

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analytický a syntetický pohled na kuželosečky

Analytic and synthetic approach to conics

Sára Jandová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělání

2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Analytický a syntetický pohled na kuželosečky v rovině s řešenými příklady práce potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

02. 5. 2020

Poděkování

Tímto bych chtěla velice poděkovat panu Mgr. Michalovi Zambojovi, Ph.D. za jeho úsilí a trpělivost při veškerých konzultacích. A zejména za kvalitní vedení mé bakalářské práce v nelehké nastalé situaci, dodání spousty kvalitních zdrojů a cenné rady, které mne vyvedli z mnoha slepých cest.

ABSTRAKT

Práce se zabývá kuželosečkami, jejich definicemi, syntetickými a analytickými vlastnostmi. Je rozdělena do pěti kapitol, z nichž první dvě popisují kuželosečky obecně, další tři jsou zaměřeny postupně na jejich konkrétní případy, a sice elipsu, hyperbolu a parabolu. Každá kapitola obsahuje teorii průběžně prokládanou navazujícími příklady, které jsou z většiny řešené dvěma metodami, konkrétně synteticky a analyticky. Některé z příkladů jsou doplněny o krátký komentář obsahující shrnutí obou řešení. Pro lepší srozumitelnost a pochopení jsou některé konstrukce doplněny ilustračními obrázky, které jsou všechny vytvořeny v programu Geogebra.

KLÍČOVÁ SLOVA

kuželosečky, elipsa, hyperbola, parabola, analytická metoda, syntetická metoda

ABSTRACT

The work deals with conics, their definitions, synthetic and analytic methods. It's divided into five chapters, the first two describe conics generally, the next three are focused gradually on particular examples, ellipse, hyperbola, parabola. Each chapter contains theory continuously interlaced with follow-up examples, which are mostly solved by the methods, synthetically and analytically. Some of the examples are added with a short comment containing summary of both examples. For better comprehensibility and understanding are some constructions added with illustrative pictures, which are all made by program Geogebra.

KEY WORDS

conics, ellipse, hyperbola, parabola, synthetic method, analytic method

Obsah

Úvod	1
1 Kuželosečky a jejich klasifikace	2
1.1 Kuželosečky v obecné poloze	2
1.1.1 Kuželosečky a otočení	3
1.1.2 Kuželosečky a posunutí	5
1.2 Rovnice kuželoseček	7
1.3 Kuželosečka dána pěti body	10
2 Společná definice kuželoseček	11
3 Elipsa	14
3.1 Bodová konstrukce a rovnice elipsy	16
3.1.1 Elipsa určená ohnisky a součtem průvodičů	16
3.1.2 Elipsa určená ohnisky a bodem	18
3.2 Elipsa a přímka	19
3.2.1 Tečna elipsy daným směrem (rovnoběžná s přímkou)	21
3.2.2 Tečna elipsy daným bodem	23
3.2.3 Tečna elipsy a délka hlavní poloosy	26
3.2.4 Osová afinita mezi kružnicí a elipsou [12]	27
3.3 Oskulační kružnice elipsy	29
4 Hyperbola	31
4.1 Bodová konstrukce a rovnice hyperboly	33
4.2 Hyperbola a přímka	34
4.2.1 Tečna hyperboly daným směrem (rovnoběžná s přímkou)	36
4.2.2 Tečna hyperboly daným bodem	38
4.2.3 Asymptoty dané ohnisky a vrcholy hyperboly	40
4.2.4 Tečna hyperboly dána bodem dotyku a jejími asymptotami	41
4.3 Oskulační kružnice hyperboly	43
5 Parabola	45
5.1 Bodová konstrukce a rovnice paraboly	45
5.1.1 Parabola určená ohniskem a řídicí přímkou	45
5.1.2 Parabola určená ohniskem a dvěma různými body	47
5.2 Parabola a přímka	49

5.2.1	Tečna paraboly daným směrem (rovnoběžná s danou přímkou).....	50
5.2.2	Tečna paraboly daným bodem.....	51
5.2.3	Parabola dána tečnami a body dotyku.....	53
5.2.4	Parabola a rovnostranné trojúhelníky.....	56
5.3	Oskulační kružnice paraboly	59
	Závěr.....	61
	Seznam obrázků	62
	Použité zdroje.....	63

Úvod

Pro svou práci jsem si vybrala téma „Analytický a syntetický pohled na kuželosečky“, protože se mi líbila představa, jak v jejím průběhu přiřazujeme k rovnicím, které známe, příslušné konstrukce nebo naopak.

V práci předpokládáme základní znalost kuželoseček, která je potřeba zejména v jejím počátku, kdy se v první kapitole budeme soustředit na zavedení jejich obecné rovnice, která je studentům ze střední školy nejbližší, a poté jejich bližší specifikaci. Pro další zjednodušení práce s příklady jsem se rozhodla též zmínit využití transformací, jako je otočení a posunutí z analytického pohledu v souvislosti s kuželosečkami, které převádějí rovnice objektů na „základní tvar“ vzhledem k soustavě souřadnic, jejich vlastnosti v těchto případech zůstávají neměnné. Druhou kapitolou seznámíme čtenáře se společným definováním všech kuželoseček. A v dalších třech kapitolách zmíníme postupně syntetické a analytické pojmy a věty týkající se už konkrétních kuželoseček a jejich vlastností, které budeme prokládat příklady, jež s danými vlastnostmi úzce souvisí. Přičemž se postupně budeme zabývat kuželosečkami středovými, poté vrcholovými. Pro lepší srozumitelnost, ať už vět, nebo syntetických konstrukcí, využijeme obrázky vytvořené v interaktivním počítačovém programu Geogebra.

Pro snadnější zadávání příkladů nyní zavedeme označení (S) pro syntetické řešení, (A) pro řešení analytické, které budeme od teď využívat. Hlavním cílem mé práce je tedy seznámit čtenáře s konkrétními příklady a jejich (S) a (A) řešením. Nutno dodat, že v celé práci, žádáme-li konstrukci kuželosečky, pak nám postačí návod k sestrojení jejích bodů a konstrukci základních jejích prvků, například osy, ohniska, vrcholy apod.

Toto následné shrnutí by mohlo sloužit studentům středních škol pro prohloubení jejich znalostí a získání jiného pohledu na danou problematiku nebo též jako učební materiál pro předmět Planimetrie, Syntetická geometrie, Lineární algebra a geometrie a Analytická geometrie.

1 Kuželosečky a jejich klasifikace

Dříve než začneme analyzovat, jak se kuželosečky sestavují a jaké mají vlastnosti, uvedeme pro budoucí zjednodušení jejich rovnice a jak vznikají.

Definice 1 ([10]): Křivky vyjádřené algebraickými rovnicemi ve tvaru

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad 1.1$$

kde alespoň jeden z reálných koeficientů a, b, c je různý od 0, se nazývají **kuželosečkami**.

Za kuželosečky tedy považujeme všechny objekty, které splňují podmínky rovnice 1.1. Kuželosečky v jejich obecné poloze budeme dále rozlišovat na **singulární** (degenerované, složené), mezi které patří dvě přímky (reálné nebo imaginární), bod nebo křivka neobsahující žádný reálný bod (tzv. imaginární kružnice), a **regulární** kuželosečky. [2, str. 104]

Příklady singulárních kuželoseček:

- rovnoběžné přímky:

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y &= 0 \\ (x + 2y)(x + 2y - 1) &= 0, \end{aligned}$$

- křivka neobsahující žádný reálný bod:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

- bod:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Dále se v práci zaměříme na kuželosečky regulární, které nemají v rovnici smíšený člen xy , tedy $b = 0$. Níže ukážeme, jak můžeme kteroukoliv rovnici kuželosečky takto upravit pomocí rotace.

Regulární kuželosečky se dělí z hlediska afinní geometrie na: elipsy, hyperboly a paraboly. První z nich, se kterou se žáci setkávají již na základní škole, je kružnice, která v tomto dělení přímo nefiguruje, jedná se totiž o speciální metrický případ elipsy. Kuželosečky se takto dělí v souvislosti s jejich průsečíky s nevlastní přímkou její roviny, na této přímce leží všechny nevlastní body (body v nekonečnu) dané roviny. [2, str.104]

Definice 2 ([2, str.104]): Kuželosečky dělíme na **a) elipsu, b) parabolu, c) hyperbolu** podle toho, zda jejich průsečíky s nevlastní přímkou roviny, ve které kuželosečka leží, jsou a) komplexně sdružené, b) splývající, c) reálné různé.

1.1 Kuželosečky v obecné poloze

Obecná rovnice kuželosečky 1.1 nám neříká nic bližšího o tom, o jakou kuželosečku se jedná. Proto v matematice existuje pojem kanonický tvar, jedná se o formu objektu, ve které je prezentován jednoznačně. Každá jejich obecná rovnice ale nejde hned základními operacemi na kanonický tvar upravit. Nyní se tedy budeme věnovat způsobu, jak to lze vždy, a sice transformací rotace neboli otočení.

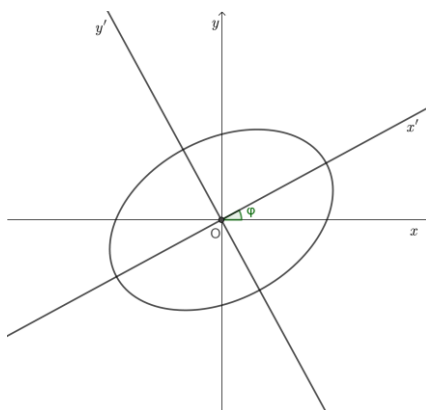
1.1.1 Kuželosečky a otočení

S kuželosečkami, které nemají osy rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic, to není vždy snadné. Osa x soustavy souřadnic s hlavní osou kuželosečky x spolu vzájemně svírají určitý úhel φ . Jakmile je znám tento úhel, vztah mezi soustavami určenými těmito osami je následující.

Věta 1 ([10]): (Obr. 1.1) *Necht' Oxy a $Ox'y'$ jsou dva ortonormální souřadnicové systémy se společným počátkem, které spolu svírají úhel φ . Pro převod mezi čárkovanými souřadnicemi na nečárkované platí následující transformační rovnice*

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$



Obrázek 1.1 - Úhel mezi souřadnicovými systémy

Ve chvíli, kdy je kuželosečka zadaná pouze obecnou rovnicí kuželosečky, tento úhel z ní nelze vyčíst a řešitel si musí poradit jinak, pomůžeme si substitucí jako v [4, str.77-78].

Do rovnice 1.1 si za x, y doplníme vztahy platné z věty 1 a po úpravách získáme rovnici

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0, \quad 1.2$$

kde

$$A = a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi,$$

$$B = -a \sin \varphi \cos \varphi + b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + c \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$C = a \sin^2 \varphi - 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi,$$

$$D = d \cos \varphi + e \sin \varphi,$$

$$E = -d \sin \varphi + e \cos \varphi,$$

$$F = f.$$

Pokud se chceme zbavit smíšeného členu xy , musíme zvolit takový úhel otočení, aby $B = 0$.

Dostáváme se tedy k řešení goniometrické rovnice

$$0 = -a \sin \varphi \cos \varphi + b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + c \sin \varphi \cos \varphi,$$

která je ekvivalentní s rovnicí

$$b \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a - c) \sin 2\varphi = 0.$$

Předpokládáme, že $b \neq 0$, protože v tu chvíli by smíšený člen již v rovnici 1.1 nefiguroval. Zároveň $\sin 2\varphi \neq 0$, protože z toho opět plyne $b = 0$, což je spor. Tudíž můžeme rovnici upravit do tvaru

$$\cotg 2\varphi = \frac{a - c}{2b}, \quad 1.3$$

která má v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ právě jedno řešení.

K vytvoření nové rovnice nám nyní stačí dosadit úhel φ do vyjádřených koeficientů A až F .

Nyní můžeme říct, že libovolnou kuželosečku lze převést na tvar, kdy $B = 0$ a tedy bez újmy na obecnosti uvažujeme rovnici kuželosečky ve tvaru

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad 1.4$$

kde alespoň jeden z reálných koeficientů A, C je různý od 0.

Takovou rovnici jsme již schopni převést na kanonický tvar pomocí elementárních úprav a zejména pomocí tzv. úpravy na čtverec, kterou si nyní ukážeme.

Pokud platí například, že $A, C \neq 0$, pak si rovnici 1.4 nejprve vhodně uspořádáme na

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Dx + Cy^2 + 2Ey &= -F \\ A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) &= -F. \end{aligned}$$

Nyní upravíme závorky pomocí vzorce $(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$, hledáme tedy absolutní člen;

kvadratické členy: $a^2 = x^2, a^2 = y^2$,

smíšené členy: $2ab = \frac{D}{A}x, 2ab = \frac{E}{C}y$,

absolutní členy, které zjišťujeme: $(a = x \wedge 2ab = \frac{D}{A}x) \rightarrow b^2 = \left(\frac{D}{2A}\right)^2$

$$(a = y \wedge 2ab = \frac{E}{C}y) \rightarrow b^2 = \left(\frac{E}{2C}\right)^2.$$

Nyní se vrátíme zpět k rovnici kuželosečky a doplníme závorky absolutními členy.

Nesmíme zapomenout, že co přičteme, musíme také odečíst

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) - \frac{D^2}{4A} + C\left(y^2 + \frac{E}{C} + \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) - \frac{E^2}{4C} = -F$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2C + E^2A - 4FAC}{4AC}.$$

Nyní celou rovnicí vydělíme pravou stranou, abychom na této straně získali 1

$$\frac{A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2C + E^2A - 4FAC}{4AC}} + \frac{C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{D^2C + E^2A - 4FAC}{4AC}} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC} - \frac{F}{A}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}} = 1.$$

Nakonec ji ještě upravíme pomocí substituce, necht' je $-m = \frac{D}{2A}$, $-n = \frac{E}{2C}$, $a^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC} - \frac{F}{A}$ a $b^2 = \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}$, pak lze tuto rovnici zjednodušit na

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

který nazýváme kanonickým tvarem rovnice kuželosečky, v tomto případě konkrétně elipsy, jak se dozvíme později (str.6). Pro další možnosti konstant A, C budeme v úpravách postupovat podobně.

1.1.2 Kuželosečky a posunutí

Je-li kuželosečka pouze posunutá, pak nastává pro řešení jednodušší případ. Pro elipsu a hyperbolu platí; necht' střed kuželoseček $S = [m, n]$ a její osy, necht' jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic Oxy . V případě paraboly, necht' vrchol $V = [m, n]$ a řídicí přímka s osou paraboly, které jsou na sebe kolmé, jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic Oxy . Potom přichází na řadu posunutí kartézské soustavy souřadnic, které vytváří novou soustavu $Sx'y'$ ($Vx'y'$), jejímž počátkem je S , nebo V o souřadnicích $[m, n]$. Pro shrnutí této transformace nyní uvedeme následující větu.

Věta 2 [6, str.78]: *Necht' Oxy a $Sx'y'$ ($Vx'y'$) jsou dva ortonormální souřadnicové systémy s různými počátky a rovnoběžnými osami. Pro převod mezi čárkovanými souřadnicemi na nečárkované platí následující transformační rovnice*

$$x' = x - m$$

$$y' = y - n$$

Potom například pro rovnici elipsy se středem $S = [m, n]$

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

bude v kartézské soustavě souřadnic $Sx'y'$ platit rovnice

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Stejně tak lze najít takový tvar pro každou posunutou regulární kuželosečku. Pro kontrolu a hlubší pochopení si uvedeme později jeden vyřešený příklad (Příklad 1, str. 9), který bude rovnou kombinovat obě tyto transformace.

