

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Babeta Kvapilová

**Sbírka řešených úloh z analytické
geometrie**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji paní doktorce Hromadové za trpělivost, podnětné konzultace a skvělou spolupráci. Dále děkuji svému manželovi za podporu a ohleduplnost a všem, kteří mě podporovali.

Název práce: Sbírka řešených úloh z analytické geometrie

Autor: Bc. Babeta Kvapilová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., katedra

Abstrakt: Tato práce je určena pro učitele a studenty středních a vysokých škol. Jedná se o sbírku řešených úloh z analytické geometrie v rovině, která zahrnuje více řešení a jejich porovnání. Studentům sbírka pomůže rozšířit znalosti, učitelům poskytne odlišný náhled na věc a materiál do hodin. Těžší příklady jsou doplněny obrázky pro lepší pochopení. V práci je obsažena i praktická část, ve které se zaměřuji na časté chyby v příkladech a metody jejich odstranění.

Klíčová slova: analytická geometrie, sbírka úloh, kuželosečky

Title: A Collection of Solved Problem in Analytical Geometry

Author: Bc. Babeta Kvapilová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., department

Abstract: This thesis is intended for teachers and students of high schools and universities. It consists collection of solved problems from plane analytical geometry including various solutions and their comparison. The thesis aims to increase the student knowledge of the topic and to provide different approaches to problems and working materials for lessons for teachers. Pictures for better understanding are added for more difficult problems. The practical part focusing on common mistakes and their elimination is included.

Keywords: analytic geometry, a collection of problem, conic section

Obsah

Úvod	3
I Sběrka řešených příkladů	4
1 Body	5
1.1 Teorie	5
1.1.1 Souřadnice	5
1.1.2 Transformace souřadnic	6
1.1.3 Dělicí poměr	6
1.1.4 Vzdálenost dvou bodů	6
1.1.5 Střed úsečky	7
1.1.6 Těžiště trojúhelníku	7
1.1.7 Obsah trojúhelníku	7
1.1.8 Obsah pravidelného n -úhelníku	7
1.2 Příklady	7
2 Vektory	15
2.1 Teorie	15
2.1.1 Souřadnice vektoru	15
2.1.2 Velikost vektoru	15
2.1.3 Opačný vektor	15
2.1.4 Operace s vektory	15
2.1.5 Kolinearita vektorů	15
2.1.6 Odchylka dvou vektorů	16
2.1.7 Lineární kombinace vektorů	16
2.1.8 Dělicí poměr	16
2.2 Příklady	16
3 Přímky	27
3.1 Teorie	27
3.1.1 Parametrické vyjádření přímky	27
3.1.2 Obecná rovnice přímky	27
3.1.3 Směrnicový tvar rovnice přímky	27
3.1.4 Úsekový tvar rovnice přímky	28
3.1.5 Odchylka dvou přímek	28
3.1.6 Vzdálenost přímky a bodu	28
3.2 Příklady	28

4	Kuželosečky	39
4.1	Teorie	39
4.1.1	Kružnice	39
4.1.2	Elipsa	40
4.1.3	Hyperbola	41
4.1.4	Parabola	42
4.2	Příklady	43
5	Klasifikace kuželoseček	58
5.1	Teorie	58
5.1.1	Obecná rovnice kuželosečky	58
5.1.2	Transformace souřadnic	58
5.1.3	Asymptotické směry kuželosečky	59
5.1.4	Střed kuželosečky	59
5.1.5	Sdružené směry a průměry kuželosečky	59
5.1.6	Singulární body kuželosečky	59
5.1.7	Singulární kuželosečky	59
5.1.8	Klasifikace kuželoseček	60
5.2	Příklady	60
II	Praktická část	82
6	Praktická část	83
6.1	Zadání testu	83
6.2	Hodnocení řešení	84
6.2.1	Úloha číslo 1	84
6.2.2	Úloha číslo 2	85
6.2.3	Úloha číslo 3	86
6.2.4	Úloha číslo 4	87
6.2.5	Úloha číslo 5	88
6.2.6	Úloha číslo 6	89
6.3	Shrnutí	90
	Závěr	92
	Seznam použité literatury	93
	Seznam obrázků	95

Úvod

Autorka měla vždy moc ráda analytickou geometrii, ale její spolužáci její nadšení nesdíleli. Když začala učit, zjistila, že analytická geometrie je pro většinu studentů velmi neoblíbenou kapitolou matematiky. Studenti si neumí pod danou rovnici představit žádný geometrický útvar, uvědomit si všechny vlastnosti a vymyslet postup výpočtu. S tím prvním jim mohou pomoci obrázky a grafické softwary, například GeoGebra. Autorka učí již čtvrtým rokem na SPŠ a VOŠ Kladno a aplikaci GeoGebra využívá pravidelně v hodinách a snaží se, aby studenti každé rovnici dokázali přiřadit její grafickou podobu. Výsledky této práce bude využívat v praxi při hodinách.

Cílem práce bylo sesbírat zajímavější úlohy z rozličných sbírek úloh a ukázat jejich různá řešení. Proto se nejedná o klasickou sbírku pokrývající rovnoměrně všechny probíraná témata. Zdrojem úloh jsou učebnice vytvořené v letech 1928–2011. Pokud u úlohy není uveden zdroj, je autorem diplomantka. Všechny obrázky byly vytvořeny v aplikaci GeoGebra. Tato práce je rozdělena na dvě části. První část je sbírka řešených úloh rozdělená na pět kapitol. Každá kapitola obsahuje shrnutí teorie a řešené příklady. Některé příklady a jejich řešení přesahují více kapitol a jsou provázány odkazy. První kapitola *Body* se zaměřuje na příklady, kde využíváme pouze souřadnice bodů, jako je výpočet středu úsečky, obsahu trojúhelníka nebo vzdálenosti dvou bodů. Mnoho příkladů z první kapitoly má přesah do druhé s názvem *Vektory*. Ta obsahuje například výpočet lineární kombinace vektorů, odchylku vektorů atd. Třetí kapitola je aplikace vektorů a bodů a zaměřuje se na přímky, což je i její název. Jsou v ní procvičeny nejčastěji používané tvary rovnice přímky. Čtvrtá kapitola *Kuželosečky* obsahuje příklady, které se týkají kuželoseček, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnicové soustavy, jejich tečen a polár. Kuželosečky v obecné poloze jsou zařazeny v poslední kapitole první části *Klasifikace kuželoseček*. Cílem první části je přiblížit studentům zajímavější úlohy z analytické geometrie v rovině, ukázat několik možností řešení, aby si mohli vybrat to, které je pro ně nejjednodušší. Ráda bych, aby tato část sloužila i učitelům, aby rozšířili svůj pohled a podívali se na dané příklady i jiným přístupem. Zejména pro učitele je druhá část práce, která se zaměřuje na časté chyby studentů a metody, které jim pomáhají předcházet.

Část I

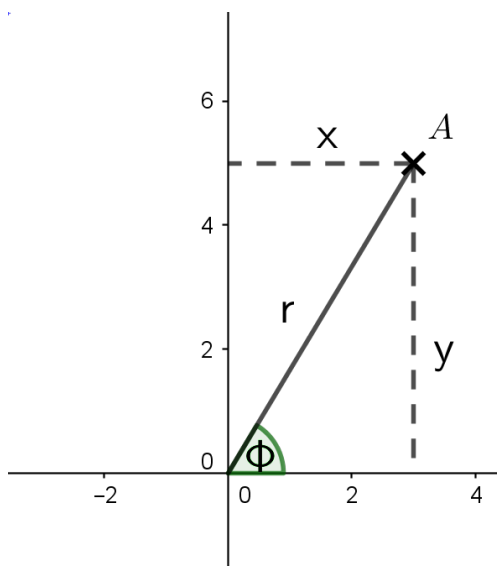
Sbírka řešených příkladů

Kapitola 1

Body

1.1 Teorie

1.1.1 Souřadnice



Obrázek 1.1: Soustavy souřadnic

Kartézská soustava souřadnic

V rovině jsou dvě osy x, y , které jsou navzájem kolmé. Jejich průsečík označíme P , počátek soustavy souřadnic. Definujeme x -ovou souřadnici bodu A jako orientovanou vzdálenost počátku P a kolmice na osu x procházející bodem A ; y -ovou souřadnici bodu A jako orientovanou vzdálenost počátku P a kolmice na osu y procházející bodem A . Zapisujeme: $A = [x, y] = [a_1, a_2]$. Souřadnice bodu A z obrázku 1.1 jsou $A = [3, 5]$.

Polární souřadnice

V rovině je dán pól P , ze kterého vychází polopřímky, z nichž je jedna označena jako nultá. První polární souřadnice bodu A určuje vzdálenost počátku P od bodu A , značíme ji r . Druhá polární souřadnice bodu A udává orientovanou velikost úhlu, který svírá spojnice bodu A a pólu P s nultou polopřímkou, značíme ji ϕ a udáváme v radiánech. Souřadnice bodu A z obrázku 1.1 jsou $A = \left[\sqrt{34}; \frac{41}{125}\pi \right]$.

1.1.2 Transformace souřadnic

Z polárních do kartézských souřadnic

Pro transformaci z polárních souřadnic do kartézských souřadnic použijeme následující vzorce:

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$$

Z kartézských do polárních souřadnic

Pro transformaci z kartézských do polárních souřadnic použijeme následující vzorce:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \phi = \frac{y}{x},$$
$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Posunutí

Posuneme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, že počátek se posune do bodu $O'[m, n]$, pro souřadnice x', y' posunutého bodu, platí rovnice:

$$x' = x - m, y' = y - n,$$

kde x, y jsou souřadnice bodu v původní soustavě.

Otočení

Otočíme-li kartézskou soustavu souřadnic okolo počátku P o úhel α v kladném smyslu, pro souřadnice x', y' otočeného bodu platí tyto rovnice:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

kde x, y jsou souřadnice bodu v původní soustavě.

1.1.3 Dělicí poměr

Dělicí poměr bodu $C[c_1, c_2]$ vzhledem k bodům $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ ($C \neq B$, $A \neq B$) značíme $\lambda = (ABC)$ a platí pro něj rovnice:

$$c_1 = \frac{a_1 - \lambda b_1}{1 - \lambda}, c_2 = \frac{a_2 - \lambda b_2}{1 - \lambda}.$$

Jiné vzorce pro dělicí poměr v sekci 2.1.8 na straně 16.

1.1.4 Vzdálenost dvou bodů

Nechť body A, B jsou dány souřadnicemi: $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$, pak jejich vzdálenost vypočítáme vzorcem:

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Nechť body A, B jsou dány polárními souřadnicemi $(r_A, \phi_A), (r_B, \phi_B)$, pak jejich vzdálenost vypočítáme vzorcem:

$$d(A, B) = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\phi_A - \phi_B)}$$

1.1.5 Střed úsečky

Nechť body A, B jsou dány souřadnicemi: $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, pak střed úsečky AB má souřadnice:

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right]$$

1.1.6 Těžiště trojúhelníku

Nechť body A, B, C jsou dány souřadnicemi: $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$, pak těžiště T trojúhelníku ABC má souřadnice:

$$T = \left[\frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1), \frac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2) \right]$$

1.1.7 Obsah trojúhelníku

Nechť body A, B, C jsou dány souřadnicemi: $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$, pak obsah trojúhelníku ABC je roven:

$$S = \frac{1}{2} \left| a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2) \right|$$

1.1.8 Obsah pravidelného n -úhelníku

Je-li pravidelný n -úhelník zadán souřadnicemi vrcholů: $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2], \dots$, pak obsah tohoto n -úhelníku vypočítáme pomocí vzorce:

$$S = \frac{1}{2} \left| (a_1 - b_1)(a_2 + b_2) + (b_1 - c_1)(b_2 + c_2) + \dots \right|$$

1.2 Příklady

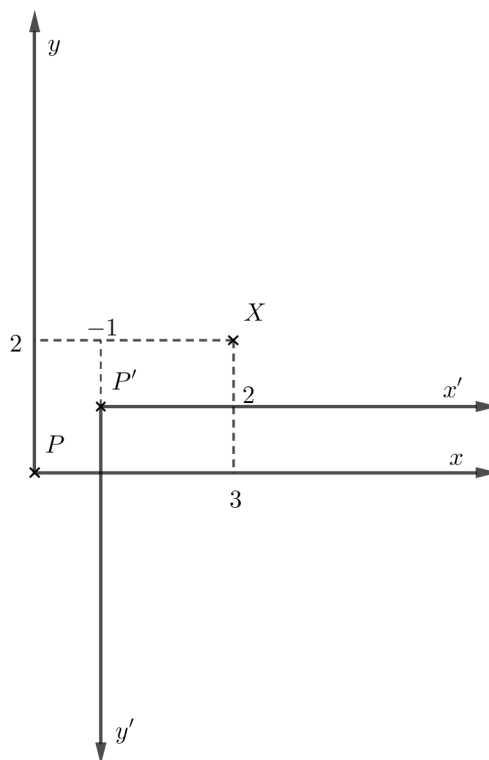
Příklad 1.1. Necht' ve zvolené soustavě souřadnic je $X[3, 2]$, $P[1, 1]$; určete souřadnice bodu X v soustavě souřadnic s počátkem P a osami x', y' rovnoběžnými s osami x, y původní soustavy souřadnic, přičemž orientace x' je stejná jako x a orientace y' je opačná než orientace y . [17, str. 16/6]

Řešení: Jedná se o posunutí soustavy a poté o změnu orientace jedné osy. Nejprve tedy posuneme:

$$x' = x - m, y' = y - n$$

$$x' = 3 - 1, y' = 2 - 1 \Rightarrow X'[2, 1]$$

Nyní už jen změním orientaci osy y . Výsledné souřadnice jsou $X'' = [2, -1]$.



Obrázek 1.2: Obrázek k příkladu 1.1

Příklad 1.2. Jsou dány body $A[-5, -7]$, $B[3, 1]$. Na přímce AB určete bod $C[c_1, c_2]$ tak, aby $(ABC) = 4$.

Řešení – 1. způsob: Použijeme k výpočtu první vzorec pro dělicí poměr uvedený v teorii.

$$c_1 = \frac{a_1 - \lambda b_1}{1 - \lambda}, c_2 = \frac{a_2 - \lambda b_2}{1 - \lambda}$$

$$c_1 = \frac{-5 - 12}{1 - 4}, c_2 = \frac{-7 - 4}{1 - 4}$$

$$C = \left[\frac{17}{3}, \frac{11}{3} \right]$$

Souřadnice bodu C jsou $\left[\frac{17}{3}, \frac{11}{3} \right]$.

Řešení – 2. a 3. způsob: Řešení s vektory viz příklad 2.4 na straně 19

Příklad 1.3. Vypočítejte délku úsečky MN , $M[1, 5]$ a $N[-2, 4]$. Dále napište souřadnice jejího středu.

Řešení – 1.způsob: Nejprve vypočítáme vzdálenost bodů M, N .

$$d(M, N) = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{10}$$

Nyní vypočítáme souřadnice středu S_{MN} .

$$S_{MN} = \left[\frac{m_1 + n_1}{2}, \frac{m_2 + n_2}{2} \right] = \left[\frac{1 + 2}{2}, \frac{5 + 4}{2} \right] = \left[\frac{-1}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

Délka úsečky je $\sqrt{10}$ a její střed má souřadnice $\left[\frac{-1}{2}, \frac{9}{2} \right]$.

Řešení - 2.způsob: Řešení pomocí vektorů v příkladu 2.5 na straně 20.

Příklad 1.4. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravouhlý. $A[0, 0]$, $B[3, 1]$, $C[1, 7]$
[11, str. 21/6]

Řešení – 1.způsob: Vypočítáme délky stran a zjistíme, zda splňují Pýthagorovu větu.

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad d(A, C) = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 1)^2} \quad d(A, C) = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 7)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{10} \quad d(A, C) = \sqrt{50}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} \quad d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 7)^2} \quad \sqrt{50}^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{40}^2$$

$$d(B, C) = \sqrt{40} \quad 50 = 10 + 40$$

Trojúhelník je pravouhlý.

Řešení – 2.způsob: Řešení pomocí vektorů v příkladu 2.6 na stránce 21.

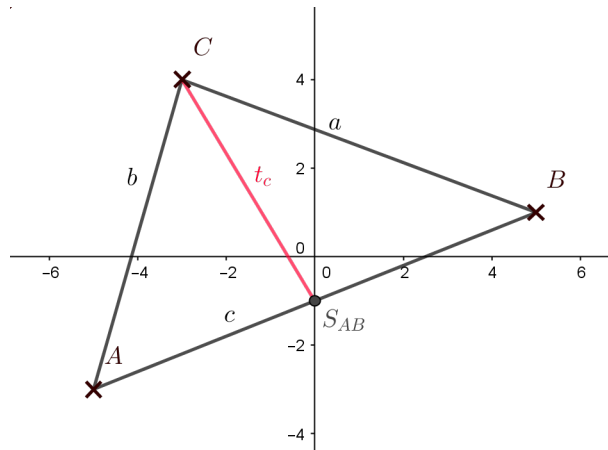
Příklad 1.5. Vypočítejte délku těžnice t_C trojúhelníku ABC , je-li dáno: $A[-5, -3]$, $B[5, 1]$, $C[-3, 4]$. [3, str. 9/1.41a]

Řešení: Těžnice t_C je spojnice středu strany AB a vrcholu C , označíme souřadnice bodů $A = [a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$.

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] \quad d(S_{AB}, C) = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2}$$

$$S_{AB} = \left[\frac{-5 + 5}{2}, \frac{-3 + 1}{2} \right] \quad d(S_{AB}, C) = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-1 - 4)^2}$$

$$S_{AB} = [0, -1] \quad d(S_{AB}, C) = \sqrt{34}$$



Obrázek 1.3: Obrázek k příkladu 1.5

Délka těžnice je $\sqrt{34}$.

Příklad 1.6. Body A , B , C jsou dány svými polárními souřadnicemi $r_A = 5$, $\phi_A = \frac{\pi}{2}$, $r_B = 8$, $\phi_B = \frac{5\pi}{6}$, $r_C = 3$, $\phi_C = \frac{7\pi}{6}$. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný. [7, str. 18/22]

Řešení: Vypočítáme délky stran a porovnáme:

$$d(A,B) = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\phi_A - \phi_B)} \quad d(C,B) = \sqrt{r_C^2 + r_B^2 - 2r_C r_B \cos(\phi_C - \phi_B)}$$

$$d(A,B) = \sqrt{5^2 + 8^2 - 80 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)} \quad d(C,B) = \sqrt{3^2 + 8^2 - 48 \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$d(A,B) = \sqrt{89 - 80 \cos \frac{\pi}{3}} = 7 \quad d(C,B) = \sqrt{73 - 48 \cos \frac{\pi}{3}} = 7$$

$$d(C,A) = \sqrt{r_C^2 + r_A^2 - 2r_C r_A \cos(\phi_C - \phi_A)}$$

$$d(C,A) = \sqrt{3^2 + 5^2 - 30 \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$d(C,A) = \sqrt{34 - 30 \cos \frac{2\pi}{3}} = 7$$

Trojúhelník je rovnostranný.

Příklad 1.7. Určete vrcholy 4-úhelníku, jsou-li středy jeho stran $S_1[1, 5]$, $S_2[0, 2]$, $S_3[2, -1]$, $S_4[3, 2]$. [17, str. 16/10]

Řešení: Vrcholy 4-úhelníku označíme postupně V_1, V_2, V_3, V_4 a jejich souřadnice $V_i = [x_i, y_i]$. Pokud jsou body S_1, S_2, S_3, S_4 po řadě středy úseček $V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, V_4V_1$ platí:

$$S_1 = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right] \quad \Rightarrow [1, 5] = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right]$$

$$S_2 = \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right] \quad \Rightarrow [0, 2] = \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right]$$

$$S_3 = \left[\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right] \quad \Rightarrow [2, -1] = \left[\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right]$$

$$S_4 = \left[\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2} \right] \quad \Rightarrow [3, 2] = \left[\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2} \right]$$

$$2 = x_1 + x_2$$

$$10 = y_1 + y_2$$

$$0 = x_2 + x_3$$

$$4 = y_2 + y_3$$

$$4 = x_3 + x_4$$

$$-2 = y_3 + y_4$$

$$6 = x_4 + x_1$$

$$4 = y_4 + y_1$$

Vytvořili jsme dvě soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých a vyřešíme je. Po vhodném sečtení rovnic nám vyjdou dvě dvojice totožných rovnic.

$$4 = x_4 - x_2$$

$$y_3 + y_4 = -2$$

Je zřejmé, že vrcholy nejsou body S_i určeny jednoznačně. Souřadnice vrcholu V_1, V_2, V_3 vyjádříme pomocí souřadnic V_4 .

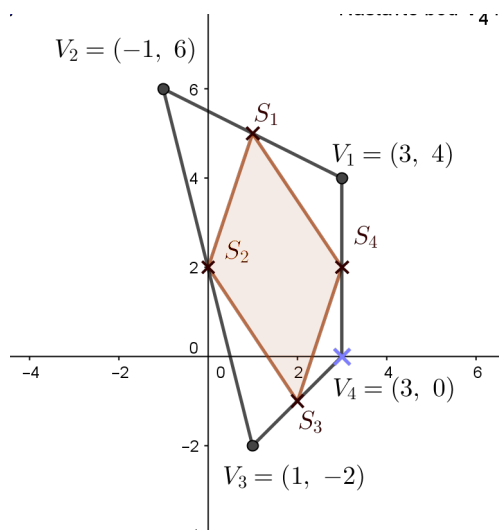
$$V_3 = [4 - x_4, -2 - y_4], V_2 = [-4 + x_4, 6 + y_4], V_1 = [6 - x_4, 4 - y_4]$$

Pro jedno konkrétní řešení viz obrázek 1.4 zvolíme souřadnice bodu $V_4 = [3, 0]$ a dopočítáme souřadnice ostatních vrcholů.

