Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Analýza řešitelských procesů kombinatorických úloh u žáků na konci 1. období raně školního věku

Analysis of solving processes of combinatorial problems of pupils in 3rd grade at primary school

Lenka Tomešová

Vedoucí práce:	PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň základní školy

2020

Prohlášení

Odevzdáním této diplomové práce na téma Analýza řešitelských procesů kombinatorických úloh u žáků na konci 1. období raně školního věku potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu. Prohlašuji, že jsem do informačního systému SIS vložila elektronickou verzi mé diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Kostelci nad Labem dne 29.4.2020

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala paní PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za poskytnutí cenných rad, ochotu a vedení práce. Dále děkuji pedagogům obou základních škol, kteří mi dali prostor k realizaci výzkumu a všem účastníkům výzkumu. V neposlední řadě děkuji své rodině a příteli za trpělivost a podporu během mého studia.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá kombinatorikou v učivu 1. stupně základní školy. Teoretická část práce se zaměřuje na charakterizování matematické oblasti kombinatorika, stručně popisuje její historický vývoj a základní typy úloh. Teoretické poznatky jsou doplněny o analýzu míry zastoupení učiva kombinatoriky v kurikulárních dokumentech, vybraných učebnicích a matematických soutěžích pro žáky 1. stupně základních škol. Nezbytnou součástí teoretické části práce jsou kapitoly zabývající se řešením kombinatorických úloh. Praktická část práce je zaměřena na analýzu řešitelských procesů kombinatorických úloh u žáků 1. období raně školního věku.

KLÍČOVÁ SLOVA

Kombinatorika, kombinatorická úloha, typologie kombinatorických úloh, žák 1. stupně základní školy, řešitelské procesy, analýza žákovských řešení, počet řešení

ABSTRACT

This diploma thesis deals with combinatorics in primary school teaching methods. The theoretical part is focused on characterisation of mathematical field of combinatorics, briefly describes it's historical evolution and basic types of combinatorial problems. This theoretical knowledge is further supplemented by an analysis of utilization rate of combinatorics in curiculative documents, selected textbooks and mathematical contests for primary school pupils. An essential part of the theoretical part of the work are chapters dealing with solving combinatorial problems. The practical part is based on research of solving combinatorial proceses on tasks for primary school pupils.

KEYWORDS

Combinatorics, combinatorial problem, typology of combinatorial problems, primary school pupil, solving peoceses, analysis of pupils´solving processes, number of solutions

Obsah

ÚVOD

S matematickou oblastí kombinatoriky jsem se sama setkala až na střední škole, kde byla součástí učiva 3. ročníku. S její náplní jsme byli seznámeni pomocí matematických vzorců pro jednotlivé typy kombinatorických úloh. Učivo jsem měla uložené pouze jako formální poznatek[1], proto jsem si toho v dalších letech moc nepamatovala. Jednotlivé typy úloh mi nepřišlo podstatné nadále rozlišovat.

Během studia na vysoké škole jsem byla velmi překvapena, že s učivem kombinatoriky je vhodné seznamovat žáky již na prvním stupni ZŠ (ale klidně i dříve). Velmi mě to zaujalo, a proto jsem se s tím chtěla zabývat hlouběji. V jednotlivých seminářích v průběhu celého studia nás vyučující seznamovali s řešením kombinatorických problémů bez využití vzorců. Začala jsem odhalovat, že kombinatorika je součástí běžného života, a i nejmladší žáci jsou schopni takovéto úlohy bez problému řešit. Při přípravách na hodiny, které jsem měla učit (např. v rámci průběžných praxí nebo matematických kroužků pro žáky), jsem začala tyto úlohy vyhledávat v učebnicích různých nakladatelství.

Při volbě tématu diplomové práce jsem se rozhodla věnovat právě této matematické oblasti. Práce je rozdělena na dvě části – teoretickou a praktickou. Cílem teoretické části je stručně pojednat o historickém vývoji matematické oblasti kombinatoriky, charakterizovat typy úloh podle tradičního dělení, zabývat se postavením kombinatoriky v kurikulárních dokumentech a výskytem tohoto typu učiva ve vybraných učebnicích a matematických soutěžích pro žáky 1. stupně ZŠ. Teoretické poznatky jsou opřeny o učivo celého 1. stupně (tj. 1. i 2. období školní docházky). Pro potřeby praktické části se zaměřím i na proces řešení matematických úloh.

Praktická část práce je založena na kvalitativním experimentu. Hlavním cílem bylo porozumět jevům, které mohou ovlivnit řešitelské procesy žáků na konci 1. období školní docházky při řešení série kombinatorických úloh. Předložená série úloh má stejnou matematickou podstatu, jedná se o typ kombinatorické úlohy permutace bez opakování. Liší se kontextem a formulací zadání. Výzkumné šetření jsem realizovala v listopadu 2019.

[1] **Formální poznatek** je informace, která by mohla být znalostí. Nejčastěji se jedná o izolovaný poznatek, který není propojen se zkušeností nebo jinými poznatky. (Hejný, 2014, s. 54-55)

TEORETICKÁ ČÁST

1. Kombinatorika

Kombinatorika je jednou z mnoha oblastí matematiky. Zabývá se utvářením skupin z daných prvků, které různými způsoby seskupuje a určuje konečné počty a vlastnosti výsledných množin. Celkový počet prvků můžeme označit písmenem „n“ a počet utvořených skupin písmenem „k“. Vytváříme tedy tzv. k-tice z n prvků. Prvky, se kterými kombinatorika pracuje jsou přirozená čísla (celá kladná čísla bez nuly). V zadání úloh často nalezneme podobná slovní spojení, např. „kolik existuje uspořádání prvků“, „kolika způsoby lze sestavit například trojice z deseti prvků“ apod. (Základy kombinatoriky, 2012)

Kombinatorické učivo charakterizují následující pojmy: Permutace, variace, kombinace, to vše bez opakování, s opakováním, uspořádané, neuspořádané, na pořadí záleží, na pořadí nezáleží. Na středních školách, kde je učivo kombinatoriky zařazeno často ve 2.-3. ročníku, žákům tato oblast matematiky připadá často velmi složitá. Hejný a Kuřina ve své publikaci rozlišují dva přístupy k výuce (2015, s. 193). V tradičním (transmisivním) pojetí výuky bývá žáků předložen pouze vzorec pro počítání (formální poznatek), který není opřený o předchozí zkušenosti. Žáci tedy často nevědí, co si pod písmeny ve vzorci představit a je pro ně velmi složité rozlišit jednotlivé typy úloh a k výpočtu aplikovat správný vzorec. Naopak díky konstruktivistickém přístupu k výuce jsou u žáků postupně budovány jejich vlastní matematické poznatky, které přispívají lepšímu porozumění, vedou k objevování matematických vzorců a snazšímu rozlišení typů úloh. Úlohou učitele je pak již jen shrnout podstatné rysy učiva.

Konstruktivistický přístup můžeme vidět i v historii kombinatoriky, o které pojednává následující kapitola. Již ve středověku bylo možné řešit úlohy bez znalosti matematických vzorců a přesné formulace kombinatorických pravidel.

1.1 Historie kombinatoriky

Vznik kombinatoriky nelze přesně určit, jelikož se vyvíjela postupně podle potřeby lidí odpovídat na otázky a vysvětlovat matematické jevy. Jedním z prvních dochovaných záznamů dokazujících výčet možností je spis indického lékaře Susruta, který pomocí šesti základních příchutí dosáhl celkem 63 různých chutí. Dalšími matematiky byli někteří Židé v 11. a 12. století n. l., kteří se zabývali seskupováním písmen do různých slov a seskupováním 7 planet do různých konjunkcí (objevili tak pravidlo pro výpočet k-prvkových kombinací ze 7 prvků). V tomto období ještě neznali všeobecné vzorce, ale využívali výčet všech možností. Od 17. století můžeme o kombinatorice začít mluvit jako o matematické disciplíně, kdy se hlavním předmětem zkoumání staly hazardní hry, loterie, kombinace čísel ve hře Kostky a dalších karetních hrách. Ve stejné době se rozvíjela i oblast Pravděpodobnosti, která má ke kombinatorice velice blízko. (Příhonská, 2008, s. 3,4).

Další autorka zabývající se historickým vývojem kombinatoriky Z. Voglová shrnuje na 27. mezinárodní konferenci Historie matematiky vývoj moderní kombinatoriky takto: *„Počátky moderní kombinatoriky spadají do 17. století. V této době bylo napsáno několik prací, které významně přispěly k rozvoji kombinatoriky. V roce 1665 to bylo Pascalovo Traité du triangle arithmétique, o rok později Leibnizovo Dissertatio de Arte Combinatoria. V roce 1713 bylo vydáno Bernoulliho Ars Conjectandi, které bývá považováno za završení období formování kombinatoriky. První učebnice kombinatoriky vyšla v Lipsku v roce 1901, jejím autorem je německý matematik Netto. Ve 20. století zaznamenala kombinatorika opravdu bouřlivý rozvoj. V souvislosti s vývojem výpočetní techniky se začala rozvíjet celá diskrétní matematika a docházelo k její vnitřní diferenciaci. Kombinatorika se dostala do popředí zájmu mnoha matematiků a je využívána v celé řadě jiných matematických disciplín.“* (Voglová, 2006, s. 72,73)

Z. Voglová ve svém příspěvku na konferenci dále zmiňuje použití základních kombinatorických pravidel v období kolem roku 2000 př. n. l. u čínských a indických civilizací. *„Pravidla byla používána aniž by bylo zachyceno jejich přesné znění. Se základními kombinatorickými pojmy jako jsou variace, kombinace a permutace se v historických textech také setkáváme, mnohdy však nebyl dodržován jejich přesný význam.“*

1.2 Základní kombinatorická pravidla a typologie kombinatorických úloh

Následující podkapitoly vymezují definice oblastí kombinatorického učiva tak, jak jsou předkládány žákům středních škol, které upřednostňují tradiční způsob výuky. Využívám k tomu publikace *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* (Calda, Dupač, 1999) a *Přehled středoškolské matematiky* (Polák, 2008). Uvádím i matematické vzorce pro výpočet kombinatorických úloh. Obě publikace mají velmi podobné definice a ukázkové úlohy. Ani jeden z níže zmíněný pojmů se nezavádí v učivu základních škol.

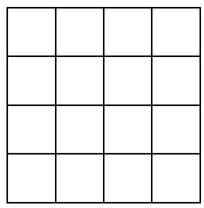
Tato práce je zaměřena na žáky 1. stupně ZŠ, proto jsem v učebnicích vybraného období vzdělávání hledala úlohy, které odpovídají typologii kombinatorických úloh. Všechny zmíněné ukázky u žáků rozšiřují povědomí o těchto pravidlech, lze je vyřešit bez využití matematického vzorce a slouží jako propedeutika rozvoje kombinatorického myšlení pro pozdější výuku učiva kombinatoriky.

1.2.1 Kombinatorická pravidla

Pomocí dvou základních **kombinatorických pravidel – součtu a součinu** – si vystačíme při řešení mnoha úloh. Často úlohy títmto způsobem řešíme, aniž bychom věděli, že používáme kombinatorická pravidla.

A) Kombinatorické pravidlo součtu

- **Definice:** *„Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní*[2]*, pak počet prvků jejich sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An$ je roven $p_1+p_2+ \ldots + p_n$.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 9)
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Polák, 2008, s. 313)



„Čtverec o straně 4cm je rozdělen rovnoběžkami s jeho stranami na 16 jednotkových čtverců (viz obrázek). Určete, kolik lze v něm nalézt všech možných čtverců.“

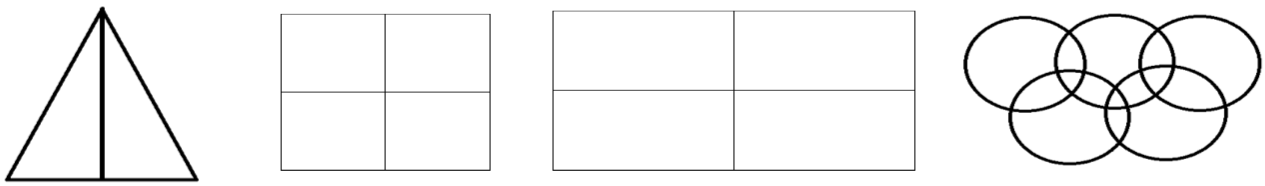
<u>Řešení:</u> Všechny čtverce rozdělíme do čtyř množin A_1 , A_2, A_3, A_4 tak, že v množině Ai jsou všechny čtverce o straně délky i (i = 1, 2, 3, 4) . Z obr. je patrné, že počty čtverců v nich jsou $n_1 = |A_1| = 16$, $n_2 = |A_2| = 9$, $n_3 = |A_3| = 4$, $n_4 = |A_4| = 1$.

[2] **Disjunktní =** prvek se může vyskytnout pouze v jedné množině.

<u>Odpověď:</u> Podle kombinatorického pravidla součtu je proto celkový počet čtverců roven $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$."

- **Komentář k úloze:** Hledání počtu částí v celku se objevuje v učebnicích již od 1. ročníku ZŠ s menším počtem množin. U úlohy není třeba složitě popisovat množiny písmenem. Žák dovede nalézt různě velké čtverce (tedy množiny) v jednotkové mříži. Níže přikládám dvě podobné úlohy z učebnic pro 1. stupeň. Myslím si, že žákovská řešení se mohou lišit. Někdo si je systematizuje a hledá vždy všechny čtverce jedné množiny, někdo naopak vidí v mříži čtverce různě a v jejich celkovém počtu se může tedy ztratit. Různý počet nalezených čtverců je vhodným tématem k diskuzi mezi spolužáky, obhajování vlastního názoru a postupnému hledání systematizace.
- **Úlohy z učebnic pro 1. stupeň ZŠ**
  - <u>Matematika pro 1. ročník, 1. díl, SPN, str. 51, cv. 6</u>

    „Kolik je tu trojúhelníků, čtverců, obdélníků, kruhů? Zapiš:

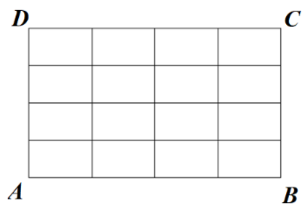


***Obrázek 1** k zadání úlohy z učebnice SPN 1. ročník, 1. díl*

  - <u>Matematika pro 4. ročník – pracovní sešit (2.díl), Alter, str. 38, cv. 10</u>

    „Ve čtvercové síti je znázorněn obdélník ABCD, jehož strany mají délky 4 cm a 3 cm. Urči, kolik čtverců můžeš v obdélníku ABCD vyznačit. Čtverce se mohou překrývat."

- *Čtverců se stranou 1 cm může být: a) 12 b) 6 c) 8 d) 2 e) 1*
- *Čtverců se stranou 2 cm může být: a) 12 b) 6 c) 8 d) 2 e) 1*
- *Čtverců se stranou 3 cm může být: a) 12 b) 6 c) 8 d) 2 e) 1*



B) Kombinatorické pravidlo součinu

- **Definice:** *„Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 9,10)
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Calda, Dupač, 1999, s.10)

Z místa *A* do místa *B* vedou čtyři turistické cesty, z místa *B* do místa C tři. Určete, kolika způsoby lze vybrat trasu z *A* do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

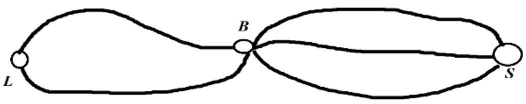
Řešení: Určíme nejprve, kolika způsoby lze vybrat trasu z *A* do C: ke každému ze čtyř způsobů, jak dojít z *A* do *B,* existují tři způsoby, jak dojít z *B* do C. Trasu z *A* do C je tedy možno vybrat dvanácti způsoby. Pro zpáteční cestu máme dvě možnosti. Buď půjdeme stejnou cestou z C do B, nebo z B do A. Pokud zvolíme stejnou cestu z C do B, pak máme právě tři možnosti cesty z B do A. Pokud půjdeme stejnou cestou z B do A, pak máme právě dvě možnosti, jako zvolit jinou cestu z C do B. Ke každé z 12 cest z A do C existuje 5 možných cest zpět, tak abychom právě jednu cestu využili dvakrát.

Odpověď: Trasu z A do C a zpět lze vybrat 12 . 5 = 60 způsoby.

- **Komentář k úloze**

  Tato úloha využívá kombinatorické pravidlo součinu dvakrát. Pro snížení náročnosti úlohy je vhodné hledat jen cestu jedním směrem a vyhnout se tedy využití stejné cesty dvakrát. Volba cesty může být žákům velmi blízká (např. při cestě do školy můžou volit cestu tak, aby nechodili pořád stejně). Změnou motivace úlohy můžeme řešit např. oblékání (musím si vybrat ze 3 triček a 4 kalhot oblečení do školy).
- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - Matematika pro 4. ročník – pracovní sešit (1.díl), Alter, str. 35, cv. 6

„Z Lesné do Bílé vedou dvě běžecké tratě a z Bílé do Sněžné vedou tři běžecké tratě různé obtížnosti. Kolika způsoby se můžeme dostat z Lesné do Sněžné přes Bílou? Trasy vyznač barevně.“



Obrázek 2 *k zadání úlohy z pracovního sešitu Alter 4. ročník, 1. díl*

1.2.2 Variace

A) Variace bez opakování

- **Definice**: *„K-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 13,14)
- **Matematický vzorec**

Počet všech k-členných variací z n prvků je: V (k,n) = n . (n-1) . (n-2) . …….. . (n- k+1)

neboli $\boxed{V\ (k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením**

„K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté. Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.“

Řešení: Vzhledem k tomu, že každé dva pruhy mají být různé barvy, a že záleží na pořadí těchto pruhů, jde o tříčlenné variace z pěti prvků.

- **Komentář k úloze**

  Tzv. vybírání určitého počtu prvků z dané množiny se v učebnicích objevuje poměrně často – např. při sestavování příkladů z vybraných čísel, tvorbě víceciferných čísel z vybraných číslic, skládání písmen do slov apod. Musíme brát ale zřetel na to, zda záleží na pořadí jednotlivých prvků nebo ne. V učebnicích se počítá se znalostí pravidla komutativnosti[3]. Z tohoto důvodu se nejčastěji jedná o úlohy typu kombinace bez opakování než variace bez opakování.
- **Ukázka úlohy z učebnice pro 1. stupeň ZŠ**
  - Matematika pro 3. ročník, Alter, pracovní sešit str. 38, cv. 8

    „Pět dětí (Terezka, Lucka, Max, Pavel a Ondra) si posílalo SMS zprávy, a to každý každému. Kolik zpráv bylo celkem odesláno? (Uvědom si, kolik zpráv odesílal každý z nich.)“

    a) 10　　b) 8　　c) 20　　d) 11　　e) 7

[3] **Komutativní** = vlastnost početní operace sčítání/násobení, kde mohu čísla libovolně uspořádat. Nezáleží tedy na jejich pořadí. (Hejný, 2014, s. 204)

B) Variace s opakováním

- **Definice:** *„Uspořádaná k-tice sestavená z n prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k-krát. Záleží zde na pořadí.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 35)
- **Matematický vzorec pro výpočet**

  Počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků je $\boxed{V'(k,n) = n^k}$
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Polák, 2008, s. 318)

„Kolik je všech možných trojciferných přirozených čísel?“   *<u>Řešení:</u> Trojciferná čísla jsou 3členné variace s opakováním (v čísle se mohou číslice opakovat) z 10 prvků (z číslic 0, 1, 2, ...9), jichž je $V'(3,10) = 10^3 = 1\,000$. Čísla začínající nulou nejsou trojciferná čísla, je jich $V'(2,10) = 10^2 = 100$. Čísel trojciferných je tedy $V'(3,10) - V'(2,10) = 900$. Jsou to čísla od 100 do 999.*

- **Komentář k úloze**

  Tvorba čísel s různým počtem míst je častým příkladem tohoto typu kombinatorické úlohy v učebnicích. Rozšířením základní množiny prvků (např. využitím číslic a písmen), ze kterých hledáme výslednou množinu, můžeme lehce měnit náročnost úlohy. Žáci mohou hledat např. všechny znaky Morseovy abecedy složené z jednoho až čtyř prvků (tj. tečka či čárka), možnosti trojmístného číselného kódu bezpečnostního zámku atd.

- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - <u>Matematika pro 5. ročník, Fraus, str. 29, cv. 3</u>

    „Z číslic 1 a 2 lze vytvořit čtyři dvoumístná čísla 11, 12, 21, 22. Jejich součet je 66. Zjisti součet všech dvoumístných čísel složených z číslic.“

a) 1 a 3	*b) 1 a 4*	*c) 1 a 5*	*d) 1 a 6*	*e) 1 a 9*	*f) 2 a 3*
g) 2 a 4	*h) 2 a 5*	*i) 2 a 9*	*j) 3 a 7*	*k) 4 a 6*	

1.2.3 Permutace

A) Permutace bez opakování

- **Definice:** *„Uspořádaná n-tice z daných n prvků, kde se každý prvek vyskytuje právě jednou. Vždy záleží na uspořádání prvků.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 17)
- **Matematický vzorec pro výpočet**

  Pro určení počtu všech permutací z n prvků využijeme vzorec pro počet k-členných variací z n prvků, do kterého dosadíme $k = n$.

  $$P(n) = V(n,n) = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, \ldots\ldots \,.\, 2 \,.\, 1$$

  Jedná se tedy o součin všech přirozených čísel od 1 do n $(n \in N)$, což můžeme označit zkráceným názvem „faktoriál“ (n!) $\boxed{P(n) = n!}$

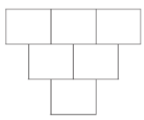
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Polák, 2008, s. 316)

  „V urně je šest lístků téhož tvaru očíslovaných 1, 2, ... 6. Kolika různými způsoby je lze postupně vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

  Řešení: V jednotlivých tazích dostaneme permutace šesti tažených lístků. Počet všech těchto permutací je P (6) = 6! = 720.

- **Komentář k úloze**
- Tyto úlohy jsou velmi vhodné pro žáky 1. stupně ZŠ. Nejčastěji se využívají tříprvkové množiny. Často se využívá seřazování obrázků, usazování dětí na lavičku, skládání kostek, určení pořadí trojice písmen a číslic. atd.
- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - Matematika pro 4. ročník, Fraus, str. 37, cv. 7

    „Zvol tři po sobě jdoucí dvoumístná čísla. Vlož je do tří polí horní řádky součtového trojúhelníku tak, že do prostředního pole dáš:
    a) nejmenší b) prostřední c) největší číslo trojice.“

  - Matematika pro 3. ročník – pracovní sešit (1.díl), Alter, str. 29, cv. 6

    Z číslic 3,5,7 sestav všechna trojciferná čísla tak, aby se číslice neopakovaly.

B) Permutace s opakováním

- **Definice:** *„Uspořádaná skupina, ve které je každý z daných prvků (a_1, a_2, a_3….) zastoupen alespoň jednou a to v předem daném počtu: k_1 krát prvek a_1, k_2 krát prvek a_2, k_3 krát prvek a_3…..“* (Calda, Dupač, 1999, s. 40,41)
- **Matematický vzorec pro výpočet**

  Počet všech permutací s opakováním**:** $P'(k_1,k_2,\dots,k_n)=\frac{(k1 + k2 + \dots + kn)}{k1! \cdot k2! \cdot \dots \cdot kn!}$
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Polák, 2008, s. 318)

Kolik permutací s opakováním lze vytvořit z písmen slova PRAHA?
Řešení: *Všech písmen je pět, A se opakuje dvakrát, počet všech permutací s opakováním je tedy: $P'(2,1,1,1) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$*

- **Komentář k úloze**

  Úlohy zaměřené na permutace s opakováním mohou být pro žáky 1. stupně rozšířením předchozí oblasti. Často pro ně nemusí znamenat změnu v počtu řešení, ale jen přidání další podmínky, kterou musejí při hledání řešení dodržet. Žák si často může určit, který prvek bude ve výsledné množině opakovat a kolikrát.
- **Typické úlohy**
  - Hledání počtu anagramů slov, kde se opakují písmena, např. MAMINKA
  - Hledání způsobů, jimiž jde seřadit sedm kuliček (2 červené, 4 modré, 1 bílá)
- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - Matematika pro 4. ročník – pracovní sešit (1.díl), Alter, str. 23, cv. 6

  „Pomocí číslic 1, 5, 7 (která se mohou v zápisu čísla opakovat) napiš vždy alespoň dvě čísla:“

  a*) pěticiferná*   *b) šesticiferná*   *c) sedmiciferná*   *d) osmiciferná*

1.2.4 Kombinace

A) Kombinace bez opakování

- **Definice:** *„K-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou. K-členná kombinace z n prvků je k-prvková podmnožina množiny těmito n prvky určené.“* (Calda, Dupač, 1999, s. 25).
- **Matematický vzorec pro výpočet**

  Pro všechna celá nezáporná čísla *n, k, k</=n platí* $\boxed{K\ (k,n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ můžeme zkráceně nazvat *<u>Kombinační číslo</u>* a zapsat jej $\binom{n}{k}$, čteme „n nad k“

  Kombinační číslo určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Calda, Dupač, 1999, s. 31)

„Herní systém hokejového turnaje pro deset mužstev spočívá v tom, že v každé ze dvou skupin po pěti družstvech sehraje každé s každým jeden zápas; první dvě mužstva z obou skupin postoupí do finále, kde opět každé s každým sehraje jeden zápas, avšak s výjimkou družstev, která již spolu hrála ve skupině. Určete celkový počet zápasů v turnaji.“

<u>Řešení:</u> Pro zápasy v základní skupině využijeme pravidlo kombinace. Tvoříme 2-člennou kombinaci z 5ti prvků. Nezáleží nám na pořadí (zápas je stejný, když v něm hraje tým A proti týmu B, nebo tým B proti týmu A). Celkem se v základní skupině odehraje 10 zápasů. Stejně by se postupovalo i v dalších skupinách.

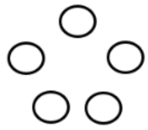
$K(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,.\,(5-2)!} = 10$

- **Komentář k úloze**

  U kombinací nezáleží na pořadí – např. nezáleží nám, zda zápas ve fotbale spolu sehrál tým A proti týmu B, nebo tým B proti týmu A. Ve skutečnosti se jedná o tentýž zápas. Typickými úlohami s funkcí kombinace jsou úlohy typu každý s každým, například cinkání skleniček na večírku, podávání rukou a úlohy o zápasech sportovních týmů. Pro zápis řešení často můžeme využít reálné simulace úlohy, protože v ní často vystupují lidé. Zápis řešení často provádíme tabulkou, uzlovým grafem nebo obrázkem. Tyto úlohy často můžeme zaměnit za variace bez opakování, ve kterých záleží na pořadí a neplatí tedy pravidlo komutativnosti.

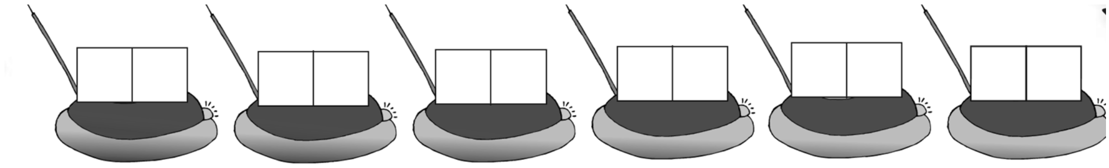
- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - Matematika pro 3. ročník – pracovní sešit (2. díl), Alter, str. 38, cv.7

    „Pět dětí hrálo stolní tenis systémem každý s každým. Znázorni a označ, kolik zápasů sehráli celkem.“

    a) 10 b) 8 c) 20 d) 11 e) 7
  - Matematika pro 2. ročník, 1. díl, Fraus, str. 16, cv. 3

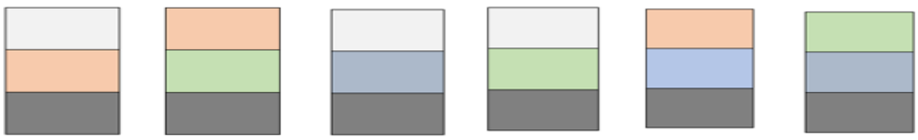
    „Písmena D, R, A, K se vozila na pouti po dvojicích v autíčkách. Napiš všechny možnosti.“



Obrázek 3 k zadání úlohy z učebnice Fraus 2. roční, 1. díl

  - Matematika pro 3. ročník – pracovní sešit (2. díl), Alter, str. 1, cv. 4

    „Z čísel 342, 408, 175, 236 sestavuj příklady na sčítání dvou čísel a vypočítej je.“



Obrázek 4 k zadání úlohy z pracovního sešitu Alter, 3. ročník, 2. díl

B) Kombinace s opakováním

- **Definice:** *„K-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše k-krát."* (Calda, Dupač, 1999, s. 47,48)
- **Matematický vzorec pro výpočet**

  Počet K´(k,n) všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je:

  $$\boxed{K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}}$$
- **Ukázka úlohy ze středoškolské učebnice s řešením** (Calda, Dupač, 1999, s. 50)

„V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je alespoň pět kuliček od každé barvy."

Řešení: V pětici kuliček, které vybíráme, nezáleží na pořadí a barvy kuliček se v ní mohou opakovat. Jde tedy o 5členné kombinace s opakováním ze tří prvků. Je možno utvořit všechny možné pětice ze tří barev, neboť kuliček od každé barvy je dostatečné množství. Počet způsobů výběru je tedy K´(5,3) = $\binom{7}{5} = 21$.

Poznámka: zkráceno o rozšiřující podúlohu.

- **Komentář k úloze**

  Tento typ úloh se v učebnicích pro 1. stupeň objevuje nejméně často. Úlohy jsou často připravené na možnost opakování jednoho prvku, ale již nedodržují stejný počet prvků množiny.
- **Úloha z učebnice pro 1. st. ZŠ**
  - Matematika pro 5. ročník – pracovní sešit, Alter, str. 101, cv. 27

    „V sáčku je schováno 5 modrých kuliček a 3 červené. Kolik kuliček musíš vytáhnout, abys měl/a jistotu, že budeš mít:

    a) Alespoň 1 kuličku od každé barvy

    b) dvě kuličky modré

    c) dvě kuličky červené

2. Kombinatorika ve vzdělávání

2.1 Kombinatorika v RVP

Rámcový vzdělávací program (dále jen RVP) je pedagogický dokument vydaný Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Slouží k vymezení závazných požadavků na vzdělávání pro jednotlivé stupně a obory vzdělávání. Je platný pro všechny školy. Vymezuje základní vzdělávací cíle, formy a délku vzdělávání, stanovuje oblasti vzdělávání. Doporučuje zásady pro tvorbu Školních vzdělávacích programů (dále jen ŠVP) každé školy. Součástí RVP jsou i tzv. klíčové kompetence[4], které tvoří základ pro celoživotní učení a uplatnění každého člena společnosti.