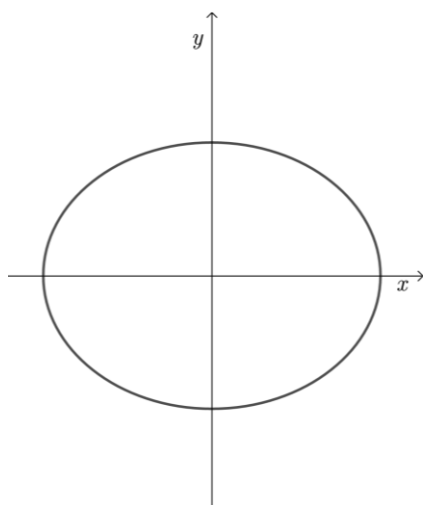
1.2 Rovnice kuželoseček

Již jsme se přesvědčili o tom, že využitím standardních úprav rovnic, zejména tzv. úpravy na čtverec, a vhodné volby souřadnicové soustavy lze získat kanonický tvar rovnic kuželoseček. Mají-li střed (vrchol) v počátku a osy (osu a řídicí přímku) rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic, pak lze pro jednotlivé kuželosečky uvést tyto kanonické rovnice a s nimi související orientaci vzhledem k soustavě souřadnic.

Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

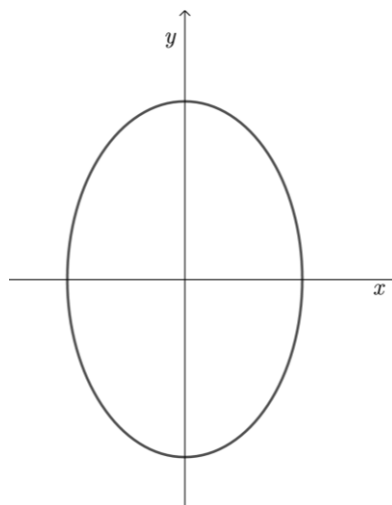
1.5



Obrázek 1.2 - Elipsa, kde $a > b$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a < b$$

1.6

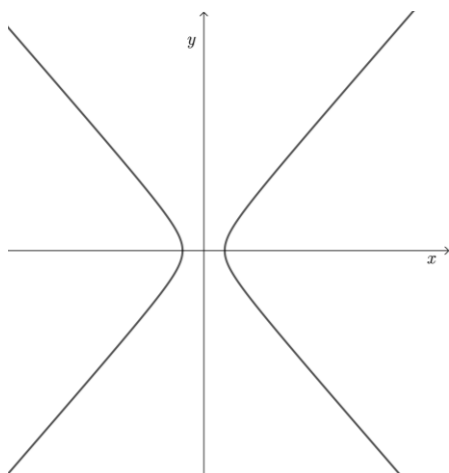


Obrázek 1.3 - Elipsa, kde $a < b$

Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

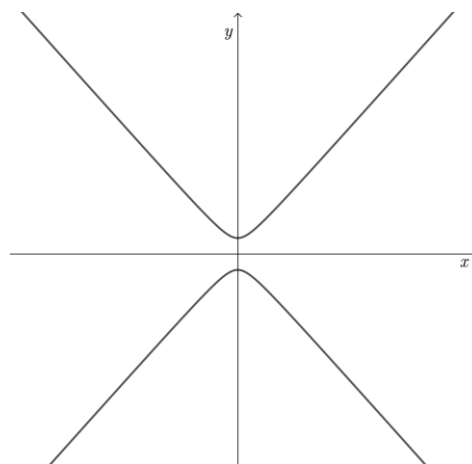
1.7



Obrázek 1.4 - Hyperbola, kde $a > b$

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, a < b$$

1.8



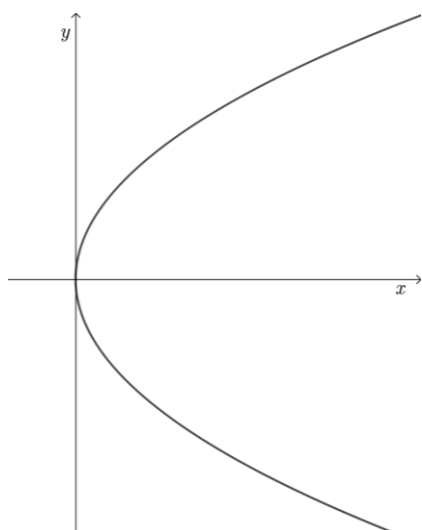
Obrázek 1.5 - Hyperbola, kde $a < b$

Elipsu a hyperbolu nazýváme středovými kuželosečkami.

Parabola

$$y^2 = 2px, p > 0$$

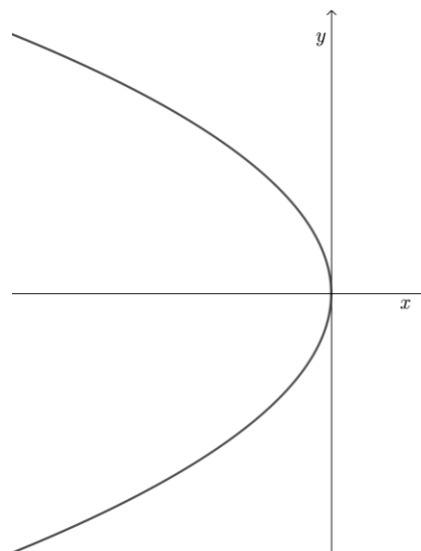
1.9



Obrázek 1.6 - Parabola, kde $p > 0$

$$y^2 = -2px, p > 0$$

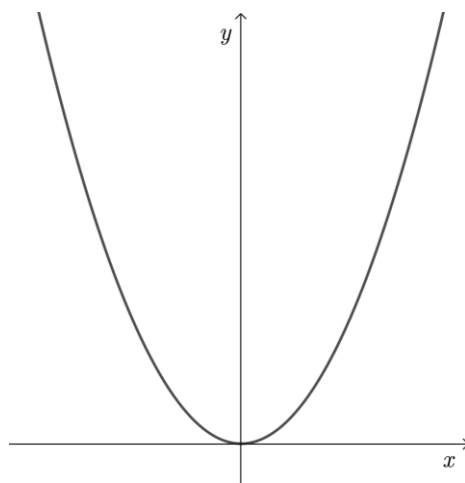
1.10



Obrázek 1.7 - Parabola, kde $p < 0$

$$x^2 = 2py, p > 0$$

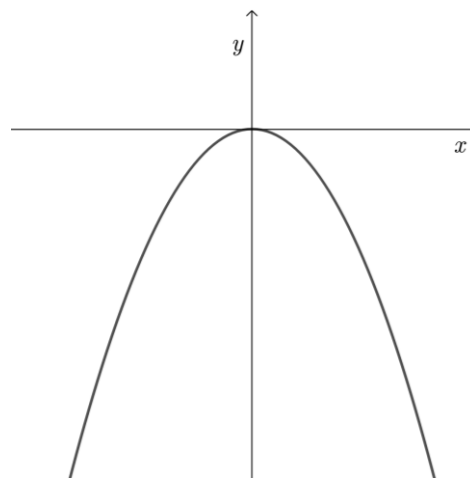
1.11



Obrázek 1.8 - Parabola, kde $p > 0$

$$x^2 = -2py, p > 0$$

1.12



Obrázek 1.9 - Parabola, kde $p < 0$

Parabolu nazýváme vrcholovou kuželosečkou.

Příklad 1

Určete typ kuželosečky vyjádřené rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$$

a převedte ji na kanonický tvar se středem nebo vrcholem v počátku (dle typu kuželosečky). [6, str. 82-83]

Pomocí vztahu 1.3 vypočítáme úhel otočení

$$\cot 2\varphi = \frac{a - c}{2b} = \frac{1 - 1}{-2} = 0,$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Nyní abychom získali rovnici 1.2, vyjádříme si její koeficienty

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0,$$

$$B = 0,$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 2,$$

$$D = 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + 0 = 4,$$

$$E = -4\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + 0 = -4,$$

$$F = -4.$$

Jejich dosazením získáváme

$$2y'^2 + 4x' - 4y' = 4,$$

kteřou ještě upravíme doplněním na čtverec

$$(y' - 1)^2 = -2 \left(x' - \frac{3}{2} \right).$$

V tomto případě se jedná o posunutou parabolu s vrcholem $V = \left[\frac{3}{2}, 1 \right]$. Abychom splnili zadání, tak následným posunutím

$$x'' = x' + \frac{3}{2}$$

$$y'' = y' + 1$$

získáváme kanonický tvar paraboly

$$y''^2 = -2x''$$

s parametrem $p = -1$ a s vrcholem v počátku soustavy souřadnic.

Podotýkám, že toto je jen stručný návod, který čtenáře neseznamuje s podrobným vysvětlením jednotlivých postupů. Důsledkem těchto skutečností jsme oprávněni vždy u příkladů v dalších kapitolách uvažovat kuželosečky se středem (vrcholem) v počátku a osami splývajícími s osami kartézské soustavy souřadnic.

1.3 Kuželosečka dána pěti body

Příklad 2

(A) *Určete obecnou rovnici kuželosečky, pokud známe souřadnice bodů $M = [0,0]$, $N = [8,0]$, $O = [0,6]$, $P = [8,6]$, $Q = [2,-2]$, kterými prochází. [14]*

Jak je patrné, rovnice kuželosečky 1.4 má pět koeficientů, pro jejich zjištění si do dané rovnice doplníme postupně za x, y souřadnice zadaných bodů a poté vyřešíme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých

$$M: 0 + 0 + 0 + 0 + F = 0,$$

$$N: 64A + 0 + 16D + 0 + F = 0,$$

$$O: 0 + 36C + 0 + 12E + F = 0,$$

$$P: 64A + 36C + 16D + 12E + F = 0,$$

$$Q: 4A + 4C + 4D - 4E + F = 0.$$

Z této soustavy získáváme koeficienty $F = 0$, $E = -9$, $D = -16$, $C = 3$, $A = 4$, a tedy její obecnou rovnici $4x^2 + 3y^2 - 32x - 18y = 0$.

Syntetické sestavení kuželosečky pěti body je předmětem projektivní geometrie. Pokud by zvědavý čtenář chtěl, pak podrobné řešení uvádějí R. Piska, V. Medek v [2, str. 148].

2 Společná definice kuželoseček

Celá následující kapitola je inspirována [3, str.13-17].

Příklad 3

(A) Určete rovnicí množinu bodů, které mají od bodu $M = [m, 0]$ ε -krát větší vzdálenost než od přímky $d: x = 0$, ($\varepsilon > 0, m \in \mathbb{R}$).

Body $X = [x, y]$ splňují podmínku úlohy právě tehdy, když platí

$$|XM| = \varepsilon|Xd|$$

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} = \varepsilon|x|$$

tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$(x-m)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2,$$

$$(1-\varepsilon^2)x^2 - 2mx + m^2 + y^2 = 0$$

případ $\varepsilon = 1$ vyřešíme dodatečně zvlášť. Jestliže se tedy $\varepsilon \neq 1$, pak lze vytknout $(1-\varepsilon^2)$ a následně celou rovnici vydělit tak, aby byla rovna jedné

$$(1-\varepsilon^2) \left(x^2 - \frac{2m}{1-\varepsilon^2}x + \frac{m^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) + y^2 = \frac{m^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - m^2 \quad 2.1$$

$$\frac{\left(x - \frac{m}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{m}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - m^2}{1-\varepsilon^2}} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - m^2} = 1.$$

Provedeme diskuzi vzhledem k parametru ε .

Diskuze: Pro jednodušší interpretaci provedeme pár změn v označení. Necht' $A = (1-\varepsilon^2)$ a $B = \left(\frac{m^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - m^2\right)$, získáváme rovnici

$$\frac{\left(x - \frac{m}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{B}{A}} + \frac{y^2}{B} = 1, \quad A, B \neq 0$$

pak pro danou rovnici platí:

- je-li $\varepsilon < 1$, potom platí $\operatorname{sgn} A = 1, A \in (0,1)$, proto $\operatorname{sgn} B = 1$. Získaná rovnice určuje, že hledaná množina bodů je elipsa.
- je-li $\varepsilon > 1$, potom platí $\operatorname{sgn} A = -1, A \in (-\infty, -1)$, proto $\operatorname{sgn} B = -1$. Získaná rovnice určuje, že hledaná množina bodů je hyperbola.
- je-li $\varepsilon = 1$, potom $A = 0$ dosadíme do rovnice 2.1 a získáváme rovnici paraboly.

Nyní máme všechny prostředky k tomu uvést další možnou definici kuželoseček.

Definice 3: (Apolloniiovská¹ definice kuželoseček) V eukleidovské rovině E^2 , necht' F_1 je pevný bod a d přímka neprocházející bodem F_1 . Potom pro každé $\varepsilon > 0$, existuje množina bodů

$$c = \{P, |PF_1| = \varepsilon|Pd|\}.$$

Tuto množinu nazveme kuželosečkou c s ohniskem F_1 a přidruženou řídicí přímkou d . Konstanta ε je **numerická excentricita** kuželosečky, vzdálenost $p = \varepsilon|F_1d|$ je **parametr kuželosečky**.

Potom podle velikosti excentricity ε rozlišujeme kuželosečky takto:

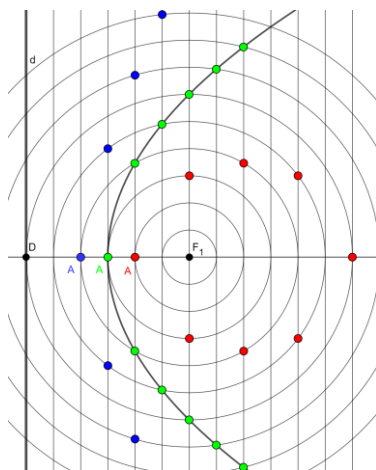
- $\varepsilon < 1$, c je elipsa,
- $\varepsilon = 1$, c je parabola,
- $\varepsilon > 1$, c je hyperbola.

(S) Sestrojte množinu bodů, která má od daného bodu ε -krát větší vzdálenost než od přímky d .

S vhodnou sítí kružnic a přímek lze interpretovat všechny kuželosečky jako v *obrázku 2.1*. Podle předchozí definice můžeme daný bod nazvat ohniskem F_1 . Vedeme-li ohniskem F_1 kolmici o na přímku d , potom daná kolmice je osou symetrie této kuželosečky. Průsečík kolmice o s přímkou d nazveme D . Bod kuželosečky na její ose nazveme **vrchol kuželosečky** A , tento bod dělí úsečku F_1D v poměru

$$|AF_1| : |AD| = \varepsilon : 1 = p : \frac{p}{\varepsilon},$$

kde p je již zmíněným parametrem kuželosečky.



Obrázek 2.1 - Apolloniiovská definice

¹ **Apollonios z Pergy** (3-2.st. př. n. l.) řecký matematik, geometr a astronom, jeden z prvních žáků Euklida. Navázal na eleatskou školu a dovedl helénskou matematiku k vrcholu. Značně předběhl svou dobu, když se začal zmiňovat o asymptotách hyperboly. [16]

Věta 3: Elipsa a hyperbola mají druhou osu symetrie o_2 , a současně ohnisko F_2 s přidruženou řídicí přímkou d_2 . Odpovídající numerická excentricita ε a parametr p zůstávají nezměněny.

Důkaz: Dokazujeme tedy, že pokud ε je různé od 1, potom každá přímka rovnoběžná s osou o_1 protíná kuželosečku právě ve dvou bodech. Necht' pro osu souměrnosti platí $o_1: y = 0$ a pro řídicí přímkou $d: x = 0$.

Ohnisko F_1 má v tomto případě souřadnice $\left[\frac{p}{\varepsilon}, 0\right]$. A pro každý bod kuželosečky $P = [x, y]$ platí

$$|PF_1| = \varepsilon|Pd|,$$

rozepsáním získáváme

$$x^2 - \frac{2p}{\varepsilon}x + \frac{p^2}{\varepsilon^2} + y^2 = \varepsilon^2 x^2$$

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - \frac{2p}{\varepsilon}x + \left(\frac{p^2}{\varepsilon^2} + y^2\right) = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice pro $\varepsilon \neq 1$, získáváme pro x vždy dvě řešení

$$x_{1,2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left[\frac{p}{\varepsilon} \pm \sqrt{p^2 + (\varepsilon^2 - 1)y^2} \right]. \quad 2.2$$

V případě hyperboly ($\varepsilon > 1$) jsme tedy dokázali, že pro libovolné $y \in R$ dostáváme pár odpovídajících si bodů P_1, P_2 hyperboly se shodnou y-ovou souřadnicí.

