-2) \\ \scriptstyle (0,k-1) \\ \scriptstyle (1,-1) \\ \scriptstyle (1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle (1,k-1) \\ \scriptstyle (2,-1) \\ \vdots \\ \scriptstyle (a,-1) \\ \vdots \\ \scriptstyle (a,b-1) \\ \scriptstyle (a,b) \\ \scriptstyle (a+1,-1) \\ \vdots \\ \scriptstyle (l_n-1,-1) \\ \scriptstyle (l_n-1,0) \\ \scriptstyle (l_n,-1) \end{array} &
\begin{pmatrix}
z_t & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
z_t & 0 & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & w_t & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & w_t & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_t & w_t \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{A.3}
$$

Matice $\boldsymbol{P}(t)$ pro $\{E_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$:

$$
\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccc} (0,-1) & (0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & (0,k-2) & (0,k-1) & (1,-2) & (1,-1) & (1,0) & (1,1) & \ldots & (1,k-1) & (2,-2) & (2,-1) & (2,0) & \ldots \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,-1) \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ \vdots \\ (0,k-2) \\ (0,k-1) \\ (1,-2) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ \vdots \\ (1,k-1) \\ (2,-2) \\ (2,-1) \\ (2,0) \\ \vdots \end{array} &
\begin{pmatrix}
w_t & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & w_t & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & z_t & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array} . \tag{A.4}
$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $E_{n,k}$, pokud $b = n - l_n(k+1) > 0$:

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccccccccc} \scriptstyle(0,-1) & \scriptstyle(0,0) & \scriptstyle(0,1) & \scriptstyle(0,2) & \scriptstyle\dots & \scriptstyle(0,k-2) & \scriptstyle(0,k-1) & \scriptstyle(1,-2) & \scriptstyle(1,-1) & \scriptstyle(1,0) & \scriptstyle\dots & \scriptstyle(l_n-1,-2) & \scriptstyle(l_n-1,-1) & \scriptstyle(l_n-1,0) & \scriptstyle\dots & \scriptstyle(l_n-1,k-1) & \scriptstyle(l_n,-2) & \scriptstyle(l_n,0) & \scriptstyle\dots & \scriptstyle(l_n,b-1) & \scriptstyle(l_n,b) \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle(0,-1) \\ \scriptstyle(0,0) \\ \scriptstyle(0,1) \\ \scriptstyle(0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle(0,k-2) \\ \scriptstyle(0,k-1) \\ \scriptstyle(1,-2) \\ \scriptstyle(1,-1) \\ \scriptstyle(1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n-1,-2) \\ \scriptstyle(l_n-1,-1) \\ \scriptstyle(l_n-1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n-1,k-1) \\ \scriptstyle(l_n,-2) \\ \scriptstyle(l_n,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n,b-1) \\ \scriptstyle(l_n,b) \end{array} & \begin{pmatrix} w_t & z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_t & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 & w_t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & w_t & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_t & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_t & \dots & 0 & w_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \quad \text{(A.5)}$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $E_{n,k}$, pokud $n - l_n(k+1) = 0$:

$$
\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccc} \scriptstyle(0,-1) & \scriptstyle(0,0) & \scriptstyle(0,1) & \scriptstyle(0,2) & \scriptstyle\cdots & \scriptstyle(0,k-2) & \scriptstyle(0,k-1) & \scriptstyle(1,-2) & \scriptstyle(1,-1) & \scriptstyle(1,0) & \scriptstyle\cdots & \scriptstyle(l_n-1,-2) & \scriptstyle(l_n-1,-1) & \scriptstyle(l_n-1,0) & \scriptstyle\cdots & \scriptstyle(l_n-1,k-1) & \scriptstyle(l_n,-2) & \scriptstyle(l_n,0) \end{array} \\
\begin{array}{c} \scriptstyle(0,-1) \\ \scriptstyle(0,0) \\ \scriptstyle(0,1) \\ \scriptstyle(0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle(0,k-2) \\ \scriptstyle(0,k-1) \\ \scriptstyle(1,-2) \\ \scriptstyle(1,-1) \\ \scriptstyle(1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n-1,-2) \\ \scriptstyle(l_n-1,-1) \\ \scriptstyle(l_n-1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n-1,k-1) \\ \scriptstyle(l_n,-2) \\ \scriptstyle(l_n,0) \end{array} &
\begin{pmatrix}
w_t & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & w_t & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & w_t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{A.6}
$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $E_{n,k}$, pokud $n - l_n(k+1) < 0$:

$$
\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{c} \\ (0,-1) \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ \vdots \\ (0,k-2) \\ (0,k-1) \\ (1,-2) \\ (1,-1) \\ (1,0) \\ \vdots \\ (l_n-1,-2) \\ (l_n-1,0) \\ \vdots \\ (l_n-1,k-1) \\ (l_n,-2) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc} (0,-1) & (0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots & (0,k-2) & (0,k-1) & (1,-2) & (1,-1) & (1,0) & \ldots & (l_n-1,-2) & (l_n-1,0) & \ldots & (l_n-1,k-1) & (l_n,-2) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
w_t & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & w_t & z_t & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_t & \ldots & 0 & w_t \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} . \quad \text{(A.7)}
$$

Matice $\boldsymbol{P}(t)$ pro $\{G_{t,k}\}_{t=k}^{\infty}$:

$$
\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} \scriptstyle (0,0) & \scriptstyle (0,1) & \scriptstyle (0,2) & \scriptstyle \ldots & \scriptstyle (0,k-2) & \scriptstyle (0,k-1) & \scriptstyle (1,-1) & \scriptstyle (1,0) & \scriptstyle (1,1) & \scriptstyle \ldots & \scriptstyle (1,k-1) & \scriptstyle (2,-1) & \scriptstyle (2,0) & \scriptstyle \ldots \end{array} \\
\begin{array}{c} \scriptstyle (0,0) \\ \scriptstyle (0,1) \\ \scriptstyle (0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle (0,k-2) \\ \scriptstyle (0,k-1) \\ \scriptstyle (1,-1) \\ \scriptstyle (1,0) \\ \scriptstyle (1,1) \\ \vdots \\ \scriptstyle (1,k-1) \\ \scriptstyle (2,-1) \\ \scriptstyle (2,0) \\ \vdots \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & z_t & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}. \tag{A.8}
$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro $G_{n,k}$:

$$
\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccc} \scriptstyle(0,0) & \scriptstyle(0,1) & \scriptstyle(0,2) & \scriptstyle\ldots & \scriptstyle(0,k-2) & \scriptstyle(0,k-1) & \scriptstyle(1,-1) & \scriptstyle(1,0) & \scriptstyle\ldots & \scriptstyle(1,k-1) & \scriptstyle(2,-1) & \scriptstyle\ldots & \scriptstyle(l_n-1,k-1) & \scriptstyle(l_n,-1) & \scriptstyle(l_n,0) & \scriptstyle\ldots & \scriptstyle(l_n,n-l_n(k+1)) \end{array} \\
\begin{array}{c} \scriptstyle(0,0) \\ \scriptstyle(0,1) \\ \scriptstyle(0,2) \\ \vdots \\ \scriptstyle(0,k-2) \\ \scriptstyle(0,k-1) \\ \scriptstyle(1,-1) \\ \scriptstyle(1,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(1,k-1) \\ \scriptstyle(2,-1) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n-1,k-1) \\ \scriptstyle(l_n,-1) \\ \scriptstyle(l_n,0) \\ \vdots \\ \scriptstyle(l_n,n-l_n(k+1)) \end{array} &
\begin{pmatrix}
z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
z_t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & w_t & z_t & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & z_t & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{A.9}
$$

Matice $\boldsymbol{P}_n(t)$ pro L_n:
Označme $a = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ a $b = n - x - 1$. Potom:

$$
\boldsymbol{P}_n(t) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccc} (0{,}0) & (1{,}-1) & (1{,}0) & (1{,}1) & (2{,}-1) & \ldots & (a-1{,}a-1) & (a{,}-1) & (a{,}0) & \ldots & (a{,}b-1) & (a{,}b) & (a+1{,}-1) & \ldots & (n-1{,}-1) & (n-1{,}0) & (n{,}-1) \end{array} \\
\begin{array}{c} (0{,}0) \\ (1{,}-1) \\ (1{,}0) \\ (1{,}1) \\ (2{,}-1) \\ \vdots \\ (a-1{,}a-1) \\ (a{,}-1) \\ (a{,}0) \\ \vdots \\ (a{,}b-1) \\ (a{,}b) \\ (a+1{,}-1) \\ \vdots \\ (n-1{,}-1) \\ (n-1{,}0) \\ (n{,}-1) \end{array} &
\begin{pmatrix}
z_t & w_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_t & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_t & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & w_t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & z_t & \ldots & 0 & w_t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_t & w_t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{A.10}
$$