Na tvorbě ŠVP se podílejí učitelé jednotlivých škol. ŠVP stanovuje konkrétní obsah vzdělávání podle jednotlivých předmětů a ročníků. Učivo může být v jednotlivých ročnících rozmístěno odlišně, na konci každého období by měli žáci ze všech škol zvládat stejné očekávané výstupy. Každá škola má možnost profilovat si ŠVP (např. širší zaměření na konkrétní vzdělávací oblast). Jednotlivá ŠVP mívají i vlastní název.

Ve své práci využívám RVP pro základní vzdělávání (RVP ZV), RVP pro gymnaziální vzdělávání (RVP G) a ŠVP škol, na kterých proběhlo výzkumné šetření praktické části. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2017; Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, 2007)

Jednou z devíti vzdělávacích oblastí popsaných v RVP je i *Matematika a její aplikace.* RVP ZV ji charakterizuje následovně: *„Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití."* (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2017, s. 30)

[4] **Klíčové kompetence** jsou výsledkem celého vzdělávacího procesu, jedná se o souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot osobního rozvoje. Mají mezipředmětový rozsah, každá ze šesti klíčových kompetencí (kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, sociální a personální, občanské, pracovní) je charakterizována samostatně a její obsah je přizpůsoben úrovni vzdělávání a konkrétní vzdělávací oblasti.

Oblast Matematika a její aplikace je v RVP ZV rozdělena do čtyř tematických okruhů (*Čísla a početní operace /Číslo a proměnná*[5], *Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a prostoru, Nestandartní aplikační úlohy a problémy*). Pro každý tematický okruh jsou stanoveny očekávané výstupy a doporučené učivo[6]. Jedním z bodů cílového zaměření celé oblasti je „*rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.*“ Prvky kombinatorického myšlení můžeme nalézt ve všech okruzích matematiky, především však v tematickém okruhu *Nestandartní aplikační úlohy a problémy,* kde žáci hledají možné postupy a řešitelské strategie, které běžně nevyužívají. Úspěšnost řešení netradičních úloh není primárně závislá na osvojených početních operacích, ale umožňuje zažít pocit úspěchu i slabším žákům.

V RVP ZV je tematický okruh Nestandartní aplikační úlohy a problémy charakterizován takto: *„Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní“* I přesto, že tento tematický okruh je zařazen do všech období základního vzdělávání, ve výčtu očekávaných výstupů a učiva najdeme zmínku o kombinatorice až ve 3. období vzdělávání („*M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a <u>kombinační úsudek</u> při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací).* (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2017, s. 30,31,37).

Vzdělávání v oblastech matematiky neprobíhá pouze na základní škole. Již v předškolním vzdělávání se v rámci předmatematických činností děti seznamují s matematickými pojmy, čísly, pomocí manipulace hledají řešení konkrétních problémů, rozvíjejí postřeh, vnímání, paměť a rytmus. Využívají se k tomu základní barvy, geometrické tvary, předměty dětem blízké (např. hračky, panenky, autíčka, zvířátka, korálky, magnety…).

[5] Číslo a početní operace (1- 5. ročník), číslo a proměnná (6 - 9. ročník)
[6] Očekávané výstupy a doporučené učivo jsou na základních školách rozděleny do 3 období – 1.- 3. ročník = 1. období, 4. – 5. ročník = 2. období, 6. – 9. ročník = 3. období

Po ukončení vzdělávání na základní škole žáci obvykle přecházejí na střední školy, učiliště a gymnázia, na kterých se vyučování v oblasti matematiky již značně liší.

V RVP G je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace rozdělena do pěti tematických okruhů (*Argumentace a ověřování; Číslo a proměnná; Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost; Závislosti a funkční vztahy; Geometrie)*. Podle tohoto rozdělení matematiky můžeme vidět, že na učivo kombinatoriky je kladen důraz jako na samostatnou oblast. Toto učivo je nejčastěji náplní 2. – 3. ročníku gymnázií. Žáci se seznamují se všemi typy kombinatorických úloh, učí se je řešit pomocí obecných vzorců vyžadujících nejen logické, ale i abstraktní myšlení a představy. Na středních školách se k tomu využívá často samostatných učebnic, které se nevěnují jinému tématu.

2.2 ŠVP vybraných základních škol

Požádala jsem ředitelky škol, na kterých probíhalo výzkumné šetření k praktické části této práce, o možnost nahlédnout do jejich interního dokumentu. Ani jedna škola nemá ŠVP volně dostupné na svých webových stránkách. K dispozici jsem je měla pouze v elektronické podobě v budově školy a s jejich svolením uvádím z každého ŠVP ukázku jedné strany jako přílohy 1 a 2 této práce.

1. škola – Praha, rok poslední aktualizace ŠVP 2015

Na první základní škole jsem neměla k dispozici kompletní ŠVP, ale pouze část s obsahem očekávaných výstupů a učiva matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Tato škola má celé ŠVP rozdělené na očekávané výstupy podle jednotlivých tematických okruhů matematiky. Pro každý očekávaný výstup konkrétně rozpracovávají učivo pro jednotlivé ročníky prvního stupně v jedné přehledné tabulce. Všechny třídy prvního stupně této školy jsou vyučovány podle jedné řady učebnic (nakladatelství Fraus, učebnice s Hejného metodou výuky matematiky).

V ŠVP této školy se můžeme setkat s několika slovními spojeními, které lze využít v oblasti kombinatorického učiva, např.:

- „žák zjišťuje počet možností“ - očekávaný výstup v 5. ročníku (analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel)
- „žák odhaduje výsledky“ - očekávaný výstup v 5. ročníku (řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené aritmetické operace s přirozenými čísly)

Slovní spojení s pojmem kombinuje najdeme v celém ŠVP pouze ve dvou očekávaných výstupech:

- „žák řeší kombinované slovní úlohy (rozbor, matematický zápis, zavedení neznámé)“ – očekávaný výstup 3. ročníku (matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnné a funkčních vztahů)
- „žák řeší logické a kombinační úlohy; zjišťuje počet možností – počet řešení, obhajoba“ – očekávaný výstup 5. ročníku (při řešení problému provede rozbor úlohy a dovede rozhodnout, zda zvolit pro řešení známý algoritmus nebo řešit úlohu úsudkem)

2. škola – v místě mého bydliště, rok poslední aktualizace ŠVP 2019

ŠVP druhé základní školy je na první pohled znatelně odlišné. K dispozici jsem měla pouze jeden kompletní dokument pro všechna tři období základního vzdělávání. Pro potřeby této práce jsem se zaměřila pouze na obsah týkající se předmětu Matematika a její aplikace na 1. stupni. Toto ŠVP určuje obsah učiva pro každý ročník zvlášť a není děleno podle tematických okruhů předmětu matematika. Většina tříd prvního stupně je vyučována tradičním způsobem výuky matematiky (k výuce využívají učebnice nakladatelství SPN), pouze 1 třída využívá učebnice pro konstruktivistickou výuku (nakladatelství Fraus, učebnice s Hejného metodou výuky matematiky). Z tohoto důvodu se liší obsah učiva v ŠVP pro 1. stupeň.

V části ŠVP pro tradiční způsob výuky matematiky můžeme učivo kombinatoriky nalézt pouze pod očekávaným výstupem v 5. ročníku *„Žák řeší nestandartní aplikační úlohy a problémy“* takto: „Řešení jednoduchých praktických slovních úloh a problémů, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.“ Není zde však použita přímo formulace se slovem kombinatorika.

Ve druhé části ŠVP pro konstruktivistické vyučování je kombinatorika v učivu pro 3. a 4. ročník zmíněna v rámci očekávaného výstupu *„Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace“* takto: „Kombinatorické situace (užití závorky)“.

2.3 Kombinatorika ve vybraných učebnicových řadách matematiky pro 1. stupeň ZŠ

K výuce matematiky mohou učitelé v dnešní době čerpat z mnoha učebnicových řad. Učebnice pro základní školy jsou koncipovány obecně, proto by měly zahrnovat všechny oblasti matematiky najednou (v úrovni přiměřené věku žáků). Naopak učebnice matematiky pro střední školy a gymnázia často bývají tematicky zaměřené vždy na určitou oblast – např. Stereometrie, Planimetrie, Funkce, Rovnice a nerovnice, Kombinatorika a pravděpodobnost.

Pro účely této práce jsem důkladně prostudovala učebnicové řady tří různých nakladatelství, které všechny odpovídají požadavkům RVP. Při procházení učebnic jsem měla k dispozici učebnice a pracovní sešity bez metodických příruček.

Vybrané učebnicové řady:

- Nakladatelství Alter, Matematika pro 3.-5. ročník
- Nakladatelství SPN, Matematika pro 1.-5. ročník
- Nakladatelství Fraus, Matematika pro 1.-5. ročník (výuka Hejného metodou)

Při procházení těchto učebnic jsem našla několik úloh, které rozvíjejí kombinatorické myšlení a lze je přiřadit k jednotlivým typům kombinatorických úloh (viz kapitola 1.2 Základní kombinatorická pravidla a typologie kombinatorických úloh, str. 12). Množství úloh a způsob jejich zařazení do učebnic bylo velmi odlišné, popisuji to na následujících stránkách společně s odůvodněním výběru konkrétní řady. Překvapilo mě, že učebnice pro 5. ročník často vytvářel jiný tým autorů než učebnice pro nižší ročníky.

2.3.1 Učebnice nakladatelství Alter

Tuto učebnicovou řadu jsem si vybrala, protože jsem podle ní byla sama vyučována na základní škole. Bohužel jsem neměla k dispozici celou řadu, ale pouze učebnice a pracovní sešity pro 3.-5. ročník ZŠ. Před procházením této učebnicové řady jsem si nevzpomněla, zda obsahovala kombinatorické úlohy.

V každém ročníku najdeme 3-5 úloh rozvíjejících kombinatorické myšlení u kterých jsem celkem snadno dokázala zařadit, ke kterému typu podle tradičního dělení patří. V učebnicích jsem našla pouze dvě úlohy, a to v 5. ročníku, dalších 11 úloh jsem našla v pracovních sešitech. Úlohy v pracovních sešitech žákům často napovídají počet možných řešení (žáci mají obvykle na výběr ze čtyř možností).

V této učebnicové řadě mě překvapily dvě věci. První věcí bylo najití nejvíce kombinatorických úloh v učebnicích pro 3. ročník (celkem 5). Druhou věcí bylo nalezení speciálních dvojstránek v pracovních sešitech pro 4. ročník, které byly nazvané „nestandartní úlohy". V pracovních sešitech a učebnicích jiných ročníků jsem takto pojmenované stránky nenašla. Myslím si, že takto pojmenované kapitoly mají u žáků vzbudit zájem o matematiku, protože předložené úlohy se můžou řešit jinými strategiemi, u kterých mohou zažít pocit úspěchu i slabší žáci. Není v nich tak často potřeba využití osvojených matematických dovedností a lze je řešit např. logickým úsudkem.

2.3.2 Učebnice nakladatelství SPN

Učebnicovou řadu z nakladatelství SPN jsem si vybrala, protože ji využívají učitelé na základní škole v místě mého bydliště, kde proběhlo výzkumné šetření k praktické části této práce. K dispozici jsem měla pouze učebnice pro 1.-5. ročník bez pracovních sešitů.

V učebnicích pro 1. a 2. ročník této řady jsem našla průměrně na každé druhé stránce úlohy zaměřené na propedeutiku kombinací s opakováním, které se zabývají mincemi (např. Vybarvi mince, kterými můžeš zaplatit nákup v hodnotě 8Kč.). V dalších ročnících už se úlohy tohoto typu neobjevují.

Ve 2. a 5. ročníku můžeme najít úlohy na kombinatorické pravidlo součtu v oblasti geometrie (např. Zapiš, kolik najdeš v obrazci trojúhelníků, čtyřúhelníků…). V učebnici pro 3. ročník se můžeme na str. 45 a 85 setkat s pojmem **kombinuj**, nicméně o kombinatorickou úlohu se nejedná. Byla jsem překvapena, že jsem v učebnicích pro 3. a 4. ročník nenašla žádnou kombinatorickou úlohu. Tyto učebnice obsahovaly naopak mnoho sloupečkových příkladů a slovních úloh.

Učebnice pro 5. ročník obsahuje tři samostatné stránky označené nadpisem „Chytrost nejsou žádné čáry", na kterých se vyskytují tři kombinatorické úlohy. Stejně jako v učebnicích nakladatelství Alter, mají takto pojmenované stránky za cíl vzbudit u žáků zájem o matematiku a předkládají jim úlohy, se kterými se běžně nesetkají.

2.3.3 Učebnice nakladatelství Fraus

Z nakladatelství Fraus jsem si k důkladnému prostudování zvolila učebnice s Hejného metodou výuky matematiky, protože jsem s nimi byla důkladně seznámena v průběhu studia na VŠ. Tyto učebnice taktéž využívá jedna škola, na které proběhlo výzkumné šetření praktické části této práce. Nesmím opomenout zmínit, že tuto řadu učebnic využívá jedna třída na základní škole v místě mého bydliště. K dispozici jsem měla kompletní sadu učebnic a pracovních sešitů pro celý 1. stupeň ZŠ.

Tato učebnicová řada je pracuje s několika prostředími, které u žáků již od prvního ročníku vyžadují řešení mnoha problémových úloh. Jednotlivá prostředí jsou pro žáky atraktivní, i slabší žáci mohou mít nějaké prostředí velmi oblíbené, a proto tato matematika bývá považována za zábavnější a nepotřebuje žákům předkládat netradiční úlohy na samostatných stránkách. Rozvoj kombinatorického myšlení prostupuje většinou prostředí (např. algebrogramy, barevné trojice, děda Lesoň, neposedové, sčítací trojúhelníky, sousedé, výstaviště apod.) Díky tomu můžeme v těchto učebnicích najít mnoho úloh, které rozvíjí žáky v oblasti kombinatorického myšlení, v každém ročníku jich najdeme nejméně 30. V tomto množství jsem i já sama měla problém je zařadit ke správným typům podle tradičního dělení.

V 1.-3. ročníku nejsou úlohy samostatně označované názvem kombinatorika. Nenajdeme zde ani označení netradiční úlohy. V učebnicích pro 4. ročník najdeme samostatnou kapitolu nazvanou „Kombinatorika a statistika“. V 5. ročníku najdeme úlohy z kombinatoriky hned v úvodní opakovací kapitole na str. 14 a dále pak prvky kombinatoriky v kapitole „Pravděpodobnost a náhoda“.

2.4 Kombinatorika ve vybraných matematických soutěžích

Příprava žáků na matematické soutěže je součástí práce učitele. Žáci se v těchto soutěžích mohou setkat s netradičními úlohami, které v běžných hodinách matematiky nepočítají. Matematické soutěže slouží jako zpestření výuky.

Na školách nejčastěji řešenou matematickou soutěží pro žáky 1. stupně je Matematický klokan. V rámci 1. stupně je rozdělený do dvou kategorií (Cvrček = 2. + 3. třída, Klokánek = 4. + 5. třída) a jeho cílem je „*vyhledávání matematicky talentovaných žáků, obecně pak vyhledávání přemýšlivých dětí*“ (Matematický klokan 2019, 2019).

Další matematické soutěže, kterých se mohou účastnit žáci od 4. ročníku jsou např. MATÍK (okres Zlín), MATÝSEK (okres Svitavy), PIKOMAT (kategorie FILIP, Praha), PLUS 30 (okres Kolín), ZAMAT (okres Mělník). Na 2. stupni ZŠ se mohou žáci a školy kromě Matematického klokana a matematické olympiády přihlásit např. do soutěží PYTHAGORIÁDA nebo PANGEA. Matematický klokan a Matematická olympiáda mají kategorie určené nejen pro základní, ale i pro střední školy.

Některých soutěží se účastní celá třída najednou, některých se účastní jen matematicky zdatní žáci a jiný typ soutěží může být spíše korespondenčního charakteru, nemá tedy školní kola a žáci úlohy mohou řešit ze svého domova.

Níže vybírám ukázky kombinatorických úloh ze soutěže Matematický klokan, kategorie Cvrček. Této soutěže se pravidelně účastní škola v místě mého bydliště, na které mívají starší žáci dobrá umístění v rámci okresu Mělník. Sama jsem tuto soutěž žákům již dvakrát zadávala a vyhodnocovala.

15. Kolik různých čísel větších než 10 a menších než 25 můžeš zapsat pomocí číslic 2, 0, 1 a 8? Každou číslici můžeš v každém čísle použít jen jednou.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

16. Pirát Morgan má dvě truhly. V levé má 10 mincí a pravá je prázdná. Od zítřka uloží každý den do levé truhly 1 minci a do pravé 2 mince. Za kolik dní bude mít v obou truhlách stejný počet mincí?

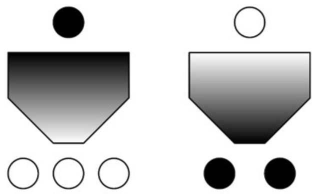
(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) nikdy

Obrázek 5 Matematický klokan 2018 - kategorie cvrček, ukázka úloh

14. V ZOO je 10 velbloudů, mezi kterými jsou velbloudi dvouhrbí (drabaři) a velbloudi jednohrbí (dromedáři). Celkem mají 14 hrbů. Urči počet drabařů v ZOO.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Amálka má stroj, který vymění buď jeden černý žeton za tři bílé žetony nebo jeden bílý žeton za dva černé žetony. Amálka měla tři černé žetony a jeden bílý žeton: ● ● ● ○. Amálka použila svůj stroj třikrát. Urči nejmenší počet žetonů, který mohla na konci mít.



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

***Obrázek 6** Matematický klokan 2019 - kategorie Cvrček, ukázka úloh*

2.5 Kombinatorika a mezipředmětové vztahy

Monika Žilková (2003, s. 1) ze slovenské univerzity v Nitře uvádí: *„Úlohou učitele je najít co nejlepší metodu budování kombinatorického myšlení u dětí, nejdříve bez znalostí kombinatorických pojmů. Žáci umí řešit kombinatorické hry, hlavolamy či rébusy o hodně dřív, než se seznámí s kombinatorickými pojmy[7].“* Nejsnazší cestou je předkládat jim takovéto situace v běžném životě, kde si ani neuvědomují používání matematiky. Žáci se s kombinatorikou seznamují v různorodých prostředích a učí se tak objekty klasifikovat, hledat pravidelnost, podobnost, pracovat s chybou, vytvářet strategie a zaznamenávat výsledky. Využití sémantiky učiteli umožňuje snadnou motivaci úlohy pro různý typ žáků.

První oblast, do které se kombinatorika promítá, jsou situace z běžného života – např. oblékání nebo snídaně. Pokud za žáka nerozhodne rodič, je postaven před volbu, co si dá k snídani (např. při výběru pečiva to může být chléb, rohlík nebo sladký koláč, při výběru pití zase např. čaj, džus nebo kakao), nebo co si obleče do školy. Pokud chodí pěšky do školy, může kombinovat různé ulice tak, aby našel nejrychlejší cestu (nebo naopak může chodit cestou, kde bydlí nejvíce jeho spolužáků). U tématu školní třídy mohou děti vytvářet zasedací pořádek žáků, tvořit rozvrh hodin atd. Uvedené příklady bychom mohli zařadit do oblasti učiva Člověk a jeho svět.

Dalšími předměty, ve kterých můžeme využít kombinatorické myšlení, jsou výchovy. V hudební výchově mohou žáci sestavovat různé rytmy podle zadaných délek not, kombinovat tóny při tvorbě akordů. Ve výtvarné výchově mohou kombinovat různé barvy, tvary a vzory nebo rozmisťovat objekty na ploše papíru. Tělesná výchova přímo vybízí k určování pořadí jednotlivých družstev v zápasech, nebo pořadí na stupních vítězů.

Kombinatorické úlohy rozvíjejí u žáků čtení s porozuměním, což je základem vzdělávacího předmětu Český jazyk. Dále mohou žáci tvořit různá slova ze zadaných písmen. Různým uspořádáním slov ve větě a učivu o slovosledu také rozvíjíme kombinatorické myšlení.

Součástí matematického učiva není jen oblast algebry, ale také geometrie. Žáci mohou uspořádávat geometrické tvary, tělesa a objekty. Úlohy mohou být zaměřené na vzájemné vztahy (Kolika způsoby vedle sebe můžeš poskládat kouli, krychli a válec?), využití vybarvování (Kolika způsoby můžeš vybarvit mříž, která má 2x2 pole s využitím žluté a zelené barvy?) nebo manipulaci s reálnými objekty (stavba věží z různých krychlí).

[7] Vlastní překlad ze Slovenského jazyka (Žilková, 2003, s. 1)

3. Řešení kombinatorických úloh

3.1 Úloha motivace

Z. Kolář ve své publikaci (2012, s. 77) uvádí následující definici pojmu motivace: *„Soubor pohnutek podněcujících k určité činnosti. Patří mezi základní rysy osobnosti. Ve výchově a vzdělávání fungují především vnitřní motivy (potřeby, zájmy, aspirace).“* Žák ve vyučování touží rozvíjet potřebu poznávání a úspěchu, sociálního ocenění, zájem o předmět apod. Jeho jednání je ovlivněno vnitřními a vnějšími motivy[8]. Učitel by měl žákům předkládat vhodné situace, promyšleně organizovat vyučování, propojovat obsah s žákovskými zkušenostmi a jít žákům příkladem. Motivace musí být přizpůsobena cíli a obsahu vyučování a věku žáků. Je uplatňována nejen v první fázi vyučovacího procesu.

Irena Lokšová (1999, s. 43-45) ve své publikaci uvádí následující metody k rozvíjení motivace u žáků: *„Problémové vyučování, vyučování hrou, zajímavé úlohy, soutěže, programované učení, dramatizace činností, odměna a trest, motivační princip akceptování, princip sebevyjádření žáka, rozmanitost ve vyučování, brainstorming, koncentrace pozornosti, regenerace sil, tvořivost, imaginace, činnostní učení, kooperativní vyučování, skupinová dynamika, využívání informačních zdrojů, rozvoj hodnotícího a sebehodnotícího myšlení žáků, aktuálnost a uplatňování principu smyslu a významu učiva.“*

V učivu z oblasti kombinatoriky můžeme využít mnoho z výše uvedených metod. Řešení problémových úloh podněcuje poznávací potřeby žáků, rozvíjí jejich schopnosti a myšlení, rozšiřuje vědomosti a formuje osobnost. Problémové úlohy můžeme velmi snadno motivovat podle zájmu žáků. Učitel může vytvořit dvě zadání stejné matematické úlohy. Děvčata můžou počítat např. panenky, volit různé kombinace obléknutí trička a sukně. Chlapci naopak budou řešit autíčka a jejich pořadí v závodě. Zájmy žáků mohou ovlivnit i strategie při řešení úloh (např. děvčata si oblečky raději nakreslí, chlapci si mohou udělat přehlednou tabulku výsledků). Metodu dramatizace můžeme využít při znázornění nejasnosti v zadání úlohy, nebo reálném ztvárnění řešení úlohy. Rozmanitost ve vyučování nám zajišťuje zařazení netradičních úloh, které umožňují pracovat jinak než s učebnicí. Tvořivost mohou žáci využít při hledání vlastního způsobu zápisu řešení úlohy. Skupinová práce vyžaduje spolupráci a rozdělení rolí při hledání řešení. Sebehodnocení zvyšuje odpovědnost žáků za dění ve třídě a za vlastní učení. Využití aktuálních témat nám umožňuje vzbuzovat u žáků zájem o okolní svět.

[8] **Motiv** = bezprostřední činitel, který vyvolává, řídí a integruje chování (učení) (Lokšová, 1999, s. 18)

Vhodnost zvoleného zadání úlohy může žákům pomoci v pochopení zadání, které by pro ně jinak mohlo být příliš komplikované. Naopak zvolíme-li nevhodnou motivaci, můžeme žáky od řešení úloh odradit.

Dalším důležitým faktorem pozitivní motivace žáků je sociální klima třídy, využití didaktických pomůcek nebo aktivizačních činností ve výuce. Doporučené je zařazení individuální práce, střídání činností, pozitivní naladění učitele a jeho interakce s žáky, umožnění žákům vyjádřit se a projevit své zájmy. U žáků prvního stupně ZŠ hraje velkou roli také zařazení manipulačních činností, které je využíváno při zavádění elementární matematiky velmi často. Děti jsou již od malička zvyklé uchopovat předměty, hrát si s nimi, přemisťovat a skládat je. V mateřské škole pomocí manipulace s předměty dochází především k budování pojmu číslo. Na tento proces navazujeme prostřednictvím pomůcek i na základní škole, kde pomalu žáky vedeme k pochopení základních kombinatorických principů. Prostřednictvím manipulace žáci názorně vidí svá nalezená správná ale i chybná řešení a vytváříme prostor ke komunikaci. Vhodnými pomůckami jsou například různobarevné kostky, autíčka, oblečky na panenky, kartičky s čísly, různobarevné kuličky / korálky atd, pastelky, obrázky atd.

K rozvoji kombinatorického myšlení můžeme využít i různé deskové hry – např. Logic, Tangramy, hru Scrabble, Člověče, nezlob se. Žáci rádi řeší různé hlavolamy, bludiště a labyrinty nebo obrázkové sudoku.

3.2 Proces řešení úloh

Nestandartní (tedy i kombinatorické) úlohy můžeme zařadit mezi slovní úlohy. Cílem slovních úloh je dle prof. Divíška (1989, s. 123-124) *„naučit žáky řešit problémy z praxe matematicky. Nutné je umět problém nejprve formulovat jako aritmetickou úlohu.“* Slovní úlohy můžeme rozdělit na jednoduché (k nalezení řešení stačí pouze jedna početní operace) a složité (potřeba více početních operací k nalezení odpovědi). Irena Lokšová (1999, s. 26) zmiňuje důležitost poznání struktury úloh a popisuje tři části, ze kterých se skládá každá úloha.

1. Podmínka úlohy – pojmenování objektů, o kterých se hovoří v úloze, a vztahů mezi nimi
2. Požadavky úlohy – cíl řešení úlohy
3. Operátor úlohy – souhrn operací, které je třeba uskutečnit, aby byly splněny požadavky úlohy

Po seznámení se zadáním úlohy přistupujeme k jejímu řešení, které různí autoři rozdělují do několika fází. Některé dělení je obecnější, jiné naopak konkrétnější díky rozčlenění na menší celky. Všichni autoři se ale shodují na stejných věcech, kterými jsou porozumění problému, přemýšlení nad jeho řešením, samotné řešení a zpětný pohled na něj.

George Pólya se ve své anglicky psané publikaci „How to solve it“ (1957) zmiňuje o čtyřech fázích procesu řešení úloh. Nejprve je nutné **porozumění problému** (první fáze), následuje **propojení jednotlivých informací** a dat, abychom mohli vytvořit **„plán řešení“** (druhá fáze), třetí fází je **samotné řešení tohoto plánu** a poslední fází je **„pohled/krok zpátky“,** což lze chápat jako posouzení či interpretaci výsledku. Autor za klíčové považuje porozumění problému *a říká: „Je pošetilé odpovědět na otázku, které nerozumíte“*[9]. (Pólya, 1957, s. 5-6).

Druhým autorem je prof. Divíšek, který ve své publikaci s dalšími autory uvádí pět fází. Nejprve nastává **rozbor úlohy**, který spočívá v pochopení zadané situace, ujasnění známých a neznámých informací. Tato fáze může obsahovat i grafické znázornění[10] problému a objevení vztahů mezi údaji. Učitel v této fázi klade žákům otázky. Druhou fází je **matematizace problému úlohy**, kdy jde o zapsání rovnice nebo početního příkladu. Třetí fáze je samotné **řešení** a výpočet. Podstatou čtvrté fáze je **zkouška**, tedy ověření správnosti výpočtu dosazením

[9] Vlastní překlad z anglického jazyka: *It is foolish to answer a question that you do not understand.“*

[10] **Grafické znázornění** je třeba odlišit od **grafického řešení**. Grafické znázornění je zjednodušené vyjádření zadané situace a pomůcka k řešení. Z grafického řešení lze přímo vyčíst výsledek bez nutnosti dalšího výpočtu (Divíšek, 1989, s. 126).

do textu úlohy. Poslední fází je **odpověď**, tedy slovní formulace nalezeného řešení úlohy (1989, s. 124-126).

Třetím autorem je Milan Hejný, který oproti maďarskému autorovi Pólyovi fáze řešení úlohy o jednu rozšířil a pojmenoval je úrovně. Na rozdíl od prof. Divíška nevyužívá pojmu zkouška (Hejný, 2001, s. 187):

1. Uchopení situace

2. Nabytí vhledu do situace úlohy *(tedy hlubší porozumění zadání úlohy)*

3. Hledání a stanovení strategie

4. Realizace výpočtu *(samotné řešení úlohy)*

5. Interpretace výsledku

Nejvíce jednotlivé fáze rozpracovaly a do menších celků rozčlenily autorky Blažková, Matoušková a Vaňurová (2002, s. 6-7), které oproti Divíškovi odlišují fázi porozumění textu a rozboru úlohy. Dále pak přidávají fázi odhad výsledku, která žáky navádí k přemýšlení, zda situace může odpovídat realitě.

