Ing. Martin Malachov: **Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu**

Posudek oponenta diplomové práce

Práce je věnována výuce diferenciálního a integrálního počtu na střední škole. V kapitole 2 rozebírá stávající situaci a dostupnou literaturu. Hlavní částí práce je kapitola 3. Ta je rozdělena na oddíly věnované posloupnostem a jejich diferencím, diferenciálům, limitám, derivacím, integrálům a dalším tématům. Autor zde předkládá konkrétní návrhy, jak vyučovat kalkulus na střední škole, a připojuje řadu řešených i neřešených úloh s důrazem na aplikace ve fyzice.

Oceňuji, že se autor snažil o praktickou využitelnost práce na SŠ. Úlohy jsou vesměs převzaté z literatury. Použité zdroje jsou citovány. Po formální stránce hodnotím práci jako průměrnou, místy se vyskytují drobnější chyby (přebytečné nebo chybějící čárky, jednopísmenné předložky na konci řádků, nesprávně sázené české uvozovky). Hypertextové odkazy do seznamu literatury jsou nefunkční.

K obsahové stránce textu mám mnoho kritických připomínek, uvádím jen ty nejpodstatnější:

1) Práce obsahuje některé matematické nedostatky, např.: Věta 7 na s. 71 je velmi vágně zformulovaná a pro Riemannův integrál v této podobě neplatí (funkce by měla být definována i v krajních bodech, navíc musí být omezená). V této souvislosti je zajímavé, že na s. 16 autor doporučuje, aby učitel ukázal „nespojitou funkci, kterou tedy nelze integrovat“ (přitom věta 7 připouští i nespojité funkce). Věta 8 na s. 71 je spíše definicí než větou. Předpoklad spojitosti F ve větě 10 na s. 72 je zbytečný. V některých úlohách na hledání extrému není zdůvodněno, proč se jedná o maximum či minimum (př. 94 na s. 65–66, př. 95 na s. 66–67). Na s. 78 se na dvou místech hovoří o zobecněném integrálu, ale tento pojem není vysvětlen. Cavalieriho princip je ve větě 11 na s. 73 zformulován pro prostorová tělesa, v posledním odstavci na této straně se ale bez upozornění aplikuje na rovinné útvary. Stanovení obsahu kruhu popsané na s. 74–75 podle mého názoru nemá nic společného s Cavalieriho principem, i když se na něj autor odvolává. Vztahy $\pi \doteq 1/\pi$ a $\pi/10 \doteq 3$ na s. 39 neplatí.
2) Oddíl 3.7 věnovaný křivosti mi z didaktického pohledu připadá nešťastný – jde jen o dosazování do vzorce pro křivost křivky, který je uveden bez zdůvodnění. Pochybuji, že takovéto příklady studenty zaujmou.
3) Oddíl 3.8 o Taylorově rozvoji mi připadá pro středoškoláky příliš technicky náročný. Vzorec (3.116) na s. 89 a následující příklad jsou matoucí – není udán stupeň Taylorova polynomu a zápis vypadá, jako by šlo o Taylorovu řadu. Věta na str. 90 tvrdící, že „Pokud pro hodnoty x blízko x_0 použijeme pro výpočet $f(x)$ aproximaci Taylorovým polynomem, dopustíme se nejmenší možné chyby, kterou aproximace polynomem umožňuje.“ není podložena žádným matematickým tvrzením. V řešení př. 110 na téže straně se vyskytuje další nepodložené tvrzení „poslední člen, který by mohl přispět, je šestý“. Věta „Jelikož polynom je nekonečnou řadou, pro garanci, že tato řada pro $x = 0$ neroste k ∞, musíme k řádnému vybudování teorie.“ na začátku s. 91 nedává smysl.
4) Výklad na s. 27–28 je zmatený: Odstavec za př. 10 je nesrozumitelný, př. 12 také. Ekvivalence uvedená na s. 27, 4. řádek zdola, není ekvivalencí. Další výklad je zbytečně zatemněn povídáním o diferencích a vztahy (3.8), přitom úplně stačí hledat řešení rekurentní rovnice ve tvaru geometrických posloupností a jejich lineárních kombinací. Ve vztahu (3.15) chybí limita, termín „kvocient přibližné posloupnosti“ v následující větě je nesrozumitelný.
5) Souhlasím s autorovým tvrzením na s. 21, že mnohé starší české učebnice byly pro začátečníky vhodnější a více dbaly na zařazování aplikačních úloh. Je ovšem škoda, že se autor omezil pouze na analýzu českých, slovenských a ruských textů. V angličtině existuje mnoho zdařilých moderních učebnic kalkulu, které jsou srozumitelné a vhodné i pro začátečníky (namátkou např. Briggs, Cochran, Gillett, and Schulz: *Calculus: Early Transcendentals*, která existuje i v elektronické verzi s pěknými interaktivní applety).
6) Nesouhlasím s tím, že autor v celé práci upřednostňuje fyzikální motivaci (např. při zavádění pojmu derivace) nad motivací geometrickou (kterou pokládá za zastaralou, např. s. 22 dole: „Voláme po tom, aby byly vytvořeny názorné a srozumitelné interaktivní materiály, kde motivací nebude hledání tečny a obsahu plochy.“). Podle mého názoru je geometrický přístup stejně důležitý jako přístup fyzikální. Navíc jsem se mnohokrát setkal se studenty MFF, kterým je fyzika vzdálená, ale geometrickému přístupu rozumějí. V této souvislosti je kuriózní, že dole na s. 59 autor kritizuje suchopárné geometrické úlohy na hledání extrémů, na dalších stranách pak ale sám uvádí řadu úloh tohoto typu.
7) V některých úlohách na extrémy, např. př. 87 na s. 63, vyšetřuje autor druh extrému pomocí znaménka druhé derivace. Přitom by stačilo najít pouze intervaly monotonie pomocí znaménka první derivace. V př. 83 na s. 61 dokonce autor vypočte pouze první derivace, poté píše, že výpočet druhých derivací je komplikovaný a uvádí jiný, podle mého názoru složitý a nekorektní argument. Je přitom triviální vyšetřit znaménko prvních derivací ve vzorci (3.70). V př. 93 autor hledá extrém funkce s odmocninou. Nejprve zbytečně vytkne jisté číslo, čímž se výraz pod odmocninou zkomplikuje (objeví se desetinná čísla). Poté píše, že funkci derivujeme. Přitom stačí