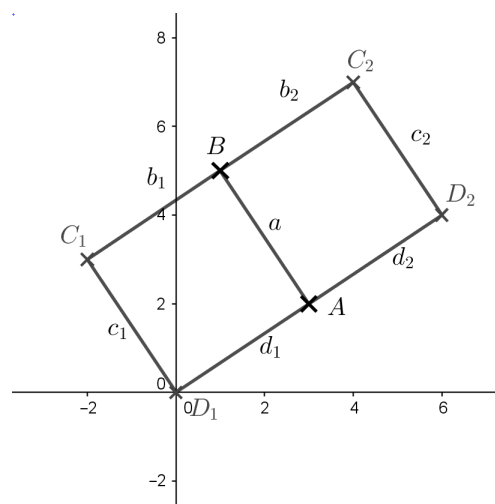
$$V_4 = [3, 0], V_1 = [6 - 3, 4 - 0] = [3, 4], V_2 = [-4 + 3, 6 + 0] = [-1, 6],$$

$$V_3 = [4 - 3, -2 - 0] = [1, -2]$$

Poznámka: Roku 1731 Pierre Varignon dokázal, že středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník (tzv. Varignonův čtyřúhelník), kromě případu, kdy středy stran leží na jedné přímce.



Obrázek 1.4: Konkrétní řešení z příkladu 1.7



Obrázek 1.5: Obě řešení k příkladu 1.8

Příklad 1.8. Dva sousední vrcholy čtverce jsou $A[3, 2]$, $B[1, 5]$. Určete ostatní vrcholy. [18, str. 36/24]

Řešení – 1.způsob: Nejprve spočítáme délku strany čtverce:

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{13}$$

Vzdálenost vrcholů B , C bude rovna $d(A,B) = \sqrt{13}$ a vzdálenost $|AC|$ vypočítáme pomocí Pýthagorovy věty.

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 + |AB|^2}$$

$$|AC| = \sqrt{13 + 13}$$

$$|AC| = \sqrt{26}$$

Získané výsledky dosadíme do rovnice pro vzdálenost dvou bodů a vyřešíme soustavu rovnic, kde $[c_1, c_2]$ jsou souřadnice bodu C .

$$d(B,C) = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} \quad \sqrt{13} = \sqrt{(1 - c_1)^2 + (5 - c_2)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} \quad \sqrt{26} = \sqrt{(3 - c_1)^2 + (2 - c_2)^2}$$

Vyřešíme soustavu.

$$13 = 1 - 2c_1 + c_1^2 + 25 - 10c_2 + c_2^2 \quad \sqrt{13} = \sqrt{\left(1 - \frac{3c_2 - 13}{2}\right)^2 + (5 - c_2)^2}$$

$$26 = 9 - 6c_1 + c_1^2 + 4 - 4c_2 + c_2^2 \quad 0 = c_2^2 - 10c_2 + 21$$

$$c_2 = 3 \Rightarrow c_1 = \frac{9 - 13}{2} = -2 \quad c_2 = 7 \Rightarrow c_1 = \frac{21 - 13}{2} = 4$$

$$13 = -13 + 6c_2 - 4c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{3c_2 - 13}{2} \quad C_1 = [-2, 3], C_2 = [4, 7]$$

Nyní zbývá obdobně dopočítat souřadnice vrcholu $D[d_1, d_2]$.

$$d(C_1, D) = \sqrt{(-2 - d_1)^2 + (3 - d_2)^2} \quad 0 = -10d_1 + 2d_2 \Rightarrow d_2 = 5d_1$$

$$d(A, D) = \sqrt{(3 - d_1)^2 + (2 - d_2)^2} \quad 13 = 4 + 4d_1 + d_1^2 + 9 - 30d_1 + 25d_1^2$$

$$0 = -d_1 + d_1^2$$

$$13 = 4 + 4d_1 + d_1^2 + 9 - 6d_2 + d_2^2 \quad d_1 = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

$$13 = 9 - 6d_1 + d_1^2 + 4 - 4d_2 + d_2^2 \quad d_1 = 1 \Rightarrow d_2 = 5$$

$$D_1 = [0, 0], D_2 = [1, 5]$$

Tato úloha má dvě řešení.

Řešení – 2.způsob: Jednodušší řešení s využitím vektorů naleznete v příkladu 2.13 na stránce 25.

Příklad 1.9. Který bod má od bodů $A[5, 3]$, $B[2, 1]$, $C[4, 2]$ stejné vzdálenosti?
[21, str. 12/7]

Řešení – 1. způsob: Označíme hledaný bod $D[d_1, d_2]$ a použijeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů.

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x - d_1)^2 + (y - d_2)^2} \\ \sqrt{(2 - d_1)^2 + (1 - d_2)^2} &= \sqrt{(5 - d_1)^2 + (3 - d_2)^2} \\ \sqrt{(4 - d_1)^2 + (2 - d_2)^2} &= \sqrt{(5 - d_1)^2 + (3 - d_2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6d_1 + 4d_2 - 29 &= 0 \Rightarrow d_1 = \frac{29 - 4d_2}{6} \\ 2d_1 + 2d_2 - 14 &= 0 \\ 2 \cdot \frac{29 - 4d_2}{6} + 2d_2 - 14 &= 0 \\ d_2 = 6,5 &\Rightarrow d_1 = 0,5 \\ D &= [0,5; 6,5]\end{aligned}$$

Stejnou vzdálenost od zadaných bodů má bod $D[0,5; 6,5]$.

Řešení – 2. způsob: Jiný způsob řešení v příkladu 4.1 na straně 43.

Kapitola 2

Vektory

2.1 Teorie

2.1.1 Souřadnice vektoru

Souřadnice vektoru s počátečním bodem $A = [a_1, a_2]$ a koncovým bodem $B = [b_1, b_2]$:

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

2.1.2 Velikost vektoru

Je dán vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, jeho velikost je definována: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

2.1.3 Opačný vektor

Je dán vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, vektor opačný k vektoru \vec{u} je $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$.

2.1.4 Operace s vektory

Jsou dány vektory $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ a reálné číslo k , pak operace s nimi jsou definovány následovně:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

$$\vec{x} = \vec{u} \cdot k = (u_1 \cdot k, u_2 \cdot k)$$

$$a = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

2.1.5 Kolinearita vektorů

Vektory \vec{u}, \vec{v} jsou kolineární¹, pokud $\exists k$, pro které platí: $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

¹V některých (spíše starších) učebnicích je místo kolinearity vektorů uvedena lineární závislost vektorů.

2.1.6 Odchylka dvou vektorů

Jsou dány vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, pro úhel φ , který svírají tyto dva vektory platí:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Z toho vyplývá, že pro kolmé vektory platí: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Pokud potřebujeme určit souřadnice vektoru kolmého k vektoru \vec{u} , nejjednodušší způsob je vzít vektor o souřadnicích $(-u_2, u_1)$.

2.1.7 Lineární kombinace vektorů

Jsou dány vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, vektor \vec{w} je lineární kombinací \vec{u} , \vec{v} , pokud platí: $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, kde a, b jsou reálná čísla.

2.1.8 Dělicí poměr

Absolutní hodnotu dělicího poměru bodů A, B, C ($C \in AB$, $A \neq B$) lze vypočítat pomocí vzorce:

$$|(ABC)| = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{BC}|}$$

Dělicí poměr je záporný, pokud je bod C vnitřním bodem úsečky AB , nulový, pokud je bod C totožný s bodem A a kladný ve všech ostatních případech.

Další rovnice, která platí pro dělicí poměr λ :

$$(C - A) = \lambda(C - B)$$

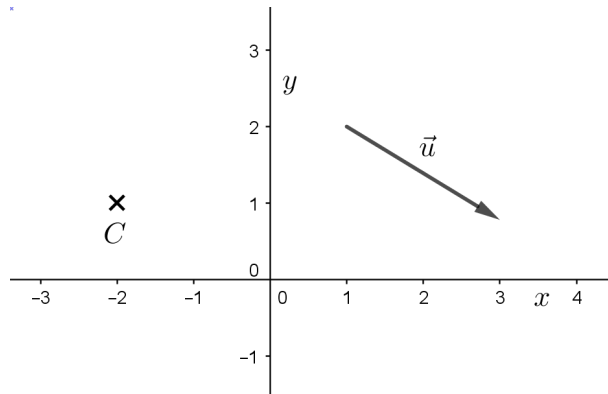
Jiný vzorec pro dělicí poměr v kapitole 1.1.3 na straně 6.

2.2 Příklady

Příklad 2.1. Jaké souřadnice má opačný vektor k vektoru \vec{u} (viz obrázek 2.1)? Napište souřadnice koncového bodu vektoru $-\vec{u}$ umístěného do bodu C .

Řešení – 1. způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice vektoru \vec{u} ze souřadnic jeho počátečního a koncového bodu. Poté dopočítáme souřadnice opačného vektoru.

$$\begin{aligned} A &= [1, 2], B = [3, 1] \\ \vec{u} &= B - A = (2, -1) \\ -\vec{u} &= (-2, 1) \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Obrázek k příkladu 2.1

Nyní umístíme opačný vektor do bodu C . Koncový bod označíme $D[d_1, d_2]$.

$$\begin{aligned} D &= C + (-\vec{u}) \\ D &= [-2, 1] + (-2, 1) \\ D &= [-4, 2] \end{aligned}$$

Řešení – 2.způsob: Do obrázku zakreslíme opačný vektor, ztotožníme jeho počáteční bod s počátkem a poté odečteme souřadnice koncového bodu.

$$-\vec{u} = (-2, 1)$$

Zakreslíme opačný vektor do soustavy souřadnic a zapíšeme souřadnice koncového bodu.

$$D = [-4, 2]$$

Příklad 2.2. K bodům $A = [3, 0]$, $B = [2, -1]$, $C = [5, -3]$ nalezněte souřadnice bodů P , Q , R tak, aby vektory splňovaly následující podmínky:

$$\vec{AB} = \vec{CP}, \vec{BC} = \vec{AQ}, \vec{CA} = \vec{BR}$$

[9, str. 170/6.50]

Řešení: Vyjádříme vektory pomocí souřadnic bodů:

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1, b_2 - a_2) &= (p_1 - c_1, p_2 - c_2) \\ (c_1 - b_1, c_2 - b_2) &= (q_1 - a_1, q_2 - a_2) \\ (a_1 - c_1, a_2 - c_2) &= (r_1 - b_1, r_2 - b_2) \end{aligned}$$

Po dosazení souřadnic bodů získáme tyto rovnice:

$$\begin{aligned}(2 - 3, -1 - 0) &= (p_1 - 5, p_2 + 3) \\ (5 - 2, -3 + 1) &= (q_1 - 3, q_2 - 0) \\ (3 - 5, 0 + 3) &= (r_1 - 2, r_2 + 1)\end{aligned}$$

Porovnáme odpovídající složky vektorů a vypočítáme jednotlivé souřadnice:

$$\begin{aligned}-1 &= p_1 - 5 \Rightarrow p_1 = 4 & -2 &= r_1 - 2 \Rightarrow r_1 = 0 \\ -1 &= p_2 + 3 \Rightarrow p_2 = -4 & 3 &= r_2 + 1 \Rightarrow r_2 = 2 \\ 3 &= q_1 - 3 \Rightarrow q_1 = 6 \\ -2 &= q_2\end{aligned}$$

Výsledné body mají souřadnice $P = [4, -4]$, $Q = [6, 2]$, $R = [0, 2]$.

Příklad 2.3. Uspořádané dvojice bodů $[A, B]$, $[E, F]$ jsou umístěním téhož vektoru $\vec{u} = \left(4, 3\sqrt{2}\right)$, přičemž $B = \left[-\frac{4}{3}, 7\right]$, $E = \left[5\sqrt{3}, 0\right]$. Určete souřadnice bodů A , F a velikost vektoru \vec{u} . [16, str. 119/3]

Řešení: Označíme souřadnice bodů $A = [a_1, a_2]$, $F = [f_1, f_2]$ a dosadíme do následujících rovnic:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{AB} \\ \vec{u} &= \vec{EF}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(4, 3\sqrt{2}\right) &= \left(-\frac{4}{3} - a_1, 7 - a_2\right) \\ \left(4, 3\sqrt{2}\right) &= \left(5\sqrt{3} - f_1, f_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 &= -\frac{4}{3} - a_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{16}{3} \\ 3\sqrt{2} &= 7 - a_2 \Rightarrow a_2 = 7 - 3\sqrt{2} \\ 4 &= 5\sqrt{3} - f_1 \Rightarrow f_1 = 5\sqrt{3} - 4 \\ 3\sqrt{2} &= f_2\end{aligned}$$

Souřadnice bodů jsou $A = \left[-\frac{16}{3}, 7 - 3\sqrt{2} \right]$, $F = \left[5\sqrt{3} - 4, 3\sqrt{2} \right]$. Nyní vypočítáme velikost vektoru \vec{u} :

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}$$

Příklad 2.4. Jsou dány body $A[-5, -7]$, $B[3, 1]$. Na přímce AB určete bod C tak, aby $(ABC) = 4$.

Řešení – 1. způsob: Řešení bez vektorů viz příklad 1.2 na straně 8

Řešení – 2. způsob: Použijeme k výpočtu druhý vzorec pro dělicí poměr uvedený v teorii.

$$\begin{aligned} (C - A) &= \lambda(C - B) \\ (c_1 + 5, c_2 + 7) &= 4(c_1 - 3, c_2 - 1) \\ c_1 + 5 &= 4(c_1 - 3) \Rightarrow c_1 = \frac{17}{3} \\ c_2 + 7 &= 4(c_2 - 1) \Rightarrow c_2 = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Souřadnice bodu C jsou $\left[\frac{17}{3}, \frac{11}{3} \right]$.

Řešení – 3. způsob: Označíme souřadnice bodu $C = [c_1, c_2]$ a dosadíme do vzorce pro dělicí poměr.

$$\begin{aligned} |(ABC)| &= \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{BC}|} \\ 4 &= \frac{|(c_1 + 5, c_2 + 7)|}{|(c_1 - 3, c_2 - 1)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{(c_1 - 3)^2 + (c_2 - 1)^2} &= \sqrt{(c_1 + 5)^2 + (c_2 + 7)^2} \\ 16(c_1^2 - 6c_1 + 9 + c_2^2 - 2c_2 + 1) &= c_1^2 + 10c_1 + 25 + c_2^2 + 14c_2 + 49 \\ 15c_1^2 - 106c_1 + 15c_2^2 - 46c_2 + 86 &= 0 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že vektory \vec{AC} a \vec{AB} jsou lineárně závislé. Vektor $\vec{AB} = (8, 8)$, to znamená $c_1 - 3 = c_2 - 1$.

Řešíme tedy soustavu:

$$\begin{aligned}15c_1^2 - 106c_1 + 15c_2^2 - 46c_2 + 86 &= 0 \\c_1 - 3 &= c_2 - 1 \Rightarrow c_1 = c_2 + 2 \\15(c_2 + 2)^2 - 106(c_2 + 2) + 15c_2^2 - 46c_2 + 86 &= 0 \\30c_2^2 - 92c_2 - 66 &= 0 \\c_{21} &= \frac{11}{3} \\c_{22} &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Dosadíme do jedné z rovnic soustavy.

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{11}{3} + 2 = \frac{17}{3} \\c_{12} &= -\frac{3}{5} + 2 = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Musíme ověřit zkouškou, protože jsme používali neekvivalentní úpravy.

$$(ABC_1) = 4, (ABC_2) = -4$$

Výsledkem tohoto příkladu je bod $C_1 = \left[\frac{17}{3}, \frac{11}{3} \right]$.

Příklad 2.5. Vypočítejte délku úsečky MN , $M[1, 5]$ a $N[-2, 4]$. Dále napište souřadnice jejího středu.

Řešení - 1.způsob: Řešení bez vektorů v příkladu 1.3 na straně 8.

Řešení - 2.způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice vektoru MN a poté jeho velikost.

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= (-2 - 1, 4 - 5) = (-3, -1) \\|\vec{MN}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

Střed úsečky MN vypočítáme pomocí poloviny vektoru \vec{MN}

$$S_{MN} = M + \frac{\vec{MN}}{2} = \left[1 + \frac{-3}{2}, 5 + \frac{-1}{2} \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

Délka úsečky je $\sqrt{10}$ a její střed má souřadnice $\left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$.

Příklad 2.6. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý. $A[0, 0]$, $B[3, 1]$, $C[1, 7]$
[11, str. 21/6]

Řešení – 1.způsob: Řešení bez vektorů v příkladu 1.4 na stránce 9.

Řešení – 2.způsob: Vypočítáme směrové vektory stran trojúhelníku.

$$\vec{AC} = (1, 7)$$

$$\vec{AB} = (3, 1)$$

$$\vec{BC} = (-2, 6)$$

Pokračování řešení – způsob a): Trojúhelník je pravoúhlý, dosadíme do Pýthagorovy věty a vypočítáme délky stran v trojúhelníku.

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

Ověříme, zda délky stran vyhovují Pýthagorově větě.

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

$$(\sqrt{50})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{40})^2$$

Předchozí rovnost platí, takže trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Pokračování řešení – způsob b): V pravoúhlém trojúhelníku jsou dva vektory navzájem kolmé, spočítáme tedy jejich skalární součin.

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 3 + 7 = 10$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -6 + 6 = 0$$

Trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Nejjednodušším řešením tohoto příkladu je ověření skalárního součinu vektorů.

Příklad 2.7. Trojúhelník ABC má vrcholy $A = [-5, 2], B = [1, 5]$. Stanovte souřadnice vrcholu C , jestliže vektor $\vec{AC} = (3, -4)$. Dále určete délky stran trojúhelníka. [16, str. 119/5]

Řešení: Označíme si souřadnice bodu $C = [c_1, c_2]$ a dosadíme do následující rovnice:

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= C - A \\ 3 &= c_1 + 5 \Rightarrow c_1 = -2 \\ -4 &= c_2 - 2 \Rightarrow c_2 = -2\end{aligned}$$

Bod C má souřadnice $C = [-2, -2]$. Nyní vypočítáme délky stran pomocí velikostí vektorů:

$$\begin{aligned}|c| &= |\vec{AB}| = |(1 + 5, 5 - 2)| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ |a| &= |\vec{BC}| = |(-2 - 1, -2 - 5)| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58} \\ |b| &= |\vec{AC}| = |(3, -4)| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

Délky stran trojúhelníku jsou 5, $\sqrt{58}$ a $3\sqrt{5}$.

Příklad 2.8. Jsou dány body $A = [-2, 5], B = [4, -3], C = [1, c_2]$. Určete číslo c_2 tak, aby body A, B, C ležely v jedné přímce. Vyjádřete pak vektory \vec{AC} a \vec{BC} jako číselné násobky vektoru \vec{AB} [16, str. 127/4]

Řešení: Aby body byly kolineární, musí platit následující rovnice:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= k \cdot \vec{AC} \\ (4 + 2, -3 - 5) &= k \cdot (1 + 2, c_2 - 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 &= 3k \Rightarrow k = 2 \\ -8 &= 2(c_2 - 5) \Rightarrow c_2 = 1\end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$$

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= t \cdot \vec{AB} \\ (1 - 4, 1 + 3) &= t(6, -8) \\ -3 &= 6t \Rightarrow t = -2 \\ \vec{BC} &= -2 \cdot \vec{AB}\end{aligned}$$

Číslo c_2 je rovno 1. Vektor \vec{AC} je polovinou vektoru \vec{AB} , vektor \vec{BC} je dvojnásobek opačného vektoru k vektoru \vec{AB} .

Příklad 2.9. Je dán vektor $\vec{u} = (4, 9)$. Určete reálné číslo m tak, aby vektor $\vec{v} = (m, 2)$ byl kolmý k vektoru \vec{u} . [15, str. 102/32]

Řešení: Pro kolmé vektory musí platit, že jejich skalární součin je roven nule.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ (4, 9) \cdot (m, 2) &= 0 \\ 4m + 18 &= 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Číslo m je rovno $-\frac{9}{2}$.

Příklad 2.10. V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body $A = [-2, 0]$, $B = [2, 4]$, $C = \left[-3, -\frac{2}{3}\right]$, $D = \left[1, \frac{5}{3}\right]$. Zjistěte, zda jsou si vektory \vec{AB} , \vec{CD} rovny. [16, str. 113/4]

Řešení: Vektory jsou si rovny, pokud mají stejný směr a stejnou velikost. Nejprve ověříme kolinearitu.

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= k \cdot \vec{CD} \\ (4, 4) &= k \cdot \left(4, \frac{7}{3}\right)\end{aligned}$$

Neexistuje žádné reálné číslo k , které by splňovalo tuto rovnici. Z toho vyplývá, že vektory nejsou kolineární a tím pádem si nemohou být rovny.

Příklad 2.11. Je dán vektor $\vec{u} = (\sqrt{3}, -1)$. Určete souřadnice vektoru \vec{v} , který svírá s vektorem \vec{u} úhel 60° a jeho velikost je rovna 4. [15, str. 101/28]

Řešení: Označíme si souřadnice vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a dosadíme do vzorce pro odchylku dvou vektorů.

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \frac{(\sqrt{3}, -1) \cdot (v_1, v_2)}{|(\sqrt{3}, -1)| \cdot |(v_1, v_2)|} \\ \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3} \cdot v_1 - v_2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= \sqrt{3} \cdot v_1 - v_2\end{aligned}$$

Současně musí být velikost vektoru \vec{v} rovna 4. Dosadíme tedy do předchozí rovnice, přidáme rovnici pro velikost vektoru a vypočítáme soustavu.

$$\begin{aligned}4 &= \sqrt{3} \cdot v_1 - v_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{3} \cdot v_1 - 4 \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= 4\end{aligned}$$

$$\sqrt{v_1^2 + (\sqrt{3} \cdot v_1 - 4)^2} = 4$$

$$v_1^2 + 3 \cdot v_1^2 - 8 \cdot \sqrt{3} + 16 = 16$$

$$4v_1^2 - 8 \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$v_{11} = 0, \quad v_{12} = 2\sqrt{3}$$

$$v_{21} = \sqrt{3} \cdot 0 - 4 = -4 \quad v_{22} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 4 = 2$$

Příklad má dvě řešení $\vec{v}_1 = (0, -4)$ a $\vec{v}_2 = (2\sqrt{3}, 2)$.

Příklad 2.12. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Necht $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - B$, $\vec{c} = A - C$. Vyjádřete vektor \vec{c} jako lineární kombinaci vektorů \vec{a} , \vec{b} . [7, str. 55/72]

Řešení:

$$\vec{c} = A - C = A - C + B - B = (B - C) + (A - B) = -(C - B) - (B - A) = -\vec{b} - \vec{a}$$

Příklad 2.13. Dva sousední vrcholy čtverce jsou $A[3, 2]$, $B[1, 5]$. Určete ostatní vrcholy. [18, str. 36/24]

Řešení – 1.způsob: Řešení bez vektorů v příkladu 1.8 na straně 12.

Řešení – 2.způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice vektoru \vec{AB} .

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 3)$$

Kolmý vektor k vektoru \vec{AB} stejné velikosti má souřadnice $\vec{n} = (-3, -2)$. K bodu A přičteme vektor \vec{n} a získáme bod C_1 .

$$C_1 = B + \vec{n} = [1, 5] + (-3, -2) = [-2, 3]$$

$$D_1 = C_1 - \vec{AB} = [-2, 3] - (-2, 3) = [0, 0]$$

Příklad má ještě jedno řešení, které vypočítáme obdobně, jen odečtením vektoru \vec{n} .

$$C_2 = B - \vec{n} = [1, 5] - (-3, -2) = [4, 7]$$

$$D_2 = C_2 - \vec{AB} = [4, 7] - (-2, 3) = [6, 4]$$

Úloha má dvě řešení viz obrázek 1.5 na straně 12.

Příklad 2.14. Vyjádřete vektor $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ jako lineární kombinaci vektorů \vec{u}, \vec{v} , je-li $\vec{u} = (3, -1), \vec{v} = (1, -2), \vec{w} = (-1, 7)$. [7, str. 69/80]

Řešení: Nejprve musíme vyjádřit \vec{w} jako lineární kombinaci vektorů \vec{u}, \vec{v} .

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

$$(-1, 7) = a \cdot (3, -1) + b \cdot (1, -2)$$

$$-1 = 3a + b \Rightarrow b = -1 - 3a$$

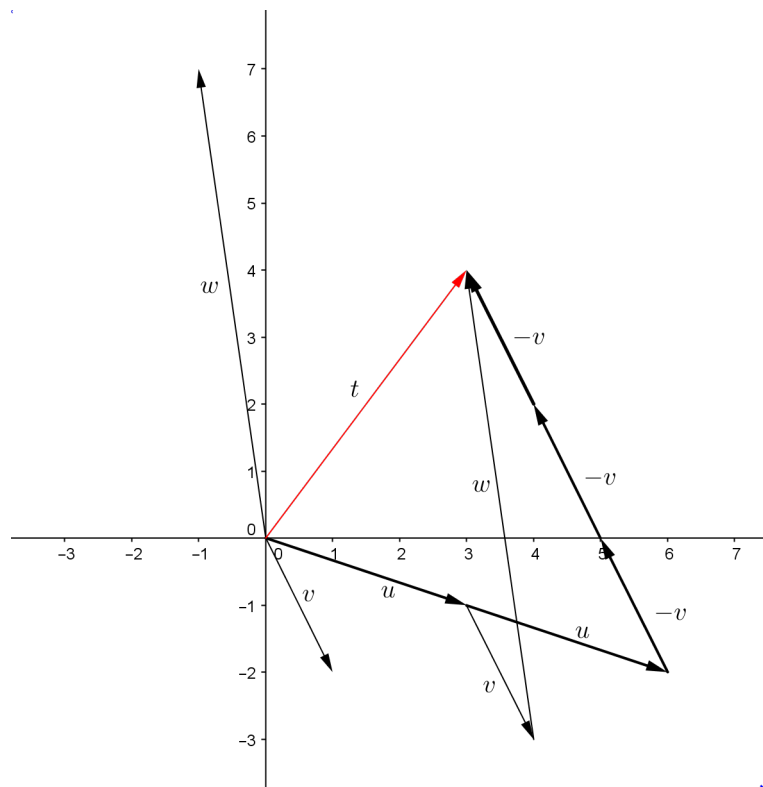
$$7 = -a - 2b$$

$$7 = -a - 2 \cdot (-1 - 3a) \Rightarrow a = 1$$

$$b = -1 - 3 = -4$$

$$\vec{w} = \vec{u} - 4 \cdot \vec{v}$$

$$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} - 4 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v}$$



Obrázek 2.2: Obrázek k příkladu 2.14

Kapitola 3

Přímky

3.1 Teorie

3.1.1 Parametrické vyjádření přímky

Přímka $p = AB$ má parametrické vyjádření:

$$p : X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $\vec{u} = B - A$ je směrový vektor přímky AB a t je reálný parametr.

3.1.2 Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky p je definována:

$$p : ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge (a, b) \neq (0, 0)$. Vektor $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor přímky p , pro nějž platí: $\vec{n} \perp \vec{u}$.

3.1.3 Směrnice tvar rovnice přímky

Směrnice tvar rovnice přímky p je definován:

$$p : y = kx + q,$$

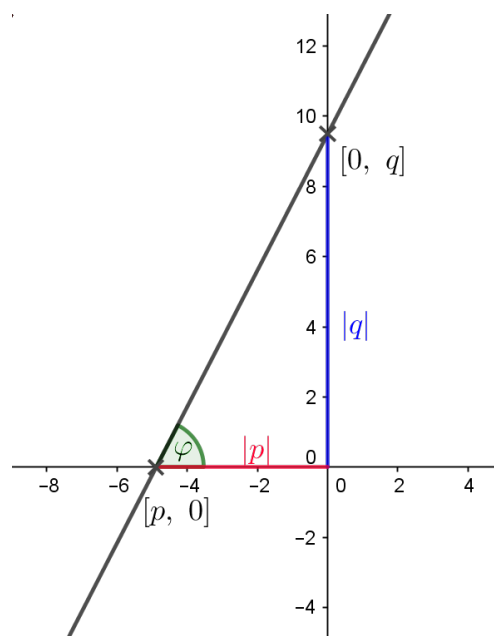
kde $k, q \in \mathbb{R}$. Číslo k se nazývá směrnice přímky a je možné ji vypočítat: $k = \tan \varphi$, kde φ je úhel, který svírá kladná poloosa x s danou přímkou p . Směrnice tvar má každá přímka v rovině kromě přímk rovnooběžných s osou y .

3.1.4 Úsekový tvar rovnice přímky

Úsekovým tvarem rovnice přímky nazýváme rovnici:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

kde p , q jsou orientované vzdálenosti průsečíků přímky se souřadnicovými osami od počátku viz obrázek 3.1, p , $q \neq 0$. Úsekový tvar nemají přímky procházející počátkem a přímky rovnoběžné s osami.



Obrázek 3.1: Směrnice a úsekový tvar přímky

3.1.5 Odchylka dvou přímek

Odchylku φ dvou přímek vypočítáme dosazením směrových nebo normálových vektorů přímek do vzorce:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Podmínkou rovnoběžnosti přímek a , b je $\vec{u}_a = k \cdot \vec{u}_b$, kde $k \in \mathbb{R}$. Podmínkou kolmosti přímek a , b je $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = 0$.

Poznámka: Na rozdíl od odchylky vektorů je odchylka přímek z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

3.1.6 Vzdálenost přímky a bodu

Přímka p je zadána obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$ a bod $A[a_1, a_2]$. Pak vzdálenost bodu A a přímky p vypočítáme:

$$d(Ap) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3.2 Příklady

Příklad 3.1. Napište parametrické rovnice přímky p , která prochází bodem $A[3, -1]$ a je rovnoběžná s přímkou $q : 2x + 3y + 7 = 0$.

Řešení: Rovnoběžné přímky mají stejné směrové vektory, což znamená, že mají i stejné normálové vektory.

$$\begin{aligned} p : 2x + 3y + c &= 0 \\ A \in p \Rightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + c &= 0 \\ c &= -3 \\ p : 2x + 3y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Převédeme na parametrické vyjádření.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3 = 0 &\Rightarrow y = 1 - \frac{2}{3}x \\ p : x &= t \quad t \in \mathbb{R} \\ y &= 1 - \frac{2}{3}t \end{aligned}$$

Řešení - 2.způsob: Z obecné rovnice přímky q vyčteme její normálový vektor, který je kolmý na směrový vektor přímky p .

$$\begin{aligned} \vec{n}_q = (2, 3) &\Rightarrow \vec{u}_p = (-3, 2) \\ p : X &= A + t\vec{u}_p \\ x &= 3 - 3t \\ y &= -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Jedna přímka má více parametrických vyjádření.

Příklad 3.2. Spočítejte odchylku přímek $a : 3x - y + 7 = 0$, $b : x = 1 - 3t$, $y = 2 + t$

Řešení: Musíme si uvědomit, že rovnice přímky a je dána v obecném tvaru. Můžeme určit normálový vektor. Přímka b je dána parametrickým vyjádřením. Můžeme určit směrový vektor.

$$\begin{aligned} \vec{n}_a = (3, -1) &\Rightarrow \vec{u}_a = (1, 3) \\ \vec{u}_b &= (-3, 1) \\ \cos \varphi &= \frac{|\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b|}{|\vec{u}_a| \cdot |\vec{u}_b|} = \frac{|-3 + 3|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 0 \\ \varphi &= 90^\circ \end{aligned}$$

Přímky jsou na sebe kolmé.

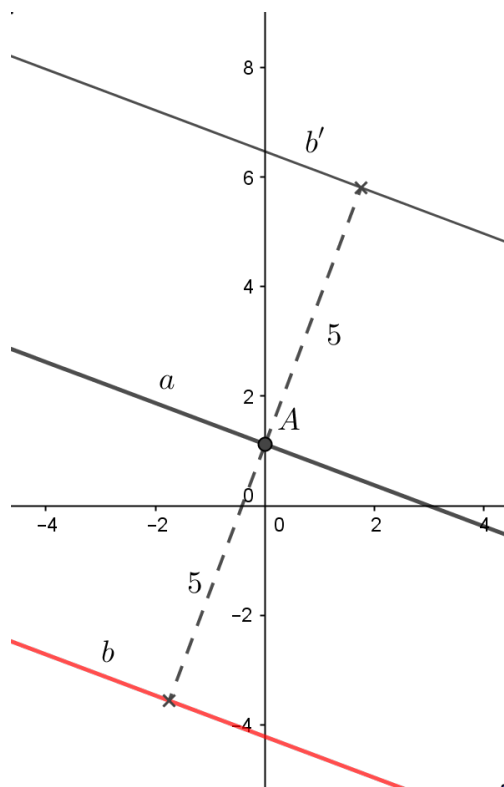
Příklad 3.3. Napište obecnou rovnici přímky b , která je rovnoběžná s přímkou $a : 3x + 8y - 9 = 0$, má od ní vzdálenost rovnou 5 a leží v téže polorovině jako počátek. [4, str. 64/17] (zadání upraveno)

Řešení:

$$a : 3x + 8y - 9 = 0 \Rightarrow \vec{n}_a = (3, 8)$$

$$b : 3x + 8y + c = 0$$

Dále vypočítáme souřadnice libovolného bodu A , který leží na přímce a a použijeme vztah pro vzdálenost přímky a bodu.



$$A = \left[0, \frac{9}{8}\right]$$

$$d(Ab) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$5 = \frac{|3 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{9}{8} + c|}{\sqrt{3^2 + 8^2}}$$

$$5\sqrt{73} = |9 + c|$$

$$0 = c^2 + 18c - 1744$$

$$c_1 = -9 - 5\sqrt{73} \quad c_2 = -9 + 5\sqrt{73}$$

Obrázek 3.2: Obrázek k příkladu 3.3

Vzhledem k tomu, že přímka musí ležet ve stejné polorovině jako počátek, vybereme absolutní člen c_2 . Přímka b má rovnici: $3x + 8y - 9 + 5\sqrt{73} = 0$.

Příklad 3.4. Strany trojúhelníka leží v přímkách $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Určete souřadnice jeho vrcholů a těžiště. [10, str. 89/2.12]

Řešení: Vrcholy trojúhelníku jsou průsečíky daných přímek.

$$\begin{array}{lll} 4x + 3y - 5 = 0 & x - 2 = 0 & x - 2 = 0 \\ x - 3y + 10 = 0 & x - 3y + 10 = 0 & 4x + 3y - 5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 15y - 45 = 0 & 3y - 12 = 0 & -3y - 3 = 0 \\ y = 3 & y = 4 & y = -1 \\ x = -1 & x = 2 & x = 2 \\ A = [-1, 3] & B = [2, 4] & C = [2, -1] \end{array}$$

Vypočítáme těžiště T daného trojúhelníku.

Pokračování řešení – 1.způsob: Těžiště je průsečíkem těžnic. Vypočítáme nejprve rovnice těžnic. Těžnice je spojnice středu strany a protějšího vrcholu.

$$\begin{array}{ll} S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] & S_{BC} = \left[\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2} \right] \\ S_{AB} = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right] & S_{BC} = \left[2, \frac{3}{2} \right] \\ \vec{u}_{t_c} = S_{AB} \vec{C} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right) & \vec{u}_{t_a} = S_{BC} \vec{A} = \left(-3, \frac{3}{2} \right) \\ n_{t_c} = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right) & n_{t_a} = \left(\frac{3}{2}, 3 \right) \\ t_c : \frac{9}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot (-1) + c_1 = 0 & t_a : \frac{3}{2} \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + c_2 = 0 \\ c_1 = -\frac{15}{2} & c_2 = -\frac{15}{2} \\ t_c : \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{15}{2} = 0 & t_a : \frac{3}{2}x + 3y - \frac{15}{2} = 0 \end{array}$$

Vypočítáme průsečík těžnic.

$$\begin{array}{l} \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{15}{2} = 0 \\ \frac{3}{2}x + 3y - \frac{15}{2} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 3x \\ x + 2y - 5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ T = [1, 2] \end{array}$$

Pokračování řešení – 2.způsob: Použijeme vzorec pro výpočet těžiště.

$$T = \left[\frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1), \frac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2) \right] = \left[\frac{1}{3}(-1 + 2 + 2), \frac{1}{3}(3 + 4 - 1) \right] = [1, 2]$$

Použití vzorce je mnohem jednodušší řešení, ale při způsobu jedna používají studenti analytické myšlení a musí si uvědomit souvislosti s geometrickou konstrukcí těžiště.

Příklad 3.5. Bodem $A[5, -2]$ proložte přímku, která se souřadnicovými osami tvoří trojúhelník ve čtvrtém kvadrantu o obsahu rovném 36 j^2 . [4, str. 64/7]

Řešení: Označíme souřadnice vrcholů daného trojúhelníku $B = [b_1, 0]$, $C[0, c_2]$, $P[0, 0]$. Trojúhelník je pravoúhlý, dosadíme do rovnice pro obsah trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že trojúhelník leží ve čtvrtém kvadrantu, je b_1 kladné a c_2 záporné.

$$S = \frac{|b_1 \cdot c_2|}{2}$$

$$-72 = |b_1 \cdot c_2| \quad (*)$$

Pokračování řešení – 1. způsob: Přímku, která prochází bodem A vyjádříme parametrickými rovnicemi:

$$X = A + t \cdot \vec{BA}$$

$$x = 5 + t \cdot (5 - b_1)$$

$$y = -2 - 2t$$

Bod C je také bodem této přímky.

$$0 = 5 + t \cdot (5 - b_1) \Rightarrow b_1 = 5 + \frac{5}{t}$$

$$c_2 = -2 - 2t$$

Dosadíme do rovnice pro výpočet obsahu daného trojúhelníku.

$$-72 = b_1 \cdot c_2 \qquad b_{11} = 5 + \frac{5}{1} = 30$$

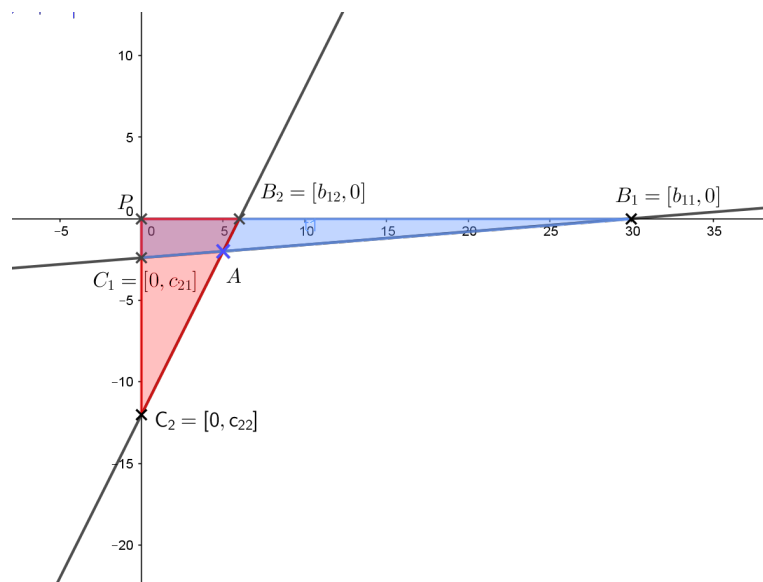
$$-72 = \left(5 + \frac{5}{t}\right) \cdot (-2 - 2t) \qquad c_{21} = -2 - 2 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{12}{5}$$

$$t_1 = \frac{1}{5} \qquad b_{12} = 5 + \frac{5}{5} = 6$$

$$t_2 = 5 \qquad c_{22} = -2 - 2 \cdot 5 = -12$$

$$p_1 : \begin{aligned} x &= 5 - 25t \\ y &= -2 - 2t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$p_2 : \begin{aligned} x &= 5 - t \\ y &= -2 - 2t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Obrázek 3.3: Obrázek k příkladu 3.5

Pokračování řešení – 2.způsob: Vyjádříme úsekový tvar rovnice dané přímky.

$$\frac{x}{b_1} + \frac{y}{c_2} = 1$$

$$A \in p : \frac{5}{b_1} - \frac{2}{c_2} = 1 \Rightarrow 5c_2 - 2b_1 = b_1c_2$$

Dosadíme vztah (*).

$$5c_2 + \frac{2 \cdot 72}{c_2} = -72$$

$$5c_2^2 + 72c_2 + 144 = 0$$

$$c_{21} = 12 \Rightarrow b_{11} = 6$$

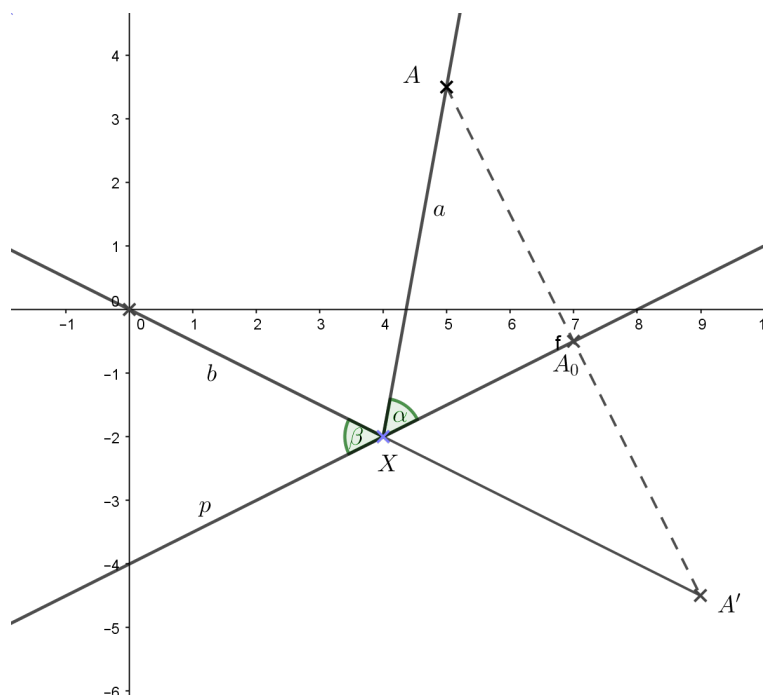
$$c_{22} = \frac{24}{5} \Rightarrow b_{12} = 15$$

$$p_1 : \frac{x}{6} + \frac{y}{12} = 1$$

$$p_2 : \frac{10x}{24} + \frac{y}{30} = 1$$

Úsekový tvar přímky je pro tento příklad nejnázornější, doporučuji ho využít při řešení.

Příklad 3.6. Na přímce $p : x - 2y - 8 = 0$ určete bod X , ve kterém se od přímky odrazí světelný paprsek vycházející z bodu $A \left[5, \frac{7}{2} \right]$ a procházející po odrazu počátkem P . [4, str. 65/24](zadání upraveno)



Obrázek 3.4: Obrázek k příkladu 3.6

Řešení – 1. způsob: Odražený paprsek prochází bodem A' , který je souměrně sdružený s bodem A dle přímky p viz obrázek 3.4. Povedeme bodem A kolmici k přímce p a budeme počítat souřadnice průsečíku A_0 .

$$\begin{aligned}\vec{n}_a &= (1, -2) = \vec{u}_k \\ \vec{n}_k &= (2, 1) \wedge A \in k \\ 2 \cdot 5 + 1 \cdot \frac{7}{2} + c &= 0 \Rightarrow c = -\frac{27}{2} \\ k : 2x + y - \frac{27}{2} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x + y - \frac{27}{2} &= 0 \\ x - 2y - 8 &= 0 \Rightarrow x = 8 + 2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4(8 + 2y) + 2y - 27 &= 0 \\ y &= -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 7 \\ A_0 &= \left[7, -\frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

Dále vypočítáme souřadnice bodu $A' = [x, y]$.

$$\begin{aligned}|AA_0| &= |A'A_0| \\ \sqrt{2^2 + (-4)^2} &= \sqrt{(7-x)^2 + \left(-\frac{1}{2} - y\right)^2} \\ 4x^2 + 4y^2 - 56x + 4y + 117 &= 0 \\ A' \in k &\Rightarrow 2x + y - \frac{27}{2} = 0 \Rightarrow y = -2x + \frac{27}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^2 + 4\left(-2x + \frac{27}{2}\right)^2 - 56x + 4\left(-2x + \frac{27}{2}\right) + 117 &= 0 \\ x^2 - 14x + 45 &= 0 \\ x_1 = 9 &\Rightarrow y_1 = -\frac{9}{2} \Rightarrow A' \\ x_1 = 5 &\Rightarrow y_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow A\end{aligned}$$

Odražený paprsek se ztotožní s přímkou, která prochází počátkem a bodem A' . Hledaný bod je průsečík této přímky a zadané přímky p .

$$\vec{u}_b = P\vec{A}' = \left(9, -\frac{9}{2}\right)$$

$$\vec{n}_b = \left(\frac{9}{2}, 9\right) \wedge P \in b$$

$$b : \frac{9}{2}x + 9y = 0$$

$$9x + 18y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

$$x - 2y - 8 = 0$$

$$-2y - 2y - 8 = 0$$

$$y = -2 \quad x = 4$$

Bod X má souřadnice $[4, -2]$.

Řešení – 2. způsob: Pokud vedeme k přímce kolmici a budeme počítat společný průsečík, je výhodnější použít jedno parametrické vyjádření a jednu obecnou rovnici.

$$p : x - 2y - 8 = 0 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, -2)$$

$$k : X = A + t \cdot \vec{n}_p$$

$$x = 5 + t$$

$$y = \frac{7}{2} - 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$5 + t - 2\left(\frac{7}{2} - 2t\right) - 8 = 0 \Rightarrow t = 2$$

Parametr t pro průsečík A_0 je 2, pro A' je dvojnásobný.

$$x = 5 + 4$$

$$y = \frac{7}{2} - 2 \cdot 4$$

$$A = \left[9, -\frac{9}{2}\right]$$

Odražený paprsek se ztotožní s přímkou, která prochází počátkem a bodem A' . Hledaný bod je průsečík této přímky a zadané přímky p .

$$\vec{u}_b = P\vec{A}' = \left(9, -\frac{9}{2}\right)$$

$$\vec{n}_b = \left(\frac{9}{2}, 9\right) \wedge P \in b$$

$$b: \frac{9}{2}x + 9y = 0$$

$$\begin{aligned} 9x + 18y = 0 &\Rightarrow x = -2y \\ x - 2y - 8 = 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2y - 2y - 8 = 0 \\ y = -2 \quad x = 4 \\ X = [4, -2] \end{aligned}$$

Bod X má souřadnice $[4, -2]$.

Příklad 3.7. Základna rovnoramenného trojúhelníku leží na přímce $c: x + y - 1 = 0$, jedno jeho rameno leží na přímce $a: x - 2y - 2 = 0$, druhé rameno prochází bodem $P = [-2, 0]$. Určete obecnou rovnici přímky b , v níž leží druhé rameno. [7, str. 126/176](zadání upraveno)

Řešení: Označíme si B průsečík přímek c , a a vypočítáme jeho souřadnice.

$$\begin{aligned} x - 2y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1 - y \end{aligned}$$

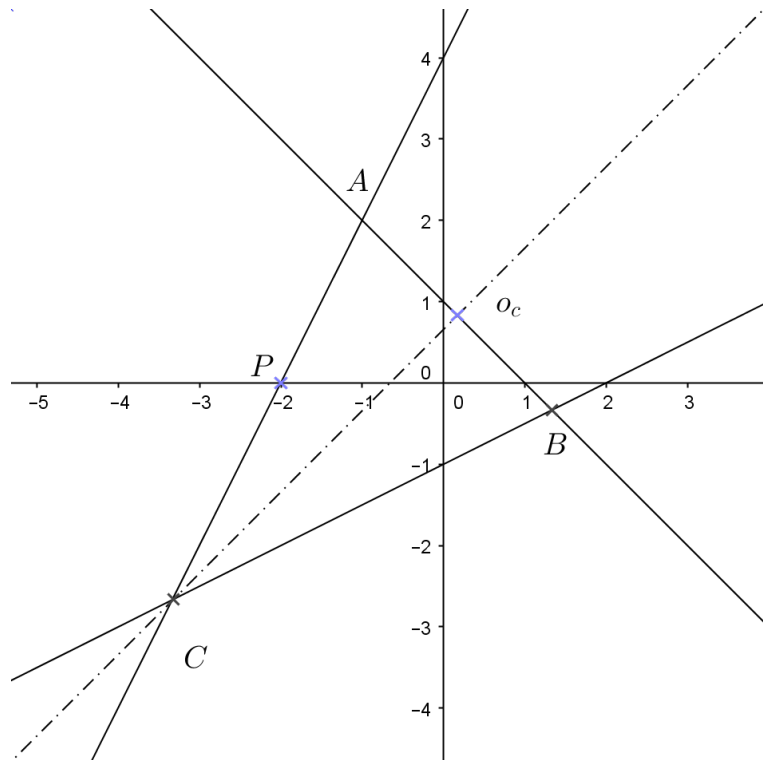
$$3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$B = \left[\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

Základna c je rovnoběžná s osou druhého a čtvrtého kvadrantu viz obrázek 3.5, trojúhelník bude symetrický dle rovnoběžky o_c s osou prvního a třetího kvadrantu. Budou tedy platit následující vztahy mezi směrovými vektory.

$$\begin{aligned} \vec{u}_a = (m, n) &\Rightarrow \vec{u}_b = (n, m) \wedge P \in b \\ b: -2x + y + c = 0 \\ -2 \cdot (-2) + 0 + c = 0 &\Rightarrow c = -4 \\ b: -2x + y - 4 = 0 \end{aligned}$$



Obrázek 3.5: Obrázek k příkladu 3.7

Obecná rovnice přímky, ve které leží druhé rameno je $-2x + y - 4 = 0$.

Kapitola 4

Kuželosečky

Ve středoškolských učebnicích se pracuje s regulárními kuželosečkami, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic. O singulárních kuželosečkách a o kuželosečkách v obecné poloze se zmiňují v další kapitole.

4.1 Teorie

Obecný tvar rovnice kuželosečky, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, je dán vztahem:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0)$$

4.1.1 Kružnice

Uvažujme kružnici \mathcal{K} se středem $S[m, n]$ a poloměrem r , $r > 0$.

Středový tvar rovnice kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Tečna ke kružnici

Nechť $T = [t_1, t_2]$ je bod kružnice \mathcal{K} . Tečna s bodem dotyku T ke kružnici \mathcal{K} má rovnici:

$$(t_1 - m)(x - m) + (t_2 - n)(y - n) - r^2 = 0.$$

Polára ke kružnici

Je dán bod $R = [r_1, r_2]$. Polára bodu R vzhledem ke kružnici \mathcal{K} má rovnici:

$$(r_1 - m)(x - m) + (r_2 - n)(y - n) - r^2 = 0.$$

Pokud bod R leží na kružnici \mathcal{K} , je jeho polára zároveň tečnou ke kružnici \mathcal{K} .

Mocnost bodu ke kružnici

Je dán bod $M = [m_1, m_2]$. Mocnost \bar{m} bodu M ke kružnici \mathcal{K} je dána vztahem:

$$\bar{m} = |MS|^2 - r^2$$

Chordála dvou kružnic

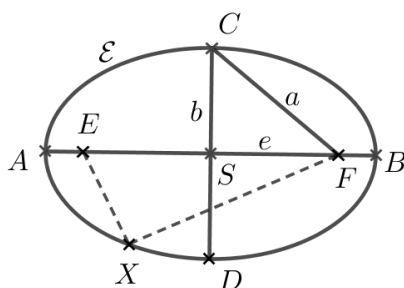
Nechť $K_1 = 0$ a $K_2 = 0$ jsou obecné rovnice kružnic, pak chordála ch těchto dvou kružnic je přímka o rovnici:

$$ch : K_1 - K_2 = 0.$$

4.1.2 Elipsa

Elipsa je množina bodů X v rovině, které mají od dvou pevně zvolených bodů E, F stálý součet vzdáleností $|XE| + |XF| = 2a$, přičemž $2a > |EF| > 0$. Střed elipsy \mathcal{E} označíme $S[m, n]$, hlavní poloosu $a, a > 0$ a vedlejší poloosu $b, b > 0$.

Vlastnosti elipsy



A, B – hlavní vrcholy

C, D – vedlejší vrcholy

E, F – ohniska

$a = |AS|$ – délka hlavní poloosy

$b = |CS|$ – délka vedlejší poloosy

$e = |ES|$ – excentricita

AB – hlavní osa

CD – vedlejší osa

Obrázek 4.1: Elipsa

Středový tvar rovnice elipsy

Elipsa \mathcal{E} s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp. y , má středový tvar rovnice:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

resp.

$$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1.$$

Tečna k elipse

Tečna k elipse e s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp. y , s bodem dotyku $T = [t_1, t_2]$ má rovnici:

$$\frac{(x - m)(t_1 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(t_2 - n)}{b^2} = 1,$$

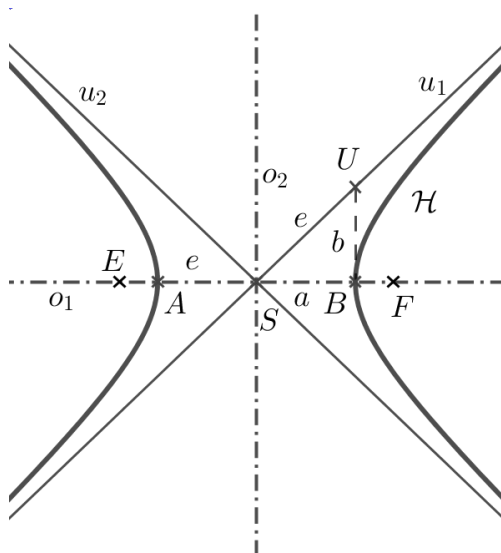
resp.

$$\frac{(x - m)(t_1 - m)}{b^2} + \frac{(y - n)(t_2 - n)}{a^2} = 1.$$

4.1.3 Hyperbola

Hyperbola je množina bodů X v rovině, která má od dvou pevně zvolených bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $||XE| - |XF|| = 2a$, přičemž $0 < 2a < |EF|$. Označme $S[m, n]$ střed hyperboly \mathcal{H} , hlavní poloosu $a, a > 0$ a vedlejší poloosu $b, b > 0$.

Vlastnosti hyperboly



- A, B – vrcholy
- E, F – ohniska
- $a = |AS|$ – délka hlavní poloosy
- $b = |BU|$ – délka vedlejší poloosy
- $e = |ES| = |SU_1|$ – excentricita
- u_1, u_2 – asymptoty
- o_1, o_2 – osy

Obrázek 4.2: Hyperbola

Středový tvar rovnice hyperboly

Hyperbola \mathcal{H} s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp. y , má středový tvar rovnice:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

resp.

$$-\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1.$$

Tečna hyperboly

Tečna k hyperbole \mathcal{H} s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp. y , s bodem dotyku $T = [t_1, t_2]$ má rovnici:

$$\frac{(x - m)(t_1 - m)}{a^2} - \frac{(y - n)(t_2 - n)}{b^2} = 1,$$

respektive

$$-\frac{(x - m)(t_1 - m)}{b^2} + \frac{(y - n)(t_2 - n)}{a^2} = 1.$$

Asymptoty hyperboly

Asymptotami hyperboly \mathcal{H} s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp. s y , jsou přímky:

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m),$$

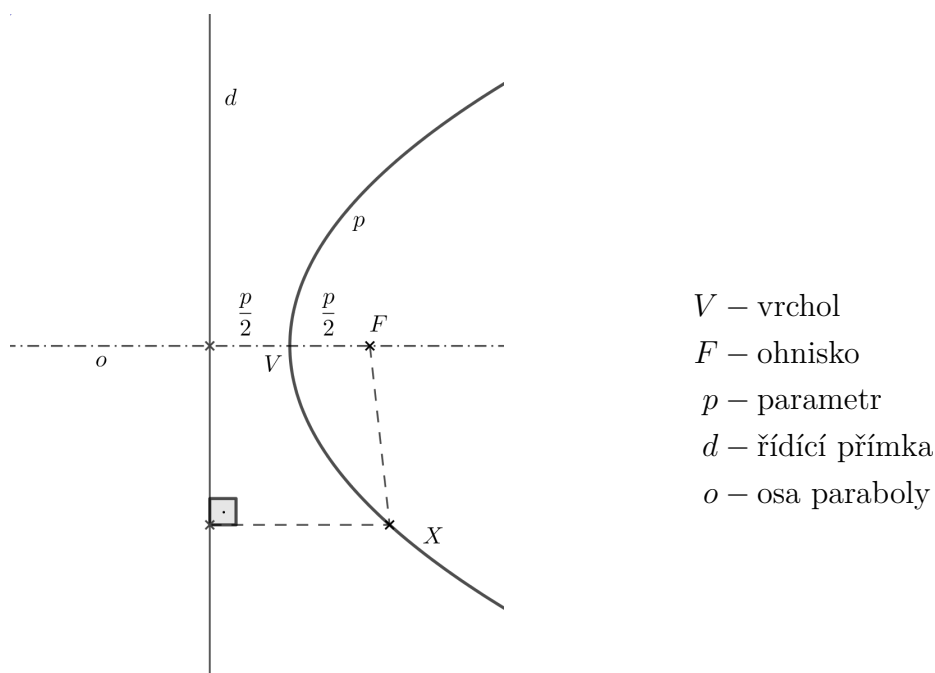
resp.

$$y - n = \pm \frac{a}{b}(x - m)$$

4.1.4 Parabola

Parabola je množina bodů X v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu F a od pevné přímky d , která neprochází F .

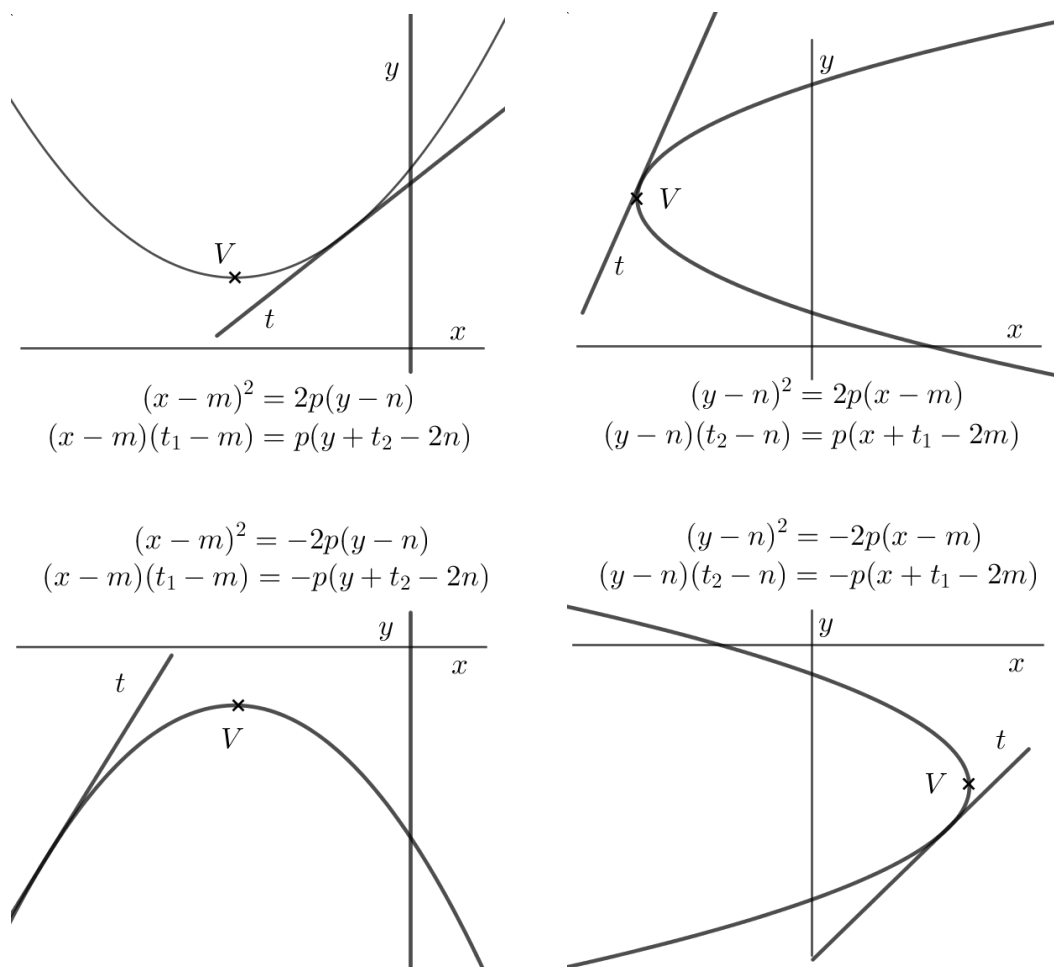
Vlastnosti paraboly



Obrázek 4.3: Parabola

Vrcholový tvar rovnice paraboly a rovnice tečny

Vrcholový tvar rovnice paraboly i rovnice její tečny závisí na její poloze viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Vrcholový tvar a tečny

4.2 Příklady

Příklad 4.1. Který bod má od bodů $A[5, 3]$, $B[2, 1]$, $C[4, 2]$ stejné vzdálenosti?
[21, str. 12/7]

Řešení – 1. způsob: Řešení pomocí vzdáleností bodů v příkladu 1.9 na straně 14.

Řešení – 2. způsob: Bod D je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC .

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

$$(5 - m)^2 + (3 - n)^2 = r^2$$

$$(2 - m)^2 + (1 - n)^2 = r^2$$

$$(4 - m)^2 + (2 - n)^2 = r^2$$

$$14m - 4n + 29 = 0$$

$$-2m - 2n + 14 = 0 \Rightarrow n = -m + 7$$

$$14m + 4m - 28 + 29 = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{13}{2}$$

Souřadnice daného bodu jsou $\left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$.

Příklad 4.2. Jakou excentricitu má hyperbola zadaná rovnicí

$$(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 25?$$

Řešení: Nejprve upravíme rovnici hyperboly na středový tvar.

$$(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 25$$

$$\frac{(x + 2)^2}{25} - \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

Ze středové rovnice odečteme délky poloos.

$$a = 5, \quad b = 5$$

$$e = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Excentricita této hyperboly je rovna $5\sqrt{2}$.

Příklad 4.3. Najděte společné tečny křivek $a : x^2 + y^2 = 4$ a $b : x^2 + 9y^2 = 9$
[12, str. 177/16.17]

Řešení: Upravíme rovnice křivek na středový tvar.

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{kružnice}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \text{elipsa}$$

Vzhledem k souměrnosti obou křivek podle souřadnicových os budeme zjišťovat rovnici tečny t_1 s body dotyku v prvním kvadrantu. Tečna je společná pro obě křivky, ale body dotyku budou různé. Bod dotyku kružnice označíme $T_1 = [x_1, y_1]$ a bod dotyku elipsy $T_2 = [x_2, y_2]$. Napíšeme rovnice tečen s dosazenými body dotyku.

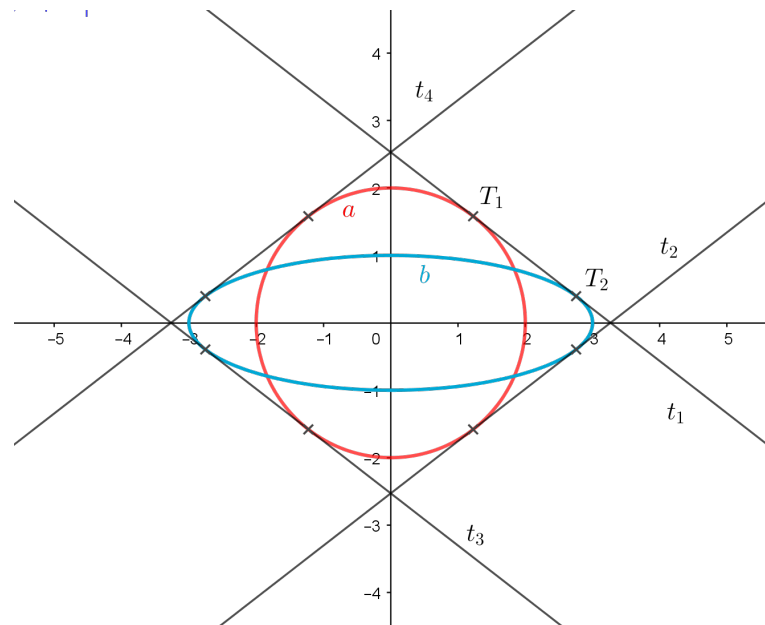
$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{y_1} - \frac{x \cdot x_1}{y_1}$$

$$\frac{x \cdot x_2}{9} + \frac{y \cdot y_2}{1} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{y_2} - \frac{x \cdot x_2}{9y_2}$$

Protože obě rovnice jsou rovnice jedné přímky, porovnáme absolutní členy a směrnice.

$$\frac{4}{y_1} = \frac{1}{y_2} \Rightarrow y_1 = 4y_2$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{9y_2} \Rightarrow 9x_1y_2 = x_2y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{4x_2}{9}$$



Obrázek 4.5: Obrázek k příkladu 4.3

Body dotyku náležejí daným křivkám i tečnám, splňují tedy následující rovnice,

do kterých dosadíme vztahy pro x_1, y_1 .

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{4x_2^2}{9}\right)^2 + (4y_2)^2 = 4$$

$$x_2^2 + 9y_2^2 = 9$$

$$16x_2^2 + 1296y_2^2 = 324$$

$$x_2^2 + 9y_2^2 = 9$$

Pro řešení v 1. kvadrantu platí: $y_2 = \sqrt{\frac{5}{32}}$

$$x_2 = \sqrt{\frac{243}{32}}$$

$$t_1 : y = \sqrt{\frac{32}{5}} - \frac{x}{9} \cdot \sqrt{\frac{243}{5}}$$

Další tečny jsou souměrné s t_1 podle souřadnicových os, napíšeme jejich rovnice:

$$t_2 : y = -\sqrt{\frac{32}{5}} - \frac{x}{9} \cdot \sqrt{\frac{243}{5}}$$

$$t_3 : y = -\sqrt{\frac{32}{5}} + \frac{x}{9} \cdot \sqrt{\frac{243}{5}}$$

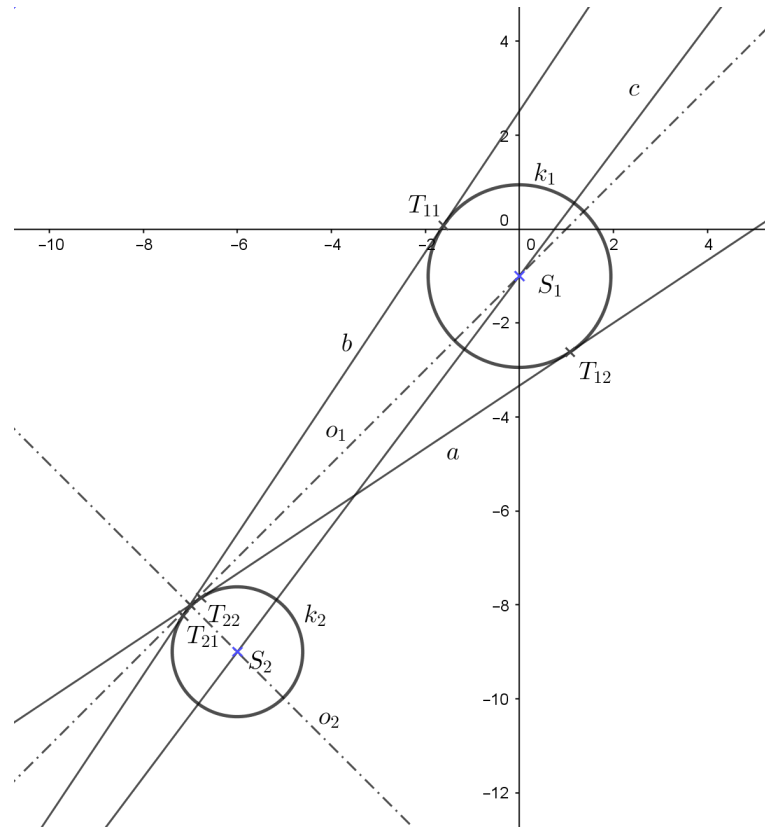
$$t_4 : y = \sqrt{\frac{32}{5}} + \frac{x}{9} \cdot \sqrt{\frac{243}{5}}$$

Příklad 4.4. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek $a : 2x - 3y - 10 = 0$, $b : 3x - 2y + 5 = 0$ a jejíž střed leží na přímce $c : 4x - 3y - 3 = 0$. [10, str. 246/4.3.]

Řešení: Kružnice se dotýká přímek a , b , vzdálenost jejího středu $S = [s_1, s_2]$ od obou těchto přímek je r .

$$d(aS) = \frac{|2s_1 - 3s_2 - 10|}{\sqrt{4 + 9}} = d(bS) = \frac{|3s_1 - 2s_2 + 5|}{\sqrt{9 + 4}}$$

Body, které mají od a, b stejnou vzdálenost, leží na osách o_1, o_2 úhlů, které svírají přímky a, b . Jejich rovnice jsou:



Obrázek 4.6: Obrázek k příkladu 4.4

$$|2s_1 - 3s_2 - 10| = |3s_1 - 2s_2 + 5|$$

$$S \in c \Rightarrow 4s_1 - 3s_2 - 3 = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{3s_2 + 3}{4}$$

$$\left| 2 \cdot \frac{3s_2 + 3}{4} - 3s_2 - 10 \right| = \left| 3 \cdot \frac{3s_2 + 3}{4} - 2s_2 + 5 \right|$$

$$|-6s_2 - 34| = |s_2 + 29|$$

$$s_2 = -9 \Rightarrow s_1 = -6 \Rightarrow S_2 = [-6, -9]$$

$$s_2 = -1 \Rightarrow s_1 = 0 \Rightarrow S_1 = [0, -1]$$

$$r_1 = d(aS_1) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) - 10|}{\sqrt{4+9}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow k_1 : x^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{13}$$

$$r_2 = d(aS_2) = \frac{|2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-9) - 10|}{\sqrt{4+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \Rightarrow k_2 : (x+6)^2 + (y+9)^2 = \frac{25}{13}$$

Úloha má dvě řešení. Rovnice kružnic jsou uvedeny výše.

Příklad 4.5. Veďte tečny k dané hyperbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$ rovnoběžné s danou přímkou $p : 10x - 12y + 5 = 0$ [10, str. 253/4.57.]

Řešení: Tečny mají stejný normálový vektor \vec{n} jako přímkou p .

$$\vec{n} = (-10, 12)$$

$$t : -10x + 12y + c = 0$$

Přímka je tečnou dané hyperboly, pokud s ní má společný právě jeden bod. Vyřešíme soustavu rovnic.

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$t : -10x + 12y + c = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{c}{12}$$

$$\frac{x^2}{81} - \frac{\left(\frac{5}{6}x + \frac{c}{12}\right)^2}{36} = 1$$

Upravíme tuto rovnici a spočítáme její diskriminant.

$$-36x^2 - 20cx - c^2 - 5184 = 0$$

Rovnice bude mít právě jeden kořen, pokud diskriminant bude roven 0.

$$D = 256c^2 - 746496 = 0$$

$$c_{1, 2} = \pm 54$$

Úloha má 2 řešení, tečny mají rovnice:

$$t_1 : -10x + 12y + 54 = 0$$

$$t_2 : -10x + 12y - 54 = 0$$

Příklad 4.6. Určete rovnici kružnice \mathcal{K} opsané trojúhelníku ABC o vrcholech: $A[-2, 5]$, $B[5, 6]$, $C[2, -3]$. [4, str. 223/4] (zadání upraveno)

Řešení – 1.způsob: Střed kružnice \mathcal{K} má od všech vrcholů stejnou vzdálenost,

která je rovna poloměru dané kružnice.

$$|AS| = |BS| = |CS|$$

$$\sqrt{(m+2)^2 + (n-5)^2} = \sqrt{(m-5)^2 + (n-6)^2} = \sqrt{(m-2)^2 + (n+3)^2}$$

$$m^2 + 4m + 4 + n^2 - 10n + 25 = m^2 - 10m + 25 + n^2 - 12n + 36 \dots \text{osa AB}$$

$$m^2 + 4m + 4 + n^2 - 10n + 25 = m^2 - 4m + 4 + n^2 + 6n + 9 \dots \text{osa AC}$$

$$14m + 2n - 32 = 0 \Rightarrow n = 16 - 7m$$

$$8m - 16n + 16 = 0$$

$$8m - 16(16 - 7m) + 16 = 0$$

$$m = 2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow S[2, 2]$$

$$r = |AS| = \sqrt{(2+2)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$k : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Kružnice opsaná má rovnici $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Řešení – 2.způsob: Všechny tři body náležejí kružnici opsané, jejich souřadnice musí vyhovovat její rovnici. Dosadíme do středového tvaru rovnice kružnice a budeme řešit soustavu.

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$(-2-m)^2 + (5-n)^2 = r^2 \Rightarrow m^2 + n^2 - 4m + 6n + 13 = r^2$$

$$(5-m)^2 + (6-n)^2 = r^2 \Rightarrow m^2 + n^2 - 10m - 12n + 61 = r^2$$

$$(2-m)^2 + (-3-n)^2 = r^2 \Rightarrow m^2 + n^2 - 4m + 6n + 13 = r^2$$

$$6m + 18n - 48 = 0 \Rightarrow m = 8 - 3n$$

$$10n^2 - 30n + 45 = r^2$$

$$10n^2 - 70n + 125 = r^2$$

$$40n - 80 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow r = 5$$

Kružnice opsaná má rovnici $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Příklad 4.7. Rozhodněte, zda bod $A[1, -2]$ leží uvnitř, vně nebo na obvodu kružnice $\mathcal{K}x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$ [10, str. 246/4.7e]

Řešení– 1.způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice středu a poloměr kružnice \mathcal{K} . Převedeme na středový tvar pomocí úpravy na čtverec:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 8y &= 0 \\(x - 5)^2 - 25 + (y + 4)^2 - 16 &= 0 \\(x - 5)^2 + (y + 4)^2 &= 41 \Rightarrow S[5, -4], r = \sqrt{41}\end{aligned}$$

Pokud $r = |AS|$, leží bod A na kružnici \mathcal{K} , pokud $r > |AS|$, leží uvnitř kružnice, v opačném případě leží vně.

$$|AS| = \sqrt{(5 - 1)^2 + (-4 + 2)^2} = \sqrt{20} < r$$

Bod A leží uvnitř kružnice \mathcal{K} .

Řešení– 2.způsob: V předchozím způsobu řešení jsme používali jen ekvivalentní úpravy, podíváme se na postup zpětně. Pokud bod leží uvnitř kružnice, platí:

$$\begin{aligned}(x - m)^2 + (y - n)^2 &< r^2 \\Upravíme: x^2 + y^2 - 2xm - 2yn + m^2 + n^2 - r^2 &< 0\end{aligned}$$

Stačí tedy dosadit souřadnice bodu A do obecné rovnice a porovnat její levou stranu s nulou.

$$1^2 + (-2)^2 - 10 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) = -21 < 0$$

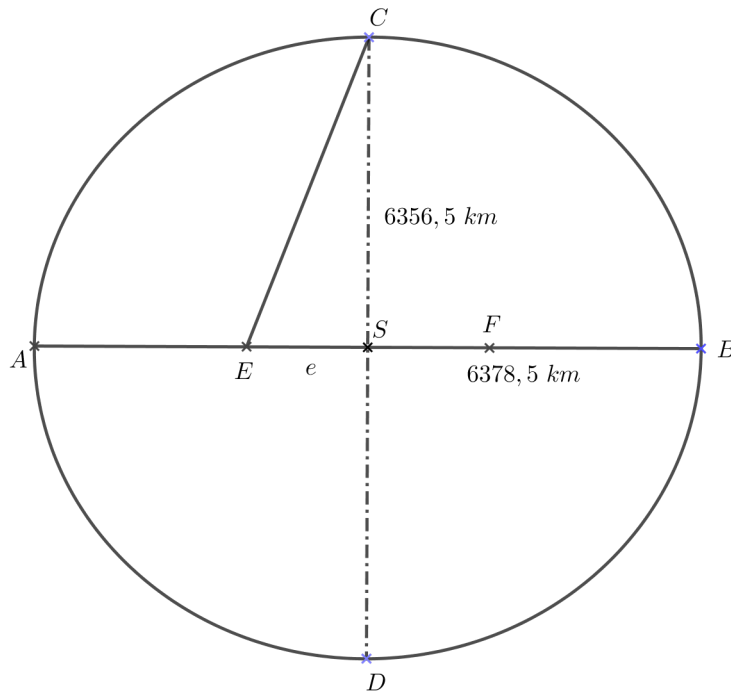
Bod A leží uvnitř kružnice \mathcal{K} .

Příklad 4.8. Zemský poledník má tvar pŕeleipsy. Určete jeho excentricitu, je-li známa délka zemské osy 12 713 km a průměr rovníku 12 757 km. [10, str. 248/4.24]

Řešení: Z obrázku 4.7 je zřejmé, že délka zemské osy je délkou vedlejší osy elipsy a průměr rovníku je délkou hlavní osy elipsy.

$$\begin{aligned}a &= \frac{12\ 757}{2} = 6\ 378,5 \\b &= \frac{12\ 713}{2} = 6\ 356,5 \\e &= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{280\ 170} \doteq 529,3\end{aligned}$$

Excentricita zemského poledníku je přibližně 529,3 km.



Obrázek 4.7: Obrázek k příkladu 4.8

Příklad 4.9. Napište rovnice asymptot hyperboly $\mathcal{H} : \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ a vypočtěte velikost úhlu jimi sevřeného. [10, str. 249/4.33]

Řešení: Hyperbola má hlavní osu rovnoběžnou s osou x , proto mají asymptoty rovnice ve tvaru:

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$$

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Vypočítáme úhel φ , který svírají pomocí vzorce pro výpočet odchylky přímek, do kterého dosadíme normálové vektory přímek.

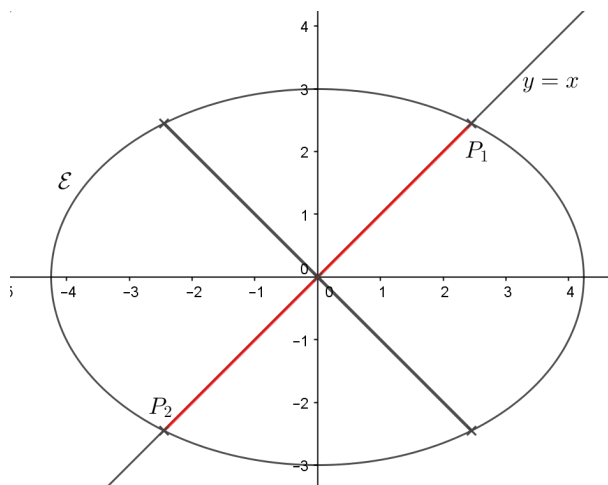
$$\vec{n}_{a_1} = (1, -\sqrt{3}), \quad \vec{n}_{a_2} = (1, \sqrt{3})$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{a_1} \cdot \vec{n}_{a_2}|}{|\vec{n}_{a_1}| \cdot |\vec{n}_{a_2}|} = \frac{|1 - 3|}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

Rovnice tečen jsou $y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$ a svírají úhel 60° .

Příklad 4.10. U elipsy s rovnicí $x^2 + 2y^2 = 18$ určete délku tětivy, která půlí úhel jejích os. [19, str. 330/74]



Obrázek 4.8: Obrázek k příkladu 4.10

Řešení: Osy elipsy svírají pravý úhel. Tětiva svírá s jejími osami poloviční úhel. Z obrázku 4.8 vidíme, že takové tětivy jsou dvě. Obě mají stejnou délku. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že tětiva leží na ose prvního a třetího kvadrantu, která má rovnici $y = x$. Vypočítáme průsečíky této přímky a elipsy.

$$x^2 + 2y^2 = 18$$

$$y = x$$

$$x^2 + 2x^2 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{6} \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{6}$$

$$P_1 = [\sqrt{6}, \sqrt{6}], P_2 = [-\sqrt{6}, -\sqrt{6}]$$

Nyní vypočítáme vzdálenost těchto průsečíků.

$$|P_1P_2| = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{6})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{6})^2} = 48$$

Délka tětivy je 48 jednotek.

Příklad 4.11. Napište rovnici tečny paraboly $\mathcal{P} : y^2 = 2x$, kolmé k přímce $a : 2x + y - 1 = 0$. [10, str. 253/4,59.]

Řešení: Napišeme rovnici tečny k parabole \mathcal{P} .

$$y \cdot y_1 = x + x_1 \Rightarrow y = \frac{x}{y_1} + \frac{x_1}{y_1}$$

Aby byla tečna kolmá k přímce a , musí být její směrový vektor roven k -násobku normálovému vektoru přímky a . Bez újmy na obecnosti zvolíme $k = 1$.

$$n_a = (2,1) = k \cdot \vec{u}_t \Rightarrow \vec{n}_t = (1, -2)$$

$$t : x - 2y + c = 0 \Rightarrow y = \frac{x+c}{2} \wedge y = \frac{x}{y_1} + \frac{x_1}{y_1}$$

$$\frac{c}{2} = \frac{x_1}{y_1} \Rightarrow c = \frac{2x_1}{y_1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{y_1} \Rightarrow y_1 = 2$$

Dopočítáme x -ovou souřadnici bodu dotyku z rovnice paraboly a poté koeficient c .

$$y_1^2 = 2x_1$$

$$4 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$c = \frac{2x_1}{y_1} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

Tečna má rovnici $x - 2y + 2 = 0$.

Příklad 4.12. Napište rovnici poláry počátku vzhledem k parabole $\mathcal{P} : x^2 - 6x - 6y + 3 = 0$ a rovnice tečen k této parabole procházející počátkem.

Řešení: Nejprve převedeme rovnici paraboly na vrcholový tvar.

$$x^2 - 6x - 6y + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 = 6y - 3$$

$$(x - 3)^2 = 6(y + 1)$$

Rovnice poláry bodu $P[0, 0]$ vzhledem k parabole \mathcal{P} je:

$$(x - 3)(0 - 3) = 3(y + 1 + 0 + 1) \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Vypočítáme souřadnice průsečíků poláry a hyperboly.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 6y + 3 &= 0 \\x + y - 1 &= 0 \Rightarrow x = 1 - y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^2 - 2y - 2 &= 0 \\y_1 = 1 + \sqrt{3} &\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \\y_2 = 1 - \sqrt{3} &\Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$P_1 = [-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}], P_2 = [\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}]$$

Nyní vypočítáme rovnice tečen. První (resp. druhá) tečna je přímka procházející počátkem a prvním (resp. druhým) průsečíkem. Směrový vektor tečny má stejné souřadnice jako průsečík.

$$\begin{aligned}\vec{u}_{t_1} &= (-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}) & \vec{u}_{t_2} &= (-\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}) \\ \vec{n}_{t_1} &= (1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}) & \vec{n}_{t_2} &= (1 - \sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}y &= 0 & (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}y &= 0\end{aligned}$$

Rovnice poláry je $x + y - 1 = 0$ a tečny jsou dány rovnicemi $(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 0$, $(1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 0$.

Příklad 4.13. Vypočtete délku tětivy vedené ohniskem v hyperbole $x^2 - 3y^2 = 12$, rovnoběžné s přímkou $p: 2x - y + 5 = 0$.

Řešení: Upravíme rovnici hyperboly a vypočítáme souřadnice ohnisek E, F .

$$\begin{aligned}x^2 - 3y^2 &= 12 \\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} &= 1 \Rightarrow a = \sqrt{12}, b = 2, S[0, 0] \\ e &= \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \\ E &= [-4, 0], F = [4, 0]\end{aligned}$$

Tětivy procházející ohnisky rovnoběžné s danou přímkou jsou stejně dlouhé, proto vypočítáme jen délku té, která prochází ohniskem F . Napíšeme rovnici přímky t , na které leží hledaná tětva.

$$\begin{aligned}\vec{n}_p &= (2, -1) = \vec{n}_t \\ t: 2x - y + c &= 0 \\ F \in t &\Rightarrow c = -8 \\ t: 2x - y - 8 &= 0\end{aligned}$$

Vypočítáme průsečíky s hyperbolou.

$$\begin{aligned}x^2 - 3y^2 &= 12 \\2x - y - 8 &= 0 \Rightarrow x = \frac{y+8}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{y+8}{2}\right)^2 - 3y^2 &= 12 \\-11y^2 + 16y + 16 &= 0\end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{-8 - 4\sqrt{15}}{-11} \Rightarrow x_1 = \frac{48 - 2\sqrt{15}}{11}$$

$$y_2 = \frac{-8 + 4\sqrt{15}}{-11} \Rightarrow x_2 = \frac{48 + 2\sqrt{15}}{11}$$

$$C = \left[\frac{48 - 2\sqrt{15}}{11}, \frac{8 - 4\sqrt{15}}{11} \right]$$

$$D = \left[\frac{48 + 2\sqrt{15}}{11}, \frac{8 + 4\sqrt{15}}{11} \right]$$

Spočítáme vzdálenost bodů C a D .

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{48 - 2\sqrt{15}}{11} - \frac{48 + 2\sqrt{15}}{11}\right)^2 + \left(\frac{8 - 4\sqrt{15}}{11} - \frac{8 + 4\sqrt{15}}{11}\right)^2} = \frac{20\sqrt{3}}{11}$$

Délka tětivy je $\frac{20\sqrt{3}}{11}$.

Příklad 4.14. Mostní oblouk má tvar paraboly. Určete její parametr p , víte-li, že rozpětí oblouku je 24 metrů a výška 6 metrů. [19, 332/87]

Řešení: Bez újmy na obecnosti umístíme oblouk do soustavy souřadnic, aby platila následující pravidla: osa paraboly je osa y , vrchol paraboly je počátek. Takto umístěný oblouk má následující rovnici:

$$p : x^2 = -2py$$

Průsečíky A , B paraboly p a přímky $y = -6$ jsou od sebe vzdálené 24 metrů

a osa y je osou spojnice těchto průsečíků.

$$A = [-12, -6], B = [12, -6]$$

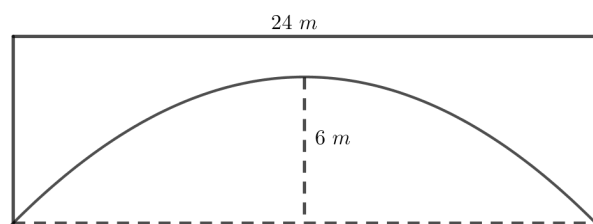
$$x^2 = -2py$$

$$y = -6$$

$$144 = -2p \cdot (-6)$$

$$p = 12$$

Parametr je roven 12 metrů.



Obrázek 4.9: Obrázek k příkladu 4.14

Příklad 4.15. Napište rovnici přímky, která prochází průsečíky kružnic $\mathcal{K} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ a $\mathcal{L} : x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$. [10, 246/4.11]

Řešení – 1.způsob: Vypočítáme průsečíky kružnic \mathcal{K} , \mathcal{L} pomocí soustavy rovnic.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$$

$$8x - 14y + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{7y - 6}{4}$$

$$\left(\frac{7y - 6}{4}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{7y - 6}{4} - 2y - 23 = 0$$

$$65y^2 - 60y - 380 = 0$$

$$y_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -5$$

$$y_2 = \frac{38}{13} \Rightarrow x_2 = \frac{47}{13}$$

Přímka prochází oběma průsečíky, proto dosadíme do obecné rovnice přímky souřadnice průsečíků. Bez újmy na obecnosti zvolíme $a = 1$.

$$x + by + c = 0$$

$$-5 - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 5 + 2b$$

$$\frac{47}{13} + \frac{38}{13}b + c = 0$$

$$47 + 38b + 65 + 26b = 0$$

$$b = \frac{-7}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$p : x - \frac{7}{4}y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 4x - 7y + 6 = 0$$

Řešení – 2.způsob: Tato přímka je chordálou daných kružnic. Vypočítáme její rovnici.

$$ch : K_1 - K_2 = 0$$

$$ch : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 - (x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35) = 0$$

$$ch : 4x - 7y + 6 = 0$$

Rovnice dané přímky je $4x - 7y + 6 = 0$.

Kapitola 5

Klasifikace kuželoseček

Tato kapitola je určena pro studenty vysokých škol. Zahrnuje singulární i regulární kuželosečky v obecné poloze.

5.1 Teorie

5.1.1 Obecná rovnice kuželosečky

Rovinnou křivku, která má rovnici

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel A , B nebo C je nenulové, nazýváme kuželosečkou. V celé této kapitole při zmínce o kuželosečce myslíme kuželosečku danou touto rovnicí.

Maticí kuželosečky nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

5.1.2 Transformace souřadnic

Pro převod kuželosečky na středový tvar budeme potřebovat transformaci soustavy souřadnic. Transformujeme kartézské souřadnice báze $\{P, e_1, e_2\}$ na souřadnicový systém báze $\{P, e'_1, e'_2\}$. To znamená, že souřadnice otočíme kolem počátku o úhel α . Ten určíme tak, abychom po transformaci vynulovali koeficient členu $x'y'$, který nazveme B' . Vztahy pro souřadnice obrazu $X'[x', y']$ bodu $X[x, y]$:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}$$

Abychom po transformaci vynulovali koeficient B' , musí platit následující rovnice:

$$B \cdot \tan^2 \alpha + (A - C) \tan \alpha - B = 0,$$

kde A , B , C jsou koeficienty z rovnice kuželosečky.

5.1.3 Asymptotické směry kuželosečky

Směr v rovině, daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$, se nazývá asymptotickým směrem kuželosečky, jestliže $Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2 = 0$. Označíme-li

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

potom platí:

$\delta > 0$	žádný asymptotický směr	kuželosečka eliptického typu
$\delta = 0$	právě jeden asymptotický směr	kuželosečka parabolického typu
$\delta < 0$	dva asymptotické směry	kuželosečka hyperbolického typu

5.1.4 Střed kuželosečky

Bod $S[m, n]$ je středem kuželosečky, pokud platí:

$$Am + Bn + D = 0$$

$$Bm + Cn + E = 0$$

5.1.5 Sdružené směry a průměry kuželosečky

Je dán nenulový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, pro který platí: $Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2 \neq 0$. Sdružený průměr se směrem \vec{u} se nazývá přímka, která má rovnici:

$$(Au_1 + Bu_2)x + (Bu_1 + Cu_2)y + Du_1 + Eu_2 = 0$$

Směry určené vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (-Bu_1 - Cu_2, Au_1 + Bu_2)$ nazýváme sdružené směry vzhledem ke kuželosečce, příslušné průměry nazýváme sdružené průměry vzhledem ke kuželosečce.

5.1.6 Singulární body kuželosečky

Singulárním bodem kuželosečky nazýváme bod $X[x_1, x_2]$, pro který platí:

$$Ax_1 + Bx_2 + D = 0$$

$$Bx_1 + Cx_2 + E = 0$$

$$Dx_1 + Ex_2 + F = 0$$

5.1.7 Singulární kuželosečky

Singulární kuželosečka je taková kuželosečka, pro kterou platí:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

5.1.8 Klasifikace kuželoseček

Klasifikaci kuželoseček provedeme dle tabulky 5.1, kde $h(K)$ je hodnota matice zadané kuželosečky a D_{11} , D_{22} jsou následující determinanty.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta < 0$		elipsa	
	$\delta > 0$	$\Delta > 0$		imaginární elipsa	
	$\delta = 0$			parabola	
	$\delta < 0$			hyperbola	
$\Delta = 0$	$\delta > 0$			2 imaginární různoběžky s reálným průsečíkem	
	$\delta = 0$	$h(K) = 1$		1 přímka	
		$h(K) = 2$	$A = 0 \wedge D_{11} < 0$		2 reálné rovnoběžky
			$A \neq 0 \wedge D_{22} < 0$		
			$A = 0 \wedge D_{11} > 0$		2 imaginární rovnoběžky
$A \neq 0 \wedge D_{22} > 0$					
$\delta < 0$			2 různoběžky		

Tabulka 5.1: Klasifikace kuželoseček

5.2 Příklady

Příklad 5.1. Určete střed kuželosečky $5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0$. [19, str. 333/97a]

Řešení – 1.způsob: Vyřešíme pomocí soustavy rovnic pro souřadnice středu kuželosečky.

$$Am + Bn + D = 0$$

$$Bm + Cn + E = 0$$

$$5m - 1,5n = 0 \Rightarrow m = 0,3n$$

$$-1,5m + n = 0$$

$$-1,5 \cdot 0,3n + n = 0$$

$$n = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow S = [0, 0]$$

Řešení – 2.způsob: Využijeme transformaci souřadnic a poté převedeme kuželosečku na středový tvar.

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned}$$

Aby koeficient u členu $x'y'$ byl nulový, musí platit následující rovnice:

$$\begin{aligned}B \cdot \tan^2 \alpha + (A - C) \tan \alpha - B &= 0 \\-\frac{3}{2} \tan^2 \alpha + 4 \tan \alpha + \frac{3}{2} &= 0 \\ \tan \alpha_1 &= 3 \\ \tan \alpha_2 &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Volíme úhel $\alpha \in \langle 0, 90^\circ \rangle$, abychom nemuseli řešit znaménka hodnot goniometrických funkcí. Proto volíme $\tan \alpha = 3$. Dopočítáme $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= 3 & \sin \alpha &= \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \tan^2 \alpha = 9 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} & \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty goniometrických funkcí do rovnic transformace.

$$\begin{aligned}x &= x' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - y' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\ y &= x' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice kuželosečky a upravíme na středový tvar.

$$\begin{aligned}5\left(x' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - y' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 3\left(x' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - y' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(x' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \\ + \left(x' \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + 4 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'^2 + 7y'^2 + 8 &= 0 \\ \frac{x'^2}{-8} + \frac{y'^2}{-\frac{7}{8}} &= 1 \Rightarrow S' = [0, 0]\end{aligned}$$

Zvolená transformace souřadnic je otáčení kolem počátku. Proto střed zadané kuželosečky má i po převedení do původní soustavy souřadnic souřadnice $[0, 0]$. Zadaná kuželosečka je imaginární elipsa.

Poznámka: Je-li regulární kuželosečka středová se středem v počátku, chybí v její rovnici lineární členy. Pokud je singulární se středem v počátku, chybí v její rovnici i členy absolutní.

Příklad 5.2. Je dána kuželosečka $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$. Klasifikujte kuželosečku a napište její vlastnosti (střed, ohniska, vrcholy, parametr, hlavní a vedlejší poloosu).

Řešení – 1.způsob: Rovnice kuželosečky neobsahuje člen xy , její osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Převědeme na středový tvar. Použijeme doplnění na čtverec.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 &= 0 \\ 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) + 24 &= 0 \\ 4((x - 2)^2 - 4) + 9((y - 1)^2 - 1) + 24 &= 0 \\ 4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 &= 1 \\ \frac{(x - 2)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{1}{9}} &= 1 \end{aligned}$$

Ze středového tvaru vyčteme délky hlavní a vedlejší osy a souřadnice středu. Poté dopočítáme jen excentricitu.

$$\begin{aligned} S &= [2, 1], \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3} \\ e &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

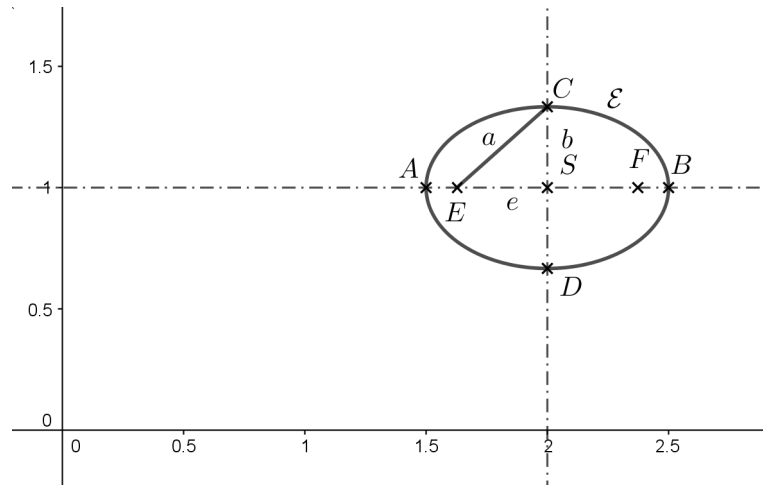
Nyní dopočítáme souřadnice vrcholů.

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{3}{2}, 1 \right], \quad B = \left[\frac{5}{2}, 1 \right] \\ C &= \left[2, \frac{4}{3} \right], \quad D = \left[2, \frac{2}{3} \right] \end{aligned}$$

Tento způsob řešení se využívá na středních školách, kde se neřeší klasifikace kuželoseček v obecných polohách.

Řešení – 2.způsob: Nejprve vypočítáme, zda je kuželosečka regulární nebo singulární.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & -9 \\ -8 & -9 & 24 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow \text{kuželosečka je regulární}$$



Obrázek 5.1: Obrázek k příkladu 5.2

Nyní vypočítáme počet asymptotických směrů.

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow \text{žádný asymptotický směr}$$

Kuželosečka je regulární a nemá žádný asymptotický směr, je to elipsa. Určíme její střed.

$$4m - 8 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$9n - 9 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$S = [2, 1]$$

Protože rovnice kuželosečky neobsahuje člen xy , jsou její osy rovnoběžné se souřadnými osami. Osy prochází středem, mají rovnice $y = 1$, $x = 2$. Dopočítáme hlavní a vedlejší vrcholy jako průsečíky s osami.

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3} \quad y_2 = \frac{4}{3}$$

$$C = \left[2, \frac{4}{3}\right], \quad D = \left[2, \frac{2}{3}\right]$$

$$y = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

$$A = \left[\frac{3}{2}, 1\right], \quad B = \left[\frac{5}{2}, 1\right]$$

Nyní dopočítáme délky poloos a excentricitu.

$$a = |AS| = \left| \left(2 - \frac{5}{2}, 1 - 1 \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$b = |CS| = \left| \left(2 - 2, \frac{2}{3} - 1 \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{3} \right)^2} = \frac{1}{3}$$

$$e = \sqrt{a - b} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Příklad 5.3. Určete druh kuželosečky, je-li určena rovnicí:
 $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$. [13, str. 223/5.3b]

Řešení – 1.způsob: Nejprve určíme, zda je kuželosečka regulární nebo singularní.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1,5 \\ -3 & 1,5 & -4 \end{vmatrix} = 9 + 9 - 16 + 16 - 9 - 9 = 0 \Rightarrow \text{singularní kuželosečka}$$

Nyní vypočítáme počet asymptotických směrů.

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{jeden asymptotický směr}$$

$A \neq 0$, proto budeme počítat D_{22} .

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -25 < 0 \Rightarrow \text{dvě různé rovnoběžky}$$

Vypočítali jsme, že danou kuželosečku tvoří dvě různé rovnoběžky. Můžeme ještě dopočítat, jaké mají rovnice. Nejprve vypočítáme asymptotický směr.

$$4u_1^2 - 4u_1u_2 + u_2^2 = 0 \qquad \frac{u_1}{u_2} = t$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\vec{u} = (1, 2)$$

Rovnoběžky mají směrový vektor $(1, 2)$, rovnice kuželosečky je součinem obecných rovnic rovnoběžek.

$$k(2x - y + c_1)(2x - y + c_2) = 0$$

$$4kx^2 - 4kxy + ky^2 + 2kx(c_2 + c_1) - ky(c_1 + c_2) + kc_1c_2 = 0$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$$

Porovnáme koeficienty.

$$4k = 4$$

$$-4k = -4$$

$$k = 1$$

$$2k(c_2 + c_1) = -6$$

$$-k(c_1 + c_2) = 3$$

$$kc_1c_2 = -4$$

$$c_1 + c_2 = -3 \Rightarrow c_1 = -3 - c_2$$

$$c_1c_2 = -4$$

$$(-3 - c_2)c_2 = -4$$

$$c_{21} = -4 \Rightarrow c_{11} = 1$$

$$c_{22} = 1 \Rightarrow c_{12} = -4$$

Daná kuželosečka jsou dvě rovnoběžky dané rovnicemi $2x - y + 1 = 0$ a $2x - y - 4 = 0$.

Řešení – 2.způsob: Využijeme transformaci souřadnic.

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Aby koeficient u členu $x'y'$ byl nulový, musí platit následující rovnice:

$$B \cdot \tan^2 \alpha + (A - C) \tan \alpha - B = 0$$

$$-2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 2 = 0$$

$$\tan \alpha_1 = 2 \Rightarrow \text{BÚNO}^1 \text{ zvolím toto řešení}$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Dopocítáme $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 2 & \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \tan^2 \alpha &= 4 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4 & \cos \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty goniometrických funkcí do rovnic transformace.

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y &= x' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Transformujeme zadanou kuželosečku.

$$\begin{aligned} 4\left(x' \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4\left(x' \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x' \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(x' \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ - 6\left(x' \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 3\left(x' \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 4 = 0 \end{aligned}$$

Po úpravě vyjde následující rovnice.

$$\begin{aligned} 33y'^2 + 15\sqrt{5}y' - 20 &= 0 \\ y'_{1,2} &= \frac{-15\sqrt{5} \pm \sqrt{3765}}{66} \end{aligned}$$

Zadanou kuželosečku tvoří dvě rovnoběžky.

Příklad 5.4. Určete druh kuželosečky a její vlastnosti, jestliže má rovnici $x^2 + 4xy + 4y^2 - 24x + 2y - 56 = 0$.

Řešení – 1.způsob: Nejprve určíme, zda je kuželosečka regulární nebo singularní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & 1 \\ -12 & 1 & -56 \end{vmatrix} = -625 \Rightarrow \text{regulární kuželosečka}$$

¹BÚNO - bez újmy na obecnosti

Nyní vypočítáme počet asymptotických směrů.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{jeden asymptotický směr}$$

Kuželosečka je regulární a má jeden asymptotický směr, je to tedy parabola. Vypočítáme asymptotický směr, což je směr osy paraboly.

$$\begin{aligned} u_1^2 + 4u_1u_2 + 4u_2^2 &= 0 & \frac{u_1}{u_2} &= t \\ t^2 + 4t + 4 &= 0 \\ t &= -2 = \frac{u_1}{u_2} \\ \vec{u} &= (-2, 1) \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme souřadnice vrcholu, pomocí vrcholové tečny. Vrcholová tečna je kolmá na asymptotický směr a s parabolou má právě jeden společný bod.

$$\begin{aligned} t : -2x + y + c &= 0 \Rightarrow y = 2x - c \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 24x + 2y - 56 &= 0 \\ x^2 + 4x(2x - c) + 4(2x - c)^2 - 24x + 2(2x - c) - 56 &= 0 \end{aligned}$$

Upravíme a získáme rovnici:

$$25x^2 + x(-20c - 20) + 4c^2 - 2c - 56 = 0$$

Protože existuje právě jeden průsečík vrcholové tečny a paraboly, musí být diskriminant této rovnice roven 0.

$$\begin{aligned} (-20c - 20)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (4c^2 - 2c - 56) &= 0 \\ c = -6 \Rightarrow t : -2x + y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

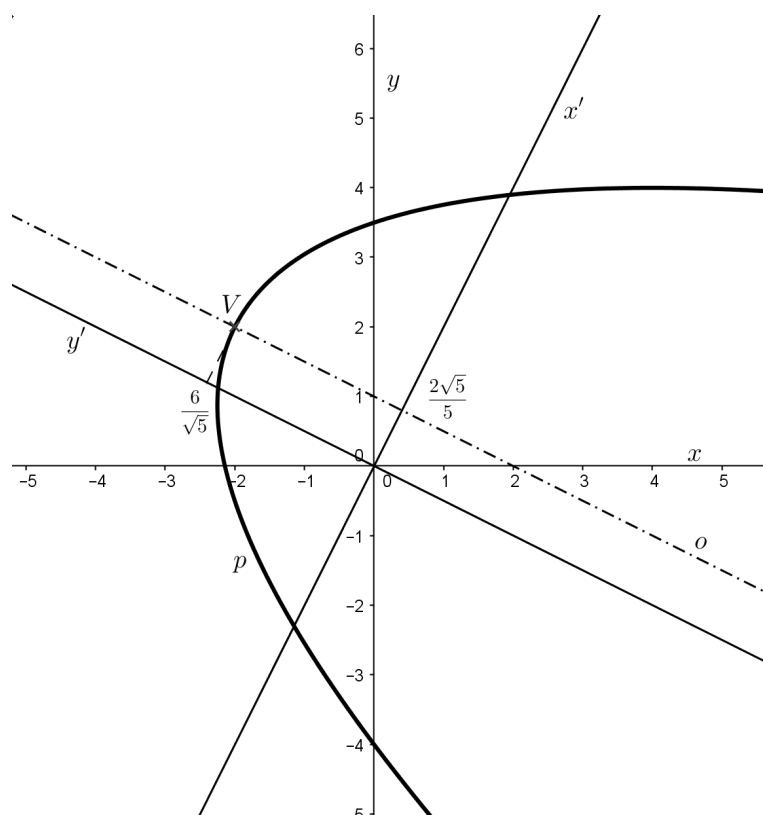
Dopočítáme souřadnice vrcholu z předchozí rovnice.

$$\begin{aligned} 25x^2 + x(-20c - 20) + 4c^2 - 2c - 56 &= 0 \wedge c = -6 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ x = -2 \Rightarrow y &= 2 \\ V[-2, 2] \end{aligned}$$

Osa paraboly prochází vrcholem v asymptotickém směru.

$$\begin{aligned} x + 2y + c &= 0 \\ c &= -2 \\ o : x + 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Daná kuželosečka je parabola s vrcholem $V[-2, 2]$ a osou $x+2y-2=0$. Parametr nemůžeme tímto způsobem vypočítat bez znalosti další teorie, proto použijeme druhý způsob.



Obrázek 5.2: Obrázek k příkladu 5.4

Řešení – 2.způsob: Využijeme transformaci souřadnic. Jak vidíme na obrázku 5.2, zvolíme souřadnicový systém, jehož osy jsou x' , y' . Napíšeme rovnice transformace.

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned}$$

Aby koeficient u členu $x'y'$ byl nulový, musí platit následující rovnice:

$$\begin{aligned}B \cdot \tan^2 \alpha + (A - C) \tan \alpha - B &= 0 \\2 \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha - 2 &= 0\end{aligned}$$

$$\tan \alpha_1 = 2 \Rightarrow \text{BÚNO}^2 \text{ zvolím toto řešení}$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Dopocítáme $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 2 & \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \tan^2 \alpha &= 4 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} & \cos \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty goniometrických funkcí do rovnic transformace.

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} & (*) \\ y &= x' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice kuželosečky, po úpravě vyjde následující rovnice.

$$\begin{aligned} 25x'^2 + 16y'^2 - 20\sqrt{5}x' + 50\sqrt{5}y' - 280 &= 0 \\ 25\left(x'^2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}x'\right) &= -50\sqrt{5}y' + 280 \\ 25\left(\left(x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{20}{25}\right) &= -50\sqrt{5}y' + 280 \\ \left(x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 &= -2\sqrt{5}\left(y' - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

Zadaná kuželosečka je parabola. Z rovnice určíme vlastnosti otočené paraboly a transformujeme je zpět do původní soustavy souřadnic pomocí (*).

$$\begin{aligned} V' &= \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right] \\ x &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -2 \\ y &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2 \\ p' &= \sqrt{5} = p \end{aligned}$$

$$o' : x' = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

²BÚNO - bez újmy na obecnosti

Upravíme rovnice transformace a vyjádříme z nich x' .

$$\begin{aligned}x &= x' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - y' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 5x = \sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' \\y &= x' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + y' \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 5y = 2\sqrt{5}x' + \sqrt{5}y'\end{aligned}$$

$$x' = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}$$

$$o' : x' = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}$$

$$o : 5x + 10y - 10 = 0$$

Vrchol paraboly má souřadnice $[-2, 2]$, parametr se při otáčení nemění a je tedy $\sqrt{5}$ a osa paraboly má rovnici: $5x + 10y - 10 = 0$.

Příklad 5.5. Určete čísla p, q tak, aby křivka o rovnici $x^2 + 4xy + py^2 - 3x + 2qy = 0$ byla sjednocením dvou rovnoběžných přímk. [13, str. 224/5.6](zadání upraveno)

Řešení: Napíšeme obecně rovnici kuželosečky, která je dána dvěma rovnoběžkami a porovnáme koeficienty se zadanou kuželosečkou.

$$(ax + by + c_1)(ax + by + c_2) = 0$$

Lze předpokládat, že $a \neq 0$, protože by v rovnici chyběl člen x^2 . Bez újmy na obecnosti zvolíme $a = 1$.

$$\begin{aligned}x^2 + 2bxy + b^2y^2 + x(c_1 + c_2) + yb(c_1 + c_2) + c_1c_2 &= 0 \\x^2 + 4xy + py^2 - 3x + 2qy &= 0\end{aligned}$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$b^2 = p \Rightarrow p = 4$$

$$c_1 + c_2 = -3 \Rightarrow c_1 = -3 - c_2$$

$$b(c_1 + c_2) = 2q \Rightarrow q = -3$$

$$c_1c_2 = 0$$

Číslo $p = 4$ a číslo $q = -3$.

Příklad 5.6. Jaká kuželosečka je vyjádřena rovnicí $xy + ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$? [4, str. 267/6]

Řešení: Nejprve vypočítáme determinant matice kuželosečky.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = \frac{ab}{4} - \frac{c}{4}$$

Nyní vypočítáme asymptotické směry.

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{dva asymptotické směry}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$u_1 u_2 = 0 \Rightarrow (1, 0), (0, 1)$$

Vypočítáme střed kuželosečky.

$$\frac{1}{2}n + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow n = -a$$

$$\frac{1}{2}m + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow m = -b$$

$$S = [-b, -a]$$

Pokud $ab = c$, je kuželosečka singulární a tvoří ji dvojice různoběžek $x = -b$, $y = -a$. Pokud $ab \neq c$, je kuželosečka regulární a je to hyperbola se středem $S[-b, -a]$ a asymptotami $x = -b$, $y = -a$.

Příklad 5.7. Rozložte singulární kuželosečku $-2x^2 + 3xy - y^2 - 5x + 4y - 3 = 0$. [19, str. 333/96] (zadání upraveno)

Řešení: Nejprve vypočítáme o jakou kuželosečku se jedná. Ověříme, zda je opravdu singulární.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1,5 & -2,5 \\ 1,5 & -1 & 2 \\ -2,5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{singulární kuželosečka}$$

Nyní vypočítáme počet asymptotických směrů.

$$\delta = \begin{vmatrix} -2 & 1,5 \\ 1,5 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2,25 = -0,25 \Rightarrow \text{dva asymptotické směry}$$

Kuželosečka je singulární a má dva asymptotické směry, jedná se o dvě různoběžky. Vypočítáme jejich směrové vektory pomocí výpočtu asymptotických směrů kuželosečky.

$$\begin{aligned} -2u_1^2 + 3Bu_1u_2 - u_2^2 &= 0 & \frac{u_1}{u_2} &= t \\ -2t^2 + 3t - 1 &= 0 \\ t_1 = 1 &\Rightarrow \vec{u} = (1, 1) \\ t_2 = \frac{1}{2} &\Rightarrow \vec{v} = (1, 2) \end{aligned}$$

Pokračování řešení – 1.způsob: Rovnice kuželosečky je součinem dvou obecných rovnic přímk se směrovými vektory \vec{u} , \vec{v} .

$$\begin{aligned} k(-x + y + c_1)(-2x + y + c_2) &= 0 \\ 2kx^2 - 3kxy + ky^2 + kx(-c_2 - 2c_1) + ky(c_2 + c_1) + kc_1c_2 &= 0 \\ -2x^2 + 3xy - y^2 - 5x + 4y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty a vyřešíme soustavu.

$$\begin{aligned} 2k &= -2 \Rightarrow k = -1 \\ -3k &= 3 \\ k &= -1 \\ k(-c_2 - 2c_1) &= -5 \Rightarrow -c_2 - 2c_1 = 5 \\ k(c_2 + c_1) &= 4 \Rightarrow c_2 + c_1 = -4 \Rightarrow c_1 = -4 - c_2 \\ kc_1c_2 &= -3 \Rightarrow c_1c_2 = 3 \\ -c_2 - 2(-4 - c_2) &= 5 \\ c_2 &= -3 \Rightarrow c_1 = -1 \end{aligned}$$

Singulární kuželosečku rozložíme na dvě různoběžky s rovnicemi:
 $-2x + y - 3 = 0$ a $-x + y - 1 = 0$.

Pokračování řešení – 2.způsob: Vypočítáme střed $S[m, n]$ kuželosečky.

$$Am + Bn + D = 0$$

$$Bm + Cn + E = 0$$

$$-2m + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2}m - n + 2 = 0$$

$$-4m + 3n - 5 = 0$$

$$3m - 2n + 4 = 0$$

$$m = -2, n = -1$$

Kuželosečku tvoří přímky a, b směrů \vec{u}, \vec{v} , které prochází bodem S .

$$\vec{u}_a = (1, 1) \Rightarrow \vec{n}_a = (1, -1)$$

$$x - y + c = 0$$

$$-2 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$a : x - y + 1 = 0$$

$$\vec{u}_b = (1, 2) \Rightarrow \vec{n}_b = (2, -1)$$

$$2x - y + c = 0$$

$$-4 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$b : 2x - y + 3 = 0$$

Kuželosečku tvoří přímky $a : x - y + 1 = 0, b : 2x - y + 3 = 0$.

Příklad 5.8. Napište rovnici elipsy o středu $S[1, 2]$ a poloosách 5, 2, z nichž první leží na přímce o směrnici $\frac{1}{2}$. [4, str. 269/45]

Řešení – 1.způsob: Elipsa má střed v bodě $S[1, 2]$ a v tomto bodě se protínají

i její osy. První osa má směrnici $\frac{1}{2}$, vypočítáme její rovnici.

$$\begin{aligned} o_1 : y &= \frac{1}{2}x + q \\ 2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + q \Rightarrow q = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Ohniska elipsy leží na hlavní ose ve vzdálenosti e od středu S . Vypočítáme jejich souřadnice $E[e_1, e_2]$, $F[f_1, f_2]$.

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ e &= \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = S - e \cdot \frac{\vec{u}_{o_1}}{|\vec{u}_{o_1}|} &= [1, 2] - \sqrt{21} \frac{\left(\frac{1}{2}, -1\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \left[1 - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right] \\ F = S + e \cdot \frac{\vec{u}_{o_1}}{|\vec{u}_{o_1}|} &= [1, 2] + \sqrt{21} \frac{\left(\frac{1}{2}, -1\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \left[1 + \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right] \end{aligned}$$

Rovnici elipsy vypočítáme přímo z definice.

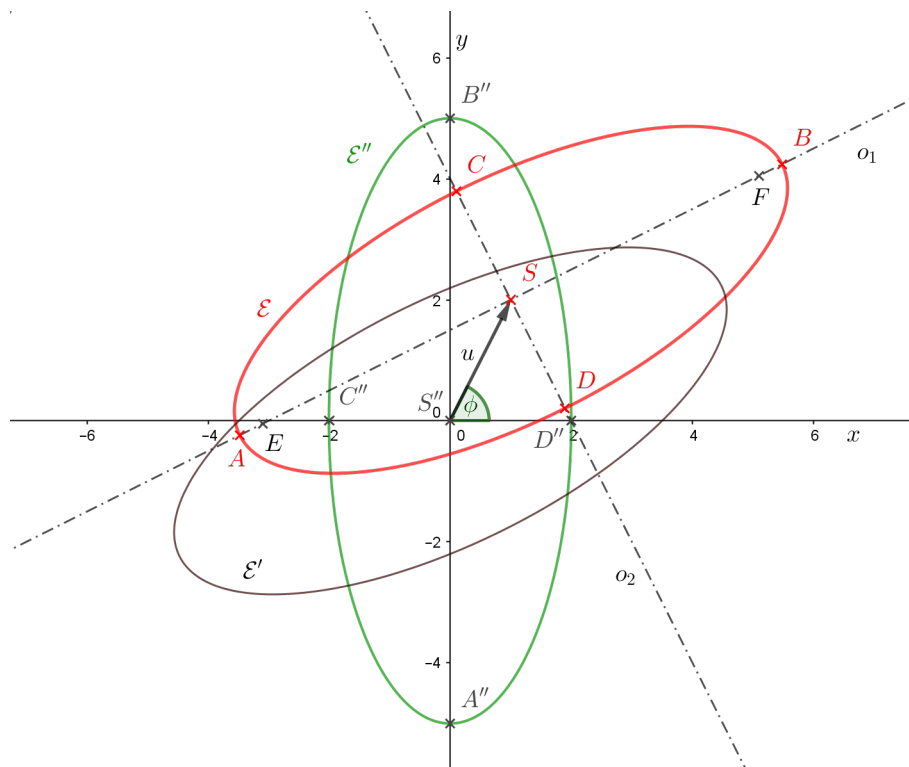
$$\begin{aligned} |EX| + |FX| &= 2a \\ \sqrt{\left(x - 1 + \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y - 2 + \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right)^2} + \sqrt{\left(x - 1 - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y - 2 - \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}}\right)^2} &= 10 \end{aligned}$$

Postupnými úpravami převedeme na tvar:

$$41x^2 - 84xy + 104y^2 + 86x - 332y - 211 = 0$$

Řešení – 2.způsob: Využijeme transformaci souřadnic, posuneme střed elipsy do počátku a pak otočíme souřadnicový systém okolo počátku tak, abychom hlavní osu elipsy sjednotili s osou y . Napíšeme souřadnice hlavních a vedlejších vrcholů v nové soustavě souřadnic a napíšeme středovou rovnici elipsy \mathcal{E}'' . V obrázku 5.3 je tato elipsa znázorněna zelenou barvou.

$$\begin{aligned} S'' &= [0, 0], A'' = [0, -5], B'' = [0, 5], C'' = [-2, 0], D'' = [2, 0] \\ \frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{25} &= 1 \\ 25x''^2 + 4y''^2 - 100 &= 0 \end{aligned}$$



Obrázek 5.3: Obrázek k příkladu 5.8

Sestavili jsme obecnou rovnici elipsy \mathcal{E}'' a převedeme ji pomocí transformace, která elipsu vrátí do původního souřadnicového systému. Napíšeme rovnice transformace.

Posunutí o vektor $(1, 2)$:

$$\begin{aligned}x' &= x - 1 \\y' &= y - 2\end{aligned}$$

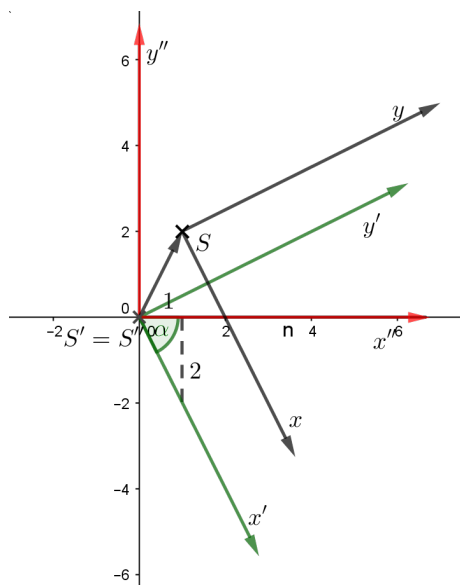
Otočení o takový úhel α , aby $\tan \alpha = 2$ viz obrázek 5.4.

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\y'' &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned}$$

Dopočítáme $\cos \alpha$, $\sin \alpha$:

$$\tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\y'' &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\end{aligned}$$



Obrázek 5.4: Souřadnicové systémy

Napišeme vztah mezi nečárkovanou a dvoučárkovanou soustavou souřadnic.

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{5}}(y - 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + 3)$$

$$y'' = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y - 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - 4)$$

Dosadíme vztahy pro x , y do rovnice kuželosečky.

$$25x''^2 + 4y''^2 - 100 = 0$$

$$25\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + 3)\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - 4)\right)^2 - 100 = 0$$

$$41x^2 - 84xy + 104y^2 + 86x - 332y - 211 = 0$$

Příklad 5.9. Vykonejte rozbor rovnice $y = \frac{ax - b}{cx - d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. [4, str. 269/46] (zadání upraveno)

Řešení: Nejprve upravíme na obecnou rovnici.

$$y = \frac{ax - b}{cx - d}$$

$$0 = cxy - ax - dy + b$$

Vypočítáme determinant matice kuželosečky.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{c}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & -\frac{d}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{d}{2} & b \end{vmatrix} = \frac{acd}{4} - \frac{bc^2}{4}$$

Nyní vypočítáme počet asymptotických směrů.

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{c^2}{4}$$

Pro $c = 0$ má kuželosečka právě jeden asymptotický směr, jinak má dva asymptotické směry. Nyní již můžeme určit typ kuželosečky v závislosti na zadaných parametrech viz tabulka 5.9.

$c = 0$		dvojnásobná přímka	$ax + dy - b = 0$
$c \neq 0$	$ad = bc$	2 různoběžky	směrové vektory $(1,0)$, $(0,1)$
	$ad \neq bc$	hyperbola	$cxy - ax - dy + b = 0$

Tabulka 5.2: Tabulka parametrů

Příklad 5.10. U kuželosečky $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$ určete asymptoty jako přímky, které mají asymptotický směr a danou regulární kuželosečku neprotínají. [1, str. 52/35]

Řešení: Nejprve spočítáme asymptotické směry.

$$\begin{aligned} u_1^2 - 2u_1u_2 &= 0 \\ u_1(u_1 - 2u_2) &= 0 \\ \vec{u} &= (0, 1), \vec{v} = (2, 1) \end{aligned}$$

Nyní napíšeme obecné rovnice asymptot jako rovnice přímek se směrovými vektory \vec{u} , \vec{v} .

$$\begin{aligned} \vec{u}_a = \vec{u} = (0, 1) &\Rightarrow \vec{n}_a = (1, 0) \\ \vec{u}_b = \vec{v} = (2, 1) &\Rightarrow \vec{n}_b = (-1, 2) \\ a : x + c_1 &= 0 \\ b : -x + 2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sestavíme dvě soustavy rovnic určené vždy kuželosečkou a jednou z asymptot. Koeficienty dourčíme z podmínky, že soustavy nemají řešení.

$$\begin{array}{ll}
 0 = x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 & 0 = x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 \\
 x + c_1 = 0 \Rightarrow x = -c_1 & -x + 2y + c_2 = 0 \Rightarrow x = 2y + c_2 \\
 \\
 0 = c_1^2 + 2c_1y - 2c_1 + 4y - 5 & 0 = c_2^2 + 2yc_2 + 8y + 2c_2 - 5 \\
 y(4 + 2c_1) = 5 + 2c_1 - c_1^2 & y(8 + 2c_2) = 5 - 2c_2 - c_2^2 \\
 \text{pro } c_1 = -2: y \cdot 0 \neq -3 & \text{pro } c_2 = -4: y \cdot 0 \neq -3 \\
 a: x - 2 = 0 & b: -x + 2y - 4 = 0
 \end{array}$$

Asymptoty mají rovnice $a: x - 2 = 0$, $b: -x + 2y - 4 = 0$.

Příklad 5.11. Ukažte, že je kuželosečka $y^2 - 10x - 2y = 0$ regulární a napište rovnici průměru sdruženého se směrem přímky $p: y = x$. Vedte ke kuželosečce tečny rovnoběžné s touto přímkou. [1, str. 64/49] (zadání upraveno)

Řešení - 1.způsob: Nejprve ověříme regularitu kuželosečky.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -25 \Rightarrow \text{regulární kuželosečka}$$

Z rovnice je zřejmé, že se jedná o parabolu. Napíšeme rovnici průměru sdruženého se směrem přímky p a vypočítáme souřadnice jeho průsečíků s kuželosečkou.

$$\begin{aligned}
 p: y = x &\Rightarrow \vec{u} = (1, 1) \\
 (Au_1 + Bu_2)x + (Bu_1 + Cu_2)y + Du_1 + Eu_2 &= 0 \\
 (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)x + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1)y - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 &= 0 \\
 y - 6 &= 0
 \end{aligned}$$

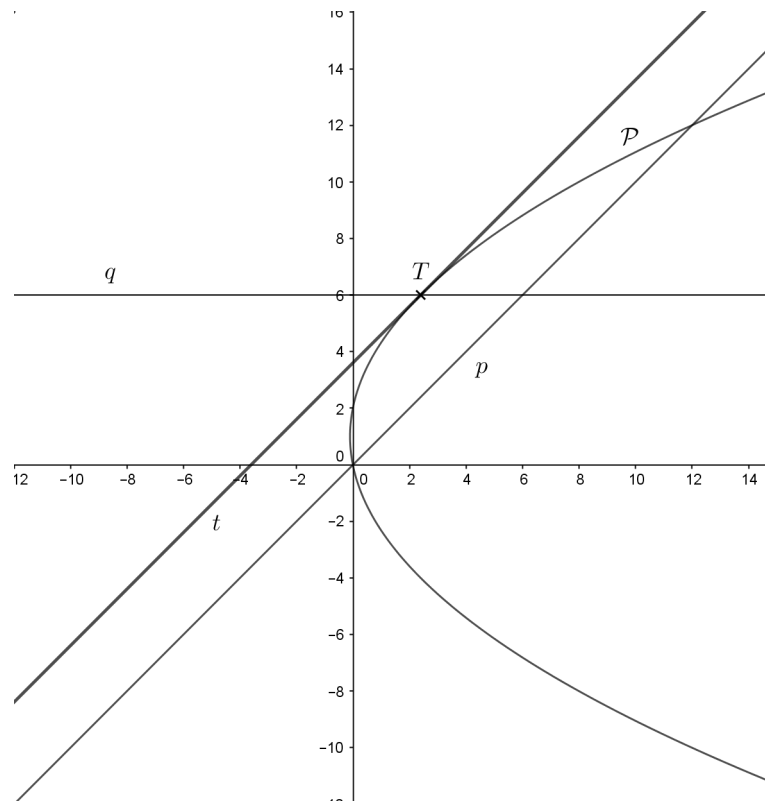
$$\begin{aligned}
 y^2 - 10x - 2y &= 0 \\
 y = 6 &\Rightarrow x = \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$

$$T \left[\frac{12}{5}, 6 \right]$$

Tečna ke kuželosečce má stejný směr jako přímka p a prochází bodem T .

$$\begin{aligned}x - y + c &= 0 \\ \frac{12}{5} - 6 + c &= 0 \Rightarrow c = \frac{18}{5} \\ x - y + \frac{18}{5} &= 0 \Rightarrow 5x - 5y + 18 = 0\end{aligned}$$

Tečna k dané kuželosečce má rovnici $5x - 5y + 18 = 0$.



Obrázek 5.5: Obrázek k příkladu 5.11

Řešení – 2.způsob: Z rovnice je zřejmé, že se jedná o parabolu. Převédeme rovnici paraboly na vrcholový tvar.

$$\begin{aligned}y^2 - 10x - 2y &= 0 \\ (y - 1)^2 - 1 &= 10x \\ (y - 1)^2 &= 10\left(x + \frac{1}{10}\right) \\ V &= \left[1, -\frac{1}{10}\right]\end{aligned}$$

Nejprve vypočítáme rovnice tečny kuželosečky rovnoběžné s přímkou p pro bod dotyku $T[t_1, t_2]$.

$$(y - 1)(t_2 - 1) = 5 \left(x + t_1 + \frac{2}{10} \right)$$

$$5x + y(1 - t_2) + 5t_1 - 2 = 0$$

Tečna má být rovnoběžná s přímkou p , porovnáme koeficienty rovnice tečny odvozené z kuželosečky a rovnice přímky rovnoběžné s p .

$$5x + y(1 - t_2) + 5t_1 + t_2 = 0 \qquad k(x - y + c) = 0$$

$$5 = k$$

$$1 - t_2 = -k \Rightarrow t_2 = 6$$

$$5t_1 + t_2 = kc \Rightarrow t_1 = \frac{5c - 6}{5}$$

Bod dotyku náleží kuželosečce, dosadíme jej do její rovnice a dopočítáme t_2 .

$$(y - 1)^2 = 10 \left(x + \frac{1}{10} \right)$$

$$25 = 10 \left(\frac{5c - 6}{5} + \frac{1}{10} \right)$$

$$c = \frac{18}{5} \Rightarrow t_1 = \frac{12}{5}$$

$$t : x - y + \frac{18}{5} = 0 \Rightarrow 5x - 5y + 18 = 0$$

Sdružený průměr prochází tečným bodem a je rovnoběžný s osou paraboly, která je rovnoběžná s osou x .

$$y = t_2$$

$$y = 6$$

Kuželosečka je regulární, sdružený průměr se směrem přímky p má rovnici $y = 6$ a tečna rovnoběžná se směrem přímky p má rovnici $5x - 5y + 18 = 0$.

Příklad 5.12. Napište rovnice regulárních kuželoseček, které procházejí počátkem a směry os x , y jsou jejich sdružené směry. [1, str. 78/54]

Řešení: Vypočítáme sdružené směry pro směry souřadnicových os.

$$\begin{aligned}u_y &= (0, 1) \\v_y &= (-Bu_1 - Cu_2, Au_1 + Bu_2) \\(-C, B) &= (1, 0) \Rightarrow B = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_x &= (1, 0) \\v_x &= (-Bu_1 - Cu_2, Au_1 + Bu_2) \\(-B, A) &= (0, 1) \Rightarrow B = 0\end{aligned}$$

Kuželosečka prochází počátkem, její rovnici vyhovuje bod $[0, 0]$.

$$\begin{aligned}Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= 0 \\F &= 0\end{aligned}$$

Kuželosečka musí být regulární, musí tedy platit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF + BED + DBE - DCD - AEE - BBF \neq 0$$

Napišeme k sobě všechny vztahy, které o kuželosečce víme.

$$\begin{aligned}ACF + BED + DBE - DCD - AEE - BBF &\neq 0 \\F &= 0 \\B &= 0\end{aligned}$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = 0 \wedge CD^2 - AE^2 \neq 0$$

Kuželosečka splňující daná pravidla je ve tvaru $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = 0$, kde $CD^2 - AE^2 \neq 0$.

Část II
Praktická část

Kapitola 6

Praktická část

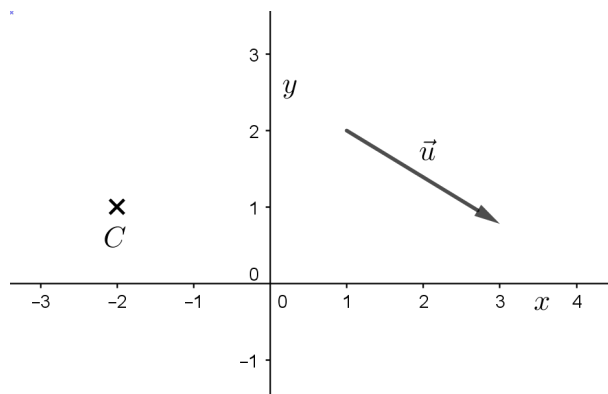
Součástí mé diplomové práce je praktická část, která se zaměřuje na identifikaci častých chyb studentů v příkladech. Ta by měla sloužit k poučení učitelů, které části látky při výkladu více zdůraznit, a k poučení studentů, na co si dát pozor. Ze sbírky byl sestaven soubor příkladů, který byl zadán studentům. Po zkušenostech z bakalářské práce byly studentům zadány jednodušší úlohy, aby měli větší motivaci je řešit.

Do testování byli zařazeni studenti třetího ročníku střední průmyslové školy. Celkem se zúčastnilo 89 studentů ze 4 tříd. Studenti této školy se dle ŠVP učí analytickou geometrii celé první pololetí. Mají zde zařazenou pouze analytickou geometrii v rovině. Hodinové dotace pro jednotlivé kapitoly jsou: vektory + body (11), přímky (22), kružnice (5), elipsa (6), hyperbola (5), parabola (5) a klasifikace kuželoseček (3). Látka je vyučována v tomto pořadí. Test byl zadán na konci prvního pololetí. Studenti o testu věděli čtrnáct dní dopředu a znali rozsah testované látky.

6.1 Zadání testu

Studentům bylo rozdáno následující zadání, které bylo ve dvou variantách lišících se pouze v číslech a pořadí otázek. Na vypracování měli 35 minut a k dispozici měli tabulky a kalkulačky.

1. Jaké souřadnice má opačný vektor k vektoru \vec{u} (viz obrázek 6.1)? Napište souřadnice koncového bodu vektoru $-\vec{u}$ umístěného do bodu C .
2. Vypočítejte délku úsečky MN , $M[1, 5]$ a $N[-2, 4]$. Dále napište souřadnice jejího středu.
3. Napište parametrické rovnice přímky p , která prochází bodem $A = [3, -1]$ a je rovnoběžná s přímkou $q : 2x + 3y + 7 = 0$.
4. Spočítejte odchylku přímek $a : 3x - y + 7 = 0$, $b : x = 1 - 3t$, $y = 2 + t$.
5. Jakou excentricitu má hyperbola zadaná rovnicí $(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 25$?
6. Je dána kuželosečka $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$. Klasifikujte kuželosečku a napište její vlastnosti (střed, ohniska, vrcholy, parametr, hlavní a vedlejší poloosu).



Obrázek 6.1: Obrázek k úloze 1

6.2 Hodnocení řešení

Nejprve uvádím správné řešení úloh a časté chyby, které se vyskytly v řešení studentů. Početní chyby neviduji, ty nejsou předmětem zájmu v tomto testování.

6.2.1 Úloha číslo 1

Řešení

Řešení – 1.způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice vektoru \vec{u} ze souřadnic jeho počátečního a koncového bodu. Poté dopočítáme souřadnice opačného vektoru.

$$A = [1, 2], B = [3, 1]$$

$$\vec{u} = B - A = (2, -1)$$

$$-\vec{u} = (-2, 1)$$

Nyní umístíme opačný vektor do bodu C . Koncový bod označíme $D[d_1, d_2]$.

$$D = C + (-\vec{u})$$

$$D = [-2, 1] + (-2, 1)$$

$$D = [-4, 2]$$

Řešení – 2.způsob: Do obrázku zakreslíme opačný vektor, ztotožníme jeho počáteční bod s počátkem a poté odečteme souřadnice koncového bodu.

$$-\vec{u} = (-2, 1)$$

Zakreslíme opačný vektor do soustavy souřadnic a zapíšeme souřadnice koncového bodu.

$$D = [-4, 2]$$

1. způsob řešení si vybralo 70 % správných řešitelů .

Časté chyby

1. Studenti si pamatují, že mohou odečíst souřadnice vektoru pomocí souřadnic koncového bodu, ale už zapomínají, že vektor musí být umístěn počátečním bodem do počátku soustavy souřadnic.
2. Studenti neumístili do bodu C vektor $-\vec{u}$, ale pouze vektor \vec{u} .

Úloha 1	chyba 1	chyba 2	neřešili	správně
absolutní četnost	7	8	6	29
relativní četnost ¹	7,87 %	8,99 %	6,74 %	32,58 %

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří v úloze udělali numerické chyby

Tabulka 6.1: Úloha 1

Tuto úlohu vyřešilo správně 32,58 % studentů. Nejčastěji se vyskytla chyba 1 a to v necelých 9 %. Této chybě by šlo předejít procvičením více příkladů na vyznačování vektorů do soustavy souřadnic. Chyba 2 je pouze z nepozornosti, ale i tak ji udělalo necelých 8 % studentů. Necelých 7 % studentů tuto úlohu vůbec nezačalo řešit.

6.2.2 Úloha číslo 2

Řešení

Řešení – 1.způsob: Nejprve vypočítáme vzdálenost bodů M, N .

$$d(M, N) = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{10}$$

Nyní vypočítáme souřadnice středu S_{MN} .

$$S_{MN} = \left[\frac{m_1 + n_1}{2}, \frac{m_2 + n_2}{2} \right] = \left[\frac{1 + 2}{2}, \frac{5 + 4}{2} \right] = \left[\frac{-1}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

Řešení – 2.způsob: Nejprve vypočítáme souřadnice vektoru MN a poté jeho velikost.

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= (-2 - 1, 4 - 5) = (-3, -1) \\ |\vec{MN}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

K bodu M přičteme polovinu vektoru \vec{MN}

$$S_{MN} = M + \frac{\vec{MN}}{2} = \left[1 + \frac{-3}{2}, 5 + \frac{-1}{2} \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

Pokud žáci úlohu řešili, počítali prvním způsobem.

Časté chyby

1. Studenti si úlohu načrtli a pak se snažili délku odměřit. Tímto způsobem určili správně souřadnice středu, ovšem délka nebyla přesná.
2. Během výpočtu studenti nepřepsali odmocninu a zapomněli na ní. Jejich výsledek byl 10 místo $\sqrt{10}$.

Úloha 2	chyba 1	chyba 2	neřešili	správně
absolutní četnost	4	7	9	42
relativní četnost ¹	4,49 %	7,87 %	10,11 %	47,19 %

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří v úloze udělali numerické chyby

Tabulka 6.2: Úloha 2

Úlohu vyřešilo správně 47 % studentů. Chybu 1 udělalo necelých 5 % studentů. Z hlediska analytické geometrie je tento způsob řešení chybný, protože není přesný, ale ocenila bych vlastní nápad studentů a schopnost přenést souřadnice do grafu. Chyba 2 je z nepozornosti, ale i tak ji udělalo necelých 8 % studentů. 10 % studentů úlohu neřešilo.

6.2.3 Úloha číslo 3

Řešení

Řešení – 1.způsob: Rovnoběžné přímky mají stejné směrové vektory, což znamená, že mají i stejné normálové vektory.

$$\begin{aligned}p &: 2x + 3y + c = 0 \\A \in p &\Rightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + c = 0 \\& c = -3 \\p &: 2x + 3y - 3 = 0\end{aligned}$$

Převédeme na parametrické vyjádření.

$$\begin{aligned}2x + 3y - 3 = 0 &\Rightarrow y = \frac{3 - 2x}{3} \\p: x = t & \quad t \in \mathbb{R} \\y &= 1 - \frac{2}{3}t\end{aligned}$$

Řešení – 2.způsob: Z obecné rovnice přímky q určíme její normálový vektor, který je kolmý na směrový vektor přímky p .

$$\begin{aligned} \vec{n}_q = (2, 3) &\Rightarrow \vec{u}_p = (-3, 2) \\ p: X &= A + t\vec{u}_p \\ x &= 3 - 3t \\ y &= -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Při kontrole příkladu je nutné vzít v potaz, že přímka nemá pouze jedno parametrické vyjádření.

Všichni správně řešitelé použili druhý způsob řešení.

Časté chyby

1. Studenti dosazovali do parametrického vyjádření normálový vektor.
2. Jako výsledek studenti uvedli obecný tvar rovnice přímky (v tomto případě získali polovinu bodů).

Úloha 3	chyba 1	chyba 2	neřešili	správně
absolutní četnost	12	19	24	11
relativní četnost ¹	13,48 %	21,35 %	26,97 %	12,36 %

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří v úloze udělali numerické chyby

Tabulka 6.3: Úloha 3

Tuto úlohu vyřešilo správně 12 % studentů. Chybu 1 udělalo přes 13 % studentů. Z této chyby můžeme usuzovat, že by se mělo studentům více zdůraznit, které vektory dosazovat do parametrického vyjádření a které do obecné rovnice přímky. Chyba 2 se vyskytla ve 21 % případů. Této chybě bychom mohli zamezit zvýrazněním slov **parametrické rovnice** v zadání. Necelých 27 % studentů úlohu neřešilo.

6.2.4 Úloha číslo 4

Řešení

Řešení: Musíme si uvědomit, že rovnice přímky a je dána v obecném tvaru. Můžeme určit normálový vektor. Přímka b je dána parametrickým vyjádřením. Můžeme určit směrový vektor.

$$\begin{aligned} \vec{n}_a = (3, -1) &\Rightarrow \vec{u}_a = (1, 3) \\ \vec{u}_b &= (-3, 1) \\ \cos \varphi &= \frac{|\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b|}{|\vec{u}_a| \cdot |\vec{u}_b|} = \frac{|-3 + 3|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 0 \\ \varphi &= 90^\circ \end{aligned}$$

Přímky jsou na sebe kolmé, což můžeme určit rovnou z jejich směrových vektorů.

Časté chyby

1. Studenti do vzorce dosadili jeden směrový a jeden normálový vektor.
2. Studenti si vypsalí vektory \vec{n}_a , \vec{u}_b z rovnic přímk, ale považovali je oba za směrové. Ty pak porovnali a určili, že jsou přímk rovnoběžné.

Úloha 4	chyba 1	chyba 2	neřešili	správně
absolutní četnost	18	18	18	17
relativní četnost ¹	20,22 %	20,22 %	20,22 %	19,10 %

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří udělali numerickou chybu

Tabulka 6.4: Úloha 4

Úlohu vyřešilo správně 19 % studentů. Počet studentů, kteří udělali chybu 1, a těch, kteří udělali chybu 2, byl stejný a to 18, což je přes 20 %. Oběma častým chybám by šlo předejít, pokud bychom studentům více zdůraznili, který vektor používáme v obecné rovnici přímky a který v parametrickém vyjádření. 20 % studentů úlohu vůbec neřešilo.

6.2.5 Úloha číslo 5

Řešení

Řešení: Nejprve upravíme rovnici hyperboly na středový tvar.

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - (y - 3)^2 &= 25 \\ \frac{(x + 2)^2}{25} - \frac{(y - 3)^2}{25} &= 1\end{aligned}$$

Ze středové rovnice určíme délky poloos.

$$\begin{aligned}a &= 5, \quad b = 5 \\ e &= \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Excentricita této hyperboly je rovna $5\sqrt{2}$.

Časté chyby

1. Studenti označili za délku poloosy její druhou mocninu.
2. Studenti použili vztah pro excentricitu, který platí pro elipsu.

Úlohu vyřešilo správně přes 75 % studentů. Chybu 1 udělalo necelých 5 % studentů. Tato chyba mohla být způsobena stresem z časového limitu, protože si studenti nezkontrolovali vzorec v tabulkách. Chyba 2 se velmi často vyskytovala i při počítání v hodinách. Ač na ni byli studenti upozorněni několikrát, přesto ji v tomto testu udělalo necelých 7 % studentů. Přes 10 % studentů tuto úlohu neřešilo.

Úloha 5	chyba 1	chyba 2	neřešili	správně
absolutní četnost	4	6	9	67
relativní četnost ¹	4,49 %	6,74 %	10,11 %	75,28 %

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří v úloze udělali numerickou chybu

Tabulka 6.5: Úloha 5

6.2.6 Úloha číslo 6

Řešení

Řešení: Rovnice kuželosečky neobsahuje člen xy , její osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Převédeme na středový tvar. Použijeme doplnění na čtverec.

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 &= 0 \\
 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) + 24 &= 0 \\
 4((x - 2)^2 - 4) + 9((y - 1)^2 - 1) + 24 &= 0 \\
 4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 &= 1 \\
 \frac{(x - 2)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{1}{9}} &= 1
 \end{aligned}$$

Ze středového tvaru určíme, že se jedná o elipsu. Dále určíme délku hlavní a vedlejší osy a souřadnice středu. Poté dopočítáme excentricitu.

$$\begin{aligned}
 S &= [2, 1], \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3} \\
 e &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6}
 \end{aligned}$$

Nyní dopočítáme souřadnice vrcholů.

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\frac{3}{2}, 1 \right], \quad B = \left[\frac{5}{2}, 1 \right] \\
 C &= \left[2, \frac{4}{3} \right], \quad D = \left[2, \frac{2}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Časté chyby

1. Studenti převedli na rovnici $4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 1$ a nevěděli, jak pokračovat.
2. Při výpočtu excentricity použili vztah pro hyperbolu.
3. Studenti poznali, že se jedná o elipsu, ale neurčili její vlastnosti.
4. Ve čtyřech testech se objevilo správné převedení na středový tvar a pak napsáno: kružnice.

5. Studenti vypočítali excentricitu, délku hlavní a vedlejší poloosy a neurčili souřadnice vrcholů a ohnisek.

Úloha 6	chyba 1	chyba 2	chyba 3	chyba 4	chyba 5
absolutní četnost	9	6	4	4	8
relativní četnost ¹	10,11 %	6,74 %	4,49 %	4,49 %	8,99 %
	neřešili	správně			
absolutní četnost	19	4			
relativní četnost	21,35 %	4,49 %			

¹ v tabulce nejsou uvedeni studenti, kteří v úloze udělali numerické chyby

Tabulka 6.6: Úloha 6

Tuto úlohu vyřešilo pouze necelých 5 % studentů správně, přestože to byla úloha z poslední probírané látky. Zde se vyskytlo více častých chyb. Tu první udělalo nejvíce studentů a to přes 10 %. Nepřevodli výraz na složený zlomek. Chybu 2 udělalo stejně jako v předchozí úloze necelých 7 % studentů, ovšem nebyli to vždy ti stejní. Chyba 3 se vyskytla v necelých 5 % a předpokládám, že ji zapříčinilo nedočtení zadání. Studenti jen klasifikovali kuželosečku a poté už neurčili vlastnosti. Chybu 4 udělali 4 studenti, což je necelých 5 % případů. Poslední častou chybou a to neurčení ohnisek udělalo necelých 9 % studentů. Je zajímavé, že žádný ze studentů, kteří využívají v hodinách GeoGebru, tuto chybu neudělal.

6.3 Shrnutí

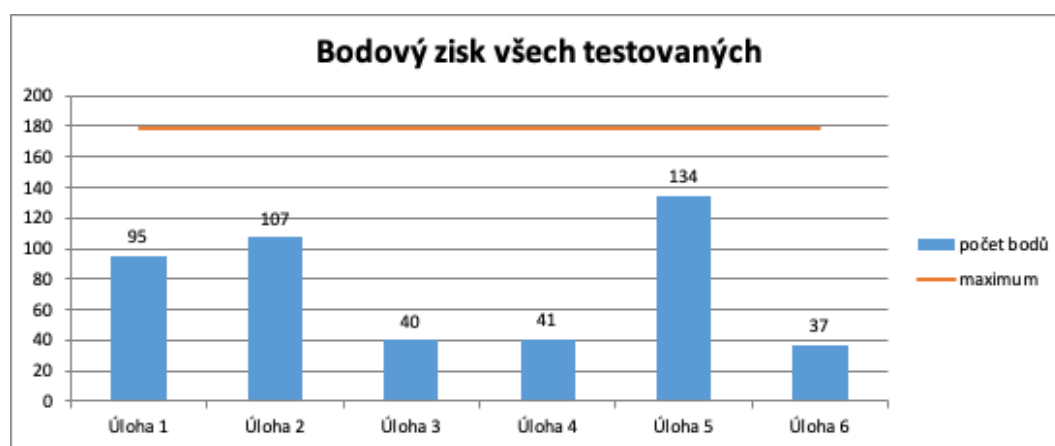
Zvolený časový limit byl pro většinu studentů dostatečný, jen čtyřem studentům byl časový limit prodloužen o pět minut. Maximální počet bodů za jednotlivé úlohy byl 179 bodů, v grafu 6.2 je vyznačen červenou čarou. Jak vidíme z grafu, největší úspěšnost byla u úlohy 5. Celkově z této úlohy studenti získali 134 bodů. Přes 75 % studentů tuto úlohu vyřešilo správně. Tento výsledek přisuzuji tomu, že úloha byla poměrně lehká a učili se ji měsíc před testem. Z této látky psali studenti samostatný test, tudíž si ji museli pořádně procvičit.

Druhá nejúspěšnější úloha byla úloha 2. Za tuto úlohu získali studenti celkově 107 bodů. Správně úlohu vyřešilo přes 47 % studentů. Výpočet středu úsečky studenti používali v analytické geometrii celý půlrok, tím pádem není překvapivá velká úspěšnost této úlohy.

Třetí nejúspěšnější úloha byla úloha 1, ze které studenti získali celkově 95 bodů. Tato úloha mi přijde nejjednodušší, ale mělo ji jen 32 % studentů správně. Vektory se probíraly půl roku před testem, studenti je používali v úlohách, ale samotné vektory nezakreslovali přibližně 4 měsíce. Doporučuji na vektory nezapomenout a stále je zakreslovat i u přímek, kuželoseček, aby si je studenti opakovali.

Další tři úlohy dopadly o více než polovinu hůře v bodovém rozmezí pouhých 4 bodů. Přímký mají časovou dotaci 22 hodin. Tato časová dotace mi přijde nedostatečná, vzájemné polohy přímk a jednotlivá vyjádření rovnic přímk jsou pro ně matoucí. Doporučuji na přímk vyhradit více času a procvičovat je déle. Nejméně úspěšnou úlohou byla úloha číslo 6. Za tuto úlohu studenti celkově získali pouze 37 bodů. Správně vyřešilo tuto úlohu necelých 5 % studentů a přes 21 % ji vůbec nezačalo řešit. Tento typ úloh je dotován pouze třemi hodinami a dle mého názoru si je studenti nestihli ještě zažít. Doporučuji po probrání každé kuželosečky zařazovat úlohy na klasifikaci již probraných kuželoseček.

Celkově z testování vidíme, že tato látka není pro studenty lehká a měli bychom je více motivovat a ukazovat příklady z praxe, kde se analytická geometrie využívá.



Obrázek 6.2: Bodový zisk jednotlivých úloh

Třída	Úloha 1		Úloha 2		Úloha 3		Úloha 4		Úloha 5		Úloha 6					
	chyba	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4	5
S3		6	3	2	2	3	7	6	4	3	3	5	3	1	1	4
EP3		0	1	1	4	3	6	3	6	0	0	2	1	2	1	0
IT3		1	1	1	1	4	2	5	4	1	2	2	2	0	1	0
AE3		0	3	0	0	2	4	4	4	0	1	0	0	1	1	4

Tabulka 6.7: Přehled chyb v jednotlivých třídách

Nyní se zaměřím na výskyt jednotlivých chyb ve třídách. Po důkladném prozkoumání tabulky 6.7 jsem si všimla, že ve třídě S3 udělalo šest studentů chybu 1 v první úloze. V ostatních třídách se tato chyba vyskytla celkově pouze jednou. Je možné, že tato třída neopakovala vektory a proto v úloze 1 studenti hodně chybovali. Ve všech dalších úlohách jsou chyby rozvrstveny rovnoměrně, proto můžeme předpokládat menší vliv učitele na chybovost studentů. Třídy EP3 a IT3 využívají v hodinách GeoGebrou. V úloze 6 měly tyto třídy nulový výskyt chyby 5. Domnívám se, že studentům pomáhají hodiny s GeoGebrou k lepší představě umístění kuželosečky a proto snadněji dohledali souřadnice ohnisek.

Závěr

Sbírka úloh nám ukázala více způsobů řešení jednotlivých příkladů. Představila nám souvislosti v teorii a poukázala na to, že je možné vymyslet i příklady, které studenty zaujmou. Je zde i několik motivačních úloh zejména pro vektory, protože studenti z nich uvidí zjednodušení příkladů při použití nové látky. V praktické části se autorka zaměřila na časté chyby studentů a snažila se doporučit metody, jak bychom tyto chyby mohli odstranit. Bylo zde vidět, že v některých chybách pomáhají i grafické aplikace a jejich využití v hodinách matematiky. Vzhledem k velmi malé nabídce sbírek úloh z analytické geometrie, by práce mohla sloužit učitelům matematiky při seminářích na středních školách nebo při cvičeních na školách vysokých.

Seznam použité literatury

- [1] *Boček Leo: Analytická geometrie kuželoseček pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*
Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1977
- [2] *Burda Pavel, Havelek Radim, Hradecká Radoslava: Algebra a analytická geometrie*
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2005
- [3] *Bušek Ivan: Sběrka úloh z matematiky pro gymnázia: analytická geometrie*
Prometheus, Praha, 1996
- [4] *Bydžovský Bohumil: Úvod do analytické geometrie*
Československá akademie věd, Praha, 1956
- [5] *Hejný Milan, Jirotková Darina, Stehlíková Nada: Analytická geometrie*
Univerzita Karlova, Praha, 1996
- [6] *Hlaváček Antonín: Sběrka řešených příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách*
Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965
- [7] *Janeček František, Charvát Jura: Analytická geometrie pro střední školy: Lineární útvary v rovině*
JČMF, Praha, 1995
- [8] *Janyška Josef, Sekaninová Anna: Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*
Masarykova univerzita, Brno, 1996
- [9] *Jirásek František, Braniš Karel, Horák Stanislav, Vacek Milan: Sběrka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 2.část*
SPN, Praha, 1989
- [10] *Klapka Jiří: Analytická geometrie*
Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1960
- [11] *Kolouchová Jana, Jana Řepová, Václav Šobr: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 5. část*
Prometheus, Praha, 1997

- [12] *Kubát Václav, Trkowská Dana: Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*
MATFYZPRESS, Praha, 2011
- [13] *Mída Jiří, Dlouhý Zbyněk: Vektorová algebra a analytická geometrie*
Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1981
- [14] *Pech Pavel: Kuželosečky*
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2004
- [15] *Petáková Jindra: Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*
Prometheus, Praha, 2003
- [16] *Petránek Oldřich, Schmidtmayer Josef, Šíkola Břetislav: Matematika 4 pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*
SPN, Praha, 1980
- [17] *Renc Zdeněk: Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině a prostoru pro gymnázia se zaměřením na matematiku*
SPN, Praha, 1977
- [18] *Šilháček Karel, Sechovský Hynek: Geometrie pro VIII. třídu reálků jakož i pro VII. a VIII. třídu reformních reálných gymnázií*
Česká grafická UNIE a.s., Praha, 1936
- [19] *Škrásek Josef, Tichý Zdeněk: Základy aplikované matematiky I*
Nakladatelství technické literatury, Praha, 1989
- [20] *Stehlíková Nada, Hejný Milan, Jirotková Darina: Úvod do studia analytické geometrie*
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 2005
- [21] *Vinš Josef: Geometrie pro sedmou třídu středních škol (vydání pro reálky), analytická geometrie v rovině*
Česká grafická UNIE a.s., Praha, 1928

Seznam obrázků

1.1	Soustavy souřadnic	5
1.2	Obrázek k příkladu 1.1	8
1.3	Obrázek k příkladu 1.5	10
1.4	Konkrétní řešení z příkladu 1.7	12
1.5	Obě řešení k příkladu 1.8	12
2.1	Obrázek k příkladu 2.1	17
2.2	Obrázek k příkladu 2.14	26
3.1	Směrnicový a úsekový tvar přímky	28
3.2	Obrázek k příkladu 3.3	30
3.3	Obrázek k příkladu 3.5	33
3.4	Obrázek k příkladu 3.6	34
3.5	Obrázek k příkladu 3.7	38
4.1	Elipsa	40
4.2	Hyperbola	41
4.3	Parabola	42
4.4	Vrcholový tvar a tečny	43
4.5	Obrázek k příkladu 4.3	45
4.6	Obrázek k příkladu 4.4	47
4.7	Obrázek k příkladu 4.8	51
4.8	Obrázek k příkladu 4.10	52
4.9	Obrázek k příkladu 4.14	56
5.1	Obrázek k příkladu 5.2	63
5.2	Obrázek k příkladu 5.4	68
5.3	Obrázek k příkladu 5.8	75
5.4	Souřadnicové systémy	76
5.5	Obrázek k příkladu 5.11	79
6.1	Obrázek k úloze 1	84
6.2	Bodový zisk jednotlivých úloh	91