1. Porozumění *textu,*

2. Rozbor *– analýza podmínek ve vztahu k otázce úlohy,*

3. Matematizace *reálné situace vyjádřené textem úlohy,*

4. *Provedení* ***odhadu*** *výsledku,*

5. Řešení *matematické úlohy,*

6. Zkouška *správnosti,*

7. ***Odpověď*** *na otázku slovní úlohy.*

Dle Hejného a Vondrové (1999, s. 44) je předpokladem úspěšného řešení matematických úloh **porozumění**. Žákovi nestačí jen reprodukovat informace bez toho, aniž by jim porozuměl. Mělo by docházet k přeměně informace z učitelova výkladu do jazyka žáka. V případě nedostatečného porozumění zadání úlohy může u žáků nastat jeden z následujících typů chování, které můžeme sledovat i při řešení kombinatorických úloh:

*1. „**Rezignace** – žák úlohu vzdá,*

*2. **podvádění** – žák se snaží řešení opsat,*

*3. **náhodná kalkulace** – žák vezme (někdy jen některá) čísla z textu úlohy a něco s nimi náhodně udělá – sečte je, vynásobí apod.,*

*4. **náhradní uchopování** – žák se při řešení opírá o „vnější“ poukazy (asociace početních vztahů)“.*

3.3 Řešitelské strategie

Řešení slovních úloh od žáků vyžaduje určitou zkušenost, která může přivést mnoho problémů a chybných řešení, které popisují autorky Blažková, Matoušková a Vaňurová ve své publikaci. Míra chybování je závislá na vyspělosti žáků – méně zdatní žáci často o volbě matematické operace jen tipují a zkouší různé možnosti, zkušenější žáci odhlalí použití operace z formulace v textu. Z níže zmíněných problémů, se oblasti kombinatoriky nejčastěji týkají problémy 1 a 2.

Chybná řešení úloh dle Blažkové, Matouškové a Vaňurové (1995, s. 42-43).

1. Nedostatečná orientace žáků v zadání slovní úlohy. V zadání úloh je nutné rozlišit formu zadání (zda je zadáno číselně, obrázkem nebo slovně). Nejnáročnější je zadání úlohy ústně.

2. Nedostatečné zvládnutí fáze rozboru slovní úlohy. Žáci se během vyučování seznamují s různými strategiemi a postupy řešení úloh. Mnohdy je pro ně velmi složité zvolit ten správný postup. Součástí rozboru úlohy je i znázornění, které usnadňuje nalezení řešení.

3. Nezvládnutí dovednosti přepsat text slovní úlohy do matematického vyjádření. Slovní zápis úlohy a jeho matematický přepis je potřebné cíleně s žáky procvičovat.

4. Stupeň zvládnutí řešení rovnic, nerovnic, případně jejich soustav. U řešení rovnic záleží i velikosti číselného oboru a složitosti rovnice (např. počet neznámých).

5. Žáci nemají návyk důsledného provádění zkoušky správnosti. Učitel by měl své žáky cíleně vést k ověření správnosti zvoleného postupu řešení úlohy. Důležité je porovnávat to se skutečností.

Netradiční úlohy nabízejí odlišné cesty k nalezení správného řešení, umožňují tak žákům využít mnoho různých řešitelských strategií. Žáci na prvním stupni ZŠ řeší kombinatorické úlohy bez pomoci matematických vzorců, nejčastěji experimentem. Vystačí si s operací sčítání a odčítání, případně násobení malých čísel. Důležité je, aby si uvědomili, že mnoho věcí se v našem životě děje systematicky. Proto je nutné i řešení matematických úloh nějak systematizovat a učit je využívat řešitelské strategie, což by mělo být hlavním cílem učiva z oblasti kombinatoriky v tomto období.

Zpočátku bychom od žáků neměli vyžadovat nalezení všech řešení, protože to je náročné na systematickou práci. Musíme je tomu učit postupně, aby později byli sami schopni nalézt všechna řešení. Učitel by si měl všímat různých možností zápisu řešení a přístupu žáků k předloženým úlohám, které žáci v hodinách používají. Dále podporovat jejich tvořivost a umožnit žákům diskutovat o různých možnostech a návodnými otázkami společně vybrat nejvhodnější strategii. V této fázi jsou často slabší žáci velmi nápadití. Když jsou žáci schopni nalézt sami více řešení, předložíme přesný počet řešení, které mají najít. Nakonec by žáci sami měli zvládnout nalézt všechna řešení a ověřit, že žádná další už není možné nalézt.

Nalezení systematizace umožňuje žákům zjednodušit a zrychlit zápis řešení a tím i snadněji nalézt více možností řešení. V hodinách matematiky žáci postupným řešením úloh odhalují zákonitosti, přecházejí od jednoduchého ke složitějšímu, od konkrétního k abstraktnímu, od reálných předmětů k symbolickému zápisu a postupně opouštějí i názorné pomůcky a manipulaci. Způsoby zaznamenání úloh a využití strategií se liší se zkušenostmi žáků a s jejich věkem. Získané zkušenosti z řešení netradičních úloh žáci využijí v dalších ročnících a budou moci na ně navazovat nejen v matematice, ale třeba i v biologii nebo fyzice.

Na prvním stupni ZŠ se můžeme setkat mnoha řešitelskými strategiemi a způsoby řešení úloh, které můžeme i různě kombinovat. Jsou jimi např.:

- náhodný nebo systematický experiment
- výčet možností prvků
- matematický výpočet
- grafický záznam – obrázek, diagram, tabulka, graf
- logická úvaha

Dalším cílem této oblasti je rozvoj specifických schopností a dovedností potřebných pro kombinatorické myšlení. Tyto specifické schopnosti pomáhají zvolit správnou strategii. Ve své publikaci je popisují autorky Blažková, Matoušková a Vaňurová (1998, s. 1–2) následovně:

- *„Uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,*
- *uvědomovat si, zda v daném souboru mohou existovat skupiny prvků požadovaných vlastností,*
- *provádět výběr prvků z nějaké skupiny podle určitého pravidla,*
- *provádět rozdělování prvků dané skupiny na základě určitého požadavku,*
- *provádět uspořádání prvků dané skupiny daným způsobem,*
- *najít metodu vyhledávání všech skupin prvků s požadovanou vlastností (např. výčtem prvků, graficky, s využitím vztahů nebo vzorců),*
- *rozhodnout, zda jde o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,*
- *rozlišit, zda se prvky ve skupinách mohou či nemohou opakovat,*
- *najít pravidlo pro vyhledávání všech skupin splňujících podmínky dané úlohy."*

Podobné specifické schopnosti pro řešení kombinatorických úloh ve své publikaci popsala i Irena Scholtzová, která provedla na Slovensku se svými kolegy výzkum zaměřený na žáky 4., 6. a 7. ročníku ZŠ. Tito žáci dostali za úkol vyřešit pracovní list s kombinatorickými úlohami. Jeho výsledkem bylo sestavení následujících **13 základních elementů pro řešení kombinatorických úloh**, který zveřejnila ve své publikaci „*Integrácia poznatkou z kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.“* (Scholtzová, 2006, s. 22-33)[11] Tyto elementy chápe jako pomůcku pro učitele, na co by si měli dát při výuce pozor.

- *Element č. 1: Analýza textu a nabytí vhledu do situace úlohy.*
- *Element č. 2: Výběr vhodné metody a strategie řešení.*
- *Element č. 3: Vyjmenování všech možností.*
- *Element č. 4: Propedeutika pro pravidlo součinu.*
- *Element č. 5: Propedeutika pro pravidlo součtu – umění roztřídit.*
- *Element č. 6: Kdy jsou dva objekty „stejné“?*
- *Element č. 7: Grafické znázornění.*
- *Element č. 8: Divergentní úlohy – rozvoj divergentního myšlení.*
- *Element č. 9: Uspořádané versus neuspořádané možnosti.*
- *Element č. 10: Prvky v objektech – nejvýše jednou, právě jednou, anebo i více/několikrát?*
- *Element č. 11: Organizace a systém.*
- *Element č. 12: Interpretace výsledku.*
- *Element č. 13: Vytvoření úlohy.*

[11] Vlastní překlad ze slovenského jazyka.

PRAKTICKÁ ČÁST

4. Metody výzkumu

Základním výzkumným přístupem pro praktickou část práce je kvalitativní výzkum[12]. Nízký počet účastníků experimentu[13] mi umožnil hlubší poznání pozorovaných jevů.

Ke sběru dat jsem využila přímé, zúčastněné a strukturované pozorování[14]. Abych se mohla vrátit k průběhu experimentu při jeho analýze, pořizovala jsem s každou dvojicí žáků videozáznam a uchovala jsem si jejich záznamy řešení úloh. Při realizaci experimentu jsem žáky nechala podepsat veškeré pracovní listy, abych věděla, ke kterému z účastníků patří. Pro následný rozbor řešitelských strategií jsem všem žákům přidělila kódy, abych zajistila anonymitu údajů. Kód se skládá ze dvou částí, např. ZŠ1-Žák 1, kde první část udává školu, ze které jsem vybrala výzkumný vzorek, a druhá část číslo žáka nebo žákyně z dané třídy.

Pro každou připravenou úlohu jsem si podle mnou stanovených dílčích cílů experimentu vytvořila záznamový arch (viz kapitola 5.2 Formulace zadání úloh, str.43, přílohy 3-5). Záznamový arch obsahoval i jevy, které nikdy nemohou nastat společně (vzájemně se vylučují – např. na otázky *„Zakresluje žák postavenou věž ihned?“* a *„Postaví žák nejprve více věží a pak je zakreslí najednou?“* nemohu u jednoho žáka mít odpověď ANO v obou kolonkách. Tyto vylučující se jevy závisely na zvoleném parametru úlohy (viz kapitola 6.1 Pořadí a parametry úloh v jednotlivých fázích experimentu, str.56). Dále záznamový arch obsahoval některé jevy, které jsou vzájemně provázané a mohou se ovlivnit.

Na konci práce s každou dvojicí žáků jsem využila polostrukturovaný rozhovor (viz kapitola 6.2 Otázky pro žáky po skončení experimentu, str.57) k doplnění poznatků. Přepisy vybraných rozhovorů mi pomohly dokazovat pozorované strategie (viz kapitola 7.2 Analýza videozáznamů, str.69).

---

[12] Základem **kvalitativního výzkumu** je rozhovor vedený s malým počtem respondentů, jehož cílem je získat detailní a komplexní informace o studovaném jevu. Kvalitativní výzkum pracuje s daty získanými nejen z rozhovorů, ale i z pozorování. Jedná se o „nenumerické šetření“, výzkum pracuje tedy více se slovy než s čísly. Kvalitativní analýza a interpretace dat je hledání sémantických vztahů mezi nimi a jejich spojování do logických celků. (Švaříček, 2014, s. 13-15)

[13] Pojmem **experiment** v této práci označuji výzkumné šetření praktické části diplomové práce. Experiment jsem realizovala celkem se sedmi dvojicemi žáků. Každá dvojice žáků řešila připravené úlohy vždy v samostatné učebně / kabinetu.

[14] ***Přímé pozorování*** *= badatel se přímo účastní zkoumaného jevu v čase jeho průběhu.*
Zúčastněné pozorování *= sledujeme zkoumané jevy přímo v prostředí, ve kterém se odehrávají*
Strukturované pozorování *= hledáme odpověď na předem vymezené a určené jevy*
(Švaříček, 2014, s. 144-145)

Jednotlivé žáky jsem pozorovala pouze při realizaci výzkumného šetření. Žáky jsem nesledovala v běžných hodinách matematiky, což mi umožnilo nezkreslený pohled a nemohlo to tedy ovlivnit analýzu použitých strategií.

Během analýzy experimentů jsem několikrát shlédla pořízené videozáznamy a zapisovala jsem si výskyt pozorovaných jevů, průběh řešení jednotlivých úloh a zajímavé poznatky pro každého žáka do samostatného záznamového archu. Vypracované záznamové archy jsou součástí příloh 6 - 8 této práce. I přesto, že celý experiment probíhal vždy s dvojicí žáků v jednom čase, rozhodla jsem se jejich řešení analyzovat jednotlivě. S dvojicí žáků jsem vždy pracovala samostatně bez přítomnosti ostatních žáků (v jiné třídě nebo kabinetu).

4.1 Etika výzkumu

Na začátku mého výzkumu jsem nejprve oslovila učitelky 3. ročníků vybraných základních škol a seznámila je se záměrem a cílem mé diplomové práce. Poté jsem informovala vedení každé školy a požádala o souhlas s realizací výzkumného šetření a možnost nahlédnout do jejich ŠVP. Ředitelky obou škol jsem ujistila o anonymitě uvedených údajů (v diplomové práci budou uvedeny základní informace o škole, které jsou běžně dostupné na webových stránkách školy, nebude uveden název školy a veškerá jména, která budou použita, budou pozměněna). Dostala jsem souhlas s realizací výzkumného šetření. Společně s učitelkami jsem vybrala žáky a oslovila jejich rodiče, abych i od nich měla informovaný souhlas s účastí jejich dětí ve výzkumném šetření k mé diplomové práci (příloha 9). Všechny účastníky jsem ujistila o anonymitě získaných dat. Pro možnost návratu k šetření jsem využila kamerový záznam práce s žáky a uchovala si pracovní listy. Práce s žáky probíhala vždy v soukromí, bez přítomnosti osob neúčastnících se výzkumného šetření. Výzkumné šetření bylo realizováno v průběhu listopadu 2019. Před odevzdáním práce v dubnu 2020 jsem umožnila nahlédnout učitelkám a rodičům do jejího obsahu, aby odsouhlasili vše, co v práci píši. V jejich přítomnosti jsem smazala veškeré nahrávky a skartovala vypracované pracovní listy žáků.

4.2 Výzkumný soubor

Pro výzkumné šetření k této diplomové práci jsem si vybrala dvě třetí třídy na dvou odlišných základních školách. Z každé třídy jsem s pomocí třídní učitelky vybrala žáky průměrné v matematice, které jsem si brala vždy po dvojicích do samostatné třídy /kabinetu a předkládala jim připravené úlohy.

První škola se nachází v Praze. Jedná se o sídlištní základní školu, kde jsou v každém ročníku 4 paralelní třídy. Na této škole jsem plnila souvislou pedagogickou praxi v 5. ročníku svého studia. Všichni žáci jsou ve výuce matematiky vedeni Hejného metodou výuky, jsou proto zvyklí řešit různé typy úloh, při jejichž řešení nemusí vždy pracovat jen s učebnicí, často v hodinách spolupracují, diskutují o nalezených řešeních a společným objevováním a vysvětlováním pracují s chybami.

Druhá škola je v místě mého bydliště. Nachází se v menším městě (do 4000 obyvatel) a v každém ročníku 1. stupně má 2 paralelní třídy. Výuka matematiky zde probíhá ve většině tříd podle učebnic nakladatelství SPN, pouze jedna třída této školy využívá učebnice pro Hejného metodu výuky matematiky z nakladatelství Fraus. Tito žáci jsou zvyklí pracovat spíše samostatně a nejčastěji podle učebnice, s netradičními úlohami se proto setkávají daleko méně, nejsou zvyklí o procesu svého řešení diskutovat se spolužáky, naopak často si své pracovní místo zakrývají, aby zabránili opisování spolužáků.

V první škole se experimentu zúčastnilo 8 žáků (5 chlapců a 3 dívky), v druhé škole se výzkumného šetření účastnilo celkem 6 žáků (3 dívky a 3 chlapci).

5. Příprava experimentu

5.1 Výběr úloh

V teoretické části práce jsem rozdělila kombinatorické úlohy podle jejich tradičního dělení. Při procházení definic v odborných publikacích jsem si vzpomněla na učivo střední školy. Nejvíce mi v paměti utkvěly úlohy typu permutace bez opakování, proto jsem se rozhodla tyto úlohy předložit i žákům. Vytvořila jsem sérii tří izomorfních[15] úloh („věž z krychlí“, „kulisy v divadle“ a „truhla s pokladem“), které se odlišují kontextem, ale matematickou podstatou ne. V jejich řešení se může dobře projevit systematizace práce. Jednotlivé úlohy jsem vybrala záměrně.

Z vlastní zkušenosti vím, že děti mladšího školního věku si ještě hodně rády staví z různých stavebnic, proto jsem zvolila úlohu s krychlemi. Pohádku o Zlatovlásce (a tedy úlohu s umisťováním divadelních kulis) jsem vybrala, protože v době konání předexperimentu jsem s žáky na škole v místě mého bydliště nacvičovala divadelní představení, pro které jsme věnovali mnoho času přípravě tří klíčových kulis pro tuto pohádku a zamýšleli se nad jejich rozmístěním. Otvírání truhly s pokladem v dětech může vzbuzovat zvědavost. Doma jsem našla číselný zámek, ve kterém byl nastavený kód 152, proto jsem tato čísla zvolila i pro třetí připravenou úlohu.

[15] *„Jednou z nejdůležitějších schopností matematického orgánu je nacházet ve zdánlivě odlišných situacích společné jádro, tedy vidět to, co je v daných situacích stejné, vidět, že jsou v jistém smyslu* ***izomorfní.“*** (Hejný, 2014, s. 151)

5.2 Formulace zadání úloh

Nejprve jsem si pro sebe formulovala zadání úloh, vytvořila pracovní list pro žáky a popsala moji strategii vedoucí k vyřešení úloh. Prvotní formulaci zadání a pracovní listy jsem si ověřila v předexperimentu, který proběhl v květnu 2019. Následně jsem si pro každou úlohu stanovila parametry, od kterých jsem očekávala, že mohou ovlivnit průběh řešení úlohy. Stanovení těchto parametrů mi pomohlo formulovat dílčí cíle výzkumného šetření, které se staly podkladem pro tvorbu záznamového listu pro pozorování žákovského řešení úloh (přílohy 3-5).

V následujících kapitolách představuji 10 dílčích cílů výzkumného šetření, jednotlivé úlohy a moje řešení připravených úloh. U každé úlohy uvádím prvotní formulaci zadání (včetně ukázky pracovního listu), důvody vedoucí ke změně zadání, použité pomůcky, parametry úlohy (které budu pro jednotlivé dvojice žáků měnit) a výzkumná očekávání.

5.3 Dílčí cíle výzkumného šetření

1. dílčí cíl: Počet nalezených řešení

Sledovat a) zda se u jednoho žáka liší počet nalezených řešení v jednotlivých úlohách

b) zda pořadí úloh a počet předkreslených polí pro záznam na pracovním listu ovlivní počet nalezených řešení.

2. dílčí cíl: Způsob zadání úlohy

Sledovat vliv různého způsobu zadání úlohy se stejnou matematickou podstatou na jeho pochopení žáky (např. různost vizualizace, kontextu a délky zadání).

3. dílčí cíl: Systematičnost práce a řešitelské strategie

Sledovat systém práce žáků při hledání a zápisu řešení u předložených úloh. Pozorovat využití podobných řešitelských strategií a dovednost slovně popsat nalezenou strategii.

4. dílčí cíl: Podobnost úloh

Sledovat, zda žáci v předložené sérii úloh objeví stejnou matematickou podstatu (izomorfismus).

5. dílčí cíl: Čas hledání řešení

Sledovat a posoudit rozdíly dob trvání řešení jednotlivých úloh v celé předložené sérii.

6. dílčí cíl: Způsoby kontroly vyřešené úlohy

Sledovat způsoby, jakými si žáci kontrolují nalezená řešení a jak tato kontrola ovlivní zapsaná řešení v pracovním listu.

7. dílčí cíl: Způsob zápisu řešení

Pozorovat a) odlišné způsoby záznamu řešení v průběhu práce s předloženými pomůckami a bez nich.

b) zda připravený pracovní list ovlivní počet nalezených žáky.

8. dílčí cíl: Komunikace žáků

Pozorovat potřebu žáků komunikovat v průběhu hledání řešení.

9. dílčí cíl: Obtížnost úloh

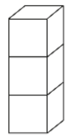
Sledovat, jakým způsobem formulace zadání úlohy a její pořadí v celé sérii ovlivní obtížnost jednotlivých úloh.

10. dílčí cíl: Atraktivnost úloh

Pozorovat, jak je pro žáky atraktivní řešit netradiční úlohy, se kterými se nesetkávají v běžných hodinách matematiky.

5.4 Úloha věž z krychlí

- **Prvotní formulace zadání:** *„Vezmi červenou, modrou a bílou krychli. Postav věž. Můžeš poskládat různé věže z těchto krychlí? Zakresli je.“*
- **Pracovní list pro žáky**
  - **Předexperiment:** Zadání úlohy a pouze 6 předkreslených nevybarvených věží.



***Obrázek** 7 Nevybarvená věž z krychlí*

  - **Experiment:** Zadání úlohy a počet předkreslených nevybarvených věží podle zvoleného parametru (5 nebo 6 nebo 8)
- **Použité pomůcky**
  - **Předexperiment:** 6 ks krychlí od každé barvy
  - **Experiment:** Počet krychlí podle zvoleného parametru úlohy.
- **Odůvodnění změny formulace zadání:** V realizovaném předexperimentu se ukázalo, že nebyla zdůrazněna podmínka, aby každá věž obsahovala všechny tři barvy krychlí a také, že se barvy ve věži nesmí opakovat. Více stejných krychlí v jedné věži použily celkem 4 žáci z 9 účastníků. Dále jsem formulaci „můžeš poskládat různé věže“ upravila jako výzvu „najdi všechna řešení“. Nakonec jsem zadání doplnila o zdůraznění počtu podlaží věže, protože budu pracovat i se žáky, kteří s krychlemi v hodinách matematiky běžně nepracují.
- **Formulace zadání použitá v jednotlivých etapách experimentu:** *„Postav věž ze tří kostek (červená, modrá, bílá), která má tři podlaží. Žádná barva se ve věži nesmí opakovat, každá věž musí obsahovat krychle všech barev. Najdi všechna možná řešení.“*

- **Parametry zadání úlohy:**

  1) Počet krychlí

  - Žáci mají před sebou více krychlí od každé barvy, než je počet řešení (např. 10ks červených, 10ks modrých, 10ks bílých).
  - Žáci mají před sebou přesný počet krychlí jako je počet řešení úlohy (6ks červených, 6ks modrých, 6ks bílých)
  - Žáci mají možnost postupně si doplňovat krychle v průběhu hledání řešení úlohy (nejprve má žák 1ks od každé barvy, pokud vidí další možné řešení, vezme si další 1ks od každé barvy)
  - Žáci mají k dispozici po celou dobu hledání řešení úlohy pouze 3 krychle – 1 červená, 1 modrá, 1 bílá.

  2) Počet řešení a typ pracovního listu

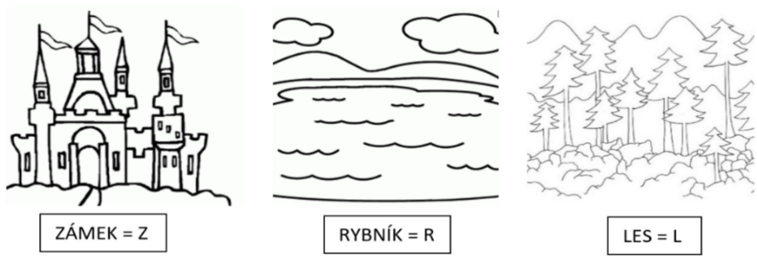
  - Žák zná přesný počet řešení – 6 předkreslených věží v pracovním listu
  - Žák nezná přesný počet řešení – v pracovním listu předkresleno více (8) nebo méně (5) věží, než je počet řešení.
  - Žák nezná přesný počet řešení – zapisuje na prázdný papír.

  3) Možnosti zápisu řešení

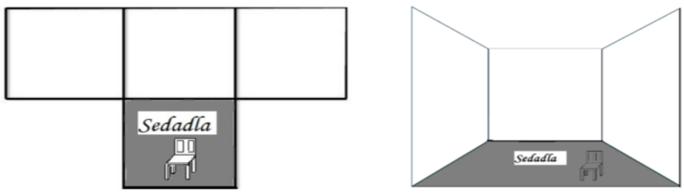
  - Žák zapisuje řešení úlohy do předem připraveného pracovního listu s prázdnými věžemi.
  - Žák zapisuje řešení úlohy na prázdný papír dle svého uvážení.
- **Výzkumná očekávání:** Lákadlo využití krychlí pro manipulaci bude jistě silné. Myslím, že se nenajde nikdo, kdo by je nechtěl použít. U této úlohy se může dobře projevit systematizace v hledání řešení, pokud budou mít žáci dostatek krychlí – můžou si postavené věže třeba srovnat do jedné řady. Myslím si, že tato úloha bude pro žáky nejlehčí, protože jim bude připadat, že si jen hrají s krychlemi. S krychlemi se bude žákům dobře pracovat – jsou dostatečně velké, je možné je pohodlně držet v jedné ruce a další řešení nalézt jednoduchým převrácením celé věže. Tato úloha může být klíčová pro odhalení strategie v nalezení všech řešení.

5.5 Úloha kulisy v divadle

- **Prvotní formulace zadání úlohy:** *„V divadle hrají pohádku Zlatovláska. Pomoz jim rozmístit 3 kulisy na 3 stěny jeviště. Na každé stěně musí být vždy jedna kulisa. Najdeš více možností, jak je rozmístit? Můžeš využít model divadla. Svá řešení zakresli."*
- **Pracovní list**
    - **Předexperiment:** Pro žáky jsem si připravila dva druhy pracovního listu. Oba obsahovaly napsané zadání úlohy s obrázky kulis a zkratkami pro jejich zapisování. Lišily se předkreslenou 2D nebo 3D vizualizací jeviště.



***Obrázek 8** Kulisy divadla se zkratkami pro zápis*[16]



***Obrázek 9** 2D a 3D vizualizace jeviště*[17]

-
    - **Experiment**: Na pracovním listu bylo uvedeno zadání úlohy, obrázky a zkratky kulis pro zjednodušení zápisu úlohy a počet připravených prázdných 3D modelů jevišť podle zvoleného parametru úlohy.
- **Použité pomůcky**
    - **Předexperiment:** 1ks obrázku každé kulisy, 1ks vystřiženého 2D plánu jeviště, který bylo možno složit na 3D model
    - **Experiment:** Vždy 1ks vystřiženého 2D plánu jeviště, který bylo možno složit na 3D model a počet ks obrázků jednotlivých kulis podle zvoleného parametru úlohy.

[16] **Zdroj obrázků:** Zámek - https://www.onlineomalovanky.cz/omalovánka-hrad-na-kopci_10181.html

Rybník - https://www.onlineomalovanky.cz/Omalov%C3%A1nky-krajina-voda.html

Les - https://www.msvrapicka.cz/gl--36093

[17] **Zdroj obrázku židle:** https://wiki.rvp.cz/Kabinet%252F0.0.0.Kliparty%252FP%25C5%2599edm%25C4%259Bty%252Fskolni_potreby&doci

- **Odůvodnění výběru pracovního listu a změny formulace zadání:** 8 z 9 žáků si při realizaci předexperimentu zvolilo zapisovat do 3D vizualizace jeviště, proto jsem v dalších částech experimentu používala tento typ pracovního listu. Možnost složit si 2D plán jeviště na jeho 3D model se ukázala jako klíčová pro zjednodušení přechodu mezi 2D a 3D geometrií, proto to umožním žákům i v jednotlivých etapách experimentu. Dalším významným zjištěním bylo to, že žáci neznali pojem kulisa. Pro další fáze své práce jsem se přesto rozhodla pojem „kulisa" používat a v případě potřeby budu připravena jej žákům vysvětlit ústně. Dále jsem se rozhodla zanechat v pracovním listu začáteční písmena jednotlivých kulis pro zjednodušení zápisu úlohy. Formulaci zadání jsem upravila jen minimálně, protože původní zadání obsahovalo všechny potřebné informace.
- **Formulace zadání použitá v jednotlivých experimentech:** *„V divadle hrají pohádku Zlatovláska. Připrav pro ně návrhy rozmístění kulis na 3 stěny jeviště. Na každé stěně musí být vždy pouze jedna kulisa. Najdeš více možností, jak kulisy rozmístit? Své řešení zakresli."*
- **Parametry zadání úlohy:**

  <u>1) Počet kulis</u>
    - Žáci mají před sebou přesný počet obrázků kulis jako je řešení úlohy (6ks les, 6ks zámek, 6ks rybník + 6ks vystřižených 2D plánů jeviště).
    - Žáci mají možnost postupně si doplňovat kulisy a plány jeviště v průběhu hledání řešení úlohy (nejprve mají 1ks každé kulisy a 1ks plánu jeviště, pokud vidí další řešení vezmou si další pomůcky).
    - Žáci mají k dispozici po celou dobu hledání řešení úlohy každý obrázek kulisy pouze 1x a 1x vystřižený 2D plán jeviště.

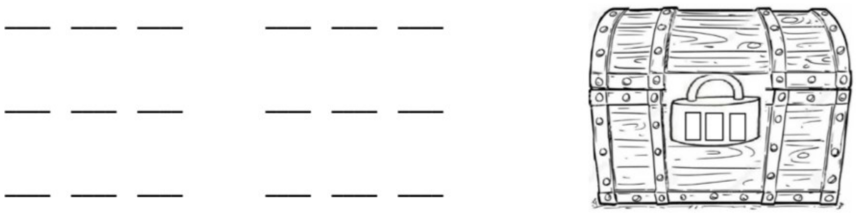
  <u>2) Počet řešení a typ pracovního listu</u>
    - Žák zná přesný počet řešení – 6 předkreslených jevišť v pracovním listu.
    - Žák nezná přesný počet řešení – v pracovním listu předkresleno více (8) nebo méně (5) jevišť, než je počet řešení
    - Žák nezná přesný počet řešení – zapisuje na prázdný papír.

  <u>3) Možnosti zápisu</u>
    - Žák zapisuje řešení úlohy do předem připraveného pracovního listu s prázdnými 3D vizualizacemi jeviště nakreslenými na papíře.
    - Žák zapisuje řešení úlohy na prázdný papír dle svého uvážení.

- **Výzkumná očekávání:** U této úlohy očekávám, že si žáci budou modelovat rozmístění kulis do připraveného modelu. Může se stát, že budou kulisy umisťovat i na sedadla, protože třeba nemají tak velkou zkušenost s opravdovým divadelním sálem. Zadání úlohy obsahuje více podmínek a je delší než u předchozí úlohy, proto je možné, že některým žákům bude trvat jeho pochopení déle a něco třeba přehlédnou. Jsem zvědavá, jak se bude lišit zapisování této úlohy na prázdný papír od preferovaného pracovního listu žáky z předexperimentu. Protože jsou kulisy označené písmeny, může se u žáků objevit i zápis jednotlivých písmen abecedně. Očekávám spíše náhodné rozmisťování kulis než podle nějakého systému.

5.6 Úloha truhla s pokladem

- **Prvotní formulace zadání úlohy:** *„Našel jsi truhlu s pokladem, na které je číselný zámek. Jakým způsobem můžeš vyzkoušet poskládat čísla 1, 2, 5 do zámku? Žádné číslo se nesmí opakovat.“*
- **Pracovní list**
  - **Předexperiment**: Pro žáky jsem si připravila dva druhy pracovního listu. Oba obsahovaly napsané zadání úlohy. Lišily zápisem řešení úlohy. Na jednom pracovním listu žáci zapisovali kódy na linky a na druhém přímo do obrázku číselného zámku na truhle.



Obrázek 10 *pro záznam řešení úlohy Truhla s pokladem*[18]

  - **Experiment:** Zadání úlohy, obrázek truhly se zámkem a počet připravených linek podle zvoleného parametru úlohy.
- **Použité pomůcky:**
  - **Předexperiment:** reálný číselný zámek
  - **Experiment:** Reálný zámek pouze, když byl tento parametr pro výzkum zvolen.
- **Odůvodnění výběru pracovního listu a změny formulace zadání:** Při realizaci předexperimentu nebyla převaha ani jednoho typu pracovního listu, pro jednotlivé fáze experimentu však budu používat pracovní list se zápisem kódu na linky, protože je více přehledný. Otvírání reálného zámku s číselným kódem se ukázalo jako velmi atraktivní. Slovní formulace zadání úlohy byla žákům velmi dobře srozumitelná, proto jsem v ní nemusela nic měnit.
- **Formulace zadání použitá v jednotlivých experimentech:** *„Našel jsi truhlu s pokladem, na které je číselný zámek. Jakým způsobem můžeš vyzkoušet poskládat číslice 1, 2, 5 do zámku? Žádné číslo se nesmí opakovat.“*

[18] **Zdroj obrázku truhla:** https://cz.depositphotos.com/182448220/stock-illustration-cartoon-vector-drawing-of-old.html

- **Parametry zadání úlohy:**

  1) Motivace úlohy
    - Žák zapisuje pouze číselný kód.
    - Žák má možnost číselný kód vložit do reálného zámku.

  2) Počet řešení a typ pracovního listu
    - Žák zná přesný počet řešení – 6 připravených linek na pracovním listu.
    - Žák nezná přesný počet řešení – v pracovním listu je připraveno více (8) nebo méně (5) předkreslených linek.
    - Žák nezná přesný počet řešení – zapisuje na prázdný papír.

  3) Možnosti zápisu
    - Žák zapisuje řešení úlohy do předem připraveného pracovního listu s prázdnými linkami.
    - Žák zapisuje řešení úlohy na prázdný papír dle svého uvážení.

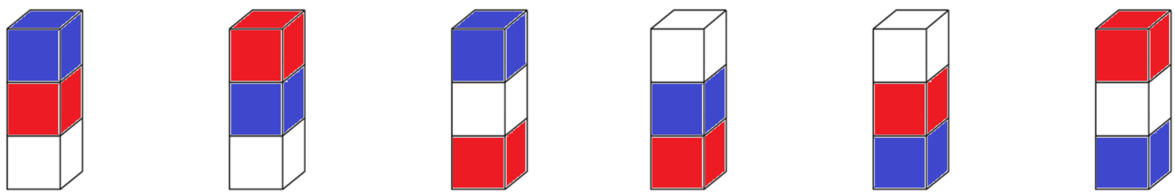
- **Výzkumná očekávání:** Myslím si, že k vyřešení této úlohy žáci nebudou potřebovat žádné pomůcky k manipulaci, protože z hodin matematiky jsou všichni zvyklí pracovat s čísly. Jsem zvědavá, jak moc je ovlivní vkládání kódů do reálného zámku (např. zvýšené soustředění, urychlení řešení úlohy, odhalení nezapsaného řešení…). Reálný zámek je poměrně malý, proto u žáků procvičí i jemnou motoriku. Může to však způsobit i nezdar v jeho otevření a tím zvýšení náročnosti úlohy. Očekávám, že žáci využijí strategii hledání dalšího řešení psaním dalšího kódu zrcadlově. Myslím si, že k tomu třeba využijí nezapisovat kódy na řádky pod sebe, ale vedle sebe.

5.7 Moje řešení jednotlivých úloh

Při hledání řešení všech úloh jsem zvolila strategii postupného vyčerpávání možností. Postupovala jsem nejprve položením krychle jedné barvy do 1. podlaží. Následně jsem věděla, že existují právě dvě možnosti, jak do 2. a 3. podlaží položit zbývající dvě krychle odlišných barev. Protože máme na výběr celkem 3 barvy krychlí, které můžeme mít v prvním podlaží a vždy dvě možnosti umístění zbývajících dvou krychlí, má úloha celkem 6 řešení (3 * 2 = 6). Stejně jsem postupovala i u úlohy s divadelními kulisami (první kulisu jsem vždy dala na levou stranu jeviště) a truhlou s pokladem (první číslo jsem si vždy umístila na první linku).

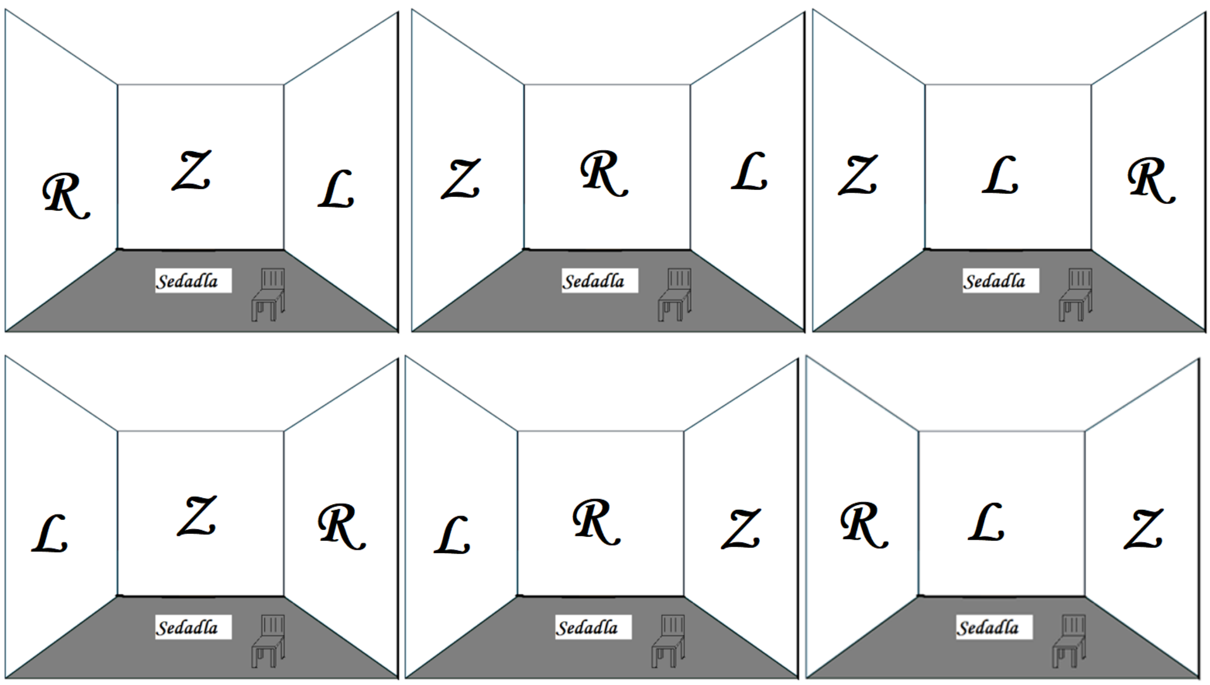
Níže uvádím grafické řešení všech tří připravených úloh, které očekávám, že žáci zaznamenají do svých pracovních listů.

1) Úloha věž z krychlí



Obrázek 11 *Grafické řešení úlohy „Věž z krychlí“*

2) Úloha kulisy v divadle



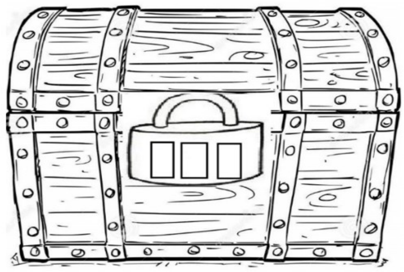
Obrázek 12 *Grafické řešení úlohy "Kulisy v divadle"*

3) Úloha truhla s pokladem

1 2 5   1 5 2

2 1 5   2 5 1

5 1 2   5 2 1



Obrázek 13 Grafické řešení úlohy "Truhla s pokladem"

6. Průběh experimentu

Před započetím realizace experimentu jsem se rozhodla, že pro každou dvojici žáků nebudu měnit jen parametry zadání úlohy, ale také pořadí zadaných úloh. Myslím si, že to je další faktor, který může ovlivnit řešitelské strategie. Tabulka v kapitole 6.1 uvádí přehled parametrů a pořadí zadání úloh použitých v jednotlivých částech experimentu, které jsem si stanovila vždy před realizací práce s konkrétní dvojicí žáků.

Na začátku práce s každou dvojicí žáku jsem navodila vhodnou atmosféru (prozradila jsem jim, že budeme mít společně před ostatními spolužáky tajemství, které nesmí prozradit; ptala jsem se jich, jak je baví běžné hodiny matematiky, co jim jde či nejde, zda preferují více počítání nebo geometrii). Experiment jsem s žáky realizovala v hodinách čtení nebo výtvarné výchovy, u kterých tolik nevadí, že se jich neúčastnili.

Na začátku každého experimentu jsem žákům dala tyto pokyny: *„Čeká vás vyřešit 3 různé úlohy. Řešte je prosím samostatně, snažte se nekoukat ke spolužákovi. Tyto úlohy budou řešit i další žáci vaší třídy, proto jim prosím neprozrazujte, co jsme tu společně řešili. Bude to takové naše tajemství. K řešení úloh můžete využít veškeré připravené pomůcky, které máte na stole. Pokud budete spokojeni s řešením úlohy, dejte mi pokyn (např. odložte připravené pomůcky, otočte pracovní list…), abych vám mohla zadat další úlohu. Kdykoliv se můžete vrátit k již vyřešené a odložené úloze. Pokud vám nebude stačit k zápisu řešení připravený pracovní list, nebo prázdný papír, můžete si tam něco připsat nebo využít druhou stranu, případně si vzít další čistý papír."*

V průběhu práce s žáky jsem pořizovala pouze videozáznam a postupně předkládala žákům zadání jednotlivých úloh. Vždy jsem měla připravené všechny potřebné pracovní listy a pomůcky, abych je žákům mohla dát okamžitě a nezdržovat je od řešení úloh. Pouze jedna dvojice žáků měla všechny úlohy předložené na stole ihned, protože jsem sledovala, kterou si vyberou jako první. Někteří žáci mě potřebu se mě doptávat na nějaké otázky, např. Co je to kulisa?, Jak mají úlohu zakreslit?. Odpovídala jsem jim pouze neutrálně, nebo je naváděla k opětovnému a důkladnějšímu přečtení zadání.

Po skončení hledání řešení úloh jsem s žáky vedla polostrukturovaný rozhovor, pro který jsem měla předem připravené otázky (viz kapitola 6.2). Tímto rozhovorem jsem získala hlubší poznatky o jejich přemyšlení.

6.1 Pořadí a parametry úloh v jednotlivých částech experimentu

Výzkumný vzorek	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3
Předexperiment Matematický kroužek	**<u>Věž z krychlí</u>** - Přesný počet krychlí (3 barvy x 6ks) - 6 předkreslených věží v pracovním listu - znalost přesného počtu řešení	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 1 sada pomůcek - volba pracovního listu (s 2D nebo 3D vizualizací jeviště) - 6 předkreslených jevišť pro záznam řešení - znalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - motivace otevření reálného zámku - volba pracovního listu (zápis do zámků nebo na linky) - 6 předkreslených polí v pracovním listu pro záznam řešení - znalost přesného počtu řešení
1. dvojice žáků Škola 1 (Žák 2, žák 2)	**<u>Věž z krychlí</u>** - Přesný počet krychlí (3 barvy x 6ks) - 8 předkreslených věží v pracovním listu - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 1 sada pomůcek - 6 předkreslených jevišť pro záznam řešení - znalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - motivace otevření reálného zámku - 5 předkreslených polí v pracovním listu pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení
2. dvojice žáků Škola 1 (žákyně 1, žákyně 2)	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 6 sad pomůcek - 8 předkreslených jevišť pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - bez motivace otevření reálného zámku - vlastní zápis řešení úlohy na prázdný papír - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Věž z krychlí</u>** - K dispozici pouze 3 krychle (3barvy x 1ks) - 5 předkreslených věží v pracovním listu - neznalost přesného počtu řešení
3. dvojice žáků Škola 1 (žák 3, žákyně 3)	**<u>Věž z krychlí</u>** - K dispozici více krychlí, než je počet řešení - vlastní zápis řešení na prázdný papír - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - motivace otevření reálného zámku - 8 předkreslených polí v pracovním listu pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 6 sad pomůcek - 5 předkreslených jevišť pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení
4. dvojice žáků Škola 1 (žák 4, žák 5)	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 6 sad pomůcek - vlastní zápis řešení na prázdný papír - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Věž z krychlí</u>** - K dispozici pouze 3 krychle (3 barvy x 1ks) - 6 předkreslených věží v pracovním listu - znalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - bez motivace otevření reálného zámku - 8 předkreslených polí v pracovním listu pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení

5. dvojice žáků Škola 2 (žákyně 1, žákyně 2)	**<u>Věž z krychlí</u>** - Přesný počet krychlí - 8 předkreslených věží v pracovním listu - k dispozici větší počet krychlí, než je řešení úlohy - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Kulisy v divadle</u>** - k dispozici 1 sada pomůcek - 6 předkreslených jevišť pro záznam řešení - znalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - motivace otevření reálného zámku - 5 předkreslených polí v pracovním listu pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení
6. dvojice žáků Škola 2 (Žák 2, žák 2)	<u>Kulisy v divadle</u> - k dispozici 1 sada pomůcek **- Žák 2** = 8 připravených jevišť pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení **- žák 2** = 6 připravených jevišť pro záznam řešení - znalost přesného počtu řešení	**<u>Věž z krychlí</u>** - k dispozici pouze 3 krychle (3barvy x 1ks) - 5 předkreslených věží v pracovním listu - neznalost přesného počtu řešení	**<u>Truhla s pokladem</u>** - **Žák 2 =** vlastní záznam řešení na čistý papír - neznalost přesného počtu řešení **- žák 2** = 8 předkreslených polí pro záznam řešení - neznalost přesného počtu řešení
7. dvojice žáků Škola 2 (žák 3, žákyně 3)	Žákům byly předloženy všechny úlohy najednou. Sami si mohli zvolit jejich pořadí a způsob zápisu. K dispozici měli pracovní listy s 5, 6, a 8 předkreslenými poli pro záznam řešení.		

6.2 Otázky pro žáky po provedeném experimentu

- Seřaď úlohy, jak ti připadaly náročné (od nejlehčí po nejtěžší).
- Připadaly ti úlohy nějakým způsobem podobné?
- Objevil/a jsi při řešení úloh nějakou strategii? Bylo možné úlohy řešit podobným způsobem? Popiš mi to.
- Mají úlohy opravdu tolik řešení, kolik jsi zapsal/a na papír – dokaž mi to.
- Myslíš, že by ti pomohlo zapisovat řešení do předem připraveného pracovního listu? (v okamžiku, kde žáci budou zapisovat na vlastní papír)
- Myslíš, že by ti pomohlo znát přesný počet řešení?
- Zmátl tě rozdílný počet předkreslených polí pro zápis úlohy?
- Bavilo tě řešit tyto úlohy? Setkáváš se s nimi v běžné matematice?

7. Analýza experimentu

Shromážděná žákovská řešení úloh jsem analyzovala podle natočených videozáznamů, které jsem shlédla opakovaně a v průběhu jsem vyplňovala připravené záznamové archy (přílohy 6-8). Záznamy řešení všech žáků přikládám jako přílohy 10 této práce.

Na základě evidovaných záznamů jsem u žáků viděla výskyt některých shodných jevů, a pozorovala jsem různé použité strategie. Rozhodla jsem se pro vytvoření nového nástroje pro analýzu dat - tabulky, do které jsem pomocí znaků zaznamenala výskyt jednotlivých jevů. Tato tabulka mi posloužila jako přehledný nástroj pro analýzu dat. Zahrnovala jevy, které byly rozdílné pro každou úlohu. Některé pozorované jevy jsem označila stejným číslem, ale odlišeny písmenem. Jedná se o jevy, které se vzájemně vylučují a u jednoho žáka nemohly nastat společně. Dále v tabulkách můžeme vidět i jevy, které jsou vzájemně propojené a výskyt jednoho jevu mohl ovlivnit výskyt jiného jevu. Tyto tabulky mi daly odpovědi na výzkumná očekávání pro každou úlohu (viz kapitoly 5.4, 5.5, 5.6 uvádějící zadání a parametry jednotlivých úloh, str. 45-51).

Následující část analýzy dat jsem rozdělila na tři kapitoly. Kapitola 7.1 obsahuje přehledné tabulky s výskytem pozorovaných jevů v jednotlivých úlohách u všech žáků. Pro každou úlohu komentuji použité řešitelské strategie a popisuji další poznatky z průběhu pozorování. Pozorované jevy dokládám přepsanými rozhovory se žáky, které jsou součástí kapitoly 7.2. Poslední kapitola 7.3 se zaměřuje na souhrnnou analýzu celého experimentu, reflektuje všechny pozorované jevy a dává odpovědi na dílčí cíle celého výzkumného šetření, které jsem si stanovila v kapitole 5.3 (str.44).

Pro záznam jednotlivých pozorovaných jevů v tabulkách uvádím vždy číslo dvojice žáků a značku výskytu jevu (pokud se pozorovaný jev v dané části vyskytl, používám šikmou svislou čáru „/“, pokud se jev v dané části nevyskytl, používám vodorovnou čáru „-„). Každé okénko tabulky značí dva žáky. Jednotlivé jevy mám očíslované a doplňuji je počátečním písmenem každé úlohy, aby byly snadněji rozlišitelné v kapitole 7.2 týkající se analýzy rozhovorů (úloha věž z krychlí „V“, úloha kulisy v divadle „K“ a úloha truhla s pokladem „T“).

7.1 Analýza série úloh

7.1.1 Úloha věž z krychlí

Pozorovaný jev / dvojice žáků	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
V1a. Žák využil připravené pomůcky po celou dobu.	/ /	/ /	/ /	- /	- /	/ -	/ -
V1b. Žák využil připravené pomůcky pouze na začátku.	- -	- -	- -	/ -	/ -	- -	- /
V1c. Žák nevyužil připravené pomůcky.	- -	- -	- -	- -	- -	- /	- -
V2. Žák přemýšlí nahlas	/ -	- -	- -	/ /	/ -	- -	- /
V3. Žák si kontroluje nalezená řešení.	- /	/ /	/ /	- -	/ /	- -	/ -
V4. Žák zapsal jedinečná řešení[19].	/ /	/ /	- /	/ /	/ /	/ /	/ /
V5. Žák zapsal všechna řešení úlohy	/ /	- -	- /	/ /	/ /	/ /	- /
V6a. Žák zakresluje nalezená řešení ihned.	- -	/ /	- -	/ /	/ /	/ /	/ /
V6b. Žák nejprve postaví více řešení a zakreslí později.	/ /	- -	/ /	- -	- -	- -	- -
V7a. Žák zakresluje řešení po jednotlivých barvách (nestřídá pastelky).	/ /	- -	- -	- -	- -	- -	- /
V7b. Žák zakresluje řešení po jednotlivých věžích (střídá pastelky).	- -	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ -
V8a. Žák stavěl věže náhodně a nijak si je nerovnal.	- /	/ /	- /	/ /	- /	/ -	/ /
V8b. Žák si srovnal postavené věže do jedné řady.	/ -	- -	/ -	- -	/ -	- -	- -
V8c. Strategie umístění 1 barvy krychle na konkrétní pozici.	/ -	- -	- -	/ -	- -	- /	/ -
V8d. Žák najde jedno řešení, další je symetricky převrácené[20].	/ -	/ -	/ -	/ -	- -	/ -	/ -
V9. Žák využil poznatků z řešení celé série úloh.	- -	- -	- -	/ -	/ -	- /	- /
V10. Žák upravil počet nalezených řešení.	- -	- -	- -	- -	- -	/ /	/ -
V11a. Obtížnost úlohy = nejlehčí	- -	- -	/ /	/ -	- -	/ /	/ /
V11b. Obtížnost úlohy = středně těžká	- -	/ /	- -	/ -	- -	- -	- -
V11c. Obtížnost úlohy = těžká	/ /	- -	- -	- -	/ /	- -	- -

[19] Za **jedinečné řešení** považuji takové řešení, které se neopakovalo v žákovských záznamech řešení úloh. Nebylo tedy shodné s jiným zapsaným řešením.
[20] Za **symetricky převrácené řešení** považuji např. věž BČM a MČB. Stejně tak i u dalších úloh.

Komentář k tabulce:

Z výše uvedené tabulky vyplývá, že většina žáků využila pro řešení úlohy připravené pomůcky. Deset žáků připravené pomůcky používalo celou dobu (jev V1a), tři žáci využili pomůcky jen zpočátku (jev V1b) a pouze jeden žák pomůcky nevyužil vůbec (jev V1c). Žáci, kteří s krychlemi pracovali po celou dobu tuto úlohu většinou řešili jako první z předložené série a potřebovali si tedy vymodelovat všechna nalezená řešení před sebe na lavici. Žáci, kteří krychle po chvilce odložili (nebo nepoužili vůbec), již nejspíš měli povědomí o klíčové strategii pro nalezení všech řešení a je u nich zřejmé využití poznatků z celé série úloh. Dokazuje nám to provázanost jevů V1b, V1c s jevem V9. Odložení krychlí při hledání řešení dokládá přepis rozhovoru č. 2 v úseku 8.

Pět žáků při řešení úloh potřebovalo přemýšlet nahlas (jev V2). Často si předříkávali barvy, které zakreslovali. Žákyně z 5. dvojice účastníků experimentu byla jediná, která si nalezená řešení kontrolovala přemýšlením nahlas. Daleko více žáků si kontrolovalo svá nalezená řešení pouze pohledem (jev V3).

Do pracovních listů pouze 1 žák nezaznamenal jedinečná řešení této úlohy (jev V4). V průběhu experimentů někteří žáci před sebe postavili shodná řešení, obvykle si velmi rychle všimli, že toto řešení již nalezli. Zapsali pak tedy pouze jedinečná řešení. Občas se také stalo, že do pracovního listu zaznamenali shodné řešení, ale všimli si toho a za použití gumy to přepsali. Celkem zakreslilo správný počet řešení 10 žáků (jev V5).

Jevy V6 a V7 spolu souvisejí popisují strategii zápisu řešení úlohy a velmi úzce souvisely se způsobem zadání úlohy. Pokud měli žáci k dispozici jen jednu sadu krychlí, zakreslovali nalezená řešení ihned (jev V6a). Naopak pokud měli k dispozici hodně krychlí (přesný počet od každé barvy nebo plnou krabici), ze kterých mohli stavět, tak si je vždy nejprve všechny postavili před sebe a zakreslili všechna nalezená řešení později (jev V6b). Mezi jevy V6b u první a třetí dvojice žáků jsem pozorovala odlišnost. Obě dvojice měli dostatek krychlí, ale žáci volili jiný způsob zápisu v použití pastelek (jevy V7a a V7b). Žáci z první dvojice do připraveného pracovního listu zakreslovali po jednotlivých barvách, protože měli řešení postavená před sebou a tento způsob pro ně byl zjednodušením práce. Naopak žáci ze třetí dvojice zapisovali svá řešení na prázdný papír. Pro tyto žáky bylo pro jednodušší zapisovat po jednotlivých věžích, protože si vždy předkreslili jednu prázdnou věž pro záznam věže a potřebovali si ihned zakreslit pozice všech krychlí. Jev V7b byl jistě také způsoben parametrem počtu krychlí v zadání úlohy. Nejčastěji jsem žákům předložila jen 1ks krychle od každé barvy. Neměli tedy před sebou více postavených řešení a zapisovali je tak, jak je nalezli.

Jevy V8 popisují strategie hledání řešení. Převažovalo náhodné stavění věží (jev V8a). Tento jev je propojený s jevem V7b a souvisí i s parametrem počtu předložených krychlí, o kterém jsem psala výše. Tři žáci, kteří měli dostatek krychlí, měli potřebu si nalezená řešení srovnat před sebe do jedné řady (jev V8b). Naopak u jednoho žáka se nevyskytl ani jeden z jevů V8a a V8b. Odpovídá to u něj jevu V1c, kdy pro řešení úlohy nevyužil žádné pomůcky. Jev V8c ukazuje konkrétní žáky, kteří znali klíčovou strategii. Až na žáka z první dvojice, se jednalo o žáky, kteří tuto úlohu neřešili jako první v pořadí. Tři žáci byli schopni nalezenou strategii dobře popsat, dokládám to v záznamech rozhovorů (viz rozhovor č.1 v úseku 3, rozhovor č. 2 v úseku 5, rozhovor č. 3 v úseku 21, 22). Tento pozorovaný jev je opět spojen s jevem V9, který vypovídá o využití poznatků z celé série úloh.

Jev V9 byl také hodně ovlivněn pořadím zadání úlohy. Žáci, kteří úlohu dostali zadanou jako první, neměli možnost pro řešení využít předchozí zkušenosti. Dále tento jev dokládá doba trvání vyřešení úlohy (čas řešení všech úloh je součástí vyplněných záznamových archů, které jsou součástí příloh 4-6 této práce). Žáci, kteří měli tuto úlohu zadanou jako první, ji řešili zhruba dvakrát déle než žáci, kteří úlohu dostali zadanou později.

Žáci neměli tolik potřebu upravovat počet nalezených řešení (jev V10), protože většinou nalezli všechna. I přestože na začátku experimentu dostali možnost kdykoliv se vrátit k již vyřešeným úlohám, této možnosti moc nevyužili.

Pořadí zadání úlohy ovlivnilo míru obtížnosti (jevy V11a, V11b, V11c). Někteří žáci ji označili jako těžkou, protože ji dostali zadanou jako první z celé série, a ještě neměli zkušenost (povídá o tom např. žák 2 v úseku 2 přepsaného rozhovoru č. 1). Některým přišla naopak velmi lehká, protože je bavilo si hrát s krychlemi a ani jim nepřišlo, že řeší nějakou matematickou úlohu. U některých žáků vedla tato úloha k odhalení strategie (v rozhovoru č. 2 o tomto jevu mluví žák 4 v úseku 5).

7.1.2 Úloha kulisy v divadle

Pozorovaný jev / fáze experimentu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
K1. Žák využil připravené pomůcky.	- -	- -	- -	/ /	- -	- /	/ /
K2. Žák přemýšlí nahlas.	/ -	- -	- -	/ /	/ -	- -	- /
K3. Žák si kontroluje nalezená řešení.	- -	/ /	- -	/ -	- -	- -	- /
K4. Žák zapsal jedinečná řešení.	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	- /
K5. Žák zapsal všechna řešení úlohy.	/ /	/ /	- -	/ -	/ /	/ /	- /
K6a. Žák zakresluje nalezená řešení ihned.	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /
K6b. Žák nejprve postaví více řešení a zakreslí později.	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
K7a. Žák zakresluje řešení po jednotlivých kulisách (jednu kulisu umístí do více jevišť).	- -	/ /	- -	- -	- -	- /	- -
K7b. Žák zakresluje řešení po jednotlivých jevištích (střídá kulisy).	/ /	- -	/ /	/ /	/ /	/ -	/ /
K8a. Strategie umístění 1 kulisy na konkrétní pozici.	- /	/ /	- -	- -	/ -	- /	- -
K8b. Žák najde jedno řešení, další je symetricky převrácené.	- /	- -	- -	/ -	- -	- /	- /
K9. Žák využil poznatků z řešení celé série úloh.	- /	- -	- -	/ -	- -	- -	- -
K10. Žák upravil počet nalezených řešení.	- -	- -	- -	/ -	- -	/ -	/ /
K11a. Obtížnost úlohy = nejlehčí	- -	- -	- -	/ -	/ -	- -	- -
K11b. Obtížnost úlohy = středně těžká	/ /	- -	- /	- -	- /	- -	/ -
K11c. Obtížnost úlohy = těžká	- -	/ /	/ -	- /	- -	/ /	- /

Komentář k tabulce:

Řešení této úlohy pro mě přineslo několik zajímavých momentů. Pět žáků použilo připravené pomůcky (jev K1) a to pouze ke znázornění jednoho řešení, déle je nevyužívali. Nikdo z nich však neměl potřebu složit si vystřižený 2D plán jeviště na 3D model. Zbylým žákům stačilo se pouze podívat na obrázky kulis a následně je rovnou zapisovali písmeny. Tato situace mohla být způsobena tím, že pomůcky vypadaly jinak než obrázky v pracovním listu (na lavici měli vystřižený 2D plán, který si mohli složit na 3D model a obrázky jednotlivých kulis, v pracovním listu měli k dispozici jen 3D vizualizaci jeviště včetně obrázků kulis).

Pět žáků během řešení úlohy přemýšlelo nahlas (jev K2). Jedná se o stejné žáky, jako u úlohy truhla. Během této úlohy měli 4 žáci potřebu kontrolovat si nalezená řešení (jev K3), z nich dva při kontrole uvažovali nahlas. V rámci polostrukturovaného rozhovoru jsem se žáků nezeptala na způsob kontroly nalezených řešení. Třináct žáků zapsalo pouze jedinečná řešení (jev K4) a všechna řešení nalezlo celkem 10 žáků (jev K5).

Všichni žáci zapsali nalezená řešení ihned (jevy K6). Myslím si, že to bylo způsobeno nepoužíváním pomůcek k manipulativnímu způsobu hledání řešení. Pouze tři žáci při zápisu řešení úlohy postupovali zakreslováním stejné kulisy do více jevišť najednou (jev K7a), což může značit odhalení strategie. Naopak žákům více vyhovovalo zapisovat řešení po jednotlivých jevištích (jev K7b). Tento jev mohl být způsoben využitím zkušenosti z řešení předchozích úloh, protože se v každé úloze vyskytl 11x.

Forma zadání úlohy i zde ovlivnila způsob zápisu řešení. Žáci, kteří dostali pracovní list s předkreslenou 3D vizualizací jeviště, neměli problém do ní řešení zapsat. Dvě dvojice žáků dostali podmínku zakreslit řešení na čistý papír. Pro zakreslení využili inspiraci připraveným 2D plánem na lavici (viz příloha záznamu řešení žáka 4 na str. 106). Jedna žákyně měla potřebu dopsat si na svůj pracovní list 6. nalezené řešení této úlohy, ale na svém pracovním listu již neměla žádné prázdné předkreslené jeviště. Netroufla si to zapsat sama (ve 3. ročníku od žáků ještě nemůžeme chtít kreslit prostorové náčrty), a proto mě požádala, zda bych jí nedala jiný pracovní list s více předkreslenými 3D vizualizacemi jeviště (tento pozorovaný jev dokládá záznam rozhovoru č. 3 v úseku 19, 20).

U této úlohy jsem pozorovala pouze dvě strategie v hledání řešení (jevy K8a, K8b). Celkem 5 žáků bylo blízko odhalení vhodné strategie, zapisovali řešení umístěním kulisy na předem promyšlenou pozici. Čtyři žáci využili pro odhalení dalšího řešení symetrii. Zbylých pět žáků dle mého názoru rozmisťovalo kulisy spíše náhodně, protože neměli řešení postavená před sebou. Ze záznamů jsem pozorovala i tři jedinečné strategie zápisu, které jsem nezahrnula do této tabulky. Jedna žákyně rozmisťovala kulisy nejprve podle abecedy, další žákyně zpočátku zapisovala umístění kulis i na plochu sedadel. Následně si pak asi vzpomněla na reálnou zkušenost s divadlem a pomocí gumování změnila zápis řešení. Poslední zajímavou strategii využil jeden z žáků, který věděl, že úloha má více řešení, ale jejich počet upravovat nebude, protože to, které zapsal, je pro něj nejlogičtější (viz záznam rozhovoru č.2 v úseku 15).

Čtyři dvojice žáků tuto úlohu dostaly zadanou jako druhou nebo třetí v pořadí, takže jistě využily zkušenosti z řešení celé série úloh (jev K9). Neměli tak potřebu se v průběhu hledání řešení k již vyřešeným úlohám vracet, i přesto, že tuto možnost dostali na začátku experimentu (jev K10). Nutnost vrátit se k řešení úlohy v průběhu celé série úloh popisuje žák 4 v 5. úseku rozhovoru č. 2. Také žáci z poslední dvojice účastníků doplnili k této úloze další řešení na základě závěrečného rozhovoru, která nejprve neměli zapsaná (viz záznam rozhovoru č. 3 v úseku 17-20). Dalším významným jevem u této úlohy byla její časová náročnost. Žáci, kteří tuto úlohu dostali zadanou jako první v pořadí, ji řešili podobně dlouho, jako žáci, kteří ji dostali zadanou později. Může nám to poukazovat na její náročnost. Řešení této úlohy bylo prostorově náročnější, než u zbylých dvou úloh, protože nebylo v lineární podobě.

Z posledního pozorovaného jevu vyplývá, že dva žáci tuto úlohu hodnotili jako nejlehčí (jev K11a), protože už znali odhalenou strategii. Pět žáků ji hodnotilo jako středně náročnou (jev K11b) a sedm jako nejnáročnější (jev K11c). Čtyřem ze sedmi žáků, kteří ji hodnotili jako nejtěžší, úloha připadala velmi náročná z důvodu dlouhého zadání a několika podmínek, které museli splnit. Z nepopsaných důvodů tuto úlohu jako nejtěžší hodnotili další tři žáci. Celkem tři žáci přehlédli podmínku „*na každé stěně musí být vždy jedna kulisa*“ a zkreslili jednu kulisu pouze na prostřední stěnu jeviště. Po mém upozornění však svá řešení opravili. Tento jev dokládá záznam rozhovoru č. 3 v úseku 17, 18. Žák 1 v rozhovoru č.1 sám přiznal, že si špatně přečetl zadání úlohy a musel se na něj doptat – tento jev dokládá úsek 9 tohoto rozhovoru).

7.1.3 Úloha truhla s pokladem

Pozorovaný jev / fáze experimentu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
T1. Potřeboval by žák k vyřešení této úlohy pomůcky?	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
T2. Žák zapisuje žák řešení ihned?	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /
T3. Žák přemýšlí nahlas.	/ -	- -	/ -	- -	/ -	- -	- -
T4. Žák si kontroluje si nalezená řešení.	- -	/ /	/ -	- -	/ /	- /	- /
T5. Žák zapsal jedinečná řešení	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	/ /	- /
T6. Žák zapsal všechna řešení úlohy.	- /	/ /	- -	/ /	/ /	/ /	- /
T7. Žáka lákalo otevírat reálný zámek[21].	/ /	x	/ /	x	- -	x	/ /
T8a. Žák zapisuje kódy po jednotlivých číslech na různé linky.	- -	- -	- -	/ -	- -	- /	- /
T8b. Žák zapisuje řešení po jednotlivých linkách.	/ /	/ /	/ /	- /	/ /	/ -	/ -
T9a. Strategie umístění 1 čísla na konkrétní pozici.	- /	- /	- -	/ -	- -	- /	- -
T9b. Žák najde jedno řešení, další je převrácené.	/ -	/ -	- -	- /	- /	/ -	- /
T10. Žák využil poznatků z řešení celé série úloh.	- /	- -	- -	/ -	- -	- /	- -
T11. Žák upravil počet nalezených řešení.	- -	- -	- -	- -	- /	/ /	/ /
T12a. Obtížnost úlohy = nejlehčí	/ /	/ /	- -	- -	- /	- -	- -
T12b. Obtížnost úlohy = středně těžká	- -	- -	/ -	/ -	/ -	/ /	/ -
T12c. Obtížnost úlohy = těžká	- -	- -	- /	- /	- -	- -	- /

[21] Znak „x“ u této úlohy značí fázi experimentu, ve které nebylo žákům umožněno otevírat reálný zámek.

Komentář k tabulce:

Pro vyřešení této úlohy jsem nepředpokládala nutnost použití pomůcek, proto jsem je žákům neposkytla. Jev T1 tedy nebylo nutné sledovat. Očekávala jsem, že všichni žáci budou kódy zapisovat ihned, což se mi potvrdilo (jev T2)

V této úloze pouze tři žáci přemýšleli nahlas (jev T3). Mohlo to být způsobeno zadáním úlohy nejčastěji jako druhé nebo třetí v pořadí. Dále také vyřešení této úlohy zabralo žákům nejméně času.

Polovina žáků si kontrolovala nalezená řešení (jev T4). Na tomto jevu nehrálo roli otvírání reálného zámku. Třináct žáků zapsalo jedinečná řešení (jev T5), pouze jeden žák přehlédl v pracovním listu dvě shodná řešení. V průběhu experimentů bylo i v této úloze u žáků vidět okamžité opravování vlastních chyb pomocí gumování. Všechna řešení zapsalo celkem 10 žáků (jev T6).

Vkládat kód do reálného zámku jsem umožnila čtyřem dvojicím žáků. Až na jednu výjimku žáky lákalo zámek otevřít (jev T7). V záznamu rozhovoru č.1 zápolení nad otvíráním zámku dokládá úsek 6-11. Tento parametr úlohy ovlivnil i žákovská řešení – dva žáci zrychlili hledání řešení jedné úlohy, aby rychleji obdrželi zámek. V průběhu práce jedné dvojice žáků vedlo otevření zámku k nalezení nezapsaného řešení a odhalení klíčové strategie pro všechny úlohy (tento pozorovaný jev dokládá záznam rozhovoru č. 3 v úseku 14 a 16).

V této úloze jsem také pozorovala pouze dvě strategie zápisu řešení. Žáci častěji volili zapisovat řešení po jednotlivých linkách, než stejné číslo do více linek (jevy T8a, T8b). O strategiích využitých k hledání řešení vypovídají jevy T9a, T9b, které jsou s tímto jevem provázané. Z jevů T9a a 9b vyplývá, že čtyři žáci zapisovali jedno konkrétní číslo na předem promyšlené pozice a znali tak klíčovou strategii pro vyřešení celé série úloh (dokládá to záznam rozhovoru č. 2 v úseku 6). Strategii nalezení dalšího řešení převrácením kódu využilo 6 žáků.

Tuto úlohu jsem žákům nikdy nezadala jako první, proto je velmi pravděpodobné, že využili zkušenosti z předchozích úloh. U jevu T10 je ve výše uvedené tabulce uveden výskyt pouze třikrát, protože tito žáci o využití poznatků mluvili v průběhu závěrečného rozhovoru. Jedním z nich byl i žák ze čtvrté dvojice účastníků, který popsal svou strategii (viz záznam rozhovoru č. 2 v úseku 6).

Pouze u třech dvojic žáků bylo možné pozorovat potřebu upravení počtu nalezených řešení (jev T11), i přesto, že tuto možnost jsem uváděla v úvodních pokynech pro celou sérii úloh. Žákyně z páté dvojice účastníků se sama vrátila k úpravě počtu nalezených řešení, žáci ze šesté dvojice účastníků se k úpravě řešení vrátili v průběhu závěrečného rozhovoru. U poslední dvojice žáků tento okamžik nastal díky otevření reálného zámku jiným kódem, než měli zapsaný. Tuto situaci dokládá záznam rozhovoru č. 3 v úseku 3-7.

Pět žáků tuto úlohu hodnotilo jako nejlehčí (jev T12a), šest jako středně těžkou (jev T12b) a tři žáci jako nejnáročnější (jev T12c). U dvou žákyň, které tuto úlohu hodnotily jako nejnáročnější, nebyl tento jev pozorovatelný v průběhu řešení úlohy. Způsoben byl odlišným chápáním otvírání reálného zámku. Nebraly ho totiž jako motivační bonus, ale náročnost úlohy považovaly díky neštěstí, když se jim zámek nepodařilo otevřít opakovaným vkládáním kódů.

7.2 Analýza videozáznamů

Tato kapitola předkládá přepisy rozhovorů z pořízených videozáznamů práce se třemi dvojicemi žáků. Vybrané úseky jsou vždy po dokončení řešení celé série předložených úloh. Tyto záznamy rozhovorů dokládají některé z pozorovaných jevů z tohoto experimentu, na které jsem se odkazovala v předchozí kapitole. Žáci v nich popsali odhalené strategie a další doplňující informace, které ovlivnily průběh řešení jednotlivých úloh.

V přepsaných rozhovorech uvádím horním indexem číslo promluv experimentátora, tj. úsek rozhovoru, na které se odkazuji v předchozí kapitole. Součástí přepisu rozhovorů jsou i komentáře k rozhovoru, které popisují okolnosti situace, o které se hovoří. Uvádím je v závorkách a menším písmem, než je celý rozhovor. Aby byly záznamy autentické, neopravovala jsem pravopis u promluv jednotlivých žáků.

7.2.1 Záznam rozhovoru č. 1

Účastníky níže rozepsaného rozhovoru byli žáci 1 a 2 ze školy 1 (tj. první dvojice účastníků experimentu). Rozhovor začal v době, kdy měli oba žáci vyřešenou celou sérii úloh a zápolili s vkládáním kódu do reálného zámku.

[1] **Experimentátor:** Mezitím co se snažíte otevřít ty zámky, tak bych se vás ráda na něco zeptala. Já jsem vám ty úlohy dala v nějakém pořadí, myslíte si, že ta první byla nejlehčí a ta poslední naopak nejtěžší? Nebo byste je seřadili jinak podle obtížnosti?

Žák 2: Pro mě byla jednoduchá truhla a divadlo střední, protože jsem už věděl jak na to.

Žák 1: Já jsem nejdýl řešil ty krychle, ty byly těžké, naopak tu truhlu jsem měl hned.

[2] **Experimentátor:** A co ty krychle? Ty ti přišly nejtěžší proč?

Žák 2: Protože jsem je dělal jako první a nevěděl jsem ten fígl.

[3] **Experimentátor:** A jaký fígl jsi tam našel? Teď už ho můžeš prozradit.

Žák 2: Našel jsem to tak, že vlastně můžeš mít dva modrý dole a prohodit tadyty dvě (ukazuje na obrázku červenou a bílou krychli). A tak to udělat se všema barvama.

[4] **Experimentátor:** Vidíš, to je dobré odhalení. Dalo se to využít i při řešení dalších úloh?

Žák 2: Dělal jsem to podobně.

[5] **Experimentátor:** A když jste měli u té první úlohy připraveno v pracovním listu 8 předkreslených věží, nezmátlo vás to?

Žák 1: Jak jako?

[6] **Experimentátor:** Oba máte vybarveno jenom šest věží (jako šest řešení) a dvě jste nechali prázdné. Nemá úloha třeba ještě další řešení?

Žák 1: Protože jsme tam zaprvé neměli už kostky a za druhé už nás nic nenapadlo.

(Žák 1 zde mluví za oba žáky, i přesto že žák 2 to aktuálně nekomentuje a stále se zabývá vložením číselného kódu do zámku).

Žák 2: A když tam vložím ten kód a tady to zmáčknu (ukazuje na reálném zámku), tak se to otevře jo?

[7] **Experimentátor:** Ano.

Žák 1: A já vím, jaký kód tam byl. (ukazuje mi ho na pracovním listu)

[8] **Experimentátor:** Ne, ne, ten to nebyl.

Žák 1: Já si to už nepamatuju, ale otevřel jsem to.

[9] **Experimentátor:** Je ještě něco, co byste mi k tomu chtěli říct? Co třeba zadání. Četlo se vám dobře, pochopili jste úlohu ihned.

Žák 2: Jo. (stále se trápí nad otevřením zámku).

Žák 1: Jo, já jsem si akorát u toho divadla nepřečetl, že to mám zapisovat zkratkami. Proto jsem se na to ptal.

[10] **Experimentátor:** Takže jsi nejdřív chtěl kreslit ty obrázky? To by tě asi mohlo zdržet. Já jsem vám to chtěla zjednodušit. Zkus se příště více soustředit na pečlivé čtení zadání.

Žák 1: Můžu to ještě zkusit jednou otevřít? Abych zjistil, který kód to byl, jestli to je vážně ten druhý.

[11] **Experimentátor:** Ano, můžeš.

Žák 2: A je to opravdu jeden z těch kódů, které tam mám jo?

[12] **Experimentátor:** Ano, je. Pokud mi už nechcete nic sdělit, tak je naše tajemství u konce. Děkuji vám.

(Nakonec se podařil zámek odemknout i žákovi 2.)

Můj komentář k tomuto záznamu:

Pro úlohu věž z krychlí v tomto rozhovoru můžeme vidět pozorované jevy T8c a T11c. Tyto jevy najdeme v úseku 2-4 a žák 2 v nich popisuje náročnost úlohy a strategii, kterou využil i v dalších úlohách. Dále zde můžeme vidět ovlivnění počtu nalezených řešení díky zadanému pracovnímu listu a pomůckám, o kterém mluví žák 1 v úseku 5. Druhý žák na tuto otázku neodpověděl, protože byl velmi zaujatý vkládáním číselného kódu do reálného zámku. Tento prožitek si jistě budou pamatovat oba žáci více, než to že řešili tři podobné úlohy. Vypovídá i další část rozhovoru, kde žák 1 sice zámek otevřel, ale nepamatoval si, kterým kódem to bylo. Proto se k otvírání zámku potřeboval vrátit (úsek 7,8).

Úsek 9 popisuje poslední předloženou úlohu kulisy v divadle, kterou žáci dostali zadanou jako druhou v pořadí. Žák 1 sám přiznal, že si pořádně nepřečetl zadání a musel se doptávat. Z přepisu rozhovoru není vidět důvod této chyby. Z celého videozáznamu bylo vidět, že se snažil urychlit řešení úlohy, protože jeho spolužák celou sérii řešil rychleji, a i on už chtěl mít vyřešenou poslední úlohu a dostat reálný zámek k dispozici. Toto dokládá opět, že síla zážitku je větší než potřeba soustředit se na řešení úlohy. Oba žáci tuto úlohu hodnotili jako středně těžkou (jev K11b)

7.2.2 Záznam rozhovoru č. 2

Účastníky níže rozepsaného rozhovoru byli žáci 4 a 5 ze školy 1 (tj. čtvrtá dvojice účastníků experimentu). Rozhovor začal v době, kdy měl žák 4 všechny úlohy již dořešené a žák 5 ještě chvíli řešil poslední úlohu.

[1] **Experimentátor**: Já jsem ti ty úlohy dala v nějakém pořadí, přišly ti stejně těžké všechny, nebo nějaká lehčí / těžší?

Žák 4: Byly na úplně stejným principu.

[2] **Experimentátor:** Byly na stejném principu jo? A která ti přišla nejtěžší a proč?

Žák 4: Nejvíc mě zmátla ta truhla, protože vlastně je tam příliš řádků na to kolik to má řešení.

[3] **Experimentátor:** To tě zmátlo, že jsi myslel, že tam je ještě více řešení.

Žák 4: Ale jsem si jistý, že není.

[4] **Experimentátor:** A když by si měl i u jiné úlohy 8 předkreslených možností, třeba u těch krychlí. Zmátlo by tě to také?

Žák 4: No jako ….., možná by mě to trošku zmátlo také no. Ale protože to bylo na stejným principu, tak vím, že to další řešení nemá prostě no. Já jsem to vždycky řešil stejnou strategií prostě no.

[5] **Experimentátor:** A jak jsi to řešil, popiš mi tu strategii.

Žák 4: (vzal si pracovní list s divadlem) Tady mě ještě žádná strategie nenapadla (ukazuje na řešení úlohy kulisy v divadle, ke které se v průběhu řešení dalších úloh vrátil a počet řešení doplnil), tady jsem na ní přišel (ukazuje na pracovní list s věžemi). Tady jsem měl vždycky bílou dole a zkoušel jsem ty zbylý dvě. Že úplně nahoru dám červenou a pod ní modrou. A pak jsem to obrátil. Pak jsem dal tu bílou doprostřed, nahoře byla modrá a dole červená. Pak jsem to zase obrátil. Pak mi zbývalo dát tu bílou úplně nahoru, pod to jsem dal červenou a úplně dolů jsem dal modrou. A pak jsem to zase obrátil.

[6] **Experimentátor:** A jak jsi to dělal s těmi čísly, to jsi dělal stejně?

Žák 4: (vzal si pracovní list s řešením úlohy truhla) Vždycky na začátek jsem si dal jedničku, pak jsem dal dvojku a pak pětku. Pak jsem si to zase obrátil. Pak jsem dal tu jedničku doprostřed, nakonec jsem si dal pětku a na začátek dvojku. A prohodil jsem to. A pak jsem si dal nakonec jedničku, před to jsem dal pětku a na začátek jsem dal dvojku. A pak jsem to naposled prohodil.

[7] **Experimentátor:** Také jsem si všimla, že jsi nejprve našel čtyři řešení u té úlohy kulisy v divadle a pak jsi se k tomu v průběhu řešení jiné úlohy vrátil, co tě k tomu přivedlo?

(Žák 5 v tomto okamžiku dořešil poslední úlohu a přidal se k rozhovoru.)

Žák 4: Přivedla mě k tomu ta úloha s krychlemi. Nejprve jsem ty kulisy házel na přeskáčku a pak jsem si vzpomněl, že u krychlí je šest řešení, takže jsem musel i tohle změnit a dopsat tam ty chybějící řešení.

[8] **Experimentátor:** Aha, to je dobrý poznatek. Dále jsem si všimla, že jsi nepotřeboval stavět jednotlivé věže z připravených krychlí, proč?

Žák 4: Protože jsem už odhalil tu taktiku a bylo pro mě jednodušší to rovnou zapisovat.

[9] **Experimentátor:** Žáku 5, co ty? Přišel jsi také na nějakou taktiku, jak řešit tyto úlohy?

Žák 5: No, ani moc ne. Spíš u těch věží jsme měl nejprve tři řešení a pak mi došlo, že jsem tu úlohu špatně pochopil, a pak jsem našel další tři řešení. V tom zadání totiž je, že barvy se nesmí po sobě opakovat. Já jsem původně myslel, že jedna barva krychle se nesmí opakovat na stejné pozici. Pak jsem si ale uvědomil, že můžu dát třeba bílou kostičku doprostřed, udělat řešení, že nahoře je červená a pod tím je modrá. Další řešení pak je opakovat tu bílou na stejném místě a ty zbylé dvě otočit.

[10] **Experimentátor:** Která úloha z těchto tří ti přišla nejtěžší a proč?

Žák 5: Nejtěžší mi přišla ta truhla, protože tady má být osm řešení (podle předkreslených linek v pracovním listu) a jsou tu jen tři čísla.

[11] **Experimentátor:** Aha, takže to tě při řešení zmátlo jo?

Žák 5: Jo. Protože ty věže jsou vlastně to stejné, ale je tam předkresleno šest řešení.

[12] **Experimentátor:** A když by si měl i u těch krychlí předkreslených osm věží, myslíš si, že by tě to také zmátlo?

Žák 5: Asi by mě to zmátlo, ale prostě to už nejde dál řešit.

[13] **Experimentátor:** A když by si tam měl třeba jen pět předkreslených věží, nebo pět řádků u truhly, to by tě také zmátlo?

Žák 5: Ne.

[14] **Experimentátor:** A v čem by tě to nezmátlo, nebo jak by si to vyřešil?

Žák 5: Kdyby jich tam bylo míň, tak by se to řešilo lépe. Asi by mi to nevadilo, že tam to jedno řešení chybí.

[15] **Experimentátor:** A koukám u toho divadla, tam máš jen jedno řešení. Přišlo ti to jako úplně jiná úloha, nebo nějak podobná jako ty ostatní úlohy?

Žák 5: Vím, že u toho by taky mohlo být víc řešení, akorát mě přišlo nejlogičtější tohleto, které jsem zakreslil.

Žák 4: Mě by přišlo nejlogičtější doprostřed dát zámek, protože tak začíná většina pohádek a pak se přesunou jinam.

[16] **Experimentátor:** To je zajímavý nápad. Chtěli byste mi ještě něco k úlohám doplnit, o čem jsme ještě nemluvili?

Žák 5: Ne.

Žák 4: Mě taky už nic nenapadá.

[17] **Experimentátor:** Dobře, děkuji vám. Můžete si vzít všechny své věci a vrátit se do třídy.

Můj komentář k tomuto záznamu:

V práci této dvojice žáků bylo možné pozorovat ovlivnění procesu řešení předloženou sérií úloh. Počet nalezených řešení ovlivnil i způsob zápisu úloh a předložený pracovní list. Žák 4 velmi dobře popsal svoji odhalenou strategii, zdůvodnil, proč úlohy nemůžou mít více řešení a vysvětlil, co ho přimělo vrátit se k již vyřešené úloze (úsek 1-7, pozorované jevy V8c, K8a, T9a, V9, K9, T10. V připraveném pracovním listu s osmi linkami u truhly popsal, že ho to zmátlo a nutilo více přemýšlet nad dalším řešením a tím i rozlišil jednotlivé úlohy podle jejich náročnosti (jevy V11a, K11c, T12b). U úlohy s krychlemi naopak popsal, proč pro něj bylo jednodušší pomůcky nevyužívat (jevT1b). Vědomí, že tyto rozdíly dokáže popsat, může ukazovat jeho rozvinutou úroveň logického uvažování.

U žáka 5 můžeme pozorovat částečné odhalení izomorfismu v úlohách – na stejném principu mu přišly pouze úloha věž a truhla. Dále zde můžeme také pozorovat určitou míru nesoustředěnosti, kdy zprvu nepochopil zadání úlohy věž z krychlí, v závěrečném rozhovoru ale popsal svoji strategii (jev V8d). Jeho řešení velmi ovlivnil počet připravených možností k zápisu. 8 připravených linek ho chvíli nutilo přemýšlet a vedlo k hodnocení dané úlohy jako nejnáročnější (jev T12c). Kdyby měl ale pouze 5 linek, nepovažoval by za důležité najít i poslední řešení. Úlohu s kulisami řešil pouhým úsudkem, a protože řešení zapisoval pouze na čistý papír, nezabýval se hledáním více řešení (jev K5).

7.2.3 Záznam rozhovoru č. 3

Účastníky níže rozepsaného rozhovoru byli žák 3 a žákyně 3 ze školy 2 (tj. poslední dvojice účastníků experimentu). Rozhovor začal v době, kdy žákyně 3 již dořešila celou sérii úloh a dostala možnost otvírat reálný zámek. Žák 3 řešil předložené úlohy o chvíli déle.

[1] **Experimentátor:** Tady ti dám opravdový zámek, do kterého můžeš vložit některý z těch kódů, které jsi napsala. Podaří-li se ti zámek otevřít, dokázala bys otevřít i tuto truhlu s pokladem. Čísla dávej na tu vyznačenou čárku.

Žákyně 3: (hned se zámku chopila a začala vkládat kódy). Takhle to tam mám vložit? (ukazuje mi to)

[2] **Experimentátor:** Ano. Pak to zkusíš zmáčknout a buď se ti to otevře nebo ne.

Žákyně 3: Neotevřelo se mi to. Zkusím další kód.

(Mezitím žák 3 dořešil poslední úlohu a také dostal zámek. Vysvětlila jsem mu, jak tam bude kód zadávat.)

Žákyně 3: Né, ten také nejde. Tak už zbývá jen poslední. (na pracovním listu měla zapsané pouze 3 možné kombinace číselného kódu, ani jedna zámek nemohla otevřít)

[3] **Experimentátor:** (v průběhu kdy se oba žáci soustředí na odemykání pravého zámku) Chtěla bych se vás zeptat, kolik jste našli řešení u jednotlivých úloh.

Žákyně 3: Vždycky tři.

Žák 3: U každé úlohy trochu jinak.

Žákyně 3: Už jsem tam zadala všechny tři kódy, ale ani jeden to neotevřel. (Zadává další kód, který ale nemá napsaný na pracovním listu).

Jupí. Hotovo.

[4] **Experimentátor:** Ukaž mi, jaký jsi tam dala kód.

Žákyně 3: Já ho tady nemám. (Sama si uvědomila, že ten kód nemá na pracovním listu napsaný a vrátila se k řešení úlohy)

Žák 3: Také už to mám otevřené

[5] **Experimentátor:** A odpovídá ti ten vložený kód tomu, co máš napsané na papíře?

Žák 3: Ne. Můžu ho tam dopsat? (začal dopisovat do pracovního listu další řešení)

[6] **Experimentátor:** Ano, klidně ho tam dopiš.

Žákyně 3: Mě tady chybí jeden řádek.

[7] **Experimentátor:** Tak si s tím nějak poraď. Však jsem vám říkala, že můžete klidně využít i druhou stranu nebo další papír. ………………… Klidně se můžete vrátit i k těm předchozím úlohám a upravit jejich řešení, pokud potřebujete. Času tady společně máme dost.

Žákyně 3: (Vzala do ruky řešení úlohy věž z krychlí, kde měla původně tři řešení) Tohle víc řešení už nemá. Červenou mám všude. ….. Ahá. Ještě budu potřebovat tu červenou. (Začala zakreslovat červené krychle do dalších věží tak, jako již měla na papíru – nejprve dospodu, pak doprostřed a nakonec nahoru. Prstem si ukazuje, kde měla v zapsaných řešeních další barvy a kam je nově umístí. Nepotřebuje stavět z krychlí.)

Teď už to asi taky mám všechno.

(Mezitím žák 3 dokončil úpravu řešení u truhly s pokladem a k dalším úlohám se už vracet nechtěl. Začal si tedy samostatně stavět s krychlemi, aby vyplnil čas.)

[8] **Experimentátor:** Dobře, takže si o tom můžeme začít povídat.

Oba dva jste si vybrali řešit jako první úlohu ty věže, přišlo vám to jako nejjednodušší, když jste si přečetli to zadání, nebo se vám více líbilo hrát si s připravenými krychlemi?

Žákyně 3: Asi obojí.

Žák 3: Mě to přišlo lehké, kostičky jsem ze začátku nechtěl, ale pak jsem je potřeboval.

[9] **Experimentátor:** Každý jste si zvolil jiný pracovní list, mohlo to nějak ovlivnit počet nalezených řešení?

Žákyně 3: Mohlo nám to naznačit, že tam bude víc řešení.

[10] **Experimentátor:** Takže si myslíš, že když si žák 3 vybral pracovní list s pěti předkreslenými věžemi, tak mohl najít jen pět řešení, a ty když sis vybrala pracovní list s osmi předkreslenými věžemi, tak jsi mohla najít celkem osm řešení? Ale vždyť jich máš zakreslených jen šest. Myslíš, že už další nenajdeš?

Žákyně 3: Ne. Tam už žádné další není.

[11] **Experimentátor:** A jak si tím můžeš být jistá, že to nemá už žádné další řešení, když jsi si vybrala tento pracovní list?

Žákyně 3: Takže tam další řešení být musí. Je to jasný. (znovu se zadívala do svého řešení)

[12] **Experimentátor:** Co ty, žáku 3, ty už jsi nepřišel na žádné další řešení, když tam máš ještě dvě nevyplněné předkreslené věže? Ty jsi našel jen tyhle tři řešení?

Žák 3: Ano. Další už ne.

Žákyně 3: Jenže i já tam mám dvě prázdné věže.

[13] **Experimentátor:** A co třeba ta truhla, žáku 3? Tam jsi si vybral pracovní list se šesti linkami a vyplnil jsi jich všech šest. Myslíš, že už tam žádné další řešení není, když máš všechno vyplněné?

Žák 3: Není.

[14] **Experimentátor:** A jak jsi si tím jistý? Zkus mi to povědět.

Žák 3: Já si myslím, že tam možná ještě další řešení bude. Protože já jsem myslel, že tady (ukazuje na první číslo na lince) nesmí být stejné číslo. Pak jsem ale otevřel ten zámek, a to bylo jiným kódem, než jsem měl napsaný. Tak jsem se k tomu vrátil a dopsal to takhle.

[15] **Experimentátor:** Co ty, žákyně 3? Ty jsi napsala rovnou všech šest řešení u té truhly?

Žákyně 3: Ne.

[16] **Experimentátor:** A co tě přivedlo k tomu napsat další řešení?

Žákyně 3: Ten zámek. Otevřela jsem ho jiným kódem. Když to první nechám, tak ty dvě zatím se můžou ještě otočit.

[17] **Experimentátor:** Dobře. A co to divadlo, tam máte zakreslený každý jiný počet najitých řešení. Žáku 3, jak ty jsi to tady zakresloval do toho pracovního listu? (ve svém pracovním listu má zakreslenu v každém modelu jeviště kulisu pouze uprostřed)

Žák 3: Řekl jsem si tady je hodně způsobů zápisu. Nejdřív jsem si řekl třeba Z-L-R, pak Z-R-L. (ukázal mi to na pracovním listu, mluvil o dvou nalezených řešeních, ale špatně je zapsal)

[18] **Experimentátor:** Ale víš, že jsi si pořádně nepřečetl zadání úlohy? Tady se píše (ukazuji mu do textu zadání úlohy), že máš rozmístit kulisy vždy na tři stěny jeviště, a ty jsi to zakreslil pouze na jednu stěnu.

Žák 3: Aha, tak já to opravím.

[19] **Experimentátor:** Žákyně 3, jak ty jsi to řešila? Všimla jsem si, že jsi si to postavila nejprve jednou do předloženého modelu na stole, a pak jsi ho už nepoužívala.

Žákyně 3: No že na všech stranách musí být ta jedna kulisa, a to stejné je u těch zbylých dvou taky. Ale stejně je tam ještě jedna kombinace. (Vzala do ruky znovu pracovní list se zapsaným řešením a začala jej upravovat). …. R-Z-L, L-R-Z. Já potřebuji ještě jedno. Mě se to sem nevejde.

[20] **Experimentátor:** Tak to nakresli z druhé strany.

Žákyně 3: Nebo si vezmu jiný papír. (Pravděpodobně by jí činilo problém nakreslit vlastní 3D model)

[21] **Experimentátor:** Žáku 3, přišly ti ty úlohy v něčem podobné?

Žák 3: Trošku mi přišla ta truhla podobná s tím divadlem. Zapisovali jsme čísla a písmena.

Žákyně 3: Všude jsou tři a tři. U těch krychlí, i truhly i divadla.

[22] **Experimentátor:** Takže jsi chtěla říct, že tam máš vždy tři nějaké věci, se kterými hýbeš a tři místa, kam to dáváš. A myslíš teda, že jsi našla všechna řešení těch úloh?

Žákyně 3: No asi jo. Můžu si zkusit ještě vzít to divadlo s 8 prázdnými?

[23] **Experimentátor:** Klidně si ho vezmi.

Žákyně 3: (Přepisuje šest již nalezených řešení do nového pracovního listu) Ty další dvě tam prostě nejsou. Vždy zkusím nějakou kombinaci, tak už ji tam mám.

[24] **Experimentátor:** Máš pravdu. Našla jsi opravdu všechna řešení těchto úloh. Ten pracovní list s připravenými pěti byl takový chyták, což jsi odhalila, že jsi si potřebovala jednu linku doplnit. A naopak těch osm bylo také chyták, aby vás to nutilo přemýšlet, zda tam už opravdu není další řešení, což jsi vlastně také dělala.

Zdárně jsme došli až do konce, chtěli byste mi ještě něco říct k těmto úkolům? Jak vás to bavilo je řešit? Setkáváte s těmito úlohami i v normální matematice? Chtěli byste tyto úlohy řešit častěji?

Žák 3: Jo, bavilo mě to. Normálně to neděláme. Líbily se mi ty kostičky. V hodinách si moc nehrajeme.

Žákyně 3: Taky mě to moc bavilo.

[25] **Experimentátor:** Děkuju vám za vyřešení těchto úloh a třeba vám je ještě někdy připravím do běžných hodin matematiky.

Můj komentář k tomuto záznamu:

Z výše uvedeného záznamu rozhovoru vyplývá velká potřeba přemýšlení nahlas a častého ujišťování u žákyně 3 (jevy V2, K2 a T3). Ukazuje nám to její otevřenost a potřebu postupovat vždy správně. Při hledání řešení úloh využila oporu v připravených pomůckách pouze na začátku, pak je odložila (jev V1b). V úlohách odhalila izomorfismus a klíčovou strategii. V průběhu přemýšlení nahlas u řešení úlohy věže z krychlí svou strategii popsala, v závěrečném rozhovoru ji však nedokázala správně formulovat (úseky rozhovoru 7, 21, 22; jev V8c). S formulací jsem jí trochu pomohla. Různý počet připravených polí pro zápis řešení úloh vedl tuto žákyni k přemýšlení o konečném počtu řešení a důležitosti ověřování svého přemýšlení.

Žák 3 pracoval naopak velmi v tichosti, bez potřeby přemýšlení nahlas (jevy V2, K2 a T3). Je mnohem uzavřenější než jeho spolužačka. Jeho úroveň myšlení je na nižší úrovni. Stále potřebuje oporu v poskytnutých pomůckách (úsek rozhovoru 8, jev V1a). Potřeboval si stavět věže z krychlí před sebe, špatně pochopil zadání úlohy kulisy v divadle (zapsal do předkresleného jeviště vždy jen jednu kulisu), přehlédl shodně zapsaná řešení v úloze truhla (jev T5), když se k jejímu řešení vrátil. Zde sice zaplnil všech 6 linek, ale nevšiml si, že zapsal pouze jedno nové řešení a dvě, které už tam měl dřív. Dokonce ani nezapsal kód, kterým otevřel reálný zámek. Tato chyba mohla být způsobena jiným položením zámku na stůl, a tedy zrcadlovým převrácením kódu. Nižší úroveň myšlení tohoto žáka nám ukazuje i to, že v úlohách neobjevil izomorfismus a netrápil ho různý počet nalezených řešení pro celou sérii úloh. Nevyužil tak poznatků z řešení celé série úloh (jevy V9, K9, T 10).

Motivace otvírání zámku byla i u této dvojice žáků velmi silná a oba je přivedla k nalezení dalšího řešení a návratu k předchozím úlohám. U obou žáků bylo možné pozorovat návrat k již vyřešeným úlohám a opravám jejich řešení (jevy V10, K10, T11).

7.3 Souhrnná analýza a reflexe celého experimentu

Pro tuto práci jsem si stanovila deset dílčích cílů (viz kapitola 5.3 Dílčí cíle výzkumného šetření, str. 44), na které jsem během realizovaných experimentů hledala odpovědi. Níže jednotlivé dílčí cíle reflektuji a doplňuji o poznatky získané porovnáním tabulek pozorovaných jevů v kapitole 7.1. Pro lepší přehlednost jednotlivé dílčí cíle v této části práce uvádím znovu v rámečku. Všechny cíle jsem touto prací naplnila.

1. dílčí cíl: Počet nalezených řešení

Sledovat a) zda se u jednoho žáka liší počet nalezených řešení v jednotlivých úlohách.

b) zda pořadí úloh a počet předkreslených polí pro záznam na pracovním listu ovlivní počet nalezených řešení.

Všechna řešení u předložených úloh nalezlo vždy 10 žáků. Z těchto deseti žáků právě 6 nalezlo všechna řešení v celé sérii všech úloh. V každé úloze právě jeden žák nezapsal jedinečná řešení, u úloh „kulisy v divadle“ a „truhla s pokladem“ se jednalo o stejného žáka. Celá série úloh u některých žáků vedla k objevení strategie a tím i ujištění o konečném počtu řešení. Někteří žáci naopak strategii v počtu řešení nenašli a nevadilo jim mít rozdílný počet řešení u každé úlohy.

Počet nalezených řešení byl velmi ovlivněn jednak pořadím zadání úloh, tak i počtem předkreslených možností v pracovním listu. Někteří žáci nalezli zpočátku méně řešení, ale díky poznatkům z celého experimentu se k dříve vyřešené úloze třeba vrátili a našli i ta chybějící. Když jsem žákům předložila pracovní list s pěti předkreslenými možnostmi pro zápis, někteří z nich to tak nechali a neměli potřebu hledat další, pár žáků mělo také potřebu doplnit si další pole pro zápis řešení. Naopak u pracovního listu s osmi možnostmi déle přemýšleli a zkoumali, zda úloha opravdu nemá více řešení.

2. dílčí cíl: Způsob zadání úlohy

Sledovat vliv různého způsobu zadání úlohy se stejnou matematickou podstatou na jeho pochopení žáky (např. různost vizualizace, kontextu a délky textu).

V průběhu každého výzkumu mi někteří žáci kladli otázky, díky kterým se potřebovali ujistit o správném pochopení zadání úlohy. Na tyto otázky jsem jim obvykle nedala odpověď a raději jsem je navedla k opětovnému přečtení zadání úlohy. Po opětovném přečtení bylo již žákům v zadání vše srozumitelné. Zadání úlohy „kulisy v divadle" bylo pro žáky nejobtížnější, protože mělo nejdelší text. Žáci často přehlédli nějakou podmínku, na kterou se následně zeptali.

U úlohy „věž z krychlí" se často ptali, zda můžou umístit jednu barvu na stejnou pozici ve dvou věžích. U úlohy „truhla s pokladem" mi kladli otázku, zda mohou použít stejný kód, který byl napsán i v zadání. V úloze „kulisy v divadle" otázkami zjišťovali, jak mají nalezená řešení zapisovat. Dále se mě ptali na vysvětlení pojmu kulisa, což byla jediná otázka, na kterou jsem jim dala odpověď. Věděla jsem, že žáci tento pojem asi nebudou znát, protože mají zatím malou zkušenost s divadlem, ale nechtěla jsem tímto pojmem ještě prodlužovat zadání.

3. dílčí cíl: Systematičnost práce a řešitelské strategie

Sledovat systém práce žáků při hledání a zápisu řešení u předložených úloh. Pozorovat využití podobných řešitelských strategií a dovednost slovně popsat nalezenou strategii.

U každého žáka byl vidět systém v hledání řešení alespoň u jedné úlohy. U úlohy „věž z krychlí" jsem pozorovala celkem čtyři různé strategie hledání řešení, u zbylých úloh pouze dvě strategie. Tato rozdílnost byla způsobena velkou mírou využití připravených pomůcek. Nejvíce žáci využili pomůcky v úloze „věž z krychlí", bylo to pro ně jistě velké lákadlo, protože v tomto věku si ještě rádi hrají. Překvapilo mě, že nevyužívali připravené obrázky kulis a vystřiženého 2D plánu jeviště, který si mohli složit na 3D model. Očekávala jsem, že pro ně bude problematické zapisovat do 3D vizualizace jeviště. Pro práci s číselným kódem pomůcky nepotřebovali.

Žáci jistě využili zkušenosti z řešení celé série úloh, i přesto, že se o tom v závěrečných rozhovorech moc nezmiňovali. Projevilo se to kratší dobou řešení úloh a opakovaným použitím objevených strategií. Polovina žáků vhodnou strategii objevila a dobře dokázala popsat, ostatní žáci k odhalení klíčové strategie byli blízko. Myslím si, že by ji také odhalili, pokud by třeba dostali další úlohu se stejnou matematickou podstatou.

4. dílčí cíl: Podobnost úloh

Sledovat, zda žáci v předložené sérii úloh objeví stejnou matematickou podstatu (izomorfismus).

Ze závěrečné diskuze po každém experimentu vyplynulo, že nejčastěji žákům přišly podobné úlohy „kulisy v divadle“ a „truhla s pokladem“, protože nepoužívali tolik pomůcky a v zápisu řešení zaměnili pouze písmena za čísla. Úloha „věž z krychlí“ mohla některým žákům přijít odlišná, protože k jejímu zápisu využívali pastelky.

U čtyř žáků jsem v průběhu diskuze zjistila, že podobnost úloh více vnímali na základě pohádkové motivace (věž, Zlatovláska, poklad), nikoliv na základě stejné matematické podstaty ve všech předložených úlohách.

5. dílčí cíl: Čas hledání řešení

Sledovat a posoudit rozdíly dob trvání řešení jednotlivých úloh v celé předložené sérii.

Žáci nejdéle řešili vždy první zadanou úlohu, další úlohy z celé série jim zabraly vždy méně času, což značí využití získaných zkušeností. Ze všech účastníků celkem 9 žáků řešilo vždy první předloženou úlohu nejdéle, druhou středně dlouho a třetí nejrychleji. Tři žáci vyřešili předloženou druhou úlohu („truhla s pokladem“) rychleji než třetí („kulisy v divadle“) a dva žáci naopak první předloženou úlohu („kulisy v divadle) řešili rychleji než druhou („věž z krychlí).

Ze všech úloh žáci řešili průměrně nejdéle úlohu „věž z krychlí“ (6,5 min). Naopak nejkratší dobu řešili úlohu „truhla s pokladem“ (2,5 min). Tento jev byl způsoben dvěma okolnostmi. První byla práce s pomůckami, která řešení úlohy „věž z krychlí“ velmi zdržela a druhá bylo pořadí zadání jednotlivých úloh - „věž z krychlí“ jsem čtyřem dvojicím žáků ze sedmi zadala jako první a naopak úlohu „truhla s pokladem“ jsem zadala čtyřem dvojicím jako poslední.

6. dílčí cíl: Způsoby kontroly vyřešené úlohy

Sledovat způsoby, jakými si žáci kontrolují nalezená řešení a jak tato kontrola ovlivní zapsaná řešení v pracovním listu.

Kontrola nalezených řešení mě v průběhu experimentu docela překvapila. Nejčastěji si žáci kontrolovali úlohu „věž z krychlí“ (celkem 8 žáků) a to pohledem, nebo opakovaným stavěním již zakreslených věží. Naopak nejméně si kontrolovali úlohu „kulisy v divadle“ (celkem 4 žáci).

Pozorovala jsem pouze tři žáky, kteří si kontrolovali nalezená řešení u všech předložených úloh. Nikdo z žáků neměl potřebu se mě ptát na počet řešení každé úlohy.

Všichni svá řešení hledali samostatně, stranili se svých spolužáků, aby na ně nekoukali. Pouze jeden žák v průběhu své práce upozornil spolužačku, že má na stole postavené shodné věže. Překvapilo mě, že pouze dva žáci ze 14 do pracovního listu zapsali shodná řešení u některé z úloh a nevšimli si toho při odevzdávání. 10 žáků ze všech účastníků v průběhu své práce také zapsalo shodná řešení. Často si ale svou chybu uvědomili a okamžitě gumováním opravili. Návrat k již vyřešeným úlohám a následnou úpravu počtu nalezených a zapsaných řešení provedli průměrně 4 žáci. Dva z nich si upravili počet nalezených řešení ve všech úlohách.

7. dílčí cíl: Způsob zápisu řešení

Pozorovat a) odlišné způsoby záznamu řešení v průběhu práce s předloženými pomůckami a bez nich

b) zda připravený pracovní list ovlivní počet nalezených řešení žáky.

Žáci nejčastěji zapisovali nalezené řešení ihned. Pouze u úlohy „věž z krychlí“ čtyři žáci zakreslovali řešení až poté, co je měli všechna postavené před sebou. Bylo to způsobeno prací s předloženými pomůckami. V každé úloze vždy 11 žáků zapisovalo řešení do jednoho připraveného pole pro zápis najednou (tj. střídali pastelky, písmena a čísla). Strategii umístění 1 prvku na promyšlenou pozici jsem pozorovala v každé úloze vždy u tří žáků, nikdo z nich ji však nepoužil pro všechny tři předložené úlohy. Nejvíce se tato strategie vyskytla ve dvou úlohách u dvou stejných žáků.

Připravené pracovní listy k zápisu nalezených řešení žákům vyhovovaly. Pokud dostali podmínku zakreslit úlohu samostatně, dokázali si s tím vždy poradit. Způsoby zápisu úlohy byly v tomto případě vždy odlišné od možnosti v pracovním listu.

Zapisovat úlohu „věž z krychlí“ samostatně na čistý papír jsem zadala pouze jedné dvojici žáků. Jedna žákyně z této dvojice měla problém se zápisem bílé barvy, protože využívala zapisovat do tzv. plánu stavby (tedy všechny tři krychle barevným puntíkem vyznačila do jednoho čtverečku). Nakonec použila k záznamu obyčejnou tužku. U této úlohy mě překvapilo, že pouze jedna dvojice žáků svá řešení zapsala pomocí počátečních písmen barev krychlí, nepoužili barevné pastelky jako všichni ostatní žáci.

Pro vlastní zápis úlohy „kulisy v divadle“ se žáci ze dvou dvojic účastníků inspirovali vystřiženým 2D plánem jeviště, který měli na lavici. U úlohy „truhla s pokladem“ jsem nepozorovala žádné neobvyklé řešení.

8. dílčí cíl: Komunikace žáků

Pozorovat potřebu žáků komunikovat v průběhu hledání řešení.

Přemýšlení nahlas žáky ujišťovalo ve zvoleném postupu. Celkem jsem tento jev pozorovala u pěti žáků ze všech účastníků experimentu. V průběhu hledání řešení úloh „věž z krychlí“ a „kulisy v divadle“ přemýšleli nahlas všichni tito žáci, naopak u poslední úlohy „truhla s pokladem“ přemýšleli nahlas již jen dva žáci.

V průběhu závěrečného rozhovoru mi žáci odpovídali na kladené otázky velmi srozumitelně. Své postupy práce byli schopni okomentovat a případně posoudit, v čem chybovali, nad čím přemýšleli nebo co jim v řešení úloh pomohlo. Nesetkala jsem se, že by mi nechtěli odpovědět.

9. dílčí cíl: Obtížnost úloh

Sledovat, jakým způsobem formulace zadání úlohy a její pořadí v celé sérii ovlivní obtížnost jednotlivých úloh.

Celá série úloh byla myslím pro žáky přiměřeně náročná, všichni žáci nalezli více řešení u jednotlivých úloh. V hodnocení obtížnosti úloh hrálo velkou roli pořadí zadání celé série. První předloženou úlohu žáci hodnotili 8x jako nejobtížnější a pouze 4x jako nejlehčí. Naopak třetí zadanou úlohu hodnotili celkem 8x jako středně náročnou.

Já sama jsem hodnotila úlohu „věž z krychlí“ jako nejlehčí, protože u ní žáci měli největší možnost využít pomůcky. Úlohu „truhla s pokladem“ jsem naopak považovala jako nejnáročnější, protože jsem jim neumožnila použít žádné pomůcky. Do vlastního hodnocení náročnosti úloh jsem nezahrnovala délku zadání.

Polovina žáků přisoudila nejlehčí obtížnost úloze „věž z krychlí“, hodnotili ji tedy stejně náročnou jako já. Tuto úlohu žáci označili pouze 3x jako nejobtížnější. Z výsledků experimentu vyplynula úloha „kulisy v divadle“ pro polovinu žáků jako nejtěžší. Přisuzuji to nejdelšímu textu zadání úlohy, ve kterém žáci často přehlédli nějakou z podmínek.

10. dílčí cíl: Atraktivnost úloh

Pozorovat, jak je pro žáky atraktivní řešit netradiční úlohy, se kterými se nesetkávají v běžných hodinách matematiky.

Z diskuze po proběhlých experimentech jsem zjistila, že všechny úlohy byly pro žáky velmi atraktivní. S reakcí odmítnutí řešit úlohy jsem se v průběhu experimentu nesetkala. Žákům se líbilo mít před ostatními spolužáky tajemství. Žáci ze školy 2 s krychlemi v běžných hodinách matematiky nepracují a chtěli by je více využívat.

ZÁVĚR

V době, kdy jsem se s matematickou oblastí kombinatoriky setkala poprvé, jsem si její obsah téměř nepropojovala s běžnými životními zkušenostmi. V průběhu studia na vysoké škole jsem si ale uvědomila, jak důležité je žáky seznamovat s úlohami založenými na principech kombinatoriky, protože se s těmito situacemi potkávají v běžném životě již od útlého věku.

V teoretické části práce jsem na základě studia odborné literatury vytvořila souhrn teoretických poznatků o kombinatorice, sledovala jsem míru zastoupení této matematické oblasti v učivu pro 1. stupeň ZŠ. Zjistila jsem, že je velký rozdíl v míře výskytu kombinatorických úloh ve vybraných řadách učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Z učebnicových řad, které jsem prostudovala, vyplynulo, že jedno nakladatelství kombinatorickým úlohám věnuje velmi málo prostoru, druhé o trochu více. Obě nakladatelství mají toto učivo izolované pouze na jedno téma nebo speciální stránky v učebnici a vyskytuje se převážně v 1. období. Nepropojují ho tedy s dalšími oblastmi matematiky. Třetí vybrané nakladatelství věnovalo rozvoji kombinatorického myšlení nejvíce prostoru. Žáci tak mají možnost získávat mnohem více zkušeností, které pro ně nebudou izolované, ale propojené na další získané poznatky.

V průběhu práce všech účastníků experimentu jsem pozorovala jednotlivé fáze řešení úloh, které zmiňují autoři ve svých odborných publikacích. Žáci nejprve museli porozumět zadání úlohy, což obnášelo přečtení celého zadání úlohy a případné otázky na mě jako experimentátora. Kladení otázek mi u některých žáků ukázalo chybu nedostatečné orientace v zadání úlohy. Díky rozhovoru po skončení výzkumu se žáci ohlédli nad svým řešením a interpretovali výsledky a použité strategie.

Cílem praktické části této práce bylo analyzovat řešitelský proces žáků na konci 1. období školní docházky u série tří kombinatorických úloh a porozumět jevům, které tento proces mohou ovlivnit. Pro žáky jsem si připravila 3 různé úlohy založené na stejném principu řešení (typ kombinatorických úloh = permutace bez opakování). Pomocí obměn stanovených parametrů a porovnáním výskytu jednotlivých pozorovaných jevů jsem zjistila, že řešitelský proces nejvíce ovlivňuje pořadí a způsob formulace zadání úlohy. Umožnění pracovat s pomůckami podporuje využití více řešitelských strategií. Systematičnost práce, způsoby kontroly a komunikace v jejím průběhu jsou důležité doplňkové jevy, které souvisejí s individualitou žáků. Výsledky experimentu mi daly odpovědi na stanovená očekávání pro každou připravenou úlohu, díky kterým jsem naplnila všechny cíle své práce.

Díky této práci jsem získala mnoho poznatků, které jistě využiji ve své budoucí praxi, abych dokázala lépe individualizovat výuku a promýšlet zadávání jednotlivých úloh. Analýzou zastoupení kombinatorického učiva v různých učebnicových řadách jsem získala mnoho zdrojů s náměty úloh, které jistě využiji, pokud budu učit podle učebnic, které tolik nerozvíjí kombinatorické myšlení. Ověřila jsem si, že žáci jsou opravdu schopni vyřešit kombinatorické úlohy i bez použití vzorců. Pomocí manipulace a vizualizace v řešení mnoha izomorfních úloh u nich dochází k získávání zkušeností a objevování vztahů, které je vedou ke zobecňování. Tyto poznatky mě samotné na střední škole chyběly, a proto pro mě práce se vzorci byla obtížná.

Zdroje

Citovaná literatura

- BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: Masarykova Univerzita, 1995. ISBN 80-210-0468-1.
- BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ, 2002. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-3022-4.
- DIVÍŠEK, Jiří, 1989. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8 : učitelství pro 1. stupeň základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 8004204333.
- HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.
- HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.
- HEJNÝ, Milan a Anna MICHALCOVÁ, 2001. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum. ISBN 80-8052-085-2.
- HEJNÝ, Milan a Naďa VONDROVÁ. *Číselné představy dětí: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova, 1999. ISBN 80-86039-98-6.
- KOLÁŘ, Zdeněk. *Výkladový slovník z pedagogiky: 583 vybraných hesel*. Praha: Grada, 2012. ISBN 9788024737102.
- LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA, 1999. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Vyd. 1. Praha: Portál. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-205-X.
- PÓLYA, George, 1957. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. 2d ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press. ISBN isbn0-691-08097-6.
- ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2014. ISBN 9788026206446.
- ZORMANOVÁ, Lucie. *Obecná didaktika: pro studium a praxi*. Praha: Grada, 2014. Pedagogika (Grada). ISBN isbn978-80-247-4590-9.

Elektronické zdroje

- PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorika jak ji možná neznáme* [online]. 2008 [cit. 2019-09-19]. Dostupné z: https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/prihonska-mat_pro_praxi1/KOMBINATORIKA-prez.pdf
- SCHOLTZOVÁ, Irena, 2006. *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole - pohľad druhý* [online]. In: . Metodicko-pedagogické centrum Prešov [cit. 2020-02-19].
- STANČÍKOVÁ, Monika. *Kombinatorika - webová učebnice pro žáky středních škol* [online]. Masarykova Univerzita Brno, 2015 [cit. 2019-09-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/ycgxr/web/index.html
- VOGLOVÁ, Zuzana. *Historie kombinatoriky in 27. mezinárodní konference Historie Matematiky* [online]. 2006 [cit. 2019-09-19]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf
- Základy kombinatoriky. *Matematika pro matematické (I JINÉ) třídy FZŠ Brdičkova* [online]. 2012 [cit. 2019-09-12]. Dostupné z: http://matikabrdickova.sweb.cz/soubory_PDF/6/10_Zaklady_kombinatoriky.pdf
- Kombinatorika a pravděpodobnost. *Blog o Hejného metodě* [online]. H-Mat, o.p.s, 2018 [cit. 2019-09-19]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/kombinatorika-pravdepodobnost
- *Matematický klokan 2019* [online]. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, 2019 [cit. 2019-09-26]. ISBN 978-80-244-5551-8. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2019.pdf
- *Matematický klokan 2018* [online]. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, 2018 [cit. 2019-09-26]. ISBN 978-80-244-5411-5. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2018.pdf
- ŽILKOVÁ, Monika. *Kombinatorické hry v školskej matematike* [online]. 2003 [cit. 2019-09-26]. Dostupné z: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Zilkova.pdf

Kurikulární dokumenty

- *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007 [cit. 2019-09-05]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia
- *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha, 2017 [cit. 2019-09-05]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/aktualne-platne-zneni-rvp-zv
- *Interní dokumenty ŠVP vybraných ZŠ*

Učebnice matematiky

- BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 2. Všeň: Alter, 2009. ISBN 978-80-7245-206-4.
- BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 3*. Vydání druhé. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-160-9 (1.díl), ISBN 978-80-7245-161-6 (2. díl).
- BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol*. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-145-6.
- BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 4*. Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-192 (1. díl), ISBN 978-80-7245-193-7 (2. díl).
- CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 8071961477.
- ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-346-0 (1. díl). ISBN 978-80-7235-348-4 (2. díl).
- ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-370-5 (1. díl). ISBN 978-80-7235376-7 (2. díl).
- ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 9788072354054.

- EIBLOVÁ, Ladislava, Jan MELICHAR a Miroslava ŠESTÁKOVÁ. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2016. ISBN 9788072355990.
- HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2007-. ISBN 978-80-7238-626-0 (1. díl). ISBN 978-80-7238-627-7 (2. díl).
- HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7 (1. díl). ISBN 978-80-7238-769-4 (2. díl). ISBN 978-80-7238-982-7 (3. díl).
- HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.
- HEJNÝ, Milan. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 9788072389407.
- HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7.
- JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol*: *Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Havlíčkův Brod: Alter, 2009. ISBN 978-80-7245-154-8.
- JUSTOVÁ, Jaroslava. *Pracovní sešit k učebnici Matematika pro 5. ročník základních škol*. Vyd. 2. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-194-4 (1. díl), ISBN 978-80-7245-156-2 (2. díl)
- POLÁK, Josef, 2008. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-356-1.
- VACKOVÁ, I., FAJFRLÍKOVÁ, L., UZLOVÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN, 2010. ISBN 978-80-7235-471-9.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha 1 - Ukázka ŠVP, škola 1

Výstup předmětu	*Rozpracované výstupy a učivo předmětu*	*Poznámky*
XX. Při řešení problému provede rozbor úlohy (popř. náčrt) a dovede rozhodnout, zda zvolit pro řešení známý vhodný algoritmus nebo řešit úlohu úsudkem. **RVP** **<u>1.období:</u>** **<u>2.období:</u> 27** *M-5-4-01*	*1.ročník* ➢ zakreslí jednoduché slovní úlohy – přidávání, ubírání ➢ graficky znázorní jednoduchý matematický zápis ➢ pokusí se o matematický zápis + sestavení slovní úlohy podle nákresu *2.ročník* ➢ řeší jednoduché slovní úlohy – nákres, slovní vysvětlení postupu, zdůvodní zvoleného početního výkonu ➢ znázorňuje do čtvercové sítě – násobilka ➢ řeší jednoduché logické úlohy – obhajoba *3.ročník* ➢ seznámí se z kombinovanými slovními úlohami – rozbor, matematický zápis, zvolení neznámé ➢ rýsuje podle zadání – (umístění bodů na přímce, polopřímce, úsečce, mimo ně; rýsování úsečky dané délky v mm; přenášení úseček na polopřímku; kružnice, oblouk – střed, poloměr, průměr) - náčrt, rozbor *4.ročník* ➢ konstruuje trojúhelník, čtverec, obdélník, kružnici – zápis, náčrt, rozbor, konstrukce, závěr ➢ slovní úlohy – znázorní situaci vlastním modelem + obhajoba	***Mezipředmětové vztahy*** ČJ- práce s textem ***Průřezová témata*** MED- přesnost sdělení ***Další poznámky***
	➢ pokusí se zobecnit vztahy, zavádět a vyvodit vzorce *5.ročník* ➢ řeší logické a kombinační úlohy – počet řešení, obhajoba ➢ konstrukční úlohy – vzájemná poloha kružnice a přímky, dvou kružnic – zápis, náčrt, rozbor, konstrukce, závěr ➢ vyjádří vzájemné vztahy matematickým zápisem ➢ pochopí význam a zautomatizování používání matematických zápisů ➢ zjišťuje počet možností ➢ využívá pravidelnosti při výpočtech ➢ graficky znázorní vztah mezi zlomkem a desetinným číslem	

Příloha 2 - Ukázka ŠVP, škola 2

Matematika a její aplikace, 3. ročník – 1. období, str. 2

Výstupy	Učivo	Učivo metodou prof. Hejného	Průřez. témata	Poznámky
	• čtení a sestavování tabulky násobků • tabulkové zápisy při řešení slovních úloh	• Výběr objektu jistých vlastností, třídění		
• řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace • popisuje jednoduché závislosti praktického života	• řešení a sestavování slovních úloh s využitím různých početních operací • zápisy do tabulek	• Řešení úloh sémantických a strukturálních • Kombinatorické situace (užití závorky)	OSV č.5 Kreativita OSV č.10 Řešení problémů a rozhodovací dovednosti	
• orientuje se v čase • provádí jednoduché převody jednotek času	• měsíce, dny v týdnu, hodiny, minuty, vteřiny	• Hodiny, kalendář včetně úloh o věku		
• rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa • nachází v realitě jejich reprezentaci	• rovné a křivé čáry • přímka, úsečka, polopřímka, průsečík • čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh • krychle, kvádr, koule (ostatní jako rozšiřující učivo)	• Rovinné útvary • Geoboard a čtverečkovaný papír, mřížový bod • Orientace v rovině v prostředí cyklotras • Krychlové stavby, jejich plány a proces konstrukce krychlové stavby • Parkety • Dřívkové tvary	EV č.27 Vztah člověka k prostředí	
• porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky • rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině • určí délku lomené čáry	• odhad, porovnávání, měření a sestrojování úseček s užitím jednotky mm • převod jednotky délky s užitím měnitele 1000, 100, 10 • odhad délky, vzdálenosti • určování obvodu jednoduchých obrazců součtem jejich stran	• Měření • Obvod a obsah • Střihy na krychle (sítě krychle)		

Příloha 3 – Záznamový arch pro analýzu úlohy „Věž z krychlí“

Pozorovaný jev	Žák 1	Žák 2
Pořadí úlohy		
Počet nalezených řešení		
Jak dlouho žák úlohu řešil?		
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?		
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?		
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?		
Využil žák připravené pomůcky?		
Hledá žák řešení samostatně?		
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?		
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)		
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?		
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?		
Zakresluje postavenou věž ihned?		
Postaví nejprve více věží najednou a pak je zakreslí?		
Zakresluje žák věž po jednotlivých barvách?		
Zakresluje žák řešení po jednotlivých věžích (střídá barvy?)		
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Má žák systém v hledání řešení?		
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?		
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?		
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?		
Další poznatky:		

Příloha 4 - Záznamový arch pro analýzu úlohy „Kulisy v divadle“

Pozorovaný jev	Žák 1	Žák 2
Pořadí úlohy		
Počet nalezených řešení		
Jak dlouho žák úlohu řešil?		
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?		
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?		
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?		
Využil žák připravené pomůcky?		
Hledá žák řešení samostatně?		
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?		
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)		
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?		
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?		
Zakresluje nalezené rozmístění kulis ihned?		
Postaví nejprve více rozmístění kulis najednou a pak je zakreslí?		
Zakresluje žák řešení po jednotlivých jevištích?		
Zakresluje žák řešení po jednotlivých kulisách (stejnou kulisu vždy umístí na jiné místo)?		
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Má žák systém v hledání řešení?		
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?		
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?		
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?		
Další poznatky:		

Příloha 5 - Záznamový arch pro analýzu úlohy „Truhla s pokladem“

Pozorovaný jev	**Žák 1**	**Žák 2**
Pořadí úlohy		
Počet nalezených řešení		
Jak dlouho žák úlohu řešil?		
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?		
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?		
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?		
Využil žák připravené pomůcky?		
Hledá žák řešení samostatně?		
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?		
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)		
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?		
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?		
Zakresluje nalezené řešení ihned?		
Zapisuje žák kódy po jednotlivých číslech na různé linky?		
Zapisuje žák řešení po jednotlivých linkách (střídá čísla?)		
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Má žák systém v hledání řešení?		
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?		
Lákalo žáka otevírat reálný zámek?		
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?		
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?		
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?		
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?		
Další poznatky:		

Příloha 6 – Vyplněný záznamový arch pro analýzu úlohy „Věž z krychlí“

	1. dvojice žáků		2. dvojice žáků		3. dvojice žáků		4. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	**ZŠ 1 - ŽÁK 1**	**ZŠ 1 - ŽÁK 2**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 1**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 2**	**ZŠ 1 - ŽÁK 3**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 3**	**ZŠ 1 - ŽÁK 4**	**ZŠ 1 - ŽÁK 5**
Pořadí úlohy	1	1	3	3	1	1	2	2
Počet nalezených řešení	6	6	5	4	5 (zakreslil, postavených měl ale 6	6	6	6
Jak dlouho žák úlohu řešil?	6 min 20s	4 min 5s	3 min 50s	2 min 35s	8min 55s	11min 30s	2 min 15s	3 min 25s
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?	Ne	Ano - déle přemýšlel, zda nemá úloha více řešení	Ne	Ne - nechala prázdné	Ne - zapisoval na čistý papír	Ne - zapisovala na čistý papír	Ne	Ne
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano, ale na mé upozornění si ho musel přečíst 2x	Ano, sám si ho přečetl 2x	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano, ale potřeboval si ho říct nahlas ústně
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	Můžu v jedné věži opakovat stejnou barvu?	Nic	Nic	Nic	Nic	Nic	Nic	MBČ-ČBM to může být nebo ne? B nesmí být 2x na stejném místě?
Využil žák připravené pomůcky?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano, ale pouze chvilku, pak už jen kreslil	Ano
Hledá žák řešení samostatně?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano, po upozornění spolužáka odhalila stejné postavené věže	Ano	Ano
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano - často řeší i věci, kteér se výzkumu netýkají (např. co se děje ve třídě)	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano, komentuje to	Ano, pochopil jsem to tak, že když dám B doprostřed, pak ji už nemůžu použít takto znovu
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ano - často očima kouká ke spolužákovi, ale úlohu řeší samostatně	Ne	Ne	Ne	Ne, ale když začal zakreslovat, podíval se ke spolužaččce a upozornil ji na stejná řešení	Ne	Ne	Ne
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ne - další řešení není, protože už nemá další krychle	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne - jendo nalezené řešení zapsal špatně (nakreslil si čtyř podlažní věž)	Ano	Ano	Ano
Zakresluje postavenou věž ihned?	Ne	Ne	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano, ale nepotřebuje stavět	Ano
Postaví nejprve více věží najednou a pak je zakreslí?	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano	Ano	Ne - nepotřebuje kreslit	Ne
Zakresluje žák věž po jednotlivých barvách?	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zakresluje žák věž po jednotlivých věžích (střídá barvy)?	Ne	Ne	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ne	Ano - zda zakreslil vechna postavená řešení (počítá si to)	Ano - pouze pohledem	Ano - pouze pohledem	Ano - vzal si krychle na sedmou věž a kontroloval, zda už má nalezené řešení postavené	Ano - zakreslenou věž ihned zboří	Ne - odhlalil strategii a ví kolik má úloha řešení	Ne
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne, úloha byla pro něj první	Ne, úloha byla pro něj první	Ne	Ne	Ne - úloha pro něj byla první	Ne - úloha pro ni byla první	Ne, ale přivedlo ho to na odhalení strategie	Ne
Má žák systém v hledání řešení?	Ne	Ano,Jednu barvu krychle umístil a věděl, že když zbylé dvě barvy prohodí, bude mít všechna řešení	Ne	postaví - zakreslí - překlopí	Ano - postaví věž, další řešení v ruce přetočí	Nalezená řešení si postavila vedle sebe do jedné řady	Ano - zakresluje bílou krychli na stejné místo do dvou věží	Ano částečně - odhalil, že další řešení najde přehozením dvou krychlí v jedné věži
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne	Ano	Ne	Ano, ale nedovede jí popsat	Ne	Ne	Ano	Ano, ale nedovede ji popsat
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne, ale přideslo ho to k návratu k divadlu	Ne
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	Nejtěžší	Nejtěžší (neznal strategii)	střední	střední (stejně jako truhla)	Nejlehčí - mám dostatek krychlí	Nejlehčí - mám dostatek krychlí	Všechny úlohy na stejném principu, tato nejlehčí	střední
Další poznatky:						Problém se zakreslením bílé barvy (nakonec využila obyčejnou tužku), zakreslila pouze jeden čtvereček a do něj nad sebe jednotlivé barvy.		Vypadá to pro něj těžce - po zakreslení 3 věží mu došlo, jak měl pochopit zadání -> nalezení zbylých řešení bez potřeby stavět

	5. dvojice žáků		6. dvojice žáků		7. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 1**	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 2**	**ZŠ 2 - ŽÁK 1**	**ZŠ 2 - ŽÁK 2**	**ZŠ 2 - ŽÁK 3**	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 3**
Pořadí úlohy	1	1	2	2	1	1
Počet nalezených řešení	6	6	5+1	5+1	3	3+3
Jak dlouho žák úlohu řešil?	7 min 15s	7 min 45s	3 min 15s	3 min 2s	6 min 15s	5min 35s
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?	Ano - dlouho přemýšlela, zda nemá úloha více řešení	Ano - dlouho přemýšlela, zda nemá úloha více řešení	Ano - po rozboru úlohy potřeboval doplnit jednu věž	Ano - po rozboru úlohy potřeboval doplnit jednu věž	Ne	Ne
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano, ale na mé upozornění si ho musela přečíst 2x	Ano	Ano	Ano	Ano - ale až po mém ujasnění	Ano
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	Jak má zakreslovat?	Nic	Nic	Jak má tuto úlohu zapsat - má také použít nějaké zkratky?	Musíme vybarvit všechny, nebo jen pár? Žádná barva se ve věži nesmí opakovat	Jak vybarvit bílou? Žádná barva se ve věžinesmí opakovat
Využil žák připravené pomůcky?	Ano - pouze chvilku, pak zapisovala řešení bez stavění	Ano	Ano	Ne - nepotřeboval stavět	Ano	Ano
Hledá žák řešení samostatně?	Často se ujišťuje	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano - ujišťuje se, že řeší správně	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Zakresluje postavenou věž ihned?	Postavila 1, další už pak jen kreslila	Ano	Ano	Ano, ale nepotřebuje stavět	Ano, ale nepotřebuje stavět	Ano, ale nepotřebuje stavět
Postaví nejprve více věží najednou a pak je zakreslí?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zakresluje žák věž po jednotlivých barvách?	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ano
Zakresluje žák věž po jednotlivých věžích (střídá barvy)?	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ne
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ano - zakreslila věže bez stavění, pro kontrolu si je postavila a srovnala do jedné řady	Ano	Ne	Ne	Ne	Ano - pohledem porovnává řešení
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne - úloha pro ní byla první	Ne - úloha pro ní byla první	Ne	Ano - postupuje podobně jako u kulis	Ne - úloha pro něj byla první	Ne - úloha pro ní byla první
Má žák systém v hledání řešení?	Ne	Rovná si věže vedle sebe, ale krychle umisťuje náhodně	Ne	Ano - nejprve si vždy zapsal jednu barvu krychle do dvou věží na stejnou pozici	Ne	Vybarvuje nejprve červené a umisťuje je do každé věže na jinou pozici
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ano	Ano	Ano - připsal řešení po rozboru úlohy	Ano - připsal řešení po rozboru úlohy	Ne	Ano, po tom co jí odemknutí reálného zámku přiveslo na další řešení truhly
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ano - po rozboru úlohy	Ano - po rozboru úlohy	Ne	Ano
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	Nejtěžší - více připravených prázdných věží	Nejtěžší	Nejlehčí	Nejlehčí - máme velkou pomůcku	Nejlehčí - možnost hrát si	Nejlehčí - možnost hrát si
Další poznatky:	Postavila 1 věž, nekreslila 4 věže, pak začala stavět, postavila nové 2 řešení a postupně je kreslila, má 6 řešení a chce hledat další	5 řešení,nad 6 přemýšlela	Jako první nevybarvoval ale krychle zapisoval písmeny. Zakresloval jinak než stavěl (i když měl jednu sadu krychlí)	Jako první nevybarvoval ale krychle zapisoval písmeny.	Pracovní list 5 - nejprve nechtěl využít žádné krychle a vybarvil pouze spodní kr. červeně, v průběhu řešení úlohy se rozhodl používat krychle, ale nestavěl si z nich	Zvolila si pracovní list 8 a plnou krabičku krychlí, ale na stole měla jen 3 krychle.

Příloha 7 – Vyplněný záznamový arch pro analýzu úlohy „Kulisy v divadle“

	1. dvojice žáků		2. dvojice žáků		3. dvojice žáků		4. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	ZŠ 1 - ŽÁK 1	ZŠ 1 - ŽÁK 2	ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 1	ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 2	ZŠ 1 - ŽÁK 3	ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 3	ZŠ 1 - ŽÁK 4	ZŠ 1 - ŽÁK 5
Pořadí úlohy	2	2	1	1	3	3	1	1
Počet nalezených řešení	6	6	6	6	5	5	4+2	1
Jak dlouho žák úlohu řešil?	4 min 50s	2 min 40s	4min 30s	4 min	2min 45s	2 min 50 s	3 min 50s + 1 min	2 min 5s
Ovlivnil počet předkreslených jevišť počet řešení úlohy?	Ne	Ne	Ne	Ano - ptala se, zda musí využít všechny pole	Ano - nenašel všechna řešení	Ano - nenašla všechna řešení	Ne - zapisoval na čistý papír	Ne - zapisoval na čistý papír
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano, po ujasnění	Ano	Ano částečně	Ano	Myslel si, že ano. Úlohu řešil správně až po mém upozornění	Ano	Ano	Částečně
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	Co je to kulisa? TO mám kreslit obrázky jo?	Nic	Nevěděla, zda má kulisy umisťovat i na plochu sedadel	Nic	Nejprve umístil jednotlivé kulisy pouze na prostřední stěnu jeviště	Nic	Nic	Jak mám zapsat orzmístění kulis? (mohu třeba podle tohodle modelu?)
Využil žák připravené pomůcky?	Ne	Ne - nepotřeboval vůbec kulisy stavět před sebe	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne - pouze 1 sadu kulis	Ne - pouze 1 sadu kulis
Hledá žák řešení samostatně?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ano
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ne - spolužák úlohu dořešil dříve, jinak by se asi k němu díval	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - podíval se, jak má zakreslovat
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ne	Ne	Ne	Ano - zda musí využít všechny připravené pole pro zakreslení	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano - sám si v průběhu vlastní chybu opravil (gumovací pero)	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Zakresluje nalezené rozmístění kulis ihned?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Postaví si nejprve více	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zakresluje žák řešení po jednotlivých jevištích?	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano	Ano	Ano	Ano
Zakresluje žák řešení po jednotlivých kulisách (stejnou kulisu vždy umístí na jiné místo)?	Ne	Ne	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ne	Ne	Ano - pohledem zda už nemá řešení zakreslené	Ano - pohledem zda už nemá řešení zakreslené	Ne	Ne	Ano - odhalil strategii a doplnil počet řešení	Ne
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne	Ano	Ne - úloha byla první	Ne - úloha byla první	Ne	Ne	Ano - úloha sice nebyla první, ale vrátil se k ní	Ne
Má žák systém v hledání řešení?	Ne	Ano - zapisoval vždystejnou kulisu ve dvou jevištích na stejnou pozici	Ano - jednu kulisu vždy zapsala vlevo do dvou jevišť	Ano - kulisu R má vždy ve dvou řešeních pod sebou na stejném místě	Ne	Ne	Ne, ale když se k úloze vrátil, už znal strategii.	Ne
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne	Ne - už ji znal z předchozí úlohy	Ne, ale byla k tomu blízko	Ano, ale nedokázala to popsat	Ne	Ne	Ne	Ne
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - v průběhu řešení druhé úlohy	Ne
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - přidal dvě řešení	Ne
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	střední	Střední	těžká	těžká - dlouhé zadání, hodně podmínek	těžká	střední	Všechny úlohy na stejném principu, tato střední	lehká
Další poznatky:	Zajímá se o další úlohu, když jsem spolužákovi předložila opravdový zámek (zrychlil svoji práci)			Připravené pomůcky vypadaly jinak než obrázky v pracovním listu, proto mě nenutilo to použít (před sebou měla 2D plán, v pracovním listu 3D model jeviště)			Pro ujasnění zadání si obrázky kulis poskládal na 2D plán jeviště	Jako jediný řešení této úlohy zapsal pomocí písmene a malého obrázku. Kulisy rozmístil logicky. I přesto, že věděl, že úloha může mít více řešení, už další dopsat nechtěl

	5. dvojice žáků		6. dvojice žáků		7. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 1	ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 2	ZŠ 2 - ŽÁK 1	ZŠ 2 - ŽÁK 2	ZŠ 2 - ŽÁK 3	ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 3
Pořadí úlohy	2	2	1	1	3	3
Počet nalezených řešení	6	6	3+3	6	0+5	3+3
Jak dlouho žák úlohu řešil?	3 min 55s	2 min 35s	2 min 25s	3 min 45s	4 min	4 min 15s
Ovlivnil počet předkreslených jevišť počet řešení úlohy?	Ne	Ne	Ne - nevyplněná pole ho netrápila	Ne	Ano - vyplnil všechna pole, ale pouze jednou kulisou (PL 8)	Ne - nechala klidně prázdné
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano, ale až po opakovaném ujištění	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano, po ujasnění
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	Kam dávat obrázky? Mám psát jen písmena? Nesmím opakovat rozmístění stejně?	Nic	Co je kulisa?	To máme kreslit?, Mám zaplnit všechna připravená jeviště?	Nic	Co je kulisa, jak to mám na ten model?
Využil žák připravené pomůcky?	Ano	Ano	Ne	Potřeboval si složit 2D plán na 3D model, kulisy do něj ale nerozmisťoval	1.ř. postavil, ale ani ho nezakreslil	1. ř si vymodelovala, další už ne
Hledá žák řešení samostatně?	Ano - až po ujištění	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Zakresluje nalezené rozmístění kulis ihned?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Postaví si nejprve více rozmístění kulis najednou a pak je zakreslí?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zakresluje žák řešení po jednotlivých jevištích?	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano
Zakresluje žák řešení po jednotlivých kulisách (stejnou kulisu vždy umístí na jiné místo)?	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - pohledem
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne	Ne	Ne - úloha byla první	Ne - úloha byla první	Ne	Ne
Má žák systém v hledání řešení?	Ano - v jevištích pod sebou jsou vždy stejné kulisy uprostřed	Ne	Ne	Ano - v řešeních pod sebou má stejné kulisy vždy uprostřed	Ne	Ne - ale po vyřešení truhly věděla, že má kulisy pouze prohzovat
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne, ale byla k tomu blízko	Ne	Ne	Ano, ale zatím ji nedovedl popsat	Ne	Ano
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ano - po rozboru úloh	Ano	Ano - po rozhovoru	Ano, po tom co jí odemknutí reálného zámku přiveslo na další řešení truhly
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ano, po rozboru úloh doplnil řešení	Ne	Ano - po rozhovoru doplnil kulisy na všechny tři stěny jeviště	Ano
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	Nejlehčí - rychle pochopila	Střední - déle trvalo porozumění zadání	Těžká - vadilo mi několik volných polí	Nejtěžší	těžká	střední
Další poznatky:	Dám první les - podle abecedy, rychle ukončila, když jsem řekla motivaci k poslední úloze, upozornila jsem ní na nutnost umístit všechny 3 kulisy do 1 jeviště		Nalezl pouze 3 řešení - myslel, že se nemůže stejná kulisa opakovat na stejném místě	Pomohla mu pomůcka pro lepší představivost přechodu mezi 2D a 3D geometrií, neviděl hned 3D model	Zvolil si PL8, nejprve neumístil všechny kulisy do jeviště, ale každou pouze na 1 stěnu	Nejprve si vzala PL8, v průběhu rozhovoru stále nebyla přesvědčena pouze o 6 řešeních, proto si vzala PL8 a hledala dál. Nic ale nenašla.Nechtěla sama zakreslit poslední nalezené řešení

Příloha 8 – Vyplněný záznamový arch pro analýzu úlohy „Truhla s pokladem“

	1. dvojice žáků		2. dvojice žáků		3. dvojice žáků		4. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	**ZŠ 1 - ŽÁK 1**	**ZŠ 1 - ŽÁK 2**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 1**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 2**	**ZŠ 1 - ŽÁK 3**	**ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 3**	**ZŠ 1 - ŽÁK 4**	**ZŠ 1 - ŽÁK 5**
Pořadí úlohy	3	3	2	2	2	2	3	3
Počet nalezených řešení	5	6	6	6	5	5	6	6
Jak dlouho žák úlohu řešil?	2 min	1 min 25s	2 min 30s	3 min 20s	3 min 20s	3 min 50s	1 min 30s	3 min
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?	Ano	Ne - potřeboval si doplnit linku	Ne - zapisuje na čistý papír	Ne - zapisuje na čistý papír	Ne	Ne	Ano - chvíli déle přemýšlel, zda úloha nemá ještě nějaké řešení	Ne
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano - s drobným upřesněním	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	zda může použít kód 125, který je napsán v zadání	Nic	Nic	Nic	Nic	Nemusí být použita jedna číslice? Můžu udělat třeba kód 122?	Nic	Nic
Hledá žák řešení samostatně?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano	Ne	Ne	Ne	Ano - říká si čísla	Ne	Ne	Ne
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ne - spolužák úlohu dořešil dříve, jinak by se asi k němu díval	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ne	Částečně - zeptal se, zda si může dopsat linku	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Zapisuje nalezené řešení ihned?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Zapisuje žák kódy po jednotlivých číslech na různé linky?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - vždy nejprve zapíše číslo 1	Ne
Zapisuje žák řešení po jednotlivých linkách (střídá čísla)?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ne	Ne -víky odhalené strategii jasně věděl, že už má všechna řešení	Ano - prohlíží si, zdajsou řešení odlišná	Ano - prohlíží si, zdajsou řešení odlišná	Ano - říká si čísla nahlas	Ne	Ne - znal strategii, proto věděl, kolik mmá úloha celkem řešení	Ne
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne	Ano - již znal strategii	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano - znal strategii a postupoval stejně	Ne
Má žák systém v hledání řešení?	Ne	Ano - postupoval stejně jako v předchozích úlohách	Ne	Ano, postupovala podobně jao u předchozí plohy	Ne	Ne	Ano - Vždy nejprve zapíše číslo 1	Ne
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne	Ne - už ji znal z předchozí úlohy	Ne	Ne - znala ji z předchozí úlohy	Ne	Ne	Ne - znal ji z předchozí úlohy	Ne
Lákalo žáka otevírat reálný zámek?	Ano - urychlil kvůli tomu svoji práci, zámek chtěl odemykat 2x	Ano, rozčiloval se, když mu žámek nešel otevřít	Ne - neměla k dispozici	Ne - neměla k dispozici	Ano	Ano	Neměl k dispozici	Neměl k dispozici
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	Nejlehčí - má nejméně linek pro řešení	nejlehčí	nejlehčí	nejlehčí - baví mě kombinovat čísla	střední	těžká - kvůli vkládání kódu do reálného zámku	vVšecny úlohy byly stejně těžké	Nejtěžší, protože zde byly linky navíc
Další poznatky:					Úlohy jsou podobné pohádkovou motivací	Úlohy jsou podobné pohádkovou motivací, sama si zkusila zakreslit 3D model jeviště, ale moc se to nepodařilo		Neodhalil strategii, ale věděl, že úlohy mají více řešení.

	5. dvojice žáků		6. dvojice žáků		7. dvojice žáků	
Pozorovaný jev / kód žáka	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 1**	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 2**	**ZŠ 2 - ŽÁK 1**	**ZŠ 2 - ŽÁK 2**	**ZŠ 2 - ŽÁK 3**	**ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 3**
Pořadí úlohy	3	3	3	3	2	2
Počet nalezených řešení	5+1	5+1	6	6	3+1	3+3
Jak dlouho žák úlohu řešil?	4 min	2 min 5s	3 min 30s	1 min 45s	1 min 25s	1 min 45s
Ovlivnil počet předkreslených věží počet řešení úlohy?	Ano - chybělo jí jedno řešení	Ano - chybělo jí jedno řešení	Ano - dlouho přemýšlel	Ne - zapisoval na čistý papír	Ano - ptal se, zda musí vyplnit vše (nejprve měl jen 3 řešení a 6 linek na PL)	Ano, potřebovala si dopsat linku (na PL jich měla pouze 5)
Pochopil žák zadání z jeho slovní formulace?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Co žák potřeboval ujasnit v zadání úlohy ústně?	Nic	Nic	Nic	Nic	Nic	Nic
Hledá žák řešení samostatně?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano, ale často se potřebuje ujišťovat
Potřebuje žák při hledání řešení přemýšlet nahlas?	Ano -často se potřebuje ujišťovat	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Potřebuje žák pro hledání řešení koukat ke spolužákovi (Inspirovat se?)	Ne	Ne	Ne - ale řešení úkolů bere trochu jako soutěž, kdo bude rychlejší	Ne - ale řešení úkolů bere trochu jako soutěž, kdo bude rychlejší	Ne	Ne
Potřebuje se žák ujistit u vedoucího výzkumu, zda nalezl všechna řešení?	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Zapsal žák pouze jedinečná řešení?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Zapisuje nalezené řešení ihned?	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Zapisuje žák kódy po jednotlivých číslech na různé linky?	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ano
Zapisuje žák řešení po jednotlivých linkách (střídá čísla)?	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ne
Kontroluje si žák nějak nalezená řešení?	Ano - pohledem	Ano - pohledem	Ne	Ano	Ne	Ano - po návratu k úloze
Využil žák při řešení této úlohy poznatky z předchozích úloh?	Ne	Ne	Ne	Ano - zapisoval čísla jako u krychlí barvy	Ne	Ne - nalezení dalšího řešení ovlivnil reálný zámek. Tento poznatek způsobil návrat k předchozím úlohám a doplnění řešení
Má žák systém v hledání řešení?	Ne	Ano	Ano	Ano - nejprve psal vždy prostřední číslo	Ne	Ano - zapisuje nejprve číslo 1 na první linku, pak na druhou linku a pak na poslední linku
Odhalil žák strategii pro hledání řešení?	Ne	Ne	Ne	Ne - znal ji z předchozí úlohy, ale nedokázal ji přesně popsat	Ne	Ano - s pomocí truhly. Dobře ji dokázala vysvětlit
Lákalo žáka otevírat reálný zámek?	V tomto výzkumu bylo přemýšlení a hledání dalších řešení silnější než otvírání zámku		Ne - neměl k dispozici	Ne - neměl k dispozici	Ano	Ano
Vrátil se žák k řešení této úlohy, po vyřešení celé série úloh?	Ano po tom, co jsem jim prozradila celkový počet řešení	Ano po tom, co jsem jim prozradila celkový počet řešení	Ne	Ne	Ano - po vložení jiného kódu do zámku, než který měl napsaný	Ano - po vložení jiného kódu do zámku, než který měla napsaný
Upravil žák počet řešení po vyřešení celé série úloh?	Ano - zjistila, že si může připsat linku	Ano - zjistila, že si může připsat linku	Ne	Ne	Ano - přisal 3 další řešení, ale pouze 1 z nich bylo nové	Ano doplnila chybějící 3 řešení
Jak žák hodnotí tuto úlohu z hlediska obtížnosti?	střední	nejlehčí	střední	střední	střední	těžká - kvůli tomu zámku
Další poznatky:				Hodně řešil, proč má spolužák k této úloze pracovní list	zámek otevřel, ale na pracovním listu nakonec správný kód zapsaný neměl	

Příloha 9 – Formulář pro rodiče žáků – informovaný souhlas s účastí žáka v experimentu

Vážení rodiče,

Třídu, kterou navštěvuje Váš syn/dcera si vybrala studentka pedagogické fakulty UK Lenka Tomešová k výzkumnému šetření ke své diplomové práci s tématem Analýza řešitelských procesů kombinatorických úloh u žáků na konci 1. období raně školního věku.

Realizaci potřebuje zdokumentovat (videozáznam, uchování pracovních listů žáků pro následnou analýzu). Proto Vás žádám o **souhlas s účastí** Vašeho syna/dcery **při výzkumném šetření a jeho dokumentováním.**

Plánovaná obhajoba práce je na jaře 2020. Veškeré záznamy budou pro dokončení práce smazány, v textu práce nebude možnost identifikovat Vašeho syna/dceru jménem. Studentka umožní rodičům nahlédnout do výsledného textu práce na vyžádání.

Výzkumné šetření proběhne během listopadu 2019, účastnit se ho bude více žáků této třídy. Výzkumné šetření nijak neovlivní hodnocení Vašeho syna/ dcery v předmětu Matematika.

Předem děkuji za spolupráci,

Lenka Tomešová

V případě potřeby mě kontaktujte: lenulka.tomesova@atlas.cz

Souhlasím s účastí syna/dcery při výzkumném šetření k diplomové práci Lenky Tomešové.

JMÉNO ŽÁKA: ....

V ………………………………………….. dne ....

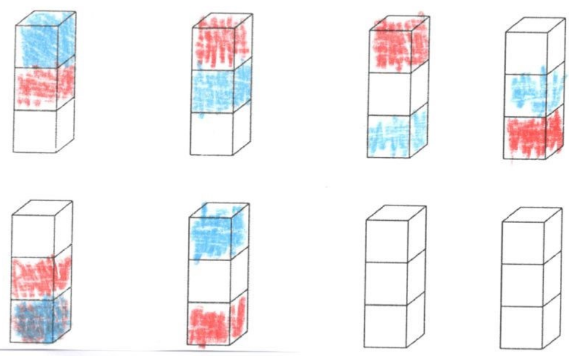
Podpis zákonného zástupce: ....

Příloha č. 10 – Záznamy žákovských řešení

ZŠ1 - ŽÁK 1

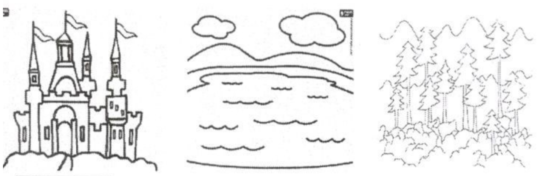
POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

1.

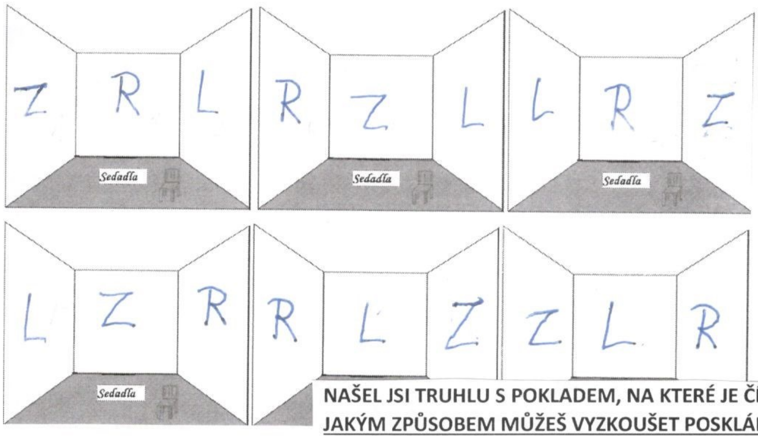


DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
ŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
IA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
IAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
VÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ."

2.

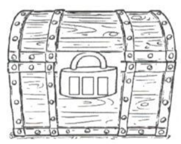


ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT
ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.



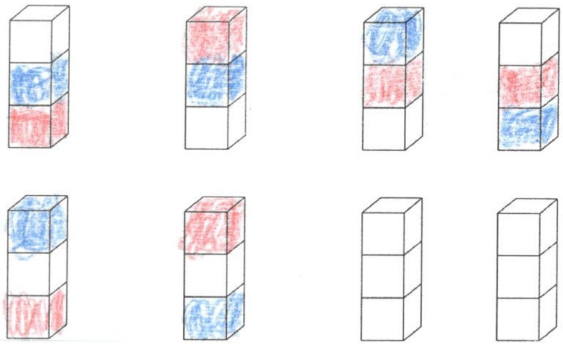
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1 5 2   1 2 5
2 5 1   5 1 2
5 2 1

ZŠ1 - ŽÁK 2

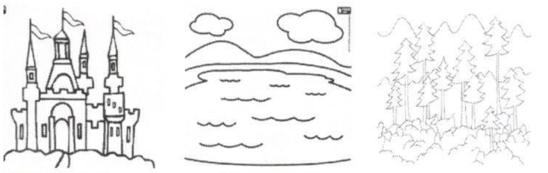
POSTAV VEZ ZE TRI KOSTEK (CERVENA, MODRA, BILA), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

1.



' DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
ŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
IA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
IAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
VÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.“

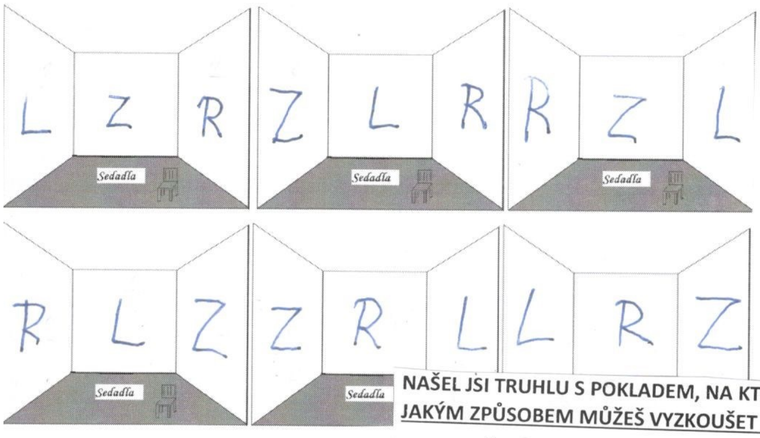
2.



ZÁMEK = Z

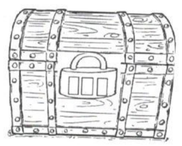
RYBNÍK = R

LES = L



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT
ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

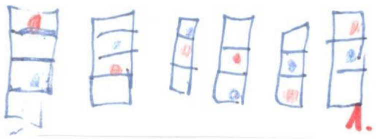
3.



ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

5 2 1   1 2 5
5 1 2   2 1 5
1 5 2   2 5 1

ŽÁK 3 - ZŠ 1

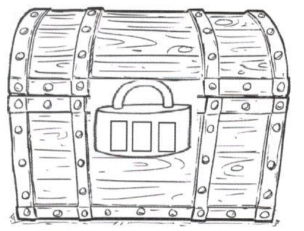


1.

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERE JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

2.



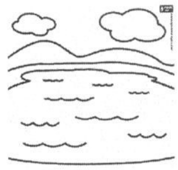
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

2 5 1 5 1 2
5 2 1
2 1 5
1 5 2

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.“

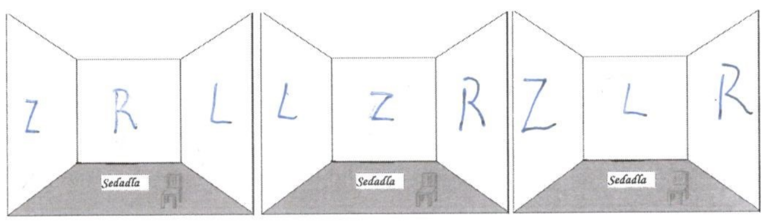
3.

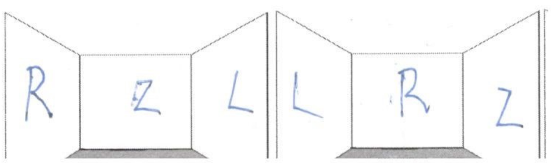
ZÁMEK = Z



RYBNÍK = R

LES = L





ZŠ1 - ŽÁK 4

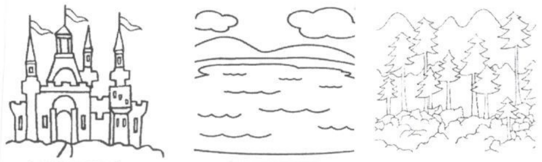
V DIVADLE HRAJI POHADKU ZLATOVLASKA.

<u>PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.</u>

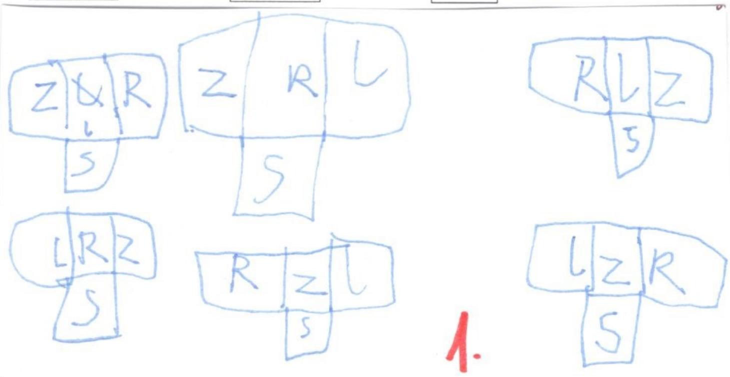
<u>NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.</u>

NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?

SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ."



ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L



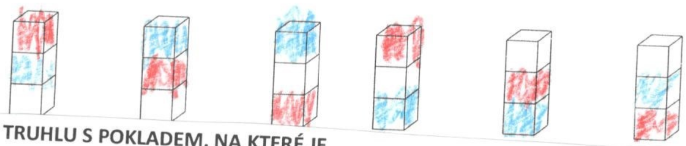
1.

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.

<u>ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.</u>

NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

2.

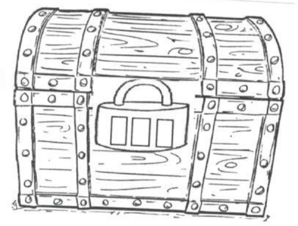


NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.

<u>JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?</u>

ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.



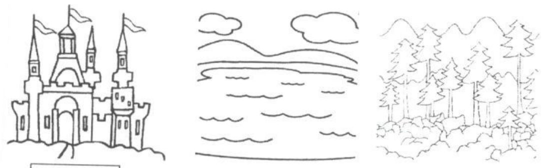
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1 2 5	2 5 1
1 5 2	5 2 1
2 1 5	___ ___ ___
5 1 2	___ ___ ___

ZŠ1- ŽÁK 5

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.“

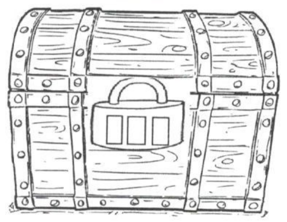
1.



ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L

NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.

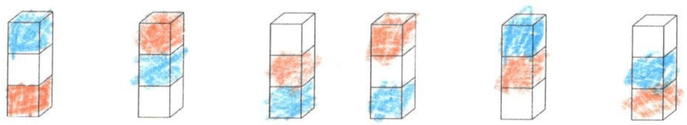


ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1, 2, 5,   5, 2, 1,
2, 5, 1,   2, 1, 5,
5, 1, 2,   __ __ __
1, 5, 2,   __ __ __

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

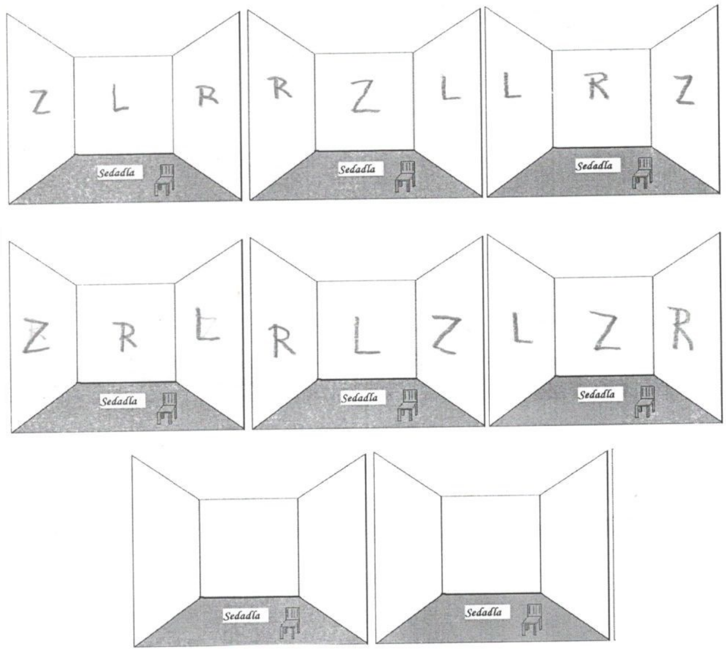
2.



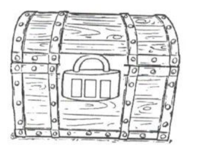
ZŠ 1 – ŽÁKYNĚ 1

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.

1.



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT
ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.



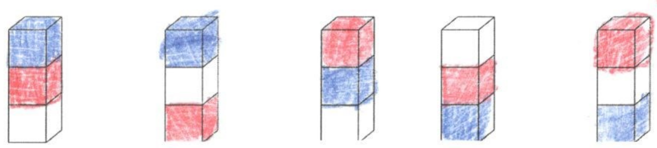
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1/2/3 2/5/1 5/2/1 5/1/2 1/5/2 2/1/5

2.

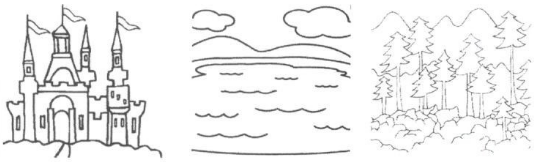
POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT
KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

3.

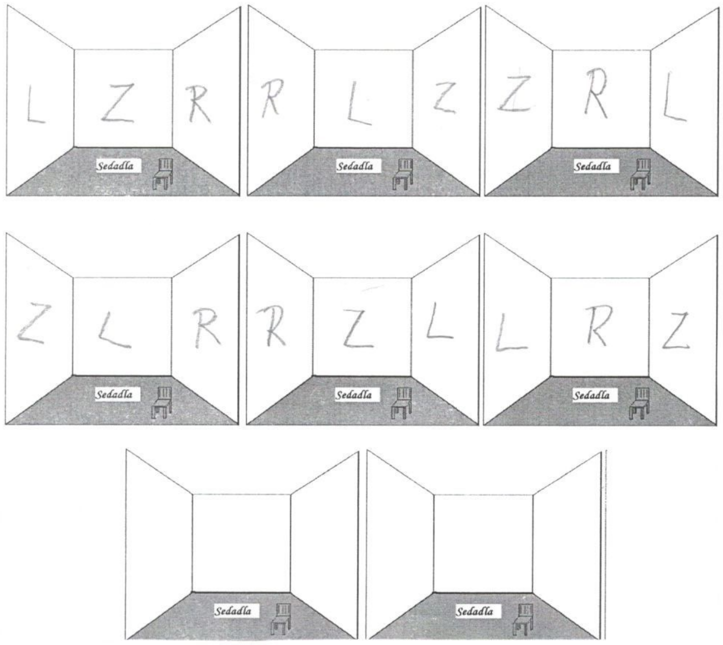


ZŠ 1 - ŽÁKYNĚ 2

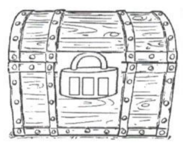
V DIVADLE HRAJI POHADKU ZLATOVLASKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA. **1.**
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.



ZÁMEK = Z RYBNÍK = R LES = L



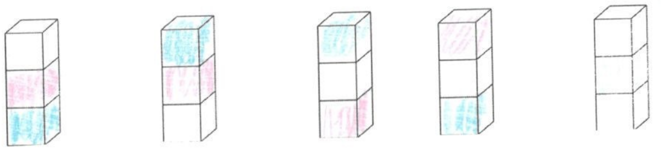
NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT
ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.



ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

2|5|1 5|1|2 2|1|5 5|2|1 1|5|2 **2.** 1|2|5

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT
KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ. **3.**



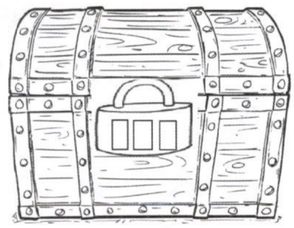
ZŠ 1- ŽÁKYNĚ 3

1.

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

2.



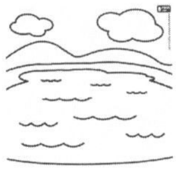
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

2	1	5		5	1	2
5	2	1		2	5	1
1	5	2		___	___	___
1	2	5		___	___	___

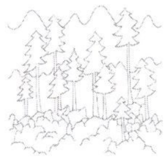
V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ."

3.

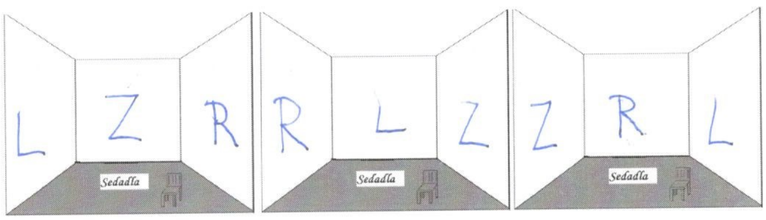
ZÁMEK = Z

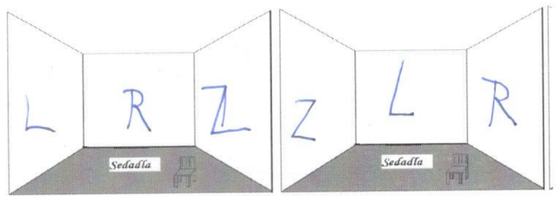


RYBNÍK = R



LES = L

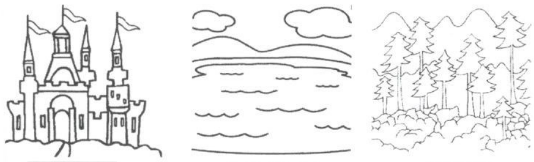




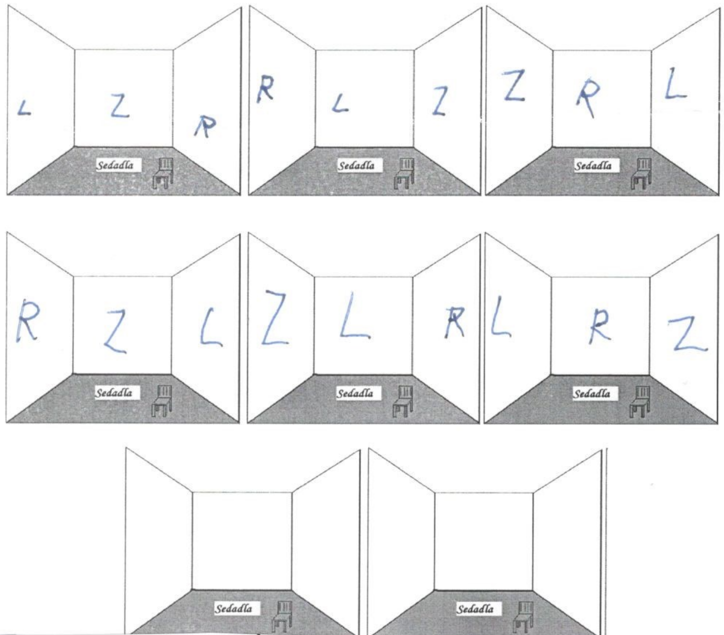
ZŠ 2 - ŽÁK 1

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.

1.

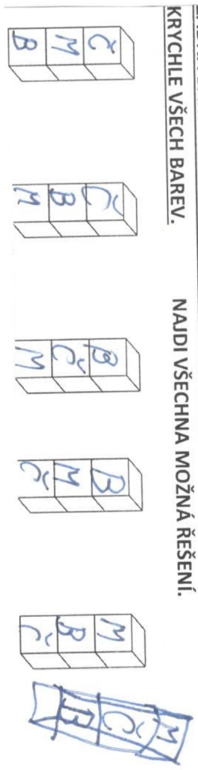


ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L



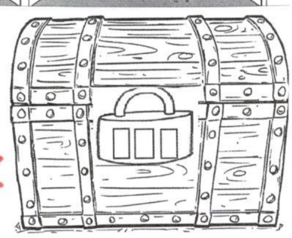
POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

2.



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.



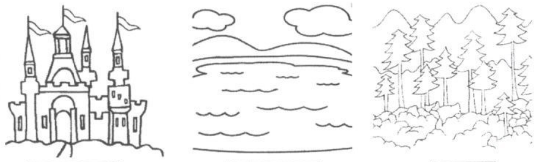
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1 2 5	1 5 2
5 2 1	5 1 2
2 1 5	___ ___ ___
2 5 1	___ ___ ___

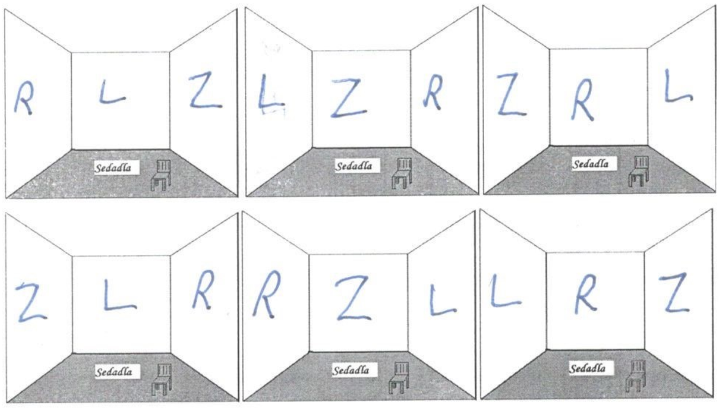
ZŠ 2 - ŽÁK 2

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.

1.

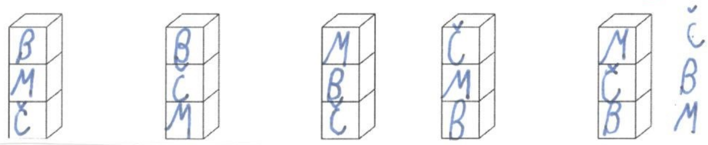


ZÁMEK = Z | RYBNÍK = R | LES = L



POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

2.



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

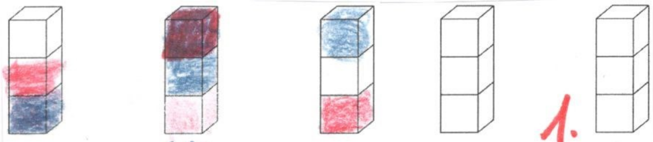
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

125
215
251
521
512
152

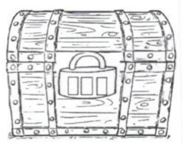
3.

ZŠ 2 - ŽÁK 3

POSTAV VEZ ZE TRI KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽ! NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV. **NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.**



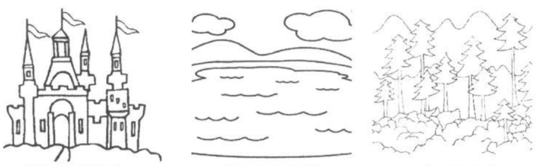
NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE 1, 2, 5 DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.



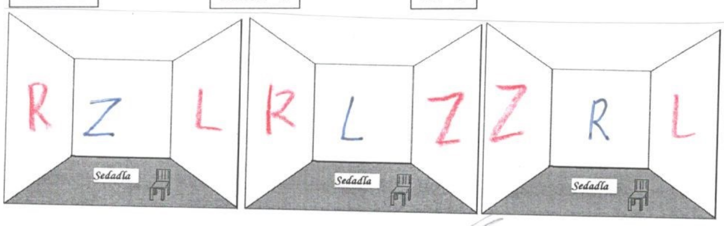
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

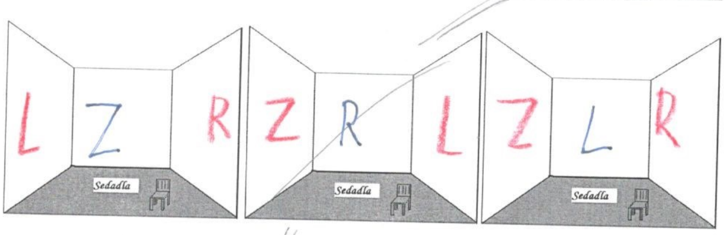
1 2 5   5 2 1
5 1 2   5 1 2
2 5 1 2. 1 2 5

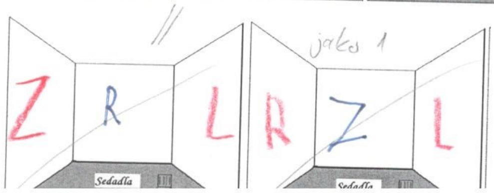
V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.“



ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L



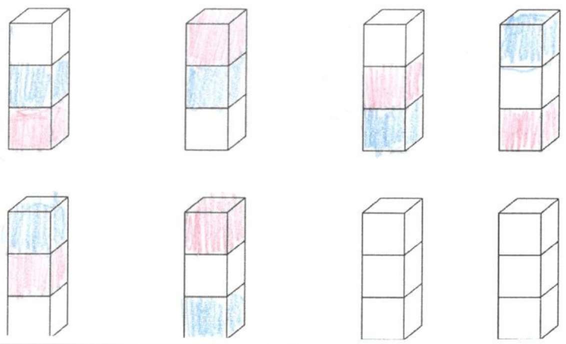




ZŠ 2 -ŽÁKYNĚ 1

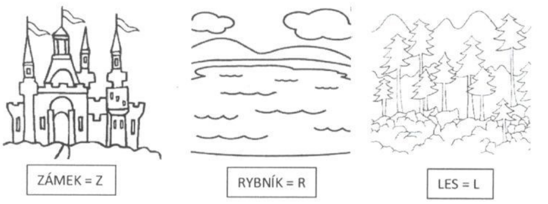
POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

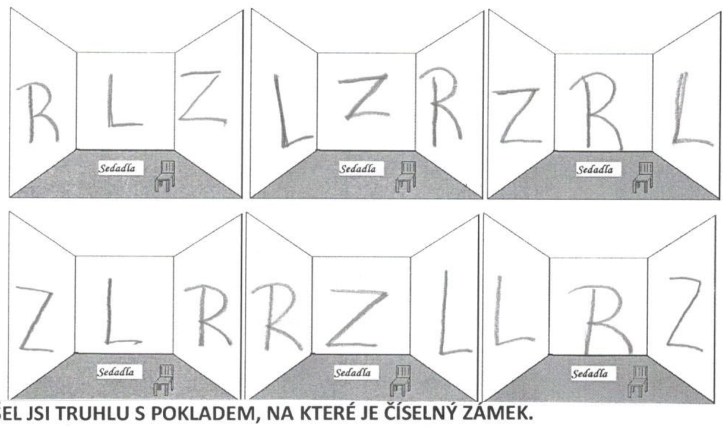
1.



V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.“

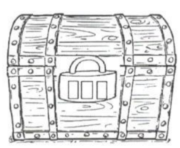
2.





NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT
ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.



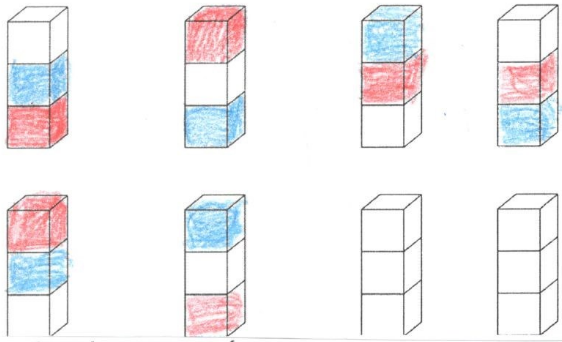
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1 2 5 5 2 1
2 5 1 2 1 5
5 1 2 1 5 2

ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 2

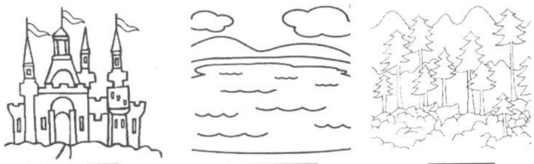
POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV.
NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.

1.

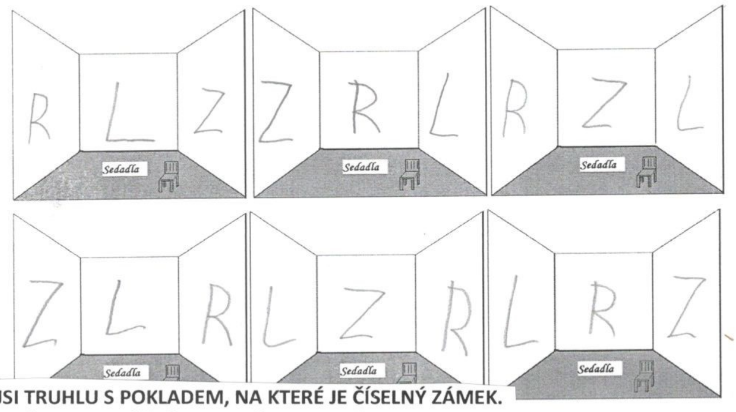


V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ.

2.

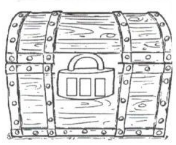


ZÁMEK = Z | RYBNÍK = R | LES = L



NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.

3.

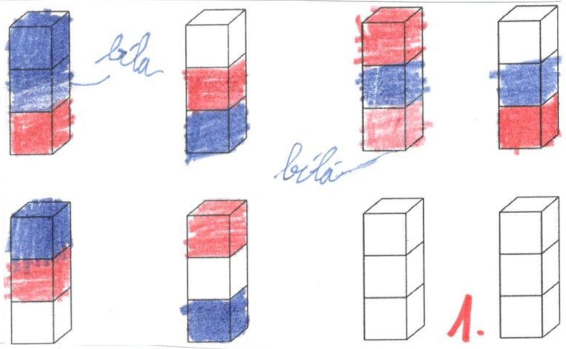


ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

1 2 5   5 2 1
1 5 2   5 1 2
2 1 5   2 5 1

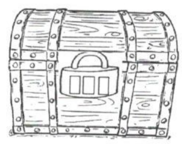
ZŠ 2 - ŽÁKYNĚ 3

POSTAV VĚŽ ZE TŘÍ KOSTEK (ČERVENÁ, MODRÁ, BÍLÁ), KTERÁ MÁ TŘI PODLAŽÍ.
ŽÁDNÁ BARVA SE VE VĚŽI NESMÍ OPAKOVAT, KAŽDÁ VĚŽ MUSÍ OBSAHOVAT KRYCHLE VŠECH BAREV. NAJDI VŠECHNA MOŽNÁ ŘEŠENÍ.



1.

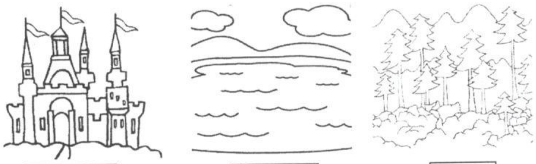
NAŠEL JSI TRUHLU S POKLADEM, NA KTERÉ JE ČÍSELNÝ ZÁMEK.
JAKÝM ZPŮSOBEM MŮŽEŠ VYZKOUŠET POSKLÁDAT ČÍSLICE **1, 2, 5** DO ZÁMKU?
ŽÁDNÉ ČÍSLO SE NESMÍ OPAKOVAT.



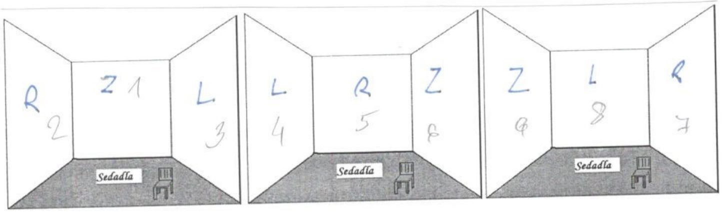
ZAPIŠ MOŽNÉ ČÍSELNÉ KOMBINACE, KTERÝMI MŮŽEŠ ZKUSIT OTEVŘÍT ZÁMEK.

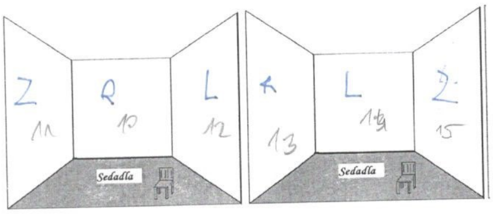
1 2 5   1 5 2
5 1 2   5 2 1
2 5 1   2 1 5 2.

V DIVADLE HRAJÍ POHÁDKU ZLATOVLÁSKA.
PŘIPRAV PRO NĚ NÁVRHY ROZMÍSTĚNÍ KULIS NA 3 STĚNY JEVIŠTĚ.
NA KAŽDÉ STĚNĚ MUSÍ BÝT VŽDY POUZE JEDNA KULISA.
NAJDEŠ VÍCE MOŽNOSTÍ, JAK KULISY ROZMÍSTIT?
SVÉ ŘEŠENÍ ZAKRESLI (PIŠ ZKRATKY). VYUŽIJ PŘIPRAVENÉHO MODELU JEVIŠTĚ."



ZÁMEK = Z   RYBNÍK = R   LES = L





3.