hledat extrém funkce pod odmocninou, čímž se postup zjednoduší. Nechápu tvrzení v poznámce pod čarou, že „Není jednoduché najít hodnoty tak, aby příklad šel řešit snadno bez použití kalkulačky".

8) V práci se zavádí nestandarní terminologie a značení, např.: Místo „derivovaná posloupnost" (s. 24) se běžně používá termín „posloupnost diferencí" a značí se symbolem Δa_i, nikoliv Da_i nebo a_i'. Místo „primitivní posloupnost" (s. 25) se běžně hovoří o „antidiferenci" a značí se $\sum_i a_i$, nikoliv A_i. (Mimochodem, zdá se mi, že celá část věnovaná diferencím je didakticky slabá. Klíčová skutečnost, že pomocí antidiferencí lze snadno počítat sumy, je prezentována jen na okraj v poznámce na s. 25 a není ilustrována žádným příkladem.) V celé práci se vyskytuje symbol rovnítka s vykřičníkem, o kterém netuším, co znamená. Na s. 69–70 se v souvislosti s integrováním hovoří o rektifikaci funkce, ale termín „rektifikace" je v literatuře běžně používán pro stanovení délky křivky. V řešení př. 73 na s. 59 jsou pro vyznačení priority použity hranaté závorky, což je matoucí, neboť stejným způsobem je na s. 29 značena celá část.

9) Oddíly 2.2.5 a 3.3 věnované diferenciálu jsou z pohledu matematiky nekorektní. V prvním odstavci oddílu 3.3 autor píše „Nenutíme žáka do představy nekonečně malého přímo." Hned v dalším odstavci však pracuje s nekonečně malými veličinami a diferencemi. Pro studenty to možná může být intuitivně srozumitelné, ale byla by škoda, kdyby nabyli dojmu, že matematika pracuje s vágně definovanými pojmy. Intuitivní pohled má být kombinován s korektními definicemi základních pojmů, které jsou sice obtížné, ale student by jim dříve či později měl porozumět. Nelze souhlasit s autorovým tvrzením na s. 12, že „Nekonečně malé je základním kamenem infinitesimální počtu, bez něj nemůžeme s výukou D&I uspět, o to složitější je ovšem tento pojem vysvětlit." Vzpomínám si, že jako student jsem měl problém porozumět fyzikálním textům, kde se benevolentně zacházelo s infinitezimálními veličinami, zatímco korektní matematický přístup mi připadal srozumitelný. Mimochodem definice limity funkce uvedená na s. 12 je nesprávná.

10) Autor kritizuje přehnaný formalismus v některých učebnicích, sám se ho však nedokázal vyvarovat. Odstrašujícím příkladem je definice 7 na s. 57 – bude student rozumět termínu „vnitřek souvislé komponenty"?

11) Místy mám dojem, že autor píše o věcech, kterým sám dobře nerozumí. Např. na s. 66: „Extremální situaci představují i tzv. integrály pohybu, veličiny I, pro jejichž časový vývoj platí $dI/dt = 0$." Integrály pohybu jsou skutečně veličiny, které se v čase zachovávají, ale nijak to nesouvisí s hledáním extrémů. Nebo na s. 72: „Výpočet integrálů z Riemannovy definice je téměř nemožný, a to i pro základní běžné funkce. Uznejme, že ani počítačově nelze projít všechna možná dělení intervalu a počítat rektifikace." Pokud víme, že integrál existuje (např. pokud je funkce spojitá), pak není nutné uvažovat všechna možná dělení, ale pouze jednu konkrétní posloupnost dělení, jejichž norma se blíží k nule (např. ekvidistantní dělení). Z definice tak lze bez problémů vypočítat např. integrály mocninných funkcí a je to pěkné cvičení pro studenty.

12) Dodatek A s dotazníkovým šetřením je zajímavý, ale nechápu význam dodatků B, C, D – jde o standardní poznatky.

Rozsah práce je nadprůměrný, její sepsání muselo zabrat velké množství času a nepochybuji o autorových dobrých úmyslech. Kvalita práce je bohužel podprůměrná. Nevylučuji, že některé části mohou být užitečné pro středoškolské učitele. U mnoha jiných pasáží se však obávám, že jejich následování ve výuce na SŠ může přinést více škody než užitku.

Doporučuji uznat práci jako diplomovou a navrhuji hodnocení *dobře.*

V Praze dne 18. 6. 2020

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK