Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Spectrum problem
Autor: Ondřej Ježil

Shrnutí obsahu práce

Anglicky psaná práce pojednává o (konečných) spektrech sentencí (relačního) jazyka prvního řádu. Jedná se o klasické téma z pomezí teorie konečných modelů a výpočetní složitosti. Jedním z nejstarších otevřených problémů je zde otázka, zda je množina $\textsc{Spec} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ všech spekter uzavřena na komplementy; jedná se o tzv. Asserův problém. Předpokládá se, že odpověď je s největší pravděpodobností negativní. Náročnost problému spočívá v tom, že negativní odpověď již implikuje $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Samotná práce se přirozeně nesnaží najít odpověď na Asserův problém. Autorovi jde především o to ukázat zajímavé příklady spekter a dále s pomocí menšího zobecnění problému do logiky druhého řádu prokázat Faginovu větu a — coby její bezprostřední důsledek — pak Jonesovu–Selmanovu charakterizaci množiny $\textsc{Spec}$ jakožto třídy $\mathbf{NE}$.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Jedná se spíše o náročnější téma. Student se ho, dle mého soudu, zhostil na výbornou. Jasně demonstroval, že se umí velmi dobře orientovat v nesnadné problematice. Zpracování tématu bezesporu splňuje zadání práce. Myslím si, že po menším rozšíření materiálu by práci bylo lze podat i jako diplomovou.

Vlastní příspěvek. Coby hlavní příspěvek autora vnímám důkaz inkluze $\mathbf{FP} \subsetneq \mathbf{F\Sigma_1^1}$ (věta 3.2.6 a jí předcházející techničtější věty 3.2.4 a 3.2.5) pomocí Cobhamovy charakterizace třídy $\mathbf{FP}$. Díky tomu je pak možné podat relativně krátký důkaz Faginovy věty. Studentův příspěvek je explicitně specifikován v závěru práce.

Matematická úroveň. K matematické úrovni práce nemám, až na pár dotazů k obhajobě uvedených níže, výhrady. Kromě několika málo překlepů, které se vyskytují prakticky v každém odborném textu, je text po matematické stránce v pořádku. S matematickým formalismem student zachází korektně a pečlivě, což koneckonců v této oblasti ani jinak nejde.

Práce se zdroji. Způsob citování zdrojů odpovídá způsobu používanému v (dobrých) matematických publikacích. Nejsem si vědom, že by práce obsahovala zkopírované či otrocky přeložené pasáže.

Formální úprava. Práce je dobře strukturovaná a velmi dobře se čte. Obsahuje vzhledem k rozsahu spíše malé množství překlepů. Občasné gramatické chybky (např. chybějící členy či špatný slovosled) nijak nesnižují schopnost porozumět texu. Samotného mě asi nejvíce rušily nesprávně sázené uvozovky.

Připomínky a otázky

1. V definici 1.1.1 není jasné, zda připouštíte φ libovolnou formuli, nebo pouze sentenci.
2. Odstavec bezprostředně před definicí 1.1.4: Skutečně jsou Σ_1^1-formule uzavřené na jakoukoliv prvořádovou kvantifikaci? Jak by se to ukazovalo pro velký kvantifikátor?

3. V definici 1.1.5 byste asi měl být přesnější. Tak, jak je podaná, připouští, že φ_0 je opět Σ^1_1-formule, tedy ne nutně formule prvního řádu.

4. V posledním odstavci před sekcí 1.2 by asi stálo za to explicitně uvést, že $\hat{\varphi}$ je chápána jako Σ^1_1-formule v prázdné signatuře. Bylo by pak snazší dekódovat sdělení na předposledním řádku odstavce.

5. Otázka k obhajobě: Co by se stalo, kdyby se ve větě 1.2.2 položka (c) oslabila pouze na unární funkci $x \mapsto 2^{|x|}$? Dostali bychom nějakou zajímavou podtřídu třídy **FP**?

6. Poslední odstavec před sekcí 2.2: Není to spíše tak, že MOLS_k obsahuje každou mocninu prvočísla větší než k?

7. K obhajobě: Definice (3.2.1) formule $\theta_{1,i}$ se mi nelíbí. Mohl byste si připravit k obhajobě její opravenou verzi? Jde mi jednak o to, že by měla být celá formule v rozsahu kvantifikátoru $(\exists_2 S)$, ale také o disjunkt na posledním řádku, který se zdá, že bude dělat problémy, pokud je max U vůbec největším prvkem, a nemá tudíž bezprostředního následníka.

Závěr

Práci považuji za vynikající a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Návrh klasifikace oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.
Katedra algebry MFF UK
21. 6. 2020