Pro elipsu ($\varepsilon < 1$) musíme brát v úvahu omezení pro y plynoucí z rovnice 2.2

$$-\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \leq y \leq \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$

Čímž jsme dokázali, že pro každé y z tohoto intervalu, získáváme pár odpovídajících si bodů P_1, P_2 se shodnou y-ovou souřadnicí.

Středy každé dvojice bodů kuželosečky souměrných podle osy o_2 mají shodnou x-ovou souřadnici

$$x_S = \frac{p}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)}. \quad 2.3$$

Osu o_2 nazýváme **vedlejší osou** kuželosečky, osu o_1 procházející ohniskem potom nazýváme **hlavní osou** kuželosečky.

3 Elipsa

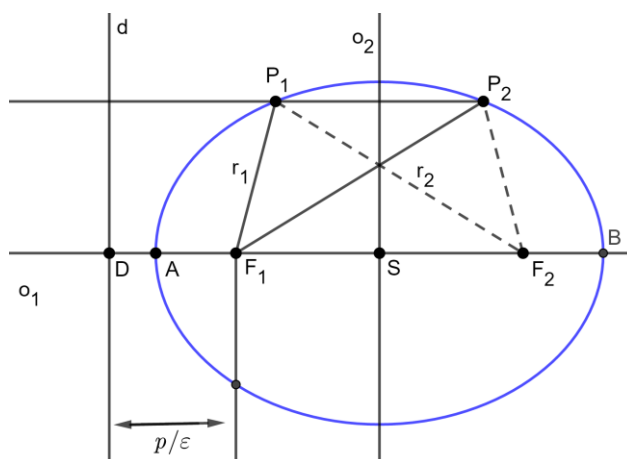
Pojmy definic a vět v následující části, není-li uvedeno jinak, vychází ze skutečností popsaných v [1, str.31-40].

Definice 4: (Standardní definice elipsy) Množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů stálý součet vzdáleností větší, než je vzdálenost pevných bodů.

Pevné body z dané definice jsou **ohniska** a značíme je F_1, F_2 . Spojnice bodů elipsy od ohnisek F_1X, F_2X se nazývají **průvodiče** a značíme je r_1, r_2 .

Pomocí vzdáleností lze tuto vlastnost pro množinu bodů X vyjádřit takto:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a > |F_1F_2|.$$

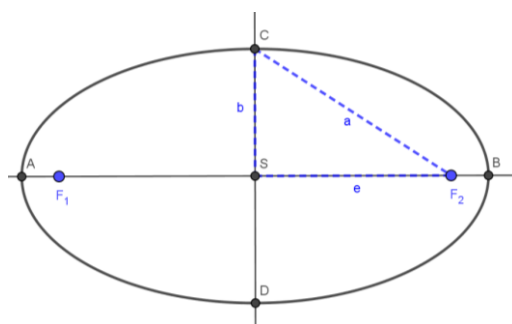


Obrázek 3.1 – Elipsa

o_1, o_2 jsou **hlavní a vedlejší osou** elipsy a S je jejím **středem**. Hlavní (vedlejší) osu značíme $2a$ ($2b$), potom **hlavní (vedlejší) poloosa** je a (b). Průsečíky hlavní (vedlejší) osy s elipsou nazveme **hlavními (vedlejšími) vrcholy** A, B (C, D). Dalším důležitým pojmem je **lineární výstřednost (excentricita)**, od teď značena jako e , která nově označuje vzdálenost ohnisek od středu. Důsledkem hlubšího pozorování si můžeme všimnout, že v případě, kdy ohniska splynou v jeden bod, dostaneme kružnici. Potom $e = 0$, tj. kružnice má nulovou excentricitu a platí $a = b$.

Věta 4: Součet průvodičů bodu elipsy se rovná velikosti její hlavní osy.

Zde narážíme na tzv. **charakteristický trojúhelník** (obr. 3.2) elipsy, např. ΔF_2SC . Vycházíme-li z kolmosti os a souměrnosti elipsy, potom je patrné z Pythagorovy věty, že poloosa a, b a lineární výstřednost e jsou vázány vztahem $a^2 = b^2 + e^2$, z vlastností tohoto trojúhelníku také plyne $a > b, a > e$. Numerická výstřednost je vyjádřena vztahem $\varepsilon = \frac{e}{a}$, o které víme, že je menší než jedna, neboť $e < a$.



Obrázek 3.2 - Charakteristický trojúhelník elipsy

Věta 5 [3, str.16-17]: Apollonijská definice, je-li numerická výstřednost $\varepsilon < 1$, je ekvivalentní se standardní definicí elipsy.

Důkaz: (Obr. 3.1) Chceme dokázat, že součet průvodičů elipsy je konstantní, využijeme k tomu vztah 2.3, o kterém víme, že konstantní je. Necht' P_1, P_2 jsou dva různé body elipsy souměrné podle osy o_2 , pak platí

$$|P_1F_1| + |P_1F_2| = |P_1F_1| + |P_2F_1|,$$

pomocí vyjádření z definice 3, můžeme tuto rovnici dále upravit

$$|P_1F_1| + |P_2F_1| = \varepsilon(|P_1d| + |P_2d|),$$

dále užitím úpravy pro určení středu X_S úsečky P_1P_2 získáváme

$$2\varepsilon \cdot \left(\frac{|P_1d| + |P_2d|}{2} \right) = 2\varepsilon \cdot X_S = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} \rightarrow \text{konstantní.}$$

Proto, je-li $\varepsilon < 1$, pak je standardní definice elipsy důsledkem definice podle Apollonia. Hlavní osa a , vedlejší osa b , parametr p a numerická excentricita ε jsou vázány následujícími vztahy

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, & b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, & e &= |SF_1| = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{a^2 - b^2}, \\ p &= \frac{b^2}{a}, & |F_1d| &= \frac{b^2}{e}, & |Sd| &= |X_S| = \frac{p}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)} = \frac{a^2}{e}. \end{aligned}$$

Potom z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ΔF_1F_2P ($F_1 \neq F_2$), kde P je libovolným bodem elipsy, plyne $|F_1F_2| < |PF_1| + |PF_2|$.

Naopak, je-li elipsa c dána standardní definicí pomocí dvou různých ohnisek F_1, F_2 a konstanty $2a$, můžeme následně vypočítat lineární excentricitu $e = \frac{|F_1F_2|}{2} \neq 0$, numerickou excentricitu $\varepsilon = \frac{a}{e}$, délku vedlejší poloosy $b = \sqrt{a^2 - e^2}$, parametr $p = \frac{b^2}{a}$ a vzdálenost jejího středu S od řídicích přímek d_1, d_2 jako $\frac{a^2}{e}$. Ohnisko F_i leží mezi S a přidruženou řídicí přímkou $d_i, i = 1, 2$. Potom kuželosečka c' definována podle Apollonia

pomocí ohniska F_1 , řídicí přímkou d_1 a numerickou excentricitou ε sdílí s c ohnisko a konstantu $2a$, což znamená $c = c'$.

3.1 Bodová konstrukce a rovnice elipsy

3.1.1 Elipsa určená ohnisky a součtem průvodičů

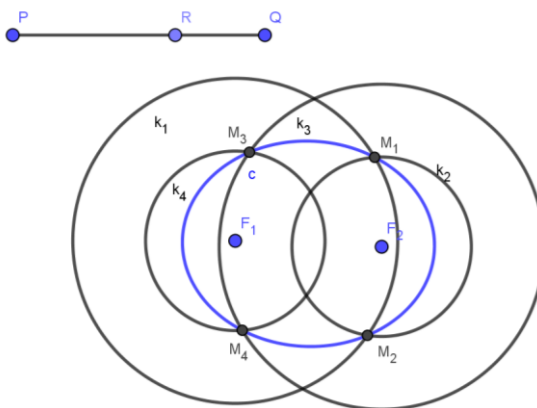
Příklad 4

(S) *Sestrojte body elipsy, znáte-li její ohniska F_1, F_2 a součet průvodičů jejich bodů.*
[1, str 32.]

Nechť $|PQ|$ je součet průvodičů a tedy platí $|PQ| > |F_1F_2|$. Zvolíme-li na úsečce PQ libovolný bod R , pak každý společný průsečík M kružnic $k_1(F_1, r_1)$, kde $r_1 = |PR|$ a $k_2(F_2, r_2)$, kde $r_2 = |QR|$ je bodem elipsy. Tyto body splňují podmínku $|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = |PR| + |QR| = |PQ|$.

Dané dvě kružnice se protínají ve dvou průsečících vždy, pokud platí $r_1 \leq \frac{1}{2}|PQ| \leq r_2$ nebo $r_2 \leq \frac{1}{2}|PQ| \leq r_1$. Kružnice se neprotínají, jsou-li námi zvolená R dva různé body úsečky PQ . Naneseme-li od středu S úsečky F_1F_2 na polopřímky SF_1, SF_2 úsečku velikosti $\frac{1}{2}|PQ|$, dostaneme vrcholy A, B elipsy.

Při určování elipsy místo úsečky PQ dáváme úsečku AB , jejíž velikost je stejná, přímo na přímce F_1F_2 , a to tak, aby $|SA| = |SB| > |SF_1|$. Bod R pak volíme na úsečce AB libovolně. Volíme-li speciálně $R \equiv S$, tj. $r_1 = r_2 = SA$, pak se kružnice k_1, k_2 protínají v bodech, které značíme C, D .



Obrázek 3.3 - Bodová konstrukce elipsy

Protože kružnice $k_1 \equiv (F_1, r_1)$ a $k_2 \equiv (F_2, r_2)$ jsou souměrné podle přímky AB , ke každému bodu M_1 elipsy, existuje na ní s ním souměrně sdružený bod M_2 podle přímky AB . Užijeme-li ke konstrukci bodů elipsy kružnic $k'_1 \equiv (F_2, r_1)$, $k'_2 \equiv (F_1, r_2)$, dostaneme body M_3, M_4 .

Pozn.: Důsledkem syntetického řešení je vlastnost elipsy, bez které bychom nesestavili následnou rovnici.

Definice 5 [4, str.8]: Bod X se nazývá **vnějším bodem** elipsy, jestliže $|F_1X| + |F_2X| > 2a$. Bod X je **vnitřním bodem** elipsy právě tehdy, když $|F_1X| + |F_2X| < 2a$.

Rovina je podle tohoto kritéria rozdělena na tři části

- množina vnitřních bodů elipsy, které tvoří vnitřek elipsy,
- množina bodů elipsy,
- množina vnějších bodů elipsy, které tvoří vnějšek elipsy.

3.1.2 Elipsa určená ohnisky a bodem

Příklad 5

(S) *Sestrojte body elipsy, dané ohnisky F_1, F_2 a bodem elipsy M .*

Součet vzdáleností $|F_1M| + |F_2M|$ je definován jako součet průvodičů, je tedy roven hodnotě $2a$. Tudíž převedeme na syntetické řešení předchozí úlohy (Příklad 4, str 16).

(A) *Určete rovnici elipsy dané ohnisky $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ a bodem elipsy $M = [m_1, m_2]$. [5, str. 143]*

Bod M je bodem elipsy, a tedy pro něj musí platit

$$\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1,$$

přičemž jak plyne z vlastnosti elipsy, se $b^2 = a^2 - e^2$, kde e vypočítáme jako velikost úsečky SF_1 (resp. SF_2).

Pak pro a^2 dostaneme rovnici

$$\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{a^2 - e^2} = 1$$

a po její úpravě kvadratickou rovnicí

$$(a^2)^2 - a^2(e^2 + m_1^2 + m_2^2) - m_1^2e^2 = 0.$$

Diskriminant bude vždy kladný, takže přicházejí v úvahu dvě řešení $a_{1,2}^2$, je potřeba dále ověřit, zda kořeny vyhovují ($a^2 > 0$). Poté podle příslušného vztahu dopočítáme b^2 , a opět si musíme dát pozor na to, že i $b^2 > 0$, nakonec vše doplníme do rovnice elipsy.²

Konkrétně:

Určete rovnici elipsy s ohnisky v bodech $F_1 = [-1, 0], F_2 = [1, 0]$, která prochází bodem $\left[1, \frac{8}{3}\right]$.

² Pro zjednodušení neuvádím celé řešení, pouze návod, podle kterého se lze jednoduše řídit, konec je totožný s předchozí úlohou.

Lineární výstřednost $e = 1$, tudíž $b^2 = a^2 - 1$. Elipsa má tedy rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1.$$

Prochází-li elipsa daným bodem, pak můžeme jeho souřadnice doplnit do rovnice za x, y . Pro a^2 tedy musí platit

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{64}{9}}{a^2 - 1} = 1$$

$$(a^2)^2 - a^2 \left(1 + 1 + \frac{64}{9}\right) + 1 = 0$$

$$9(a^2)^2 - 82a^2 + 9 = 0.$$

Kořeny dané rovnice jsou $a_1^2 = 9$, $a_2^2 = \frac{1}{9}$, k nim získáváme příslušná $b_1^2 = 8$, $b_2^2 = -\frac{80}{81}$. V druhém případě je b_2^2 záporné, tedy obě podmínky splňuje jen jeden kořen. Hledaná rovnice elipsy je

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Pozn.: Tento příklad bychom mohli i analyticky převést na předchozí. Obě již zmíněná řešení jsou snadná a účinná na procvičení odlišných analytických vlastností.

3.2 Elipsa a přímka

[15] Pro vzájemnou polohu elipsy a přímky rozlišujeme tři různé případy.

- Přímka s elipsou nemají žádný průsečík, nazýváme ji **vnější přímkou elipsy**.
- Přímka protíná elipsu v jednom bodě, nazýváme ji **tečnou elipsy**.
- Přímka se protíná s elipsou ve dvou různých bodech, pak ji nazýváme **sečnou elipsy**. Sečna, která je kolmá na tečnu s tečným bodem M se nazývá **normála** v bodě M .

Úhel tvořený polopřímkami MF_1, MF_2 , kde M je tečným bodem, obsahující střed elipsy a úhel k němu vrcholový označujeme jako **vnitřní úhly průvodičů**, jejich vedlejší úhly naopak **vnější úhly průvodičů**.

Věta 6: Tečna elipsy pólí vnější úhly průvodičů bodů dotyku, s výjimkou tečen v hlavních vrcholech elipsy.

Důkaz: V libovolném bodě elipsy M sestrojíme osu t vnějších úhlů průvodičů MF_1, MF_2 . Poté najdeme k libovolnému z ohnisek, například F_2 , bod souměrně sružený podle sestrojené přímky t , nazveme ho Q . Daný bod Q je bodem polopřímky opačné k polopřímce MF_1 a platí pro něj $MQ = MF_2$, takže $F_1Q = F_1M + MQ = F_1M + F_2M = 2a$.

Zvolme na ose t jakýkoliv bod $R \neq M$, potom body R, F_1, Q určují vždy trojúhelník, z trojúhelníkové nerovnosti plyne $RF_1 + RQ > 2a$. Protože bod Q je souměrný s bodem F_2 , pak bereme v potaz rovnost ve tvaru $RF_1 + RF_2 > 2a$. Z toho plyne, že libovolný bod $R \neq M$ je vnějším bodem elipsy a tedy přímka t nemá s elipsou žádný jiný společný bod různý od M , což splňuje definici tečny.

Důsledek 1: Tečna elipsy je přímka, která má s elipsou jediný společný bod, jejíž ostatní body jsou vnější.

Speciálním případem je **vrcholová tečna**, která je kolmá na hlavní osu elipsy.

Věta 7: Množina bodů souměrných s ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru dvojnásobku velikosti hlavní poloosy $2a$.

Takové kružnice se nazývají **řídící kružnice elipsy** a značíme je $g_1 = (F_1, 2a)$, $g_2 = (F_2, 2a)$.

Důkaz: (Obr. 3.5) Vezmeme-li v úvahu například kružnici $g_1 = (F_1, 2a)$, potom je nutné dokázat, že každý bod souměrně sdružený s ohniskem F_2 podle tečny elipsy je bodem kružnice g_1 , a zároveň implikaci opačnou, tedy že každý bod kružnice g_1 je souměrně sdružen s ohniskem F_2 podle nějaké tečny elipsy.

Je-li bod Q souměrně sdružený s ohniskem F_2 podle tečny t , potom je $|F_1Q| = 2a$ a Q je bodem kružnice g_1 .

Naopak pokud víme, že Q je bodem kružnice g_1 , potom osa úsečky F_2Q protíná úsečku F_1Q v jejím vnitřním bodě. Tento průsečík označíme M , pak platí $2a = |F_1M| + |MQ| = |F_1M| + |F_2M|$ a tedy bod M je bodem elipsy a t je tečnou.

Pro řídící kružnici g_2 by byl princip důkazu stejný.

Věta 8: Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy a poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy a .

Kružnice $v = (S, a)$ se nazývá **vrcholová (hlavní) kružnice elipsy**.

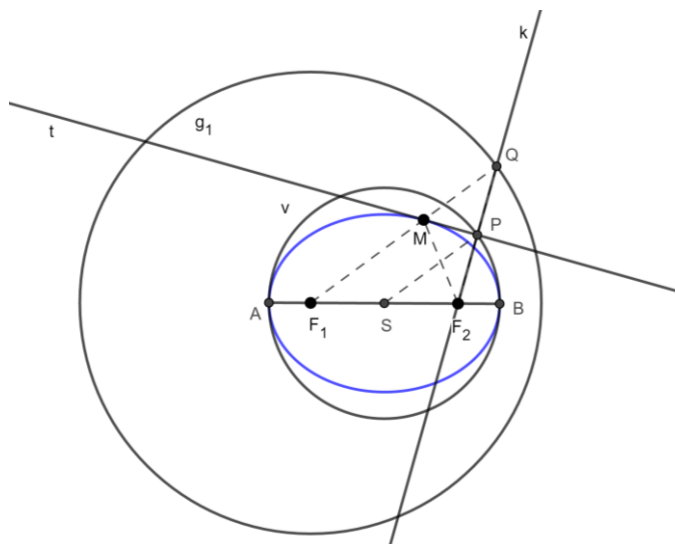
Důkaz: (Obr. 3.5) Opět dokazujeme dvě strany implikace. Nejprve necht' bod P je pata kolmice k spuštěné z ohniska F_2 na tečnu t v bodě elipsy M . Jelikož je tečna t osou úhlu QMF_2 , kde bod Q je průsečíkem řídící kružnice $g_1 = (F_1, 2a)$ s kolmicí k , pak bod P je středem úsečky QF_2 a zároveň střed elipsy S je středem úsečky F_1F_2 . Úsečka SP je střední příčkou v ΔF_1F_2Q a tedy $|SP| = \frac{1}{2}|F_1Q| = a$. Bod P tedy náleží kružnici $v = (S, a)$.

Obráceně necht' P je bodem kružnice v , sestrojíme bod Q tak, aby P byl střed F_2Q . Z konstrukce plyne, že Q je bodem kružnice g_1 . Osa t úsečky F_2Q je tečnou elipsy a proto P je patou kolmice z ohniska F_2 na tečnu elipsy.

Nyní uvedeme přímé důsledky plynoucí z vět 7 a 8.

Důsledek 2: Množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $g_1 = (F_1, 2a)$ a procházejí jejím vnitřním bodem $F_2 \neq F_1$, je elipsa o ohniscích F_1, F_2 a hlavní poloose a .

Důsledek 3: Pohybuje-li se pravý úhel tak, že jedno jeho rameno stále prochází jedním ohniskem elipsy a druhé se dotýká elipsy, pak vrchol pravého úhlu se pohybuje po vrcholové kružnici elipsy.



Obrázek 3.5 – Řídící a vrcholová kružnice elipsy

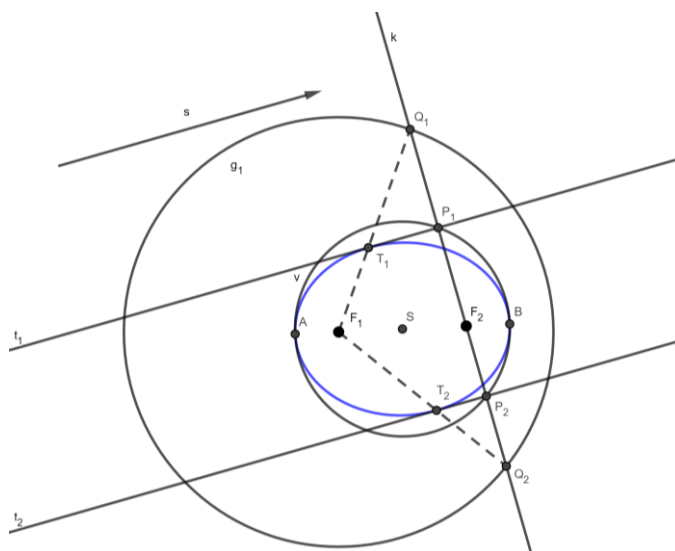
3.2.1 Tečna elipsy daným směrem (rovnoběžná s přímkou)

Příklad 6

(S) *K nenarysované elipse určené ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B ved'te tečny rovnoběžné s daným směrem \vec{s} . [1, str.36]*

Body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledané tečny leží na řídicí kružnici $g_1 = (F_1, 2a)$. Dále je-li znám směr tečny, je znám také směr přímky k ní kolmé. Jestliže vedeme kolmici k ke směru tečny ohniskem F_2 , pak na ní bude ležet i bod souměrně sdružený s tímto ohniskem podle hledané tečny. Protože bod souměrně sdružený s ohniskem F_2 leží jak na g_1 , tak na k , tudíž sestrojíme jejich průniky a získáme právě dva body Q_1, Q_2 . Pata P kolmice spuštěné z ohniska F_2 na hledanou tečnu leží podle věty 8 na vrcholové kružnici v . Výsledná tečna t tedy prochází bodem P a je rovnoběžná se zadaným směrem. Bod dotyku T nalezneme jako průsečík tečny t s přímkou F_1Q . Pro další průsečík Q_2 provedeme konstrukci totožně.

Diskuze: Protože k protíná g_1 vždy ve dvou různých bodech, existují dvě různá řešení, která jsou souměrně sdružená podle středu elipsy. Spojnice dotykových bodů T_1, T_2 obou tečen t_1, t_2 tedy prochází středem elipsy.



Obrázek 3.6 – Tečny elipsy rovnoběžné s daným směrem \vec{s}

(A) Určete rovnici tečny elipsy dané ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B rovnoběžné s daným směrem $\vec{s} = (u, v)$.

Pro naši elipsu tedy platí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \neq 0.$$

Tečnu elipsy lze popsat rovnicí $t: y = kx + q$, kde směrnice tečny k má tvar $k = \frac{v}{u}$, $(k, q, u, v \in \mathbb{R}, u \neq 0)$.

Pomocí soustavy dvou rovnic si vyjádříme neznámou q

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + q)^2}{b^2} = 1$$

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + x(2a^2kq) + (a^2q^2 - a^2b^2) = 0.$$

Chceme, aby měla přímka s elipsou právě jeden společný bod. To nastane tehdy, je-li diskriminant roven 0.

$$D_1 = 4a^4k^2q^2 - 4(a^2k^2 + b^2)(a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

$$q^2(-a^2b^2) + (a^4b^2k^2 + a^2b^4) = 0$$

$$D_2 = -4(-a^2b^2)(a^4b^2k^2 + a^2b^4) = 4a^4b^4(a^2k^2 + b^2)$$

$$q_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a^4b^4(a^2k^2 + b^2)}}{-2a^2b^2} = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

Dosadím směrový vektor \vec{s} , dostáváme rovnici tečny

$$t: y = \frac{v}{u}x \pm \sqrt{a^2\left(\frac{v}{u}\right)^2 + b^2}. \quad 3.1$$

Diskuze: Diskriminant D_2 je vždy větší než 0, tudíž pro q existují vždy právě dvě řešení. Z čehož plyne, že rovnoběžně s jakýmkoliv směrem, kdy $u \neq 0$, existují vždy právě dvě tečny.

Speciální případ nastane, je-li tečna rovnoběžná s osou x , tedy je-li $v = 0$. V tomto případě tečny budou procházet vedlejšími (resp. hlavními, v případě $b > a$) vrcholy $C = [c_1, c_2], D = [d_1, d_2]$ elipsy. Hledaná neznámá $q_{1,2}$ se pak rovná y-ovým souřadnicím těchto vrcholů, tedy $q_1 = c_2$ a $q_2 = d_2$.

Pozn.: Zatímco k nalezení rovnice tečny nám postačí základní znalosti analytické geometrie. Řešení syntetické vychází z vlastností řídicí a vrcholové kružnice. Podobně to bude i v následujícím příkladě.

3.2.2 Tečna elipsy daným bodem

Věta 9 [4, str.19]: Rovnice

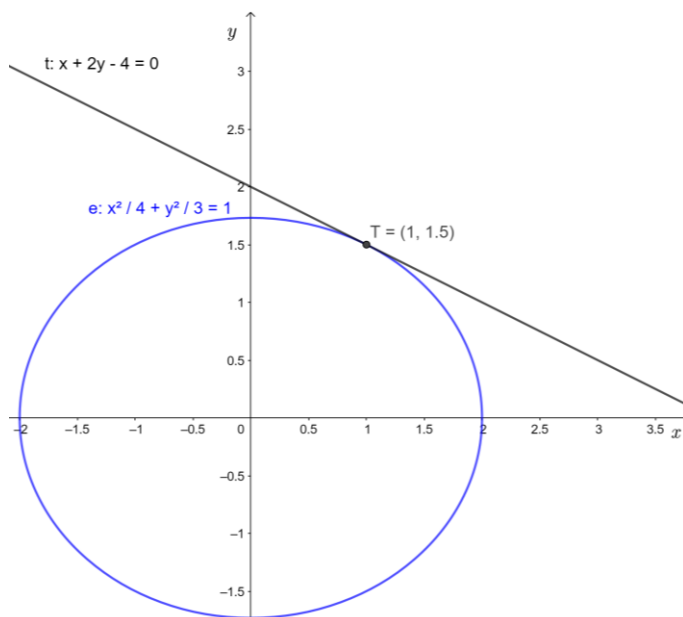
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

je rovnicí tečny k elipse s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$.

Důkaz věty 9 je technicky náročnější než odvození, které si ukážeme v následujícím příkladě pro bod obecný, proto tento důkaz uvádět nebudeme, ovšem pokud by o to čtenář stál, tak Pech [4, str. 17-19] toto odvození zmiňuje. Tuto vlastnost si dále znázorníme na následujícím obrázku (obr. 3.7).

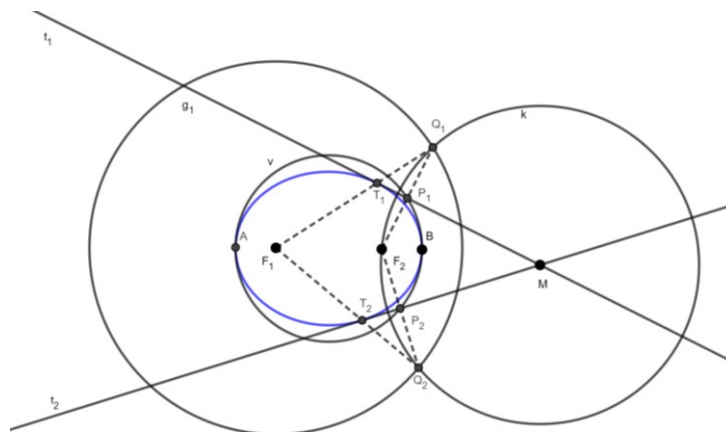


Obrázek 3.7 - Analytický popis tečny elipsy daným bodem

Příklad 7

(S) *K nenarysované elipse určené ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B ved'te daným bodem M tečny. [1, str.35]*

Body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledané tečny leží na řídicí kružnici $g_1 = (F_1, 2a)$. Má-li tečna procházet bodem M , pak musí být vzdálenost ohniska F_2 a bodu s ním souměrně sdruženého podle tečny od bodu M stejná, proto sestrojíme kružnici $k(M, |MF_2|)$. Průsečík Q kružnice g_1 a kružnice k je hledaným bodem souměrně sdruženým s ohniskem F_2 . Pata P kolmice spuštěné z ohniska F_2 na hledanou tečnu je střed úsečky F_2Q a současně musí padnout na vrcholovou kružnici v . Hledané tečny vedeme body MP . Bod dotyku T je průsečíkem tečny t s přímkou F_1Q . Pro případné další průsečíky kružnic g_1 a k se konstrukce povede stejně.



Obrázek 3.8 - Tečna daným bodem

Diskuze: Počet tečen se odvíjí od polohy bodu M .

- Pokud je $|F_1M| + |F_2M| > |AB|$, pak je M vnějším bodem elipsy a kružnice k s kružnicí g_1 protínají ve dvou bodech Q_1, Q_2 , tudíž právě dvě tečny t_1, t_2 procházející bodem M .
- Je-li $|F_1M| + |F_2M| = |AB|$, pak je M bodem elipsy a kružnice k se s kružnicí g_1 protínají právě v jednom bodě a současně tedy existuje právě jedna tečna t , která jím prochází.
- Pokud $|F_1M| + |F_2M| < |AB|$, pak bod M leží uvnitř elipsy a neexistuje průsečík kružnic k a g_1 a ani žádná tečna elipsy, která jím prochází.

(A) *Určete rovnici tečny elipsy dané ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B , procházející bodem M .*

V tomto příkladě nebudeme využívat rovnice z věty 9, ukážeme si, že se dá postupovat také jinak než pouhým dosazením, přičemž tato věta stejně platí pouze pro body elipsy. Postup bude podobný jako u příkladu 6.

Předpokládáme tečnu ve tvaru $t: y = kx + q$, která jakmile prochází bodem $M[m, n]$, tak pro ni platí

$$n = km + q \rightarrow q = n - km.$$

Do rovnice 1.5 elipsy dosadíme $y = kx + q$ a dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + q)^2}{b^2} = 1$$

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + x(2a^2kq) + (a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

Chceme, aby měla přímka s elipsou právě jeden společný bod. To nastane tehdy, je-li diskriminant roven 0.

$$D_1 = 4a^4k^2q^2 - 4(a^2k^2 + b^2)(a^2q^2 - a^2b^2) = 0$$

$$q^2(-a^2b^2) + (a^4b^2k^2 + a^2b^4) = 0$$

Dosadím vztah platný pro q a dostáváme

$$(n - km)^2(-a^2b^2) + (a^4b^2k^2 + a^2b^4) = 0$$

$$k^2(a^2 - m^2) + 2mnk + (b^2 - n^2) = 0$$

$$D_2 = 4m^2n^2 - 4(a^2 - m^2)(b^2 - n^2) = 4(a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2)$$

$$k_{1,2} = \frac{-2mn \pm \sqrt{4(a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2)}}{2(a^2 - m^2)} = \frac{-mn \pm \sqrt{a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2}}{a^2 - m^2}$$

Tento vztah již nejde zjednodušit, tudíž ho dosadíme do konečné rovnice tečny

$$t: y = \frac{-mn \pm \sqrt{a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2}}{a^2 - m^2}x + n - \frac{-mn \pm \sqrt{a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2}}{a^2 - m^2}m$$

$$t: y = \frac{-mn \pm \sqrt{a^2n^2 - a^2b^2 + b^2m^2}}{a^2 - m^2}(x - m) + n \quad 3.2$$

Diskuze:

- Je-li bod M vně elipsy, pak $a^2n^2 + b^2m^2 > a^2b^2$, tudíž $D_2 > 0$ a existují vždy právě dvě řešení.
- Je-li bod M bodem elipsy, pak $a^2n^2 + b^2m^2 = a^2b^2$, tudíž $D_2 = 0$ a existuje jediné řešení.
- Je-li bod M uvnitř elipsy, pak $a^2n^2 + b^2m^2 < a^2b^2$, tudíž $D_2 < 0$ a tato úloha nemá řešení.

Z rovnice je patrné, že přímka procházející bodem M , je tečnou v bodě M , když je tento bod dvojnásobným průsečíkem této přímky s elipsou. Tzn. soustava rovnic elipsy s rovnicí tečny má právě jeden dvojnásobný kořen.

3.2.3 Tečna elipsy a délka hlavní poloosy

Příklad 8

(S) Sestrojte úsečku o délce hlavní poloosy elipsy, která je určena ohniskem F_1 , tečnou t a bodem dotyku T , pokud víme, že její hlavní osa je rovnoběžná s přímkou p . [7, str.39]

Nalezneme bod Q , který je souměrně sdružený s ohniskem F_1 podle zadané tečny. Zároveň sestrojíme rovnoběžku s přímkou p procházející ohniskem F_1 , která je zároveň hlavní osou elipsy o . Druhé ohnisko F_2 nalezneme jako průsečík polopřímky QT s osou paraboly o . Z věty 7 plyne, že Q je bodem řídicí kružnice, jeho vzdálenost od F_2 je $2a$, proto stačí sestroit střed S úsečky F_2Q , potom velikosti úseček $|F_2S| = |QS|$ je hledanou délkou hlavní poloosy.

Diskuze:

- Je-li $|\alpha tp| \geq |\alpha F_1 T t|$ potom se přímka QT s osou o protne v opačné polorovině od t , než v jaké leží F_1 , nebo přímo na tečně, tudíž tato úloha nemá řešení.
- Je-li $|\alpha tp| < |\alpha F_1 T t|$, potom se přímka QT s osou o protíná ve vyhovujícím průsečíku a úloha má právě jedno řešení.

(A) Určete velikost hlavní poloosy a elipsy, určené tečnou t a bodem dotyku T , pokud víme, že její hlavní osa je rovnoběžná s přímkou p .

Stejně jako jsme v minulých příkladech využívali toho, že každá elipsa jde přetransformovat na elipsu, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic. Nyní tyto transformace využijeme k tomu, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zadaná tečna je vyjádřena rovnicí $y = 0$, její bod dotyku s elipsou je bod dotyku $T = [t_1, 0]$ a ohnisko má souřadnice $F_1 = [0, f_1]$, kde $t_1 \neq 0$ nebo $f_1 \neq 0$. Důležité je, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s přímkou $p: y = kx$; $k \in \mathbb{R}$, do tohoto tvaru lze pomocí transformací převést jakoukoliv přímkou. V tomto případě bez újmy na obecnosti vylučujeme tečny ve vrcholech elipsy.

V dalším postupu se budeme řídit postupem z řešení syntetického. Souřadnice bodu souměrně sdruženého jsou $Q = [0, -f_1]$. Nyní určíme obecnou rovnici přímky procházející body T, Q . Určíme její směrový vektor \overrightarrow{QT} , následně její normálový vektor \vec{n}

$$\overrightarrow{QT} = (t_1, f_1) \rightarrow \vec{n} = (-f_1, t_1).$$

Přímka s normálovým vektorem \vec{n} je dána rovnicí

$$-f_1 x + t_1 y + c = 0.$$

Dále chceme, aby tato přímka procházela bodem T , tudíž do ní dosadíme jeho souřadnice a získáváme rovnici přímky procházející body T, Q

$$-f_1 x + t_1 y + f_1 t_1 = 0. \quad 3.3$$

Hlavní osa protíná osu soustavy souřadnic y v bodě F_1 a je rovnoběžná s p , proto je její rovnice

$$y = kx + f_1. \quad 3.4$$

Souřadnice ohniska F_2 získáme jako průsečík o s přímkou QT , když dosadíme rovnici 3.4 do rovnice 3.3

$$-f_1x + t_1(kx + f_2) + f_1t_1 = 0$$

$$(t_1k - f_1)x = -2t_1f_1 \rightarrow x = \frac{-2t_1f_1}{t_1k - f_1},$$

poté dopočítám y

$$y = k \frac{-2t_1f_1}{t_1k - f_1} + f_1 = \frac{-kt_1f_1 - f_1^2}{t_1k - f_1},$$

$$\rightarrow F_2 = \left[\frac{-2t_1f_1}{t_1k - f_1}, \frac{-kt_1f_1 - f_1^2}{t_1k - f_1} \right].$$

Nyní máme všechny prostředky k určení délky hlavní poloosy a , která je poloviční z $|QF_2|$

$$\frac{1}{2}|QF_2| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-2t_1f_1}{t_1k - f_1} - 0\right)^2 + \left(\frac{-kt_1f_1 - f_1^2}{t_1k - f_1} + f_1\right)^2} = a$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4f_1^2(f_1^2 + t_1^2)}{(t_1k - f_1)^2}}$$

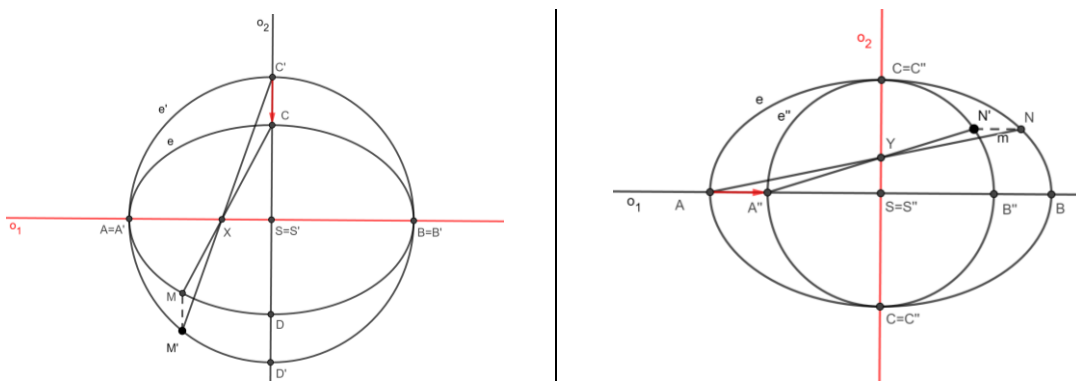
$$a = \sqrt{\frac{f_1^2(f_1^2 + t_1^2)}{(t_1k - f_1)^2}}.$$

Diskuze: Necht' l je směrnice přímky F_1T , potom je diskuze o řešení následující.

- Je-li směrnice $l = \left|\frac{f_1}{t}\right| \leq |k|$, potom se dané přímky protnou na opačné polorovině od tečny t než v jakém leží ohnisko F_1 , nebo přímo na tečně. Úloha tedy nemá řešení.
- Je-li směrnice $l = \left|\frac{f_1}{t}\right| > |k|$, potom má úloha právě jedno řešení.

Pozn.: Zde je možno následně zkonstruovat další body elipsy nebo její rovnici, tak jako v příkladě 4.

3.2.4 Osová afinita mezi kružnicí a elipsou [12]



Obrázek 3.9 - Osová afinita mezi kružnicí a elipsou

Existuje nekonečně mnoho možností, jak zvolit osovou afinitu, my vybíráme afinitu dané osami elipsy. Zvolíme-li si osou afinity hlavní osu o_1 elipsy a směr afinity, který je na ni kolmý. Potom se elipsa, označme ji v tomto případě e , zobrazí na kružnici e' se středem v S , který je současně středem elipsy, a poloměrem $|SA|$. Zvolili jsme si pravoúhlou afinitu, tudíž bod C se zobrazí na C' tak, že C' leží na o_2 a zároveň $|SA| = |SC'|$. Pokud zvolíme osou afinity osu o_2 elipsy, získáme kružnici e'' opět se středem S . Pravoúhlou afinitou se bod A zobrazí na A' , který leží na o_1 . Poloměr kružnice e'' je roven velikosti vedlejší osy elipsy, tedy $|SC| = |SA'|$.

V osové afinitě mezi kružnicí a elipsou vzhledem k incidenci vždy platí, že obrazem tečny bude opět tečna.

Příklad 9

(S) *Nalezněte průsečíky elipsy dané jejími osami a vrcholy s přímkou p , která ji protíná.*
[12]

V této úloze je vhodné použít osovou afinitu, protože elipsu, i když známe osy a vrcholy, neumíme přesně vykreslit. Proto si ji převedeme na kružnici, se kterou již tento problém mít nebudeme.

Obraz přímky p v osové afinitě nalezneme pomocí obrazu dvou bodů. Průsečík P přímky p s osou o_1 je samodružný bod. Dále si zobrazím libovolný bod X dané přímky na X' . Přímka p' prochází body P a X' . Průsečíky K', L' vzniklých obrazů poté promítneme ve směru osové afinity na přímkou p . Dostáváme body K, L , což jsou hledané průsečíky přímky p a elipsy e .

(A) *Určete souřadnice průsečíků elipsy s přímkou p .*

Hledaný průsečík $R = [r, s]$ musí, jak plyne ze zadání, vyhovovat rovnici elipsy

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1$$

a zároveň rovnici

$$p: s = kr + q.$$

Pro nalezení průsečíku nám postačí vyřešit tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, nejlépe dosazovací metodou

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(kr + q)^2}{b^2} = 1$$

$$(b^2 + a^2k^2)r^2 + 2kqa^2r + (q^2a^2 - a^2b^2) = 0,$$

$$D = 4a^2b^2(b^2 - q^2 + k^2a^2).$$

Získáme x-ové souřadnice průsečíků

$$r_{1,2} = \frac{-kqa^2 \pm ab\sqrt{b^2 - q^2 + k^2a^2}}{b^2 + k^2a^2},$$

y-ové souřadnice získáme zpětným dosazením do p , a tedy

$$s_{1,2} = k \left(\frac{-kqa^2 \pm ab\sqrt{b^2 - q^2 + k^2a^2}}{b^2 + k^2a^2} \right) + q.$$

Diskuze: Počet průsečíků se odvíjí od hodnoty determinantu

- $D > 0$, potom je p sečnou a existují dva průsečíky,
- $D = 0$, potom je p tečnou a existuje jeden průsečík,
- $D < 0$, potom je p vnější přímkou, průsečík neexistuje.

Pozn.: Právě jsme se setkali s jedním ze základních využití osově afinity. Za povšimnutí stojí rozdílná obtížnost těchto dvou řešení. Ačkoliv konečné vztahy, plynoucí z obecného analytického řešení, se na první pohled mohou zdát složité, ve skutečnosti toto řešení nijak zvlášť obtížné není. Naproti tomu syntetické řešení je vysokoškolskou látkou převyšující znalosti průměrného středoškolačka.

3.3 Oskulační kružnice elipsy

Definice 6: Kružnice, jejichž oblouky v okolí libovolných bodů kuželosečky nejlépe nahrazují kuželosečku se nazývají **oskulační kružnice**.

Mezi nimi lze též vypíchnout pojem **hyperoskulační kružnice**, kdy se jedná o oskulační kružnice, které nejlépe nahrazují kuželosečku v jejích vrcholech. Tyto objekty jsou jedny ze zásadních týkajících se zejména rýsování kuželoseček.

Příklad 10

(A) *Určete rovnici oskulační kružnice elipsy ve vrcholu A elipsy.* [4, str.11-12]

Libovolná kružnice k , se středem mezi jejími vrcholy a poloměrem menším, než je velikost její vedlejší poloosy, která se dotýká elipsy ve vrcholu A, ji zhruba nahrazuje v blízkém okolí tohoto vrcholu. Zvolíme-li si takovou kružnici, jejíž osy se shodují s osami elipsy, pak můžeme rovnici této kružnice psát ve tvaru

$$(x - s)^2 + y^2 = (a + s)^2,$$

přičemž $S' = (s; 0)$ je její střed.

Pro souřadnice $X = [x, y]$ jejich společných bodů s elipsou $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ snadno najdeme

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2((a + s)^2 - (x - s)^2) &= a^2b^2 \\ x^2(b^2 - a^2) + 2a^2sx - a^2(a^2 - b^2 - 2as) &= 0 \\ x^2e^2 - 2a^2xs - a^2(e^2 - 2as) &= 0 \end{aligned}$$

Kružnice k bude nejlépe nahrazovat elipsu v okolí vrcholu A ve chvíli, kdy průsečík A splyne s průsečíkem X v jeden. Tedy má-li daná kvadratická rovnice dvojnásobný kořen. K tomu nám postačí, aby její diskriminant byl roven 0, a sice

$$(as - e^2)^2 = 0.$$

To nastane právě tehdy, když $s = \frac{e^2}{a}$.

Kružnice o středu $S_1 = \left(-\frac{e^2}{a}; 0\right)$ a poloměru $\rho_1 = (a - s) = \frac{b^2}{a}$ je hledanou kružnicí. Pro kontrolu uvedeme i její rovnici

$$k: \left(x + \frac{e^2}{a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2.$$

(S) Sestrojte oskulační kružnice elipsy v jejích vrcholech. [1, str.38]

Nazveme-li E průsečík tečen elipsy ve vrcholu A . Potom kolmice z bodu E na přímkou AC protíná hlavní osu ve středu S_1 oskulační kružnice ve vrcholu A . Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AS_1E$ a $\triangle SCA$ se vzájemně kolmými přeponami podle věty UU plyne

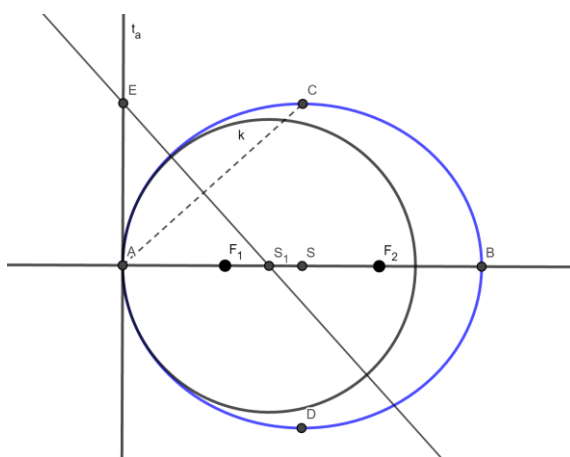
$$\frac{AS_1}{AE} = \frac{SC}{AS}, \text{ tj. } \frac{AS_1}{b} = \frac{b}{a},$$

a tedy $AS_1 = \frac{b^2}{a}$. Zároveň lze si ověřit vzdálenost $|SS_1|$, protože platí

$$|SA| - |S_1A| = |SS_1|,$$

$$a - \frac{b^2}{a} = \frac{e^2}{a}.$$

Kolmici z E na AC sestrojíme konstruktivně jako spojnicí průsečíků kružnic opsaných okolo A , resp. C poloměrem b , resp. a .



Obrázek 3.10 - Oskulační kružnice elipsy ve vrcholu A

Pozn.: Analytické řešení má v tomto případě navrch. Narýsováním oskulační kružnice si můžeme potvrdit, že jsme její analytické vlastnosti odvodili správně.

4 Hyperbola

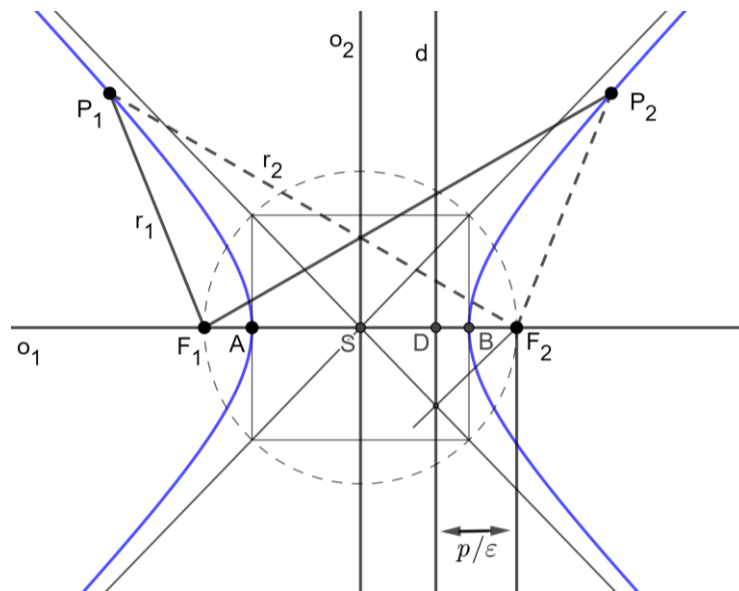
Pojmy definic a vět, není-li uvedeno jinak, jsou inspirovány z [1, str. 40-44]

Definice 7: (Standardní definice hyperboly) Hyperbola je množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů stálý kladný rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost obou pevných bodů.

Pevné body značeny F_1, F_2 jsou **ohniska hyperboly** a spojnice F_1X a F_2X se nazývají opět **průvodiče** r_1, r_2 .

Pomocí vzdáleností lze tuto vlastnost pro množinu bodů X vyjádřit takto:

$$||F_1X| - |F_2X|| = 2a < |F_1F_2|.$$

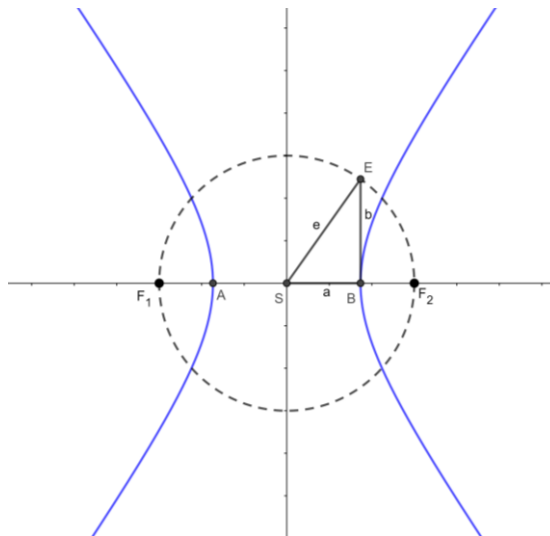


Obrázek 4.1 – Hyperbola

Přímka, na které leží obě ohniska, se nazývá **hlavní osou**, střed ohnisek je **středem hyperboly**. Přímka na ní kolmá procházející středem naopak **vedlejší osou** hyperboly. Vzdálenost $|AB|$ je velikost hlavní osy a značí se $2a$, potom a nazýváme délkou hlavní poloosy hyperboly. Body A, B jsou **vrcholy** hyperboly. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá opět **lineární výstřednost** neboli excentricita a značí se e . Pravoúhlý trojúhelník ΔSBE (obr. 4.2) je **charakteristický trojúhelník** hyperboly, z něj plyne, že číslo $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ je označováno jako délka vedlejší poloosy hyperboly. Numerická výstřednost je opět vyjádřena vztahem $\varepsilon = \frac{e}{a}$, tato výstřednost je větší než jedna, neboť $e > a$.

Věta 10: Je-li excentricita $e = a\sqrt{2}$, potom $a = b$ a hyperbola se nazývá rovnoosá.

Důkaz: Zřejmý z vlastností charakteristického trojúhelníku hyperboly (obr. 4.2).



Obrázek 4.2 - Charakteristický trojúhelník hyperboly

Věta 11 [3, str.16-17]: Apollonijská definice (je-li $\varepsilon > 1$) je ekvivalentní se standardní definicí hyperboly.

Důkaz: (Obr. 4.1)) K tomuto odvození využijeme stejné vlastnosti jako ve větě 5 (str.15). Tentokrát budeme dokazovat, že pokud je $\varepsilon > 1$, pak je rozdíl průvodičů bodů hyperboly konstantní. Jsou-li P_1, P_2 různé body hyperboly souměrné podle osy o_2 , pak platí

$$\begin{aligned}
 & \left| |P_1F_1| - |P_1F_2| \right| = \left| |P_1F_1| - |P_2F_1| \right| \\
 & \varepsilon \left| |P_1d| - |P_2d| \right| = 2\varepsilon \cdot |X_M| = \frac{2p}{\varepsilon^2 - 1} \\
 & \rightarrow \textit{konstantní.}
 \end{aligned}$$

V případě hyperboly je opět standardní definice následkem definice podle Apollonia. Vzájemné vztahy mezi velikostmi hlavní poloosy a , vedlejší poloosy b , lineární excentricity e , numerické excentricity ε a parametrem p jsou

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} & b &= \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} & e &= |SF_1| = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
 p &= \frac{b^2}{a} & |F_1d| &= \frac{b^2}{e} & |Sd| &= |X_S| = \frac{p}{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)} = \frac{a^2}{e}
 \end{aligned}$$

S pomocí stejných argumentů jako u elipsy můžeme říct, že každá hyperbola zadána podle standardní definice je totožná s hyperbolou danou podle Apollonia.

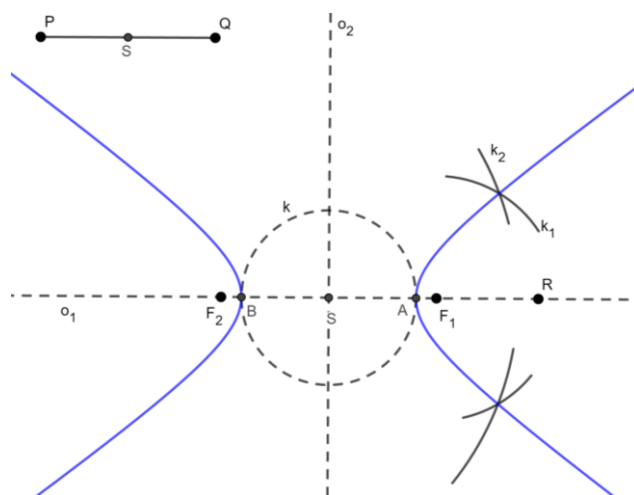
4.1 Bodová konstrukce a rovnice hyperboly

Příklad 11

(S) Sestrojte body hyperboly, znáte-li její ohniska F_1, F_2 a rozdíl velikostí průvodičů jejich bodů. [1, str.40]

(Obr. 4.3) Nechť $|PQ| < |F_1F_2|$ je daný rozdíl průvodičů, potom body hyperboly sestrojíme jako průsečíky kružnic $k_1 = (F_1, r_1), k_2 = (F_2, r_2)$. Poloměry těchto kružnic volíme tak, aby platilo buď $|r_1 - r_2| = |PQ|$, nebo $|r_2 - r_1| = |PQ|$.

Nejsnáze nalezneme vrcholy A, B , pro které platí, že jejich vzdálenost od středu úsečky F_1F_2 se rovná $\frac{1}{2}|PQ|$. Další body hyperboly nalezneme systematicky tak, že na opačné polopřímce k F_2F_1 zvolíme libovolný bod R a ohniskům opíšeme kruhové oblouky o poloměrech $r_1 = |AR|, r_2 = |BR|$, jejich průsečíky jsou hledanými body hyperboly.



Obrázek 4.3 - Bodová konstrukce hyperboly

(A) Určete rovnici hyperboly, jsou-li dána její ohniska $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ a stálý rozdíl průvodičů jejich bodů $2a$.

Střed hyperboly je tedy $S = [0,0]$, určíme velikost excentricity e

$$|SF_1| = |SF_2| = e$$

a pomocí délky hlavní poloosy a dopočítáme b^2

$$b^2 = e^2 - a^2.$$

Dosadíme do rovnice 1.7 (předpokládejme $a > b$) hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1.$$

Obecně si je elipsa s hyperbolou v lecčem podobná, první signál pro tuto podobnost je například jejich rovnice. Ovšem už z definice plyne, že množina všech průsečíků

hyperboly s vedlejší osou je prázdná, zatímco množina těchto průsečíků s elipsou je tvořena právě dvěma jejími vedlejšími vrcholy. Jedním z dalších rozdílů je to, že hyperbola se skládá ze dvou disjunktních částí, které se označují **větvě hyperboly**. Pro body X jedné větve hyperboly platí $|F_1X| - |F_2X| = 2a$, zatímco pro body druhé větve platí $|F_2X| - |F_1X| = 2a$. [4, str. 26-27]

Definice 8 [4, str.27]: Bod X se nazývá **vnějším bodem** hyperboly, jestliže $||F_1X| - |F_2X|| < 2a$. Bod X je **vnitřním bodem** hyperboly právě tehdy, když $||F_1X| - |F_2X|| > 2a$. Body, u kterých dochází k rovnosti jsou body hyperboly.

Rovina je podle tohoto kritéria rozdělena na tři části

- množina vnějších bodů hyperboly, které tvoří vnějšek elipsy. Součástí této roviny je střed hyperboly.
- množina bodů hyperboly.
- množina vnitřních bodů hyperboly, které tvoří vnitřek hyperboly. Součástí této množiny jsou též ohniska hyperboly.

4.2 Hyperbola a přímka

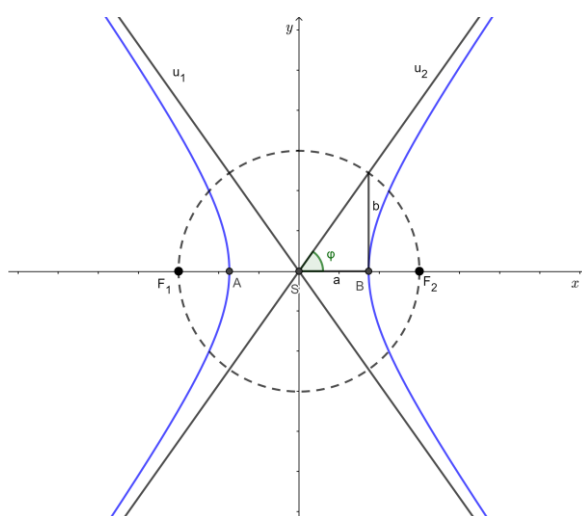
Podobně jako u elipsy pro vzájemnou polohu přímky s hyperbolou existují tři případy. [8, str. 10]

- Pokud neexistuje žádný průsečík, jedná se o **vnější přímku**. Speciálním případem vnějších přímek jsou **asymptoty** hyperboly. Jejich vlastnostem se budeme věnovat později (viz. Definice 10).
- Protínají-li se v jediném průsečíku, pak přímka může být tečnou hyperboly, není to ale jednoznačné jako v případě elipsy. Přímky mají též jediný průsečík s hyperbolou, jsou-li rovnoběžné s asymptotami.
- Pokud má přímka s hyperbolou dva společné body, jedná se o **sečnu hyperboly**.

Protože nestačí definovat tečnu pouze pomocí počtu průsečíků, uvedeme nyní její definici, která už je zcela jednoznačná.

Definice 9: Přímka, která má s hyperbolou právě jeden společný bod a jejíž ostatní body jsou vnější, je **tečnou hyperboly**. Kolmice na tečnu procházející bodem dotyku je **normála hyperboly**.

Definice 10: (Obr 4.4) Přímky procházející středem hyperboly S , svírající s hlavní osou úhel φ , pro který platí $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, se nazývají **asymptoty** hyperboly. Asymptoty rovnoběžné hyperboly jsou na sebe kolmé.



Obrázek 4.4 - Asymptoty hyperboly

Průvodiče bodu T hyperboly dělí rovinu na dvě dvojice vrcholových úhlů. Dvojice vrcholových úhlů obsahující střed hyperboly se nazývají **vnější úhly průvodičů** T . Úhly vedlejší k vnějším úhlům se nazývají **vnitřní úhly průvodičů**.

Věta 12: Tečna hyperboly pólí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.

Důkaz je možno provést stejným způsobem jako ve větě 6 (str.19) u elipsy.

Důsledek 4: Normála v bodě hyperboly pólí vnitřní úhly průvodičů bodu, v němž je sestrojena.

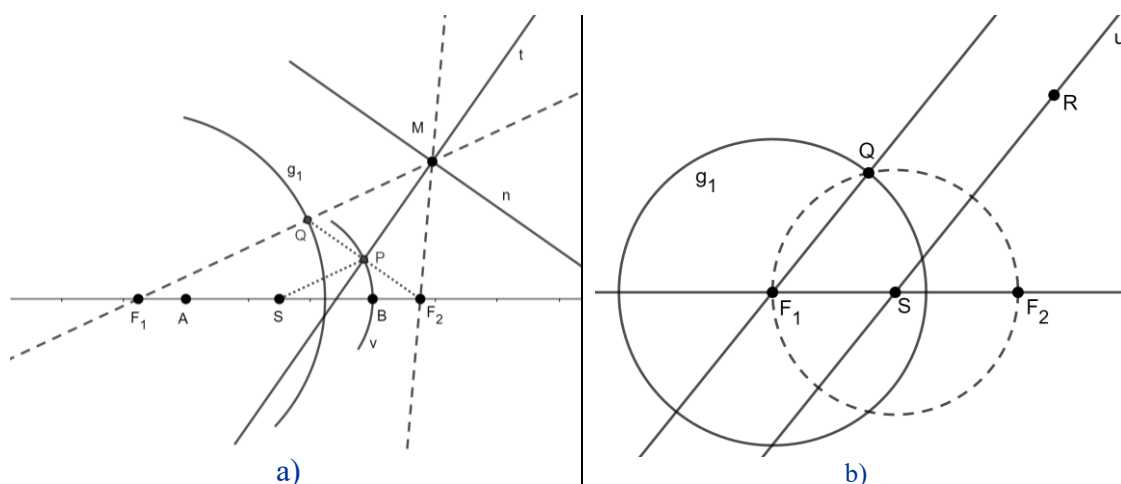
Věta 13: Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem podle tečen hyperboly je kružnice o středu v druhém ohnisku. Tyto kružnice $g_1 = (F_1, 2a)$, $g_2 = (F_2, 2a)$ se nazývají **řídící kružnice hyperboly**.

Důkaz: Opět dokazujeme dvě implikace. Zaprvé, pokud je Q bod souměrně sdružený například s ohniskem F_2 podle nějaké tečny t , pak je $|F_1Q| = ||F_1M| - |QM|| = = ||F_1M| - |F_2M|| = 2a$, to znamená, že Q leží na g_1 .

Obráceně zvolíme libovolný bod na kružnici g_1 a dokazujeme, že je souměrně sdružený s ohniskem F_2 podle tečny hyperboly. Jelikož je F_2 vnějším bodem kružnice g_1 , je zaručeno, že $Q \neq F_2$. Osa souměrnosti úsečky QF_2 buď protíná přímku QF_1 , nebo je s ní rovnoběžná.

V prvním případě (obr. 4.5a) osa t úsečky QF_2 je zřejmě tečnou v bodě M a tedy věta platí.

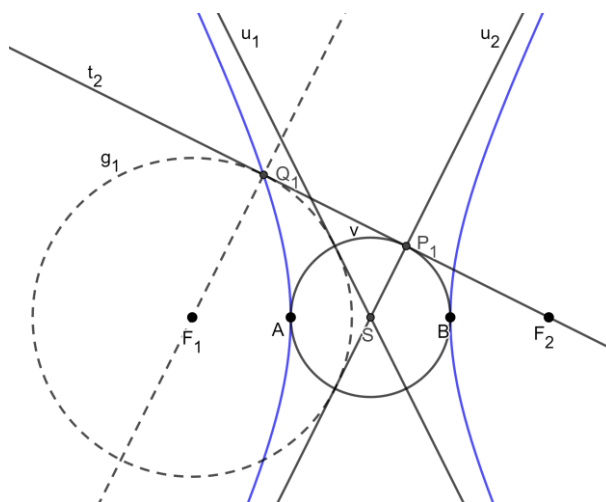
V druhém případě (obr. 4.5b) každý bod R ($R \neq S$) osy úsečky QF_2 , nazveme jí u , je vnějším bodem hyperboly, protože $||RF_1| - |RF_2|| = ||RF_1| - |RQ|| < |F_1Q| = 2a$, takže u není tečnou hyperboly. V tomto případě bod Q je nutně dotykovým bodem tečny ke g_1 , protože platí $F_1Q \perp F_2Q$. Na řídící kružnici existují dva takovéto body Q_1, Q_2 a k nim příslušné asymptoty u_1, u_2 , které nejsou tečnami. Ve chvíli, kdy asymptoty připojíme jako výjimečné přímky k tečnám, je tato věta dokázána.



Obrázek 4.5 - Řídící kružnice hyperboly

Věta 14: Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek na její tečny je **vrcholová kružnice** $v(S, a)$.

Důkaz: Je obdobný jako ve větě 8 (str. 20), pouze k němu doplníme asymptoty jako v předchozí větě. Necht' Q_1 je souměrně sdružený s ohniskem F_2 podle dané tečny (asymptoty) a zároveň tedy bodem řídící kružnice $g_1(F_1, 2a)$. Víme, že $F_1Q_1 \perp F_2Q_1$ a zároveň F_1Q_1 je rovnoběžná s u_2 (obr. 4.6), potom platí, že asymptoty jsou kolmé na tečny vedené z ohnisek k vrcholové kružnici.



Obrázek 4.6 - Řídící a vrcholová kružnice hyperboly

4.2.1 Tečna hyperboly daným směrem (rovnoběžná s přímkou)

Příklad 12

(S) *K nenarysované hyperbole určené ohnisky a vrcholy ved'te tečny daným směrem \vec{s} .*
[1, str.43]

Řešení je podobné s řešením stejného příkladu pro elipsu (Příklad 6, str.21). Také zde můžeme využívat dva různé způsoby řešení. Řešení se ale liší zejména v diskuzi.

Diskuze: Jestliže α definujeme jako úhel, který svírá libovolná přímka daným směrem \vec{s} s hlavní osou hyperboly, potom platí

- je-li $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi = (b:a)$, neexistují žádné tečny hyperboly daným směrem \vec{s} , všechny tyto přímky jsou jejími vnějšími přímkami.
- je-li $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi = (b:a)$, pak jako tečny najdeme právě dvě asymptoty u_1, u_2 .
- je-li $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi = (b:a)$, existují vždy právě dvě tečny hyperboly daným směrem \vec{s} .

(A) Určete rovnici tečny elipsy dané ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B daným směrem $\vec{s} = (u, v)$.

I zde je řešení podobné jako v příkladu 6.

Nechť tečna t je vyjádřena rovnicí ve tvaru

$$y = \left(\frac{v}{u}\right)x + q$$

$$y = kx + q$$

kde $u, v, q \in R, u \neq 0$.

Toto vyjádření dosadíme do kanonické rovnice hyperboly 1.7 (předpokládejme $a > b$) a postupně dopočítáme neznámou q

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 a^2 - b^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 a^2 - b^2}.$$

Rovnice tečny t je tedy následující

$$t: y = \left(\frac{v}{u}\right)x \pm \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 a^2 - b^2}. \quad (\text{srov. s rovnicí 3.1}).$$

Diskuze: Řešení se odvíjí od počtu řešení pro neznámou q , tedy možností určit odmocninu $\sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 a^2 - b^2}$ a sice tedy

- je-li $k = \frac{v}{u} < \frac{b}{a}$, potom $\left(\frac{v}{u}\right)^2 a^2 - b^2 < 0$, a tedy neexistují rovnice tečen hyperboly rovnoběžných s daným směrem.
- je-li $k = \frac{v}{u} = \frac{b}{a}$, potom je $q = 0$, potom jako hledané rovnice tečen najdeme rovnice asymptot.
- je-li $k = \frac{v}{u} > \frac{b}{a}$, potom $\left(\frac{v}{u}\right)^2 a^2 - b^2 > 0$ a získáváme dvě různá řešení pro q , tedy existují právě dvě rovnice tečen hyperboly rovnoběžných s daným směrem.

4.2.2 Tečna hyperboly daným bodem

Věta 15 [4, str.34]: Rovnice

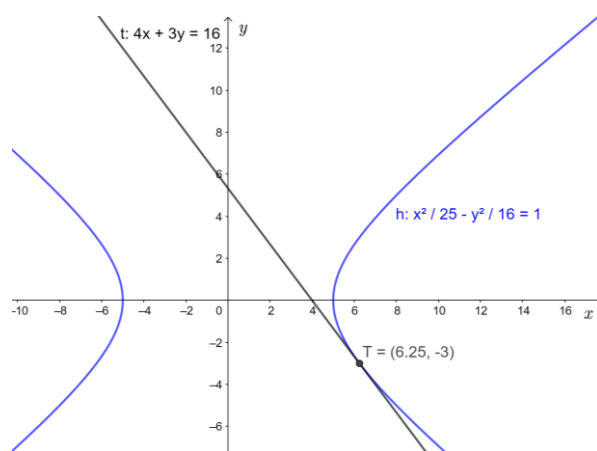
$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

je rovnicí tečny k hyperbole s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$.

Odvození této rovnice pro body hyperboly si lze opět dohledat v [4, str.32-34].

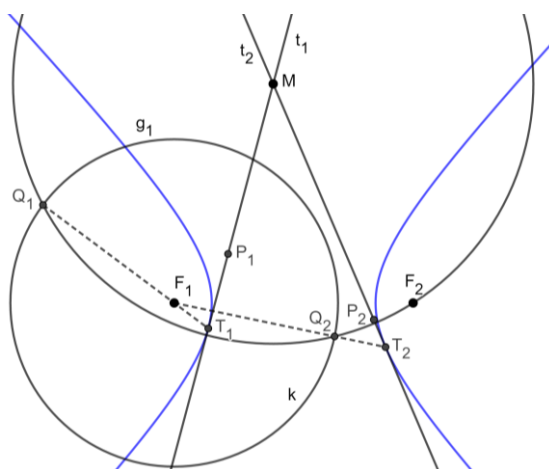


Obrázek 4.7 - Analytický popis tečny hyperboly daným bodem

Příklad 13

(S) *K nenarýsované hyperbole určené ohnisky a vrcholy vedte tečny daným bodem M.*
[1, str.43]

Řešení je podobné s řešením stejného příkladu pro elipsu (Příklad 7. str.24). Také zde můžeme využívat dva různé způsoby řešení.



Obrázek 4.8 - Tečny hyperboly daným bodem

Diskuze: Počet tečen se odvíjí od polohy bodu M .

- Pokud je $||F_1M| - |F_2M|| > |AB|$, pak je M vnějším bodem hyperboly a kružnice k s kružnicí g_1 protínají ve dvou bodech, tudíž právě dvě tečny t_1, t_2 procházející bodem M .
- Je-li $||F_1M| - |F_2M|| = |AB|$, pak je M bodem elipsy a kružnice k se s kružnicí g_1 protínají právě v jednom bodě a současně tedy existuje právě jedna tečna t , která jím prochází.
- Pokud $||F_1M| - |F_2M|| < |AB|$, pak bod M leží uvnitř elipsy a neexistuje průsečík kružnic k a g_1 a ani žádná tečna, která jím prochází.

Je-li $S \equiv M$ potom tečny hyperboly splývají s asymptotami.

(A) Určete rovnici tečny elipsy dané ohnisky F_1, F_2 a hlavními vrcholy A, B , procházející bodem M .

I zde je řešení podobné jako v příkladu 7, proto si uvedeme pouze stěžejní části pro průběžnou kontrolu. Necht' tečna t je vyjádřena rovnicí $t: y = kx + q$, kde $k, q \in R$, zároveň $q = n - km$. Toto vyjádření dosadíme do kanonické rovnice hyperboly 1.7 (předpokládejme $a > b$) a získáváme

$$x^2(b^2 - k^2a^2) - x(2a^2kq) - (a^2q^2 + a^2b^2) = 0.$$

Chceme, aby měla přímka s elipsou právě jeden společný bod. To nastane tehdy, je-li diskriminant roven 0.

$$D_1 = q^2 + b^2 - k^2a^2 = 0.$$

Dosadím vztah platný pro q a dostáváme

$$k^2(m^2 - a^2) - 2kmn + (n^2 + b^2) = 0,$$

$$D_2 = 4(a^2n^2 + a^2b^2 - b^2m^2),$$

$$k_{1,2} = \frac{mn \pm \sqrt{a^2n^2 + a^2b^2 - b^2m^2}}{m^2 - a^2}.$$

Tento vztah již nejde zjednodušit, tudíž ho dosadíme do konečné rovnice tečny

$$t: y = \frac{mn \pm \sqrt{a^2n^2 + a^2b^2 - b^2m^2}}{m^2 - a^2}(x - m) + n. \quad (\text{srovnejte s rovnicí 3.2})$$

Diskuze:

- Je-li $D_2 > 0$, pak je bod M vně hyperboly a existují vždy právě dvě řešení.
- Je-li $D_2 = 0$, pak je bod M bodem hyperboly a existuje jediné řešení.
- Je-li $D_2 < 0$, pak je bod M uvnitř hyperboly a tato úloha nemá řešení.

4.2.3 Asymptoty dané ohnisky a vrcholy hyperboly

Již zmiňované asymptoty jsou velice užitečné pro konstrukci hyperboly, určují totiž přibližný průběh hyperboly, její větve se k nim neustále přibližují, ale nikdy se neprotnou. Asymptoty jsou pro oba typy hyperboly stejné, jen poloha hyperboly a vzhledem k asymptotám liší.

Příklad 14

(S) Sestrojte asymptoty k hyperbole dané ohnisky F_1, F_2 a vrcholy A, B . [1, str. 43]

Tato konstrukce vyplývá z věty 14, pokud tedy sestrojíme vrcholovou kružnici $v(S_{AB}, |SA|)$ hyperboly a tečny t_1, t_2 k ní procházející postupně každým z ohnisek. Potom kolmice na dané tečny, procházejícím středem hyperboly jsou hledané asymptoty u_1, u_2 .

(A) Určete rovnice asymptot hyperboly dané ohnisky $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ a vrcholy $A = [-a, 0]$, $B = [a, 0]$.

Z definice asymptot víme, že svírá s osou úhel $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, takové přímky existují vždy právě dvě. Jejich rovnice budeme uvažovat ve tvaru $y = \pm kx$, směrnici k lze vyjádřit vztahem $k = \frac{b}{a}$. K řešení nám tedy postačí vyjádřit dané koeficienty označující délku hlavní a vedlejší poloosy.

Pomocí obou ohnisek, nebo vrcholů opět určíme střed $S = [0, 0]$. Známe-li všechny tyto body, potom jsme schopni určit velikost excentricity $e = |SF_1|$ a hlavní poloosy $a = |SA|$. Poslední hodnota, kterou potřebujeme, je velikost vedlejší poloosy $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

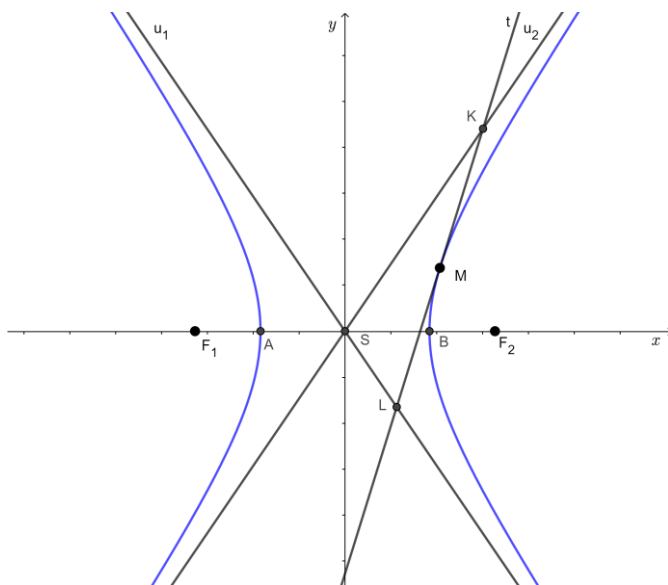
Získané hodnoty doplním do rovnic asymptot

$$u_1: y = -\frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{a}x,$$

$$u_2: y = \frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{a}x.$$

4.2.4 Tečna hyperboly dána bodem dotyku a jejími asymptotami

Věta 16 [4, str. 40]: Úsek tečny omezený asymptotami je půlen bodem dotyku.



Obrázek 4.9 - Věta č.13

Důkaz: (Obr.4.9) Nechť rovnice hyperboly je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

potom rovnici tečny s bodem dotyku v $M = [m, n]$ lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} = 1$$

a asymptoty u_1, u_2 charakterizuje rovnice

$$\left(y + \frac{a}{b}x\right)\left(y - \frac{a}{b}x\right) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Nyní se pustíme do výpočtu průsečíků K, L asymptot s tečnou. Z rovnice tečny si vyjádříme y

$$y = \left(\frac{mx}{a^2} - 1\right)\frac{b^2}{n},$$

a dosadíme do rovnice asymptot

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\left(\frac{mx}{a^2} - 1\right)\frac{b^2}{n}\right)^2}{b^2} = 0$$

$$b^2x^2 - a^2\left(\left(\frac{m^2x^2}{a^4} - 2\frac{mx}{a^2} + 1\right)\frac{b^4}{n^2}\right)$$

$$\frac{a^2n^2 - b^2m^2}{a^4n^2}x^2 - 2\frac{b^2m}{a^2n^2}x + \frac{b^2}{n^2} = 0.$$

Bod dotyku M je bodem hyperboly a proto platí $a^2n^2 - b^2m^2 = a^2b^2$. Pomocí tohoto vztahu si lze výpočet průsečíků zjednodušit

$$\begin{aligned} \frac{a^2b^2}{a^4n^2}x^2 - 2\frac{b^2m}{a^2n^2}x + \frac{b^2}{n^2} &= 0 \\ a^2b^2x^2 - 2a^2b^2mx + a^4b^2 &= 0 \\ x^2 - 2mx + a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Součet kořenů této rovnice je podle Vietových vzorců roven $2m$, z čehož plyne, že x -ová souřadnice středu úsečky je m . Tímto jsme dokázali, že středem úsečky K, L je bod dotyku $M = [m, n]$.

Příklad 15

(S) Sestrojte tečnu hyperboly, je-li dán bod dotyku M a asymptoty hyperboly. [4, str.41]

Následkem předchozí věty nám postačí pomocí středové souměrnosti sestavit příčku, jejíž krajní body leží na asymptotách a zároveň je daným bodem půlena.

(A) Určete rovnici tečny hyperboly, pokud známe bod dotyku $M = [m, n]$ a rovnice asymptot $u_{1,2}$. [8, str.31]

Bod dotyku je zároveň bodem hyperboly, naším prvním úkolem bude si trochu přiblížit o jakou hyperbolu se jedná. Z definice asymptot víme, že jejich směrnice lze napsat pomocí velikostí poloos hyperboly, z tohoto vztahu nyní určíme, v jakém poměru dané velikosti jsou

$$k = \frac{b}{a} \rightarrow b = ka. \quad 4.1$$

Necht' $l = (M - O)$, kde O je počátek soustavy souřadnic, je směrnice přímky procházející body M, O . Dle této směrnice a jejímu vztahu ke směrnici asymptoty k zjistíme polohu zadaného bodu hyperboly vůči daným asymptotám. Ta nám určuje, zda má hyperbola hlavní osu vodorovnou nebo svislou, a podle toho zvolíme odpovídající rovnici.

Necht' $l < k$, je její hlavní osa vodorovná, tudíž zvolíme rovnici 1.7, do které dosadíme vztah 4.1

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(ka)^2} = 1.$$

Nyní dosadíme souřadnice bodu M

$$\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{(ka)^2} = 1,$$

$$k^2 m^2 - n^2 = k^2 a^2$$

$$m^2 - \frac{n^2}{k^2} = a^2$$

a získáme vyjádření velikosti poloos

$$a = \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{k^2}} \rightarrow b = ka = k \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{k^2}}$$

Dané vztahy tedy doplníme do rovnice 1.7 hyperboly

$$\frac{x^2}{m^2 - \frac{n^2}{k^2}} - \frac{y^2}{k^2 \left(m^2 - \frac{n^2}{k^2}\right)} = 1,$$

a tu nyní rozepíšeme podle vztahu z věty 15 (str.38)

$$\frac{mx}{m^2 - \frac{n^2}{k^2}} - \frac{ny}{k^2 \left(m^2 - \frac{n^2}{k^2}\right)} = 1.$$

Pro případ, kdy je $l > k$, potom je jeho hlavní osa svislá, a k získání vztahu pro poloosy využijeme rovnici hyperboly 1.8 a budeme postupovat stejně.

Pozn.: Pokud bychom nechtěli určovat směrnici l , můžeme využít vylučovací metodu a vyzkoušet rovnou obě možnosti. Ve špatné nám vyjde pro a pod odmocninou záporné číslo.

4.3 Oskulační kružnice hyperboly

Význam a definici 6 oskulačních kružnic jsme si již uvedli, nyní uvedeme příklad, který nám je přiblíží dále.

Příklad 16 [1, str. 44]

(A) *Určete rovnici oskulační kružnice hyperboly v jejím vrcholu.*

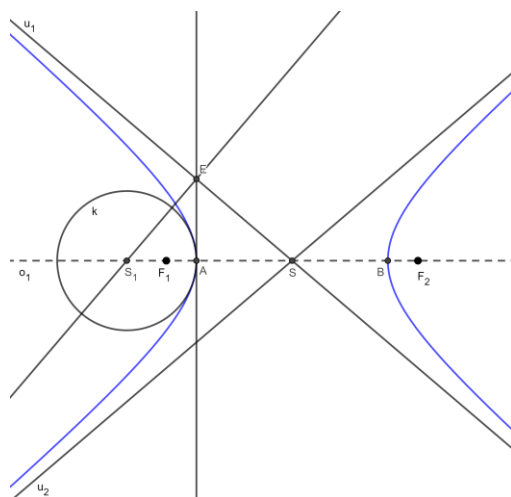
Analytické řešení je téměř totožné s řešením elipsy, je však vhodné si uvědomit, že její střed je jedním z jejích vnitřních bodů, a tedy střed i celá oskulační kružnice leží na opačné polopřímce k \overline{AS} než tomu bylo u elipsy. Rovnice oskulační kružnice hyperboly ve vrcholu A je opět

$$k: \left(x - \frac{e^2}{a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2.$$

(S) Sestrojte osculační kružnice hyperboly v jejím vrcholu A .

V bodě A vztyčíme kolmici na hlavní osu o_1 hyperboly, která je zároveň její tečnou. Daná tečna protíná asymptotu u_1 hyperboly v bodě E . Dále v tomto bodě sestrojíme kolmici k k asymptotě u_1 . Průsečík kolmice k s hlavní osou o_1 je středem S_1 osculační kružnice.

Z podobnosti trojúhelníků ΔS_1AE a ΔEAS plyne, že $|S_1A| = \frac{b^2}{a}$, což nám zároveň potvrzuje předchozí analytické odvození.



Obrázek 4.10 - Osculační kružnice hyperboly ve vrcholu A

5 Parabola

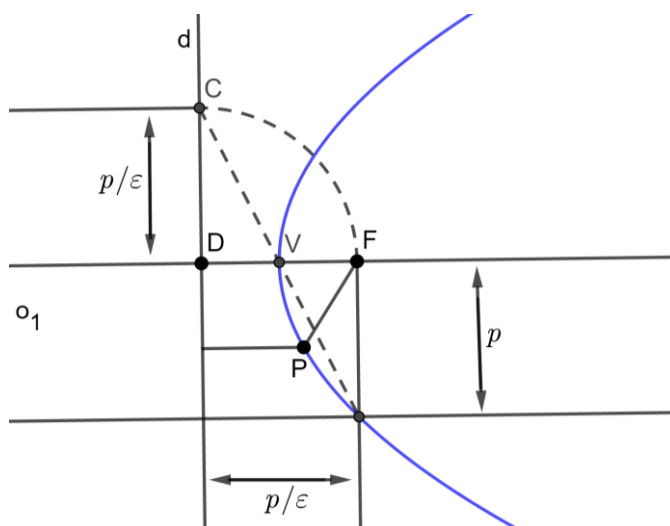
Pojmy vět a definic této kapitoly, není-li uvedeno jinak vychází z [1, str.45-50].

Definice 11: (Standardní definice paraboly) Parabola je množina bodů, které mají od pevného bodu a dané přímky stejnou vzdálenost.

Pevný bod značíme F a nazýváme ho **ohniskem** paraboly a přímka d je její **řídící přímkou**. Spojíme-li libovolný bod paraboly s ohniskem a zároveň jím vedeme kolmici na řídící přímku, potom tyto dvě spojnice FX, Fd označujeme jako **průvodiče** r_1, r_2 paraboly.

Pomocí vzdáleností lze tuto vlastnost pro množinu bodů X vyjádřit takto:

$$|FX| = |Fd| = p.$$



Obrázek 5.1 -Parabola

Věta 17 [3, str. 16-17]: Apolloniiovská definice (je-li $\varepsilon = 1$) je ekvivalentní se standardní definicí paraboly.

Důkaz: (Obr. 5.1) V případě, že $\varepsilon = 1$ je očividné, že Apolloniiovská definice je totožná se standardní definicí paraboly. Pro libovolný bod paraboly X tedy platí $|FX| = \varepsilon|Fd| = |Fd| = p$ je **parametr paraboly**.

5.1 Bodová konstrukce a rovnice paraboly

5.1.1 Parabola určená ohniskem a řídící přímkou

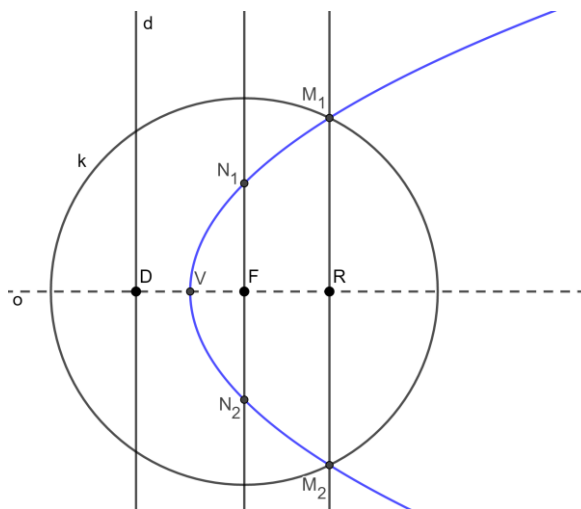
Příklad 17

(S) *Sestrojte body paraboly, znáte-li její ohnisko F a řídící přímku d .* [1, str.45]

Spustíme kolmici o z daného ohniska F na řídící přímku. Průsečík této kolmice s řídící přímkou označme jako D . Z definice víme, že parabola je množina bodů, které mají

stejnou vzdálenost od ohniska a řídící přímky, tudíž střed V úsečky FD je bodem paraboly, tento bod nazveme **vrchol paraboly**.

Dále vedeme rovnoběžku s řídící přímkou v libovolném bodě R polopřímky VF a sestrojíme kružnici $k = (F, |DR|)$, potom existují dva jejich průsečíky M_1, M_2 , které jsou dalšími body paraboly.



Obrázek 5.2 - Bodová konstrukce paraboly

Kolmice na řídící přímku procházející ohniskem je **osa paraboly** o .

Pokud bychom sestrojili rovnoběžku s přímkou d procházející ohniskem, tak pro průsečíky s kružnicí k , v obrázku značené jako N_1, N_2 , prokazatelně platí $|FN_1| = |FN_2| = p$.

Příklad 17

(A) Určete rovnici paraboly dané ohniskem $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a řídící přímkou $d: x = -\frac{p}{2}$.

Spočítáme vzdálenost $|Fd|$, abychom získali parametr p

$$|Fd| = \left|\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right| = p.$$

Dosadíme do rovnice 1.9 paraboly

$$y^2 = 2px.$$

Konkrétně:

Napište rovnici paraboly, je-li dána ohniskem $F = [3,0]$ a řídící přímkou $d: x = -3$.

Velikost parametru p je potom rovna

$$p = |Fd| = |3 + 3| = 6.$$

Daný parametr dosadíme a získáváme rovnici

$$y^2 = 12x.$$

Definice 12 [4, str.44]: Bod X nazveme **vnějším bodem** paraboly, když $|XF| > |Xd|$, jestliže je X **vnitřním bodem**, pak platí $|XF| < |Xd|$.

Parabola dělí rovinu na tři části:

- vnější body paraboly tvoří vnějšek paraboly,
- body paraboly,
- vnitřní body paraboly tvoří vnitřek paraboly, jeho součástí je též ohnisko paraboly.

5.1.2 Parabola určená ohniskem a dvěma různými body

Příklad 18

(S) *Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F a dva různé body paraboly M, N .* [9, str.23]

Nejprve nalezneme řídicí přímku, body paraboly od ní mají stejnou vzdálenost jako od ohniska, proto sestrojíme postupně kružnice $k_1 = (M, |MF|), k_2 = (N, |NF|)$. Řídicí přímku získáme jako společnou tečnu kružnic k_1, k_2 . Zbytek konstrukce je totožný s bodovou konstrukcí paraboly.

Diskuze: Množina řešení se odvíjí od počtu a typu průsečíků k_1, k_2 plynoucí ze vzájemné polohy bodů M, N, F .

- Pokud $|MF| + |NF| < |MN|$, pak mají kružnice jediný vnitřní dotyk a jejich jediná tečna prochází ohniskem, což je spor s definicí a úloha nemá řešení.
- Pokud $|MF| + |NF| = |MN|$, pak mají kružnice jediný vnější dotyk a existují tři jejich tečny, z nichž jedna prochází ohniskem. Úloha má tedy dvě řešení.
- Pokud $|MF| + |NF| > |MN|$, pak mají kružnice dva různé průsečíky a lze sestřit dvě společné tečny, které jsou zároveň dvěma vyhovujícími řešeními.

(A) *Určete rovnici paraboly, je-li dáno ohnisko $F = [0,0]$ a dva různé body paraboly $M = [m, n], N = [m, -n]$.* [9, str. 29]

Všimněme si, jak jsou situovány body paraboly. Pokud víme, že jsou body M, N vzájemně různé a zároveň platí $|MF| = |NF|$, jedná se o body souměrně sdružené podle osy paraboly. Je zřejmé že střed a současně průsečík úsečky MN s osou paraboly má souřadnice $S = [m, 0]$, tudíž, s ohledem na polohu ohniska, je osa paraboly o shodná s osou x kartézské soustavy souřadnic.

Nyní vypočteme délku průvodičů

$$|MF| = |NF| = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Tedy i jejich vzdálenost od řídicí přímky musí být rovna $\sqrt{m^2 + n^2}$. Pro řídicí přímku d , která je kolmá na osu paraboly o , platí

$$d: x = m \pm \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Parametr p je roven

$$p = |FD| = \left| m \pm \sqrt{m^2 + n^2} \right|.$$

Nyní jsme již schopni dosazením získat konečné tvary rovnic, které jsou dva.

- Je-li $m < 0$, pak má rovnice paraboly tvar

$$y^2 = -2 \left(m + \sqrt{m^2 + n^2} \right) \left(x - \frac{m + \sqrt{m^2 + n^2}}{2} \right).$$

- Je-li $m > 0$, pak má rovnice paraboly tvar

$$y^2 = 2 \left| m - \sqrt{m^2 + n^2} \right| \left(x - \frac{m - \sqrt{m^2 + n^2}}{2} \right).$$

Rozšíření:

Je očividné, že dané řešení nám usnadnila vhodná volba bodů paraboly, tudíž jsme ani nemuseli dělat diskuzi řešení. Nyní stručně naznačíme postup, který je možné použít kdykoliv. Jedna z možností je totiž analyticky popsat řešení, které jsme již využili synteticky. Budeme tedy hledat rovnici řídicí přímky jako rovnici společné tečny dvou kružnic.

Jsou-li $M = [m_1, m_2]$, $N = [n_1, n_2]$ body paraboly, a ohnisko $F = [0, 0]$, vytvoříme rovnice kružnic

$$k_1: (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = |MF|^2,$$

$$k_2: (x - n_1)^2 + (y - n_2)^2 = |NF|^2.$$

Nechť rovnice tečny je ve tvaru

$$t: y = kx + q,$$

pak můžeme tento tvar doplnit do rovnic kružnic a získáme soustavu, ze které vyjádříme postupně neznámé k, q . Jakmile získáme rovnici řídicí přímky, budeme postupovat obdobně jako třeba v příkladě 17. Další zjištění bychom museli opět zohlednit v diskuzi vzhledem k souřadnicím bodů F, M, N .

Pozn.: Syntetické řešení plyne z definice paraboly. Analyticky obtížnost úlohy závisí na poloze daných bodů.

5.2 Parabola a přímka

Pro vzájemnou polohu paraboly s přímkou rozlišujeme následující možnosti. [9, str 10]

- Protínají-li se ve dvou bodech, potom je přímka **sečnou paraboly**.
- Protínají-li se v jednom bodě, potom rozlišujeme další dva případy, buď je to sečna rovnoběžná s osou paraboly, nebo se jedná o její tečnu.
- Pokud nemají žádný společný bod, jedná se o **vnější přímku paraboly**.

Definice 13: Přímka, která má s parabolou právě jeden společný bod a jejíž ostatní body jsou vnější, je **tečnou paraboly**. Speciální je tečna procházející vrcholem paraboly, nazýváme ji **vrcholová tečna**. Kolmice na tečnu v bodě dotyku je **normála**.

Nechť M je bodem paraboly, potom **vnější úhel průvodičů** označíme úhel, v němž leží bod D , průsečík řídicí přímky s osou paraboly, a k němu vrcholový úhel. Jejich vedlejší úhly nazýváme **vnitřní úhly průvodičů**.

Věta 18: Tečna púlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.

Důkaz: Pokud t je osa vnějších úhlů průvodičů bodu M a vedeme tímto bodem kolmici na řídicí přímku, pak jejich průsečík označíme Q . Z definice plyne $|MF| = |MQ|$, tudíž je Q souměrně sdružený s F podle dané tečny a pro libovolný jiný bod R přímky t platí, že $|RF| = |RQ|$. Zvolíme-li bod R různý od M a patu kolmice z R na řídicí přímku označíme X . Protože $X \neq Q$, je $|RQ| > |RX|$, a tedy $|RF| > |RX|$, tudíž každý bod $R \neq M$ ležící na přímce t , je vnějším bodem, čímž je splněna definice tečny.

Důsledek 5: Vrcholová tečna je kolmá na osu paraboly a zároveň žádná tečna není rovnoběžná s osou paraboly.

Důsledek 6: Normála v bodě paraboly púlí vnitřní úhly průvodičů bodu, v němž je sestrojena.

Věta 19: Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem podle tečen paraboly je její řídicí přímka d .

Důkaz: (Obr. 5.3) O tom, že pokud je dána tečna, pak bod Q , pata kolmice vedené z bodu dotyku tečny na řídicí přímku, je bodem souměrně sdruženým s ohniskem podle dané tečny jsme se přesvědčili již v důkazu předchozí věty 18.

Naopak nechť Q je libovolným bodem řídicí přímky, osa souměrnosti t úsečky QF a kolmice v Q k řídicí přímce jsou vždy různoběžné. Jejich průsečík M je bodem paraboly a protože t púlí vnější úhly průvodičů, je tečnou paraboly.

Věta 20: Množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska na tečny paraboly je vrcholová tečna v paraboly.

Důkaz: (Obr. 5.3) Nechť M je bodem paraboly různým od vrcholu V . Sestrojíme tečnu t v bodě M . Dále spustíme z ohniska F kolmici na danou tečnu a její patu označíme P . Nechť Q je průsečík této kolmice s řídicí přímkou d , pak platí $|PF| = |PQ|$. D je pata kolmice osy paraboly na řídicí přímku, pak též platí, že vrchol V je vždy středem úsečky

Diskuze:

- Není-li směr \vec{s} rovnoběžný s osou paraboly, pak existuje právě jeden průsečík Q a tedy daným směrem lze sestrojít právě jednu tečnu.
- Pokud je směr \vec{s} rovnoběžný s osou paraboly, pak neexistuje průsečík její kolmice a řídicí přímky, tedy ani tečna s ní rovnoběžná.

Ke konstrukci bychom mohli využít též vlastností vrcholové tečny.

(A) Určete rovnici tečny paraboly určené ohniskem $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a řídicí přímkou $d: x = -\frac{p}{2}$ rovnoběžné s daným směrem $\vec{s} = (u, v)$.

Řešení je téměř totožné s analytickým řešením u elipsy a hyperboly. Směrnice tečny je dána vztahem $k = \frac{v}{u}$, ($u, v \in \mathbb{R}, u \neq 0$), potom uvažujeme rovnici tečny paraboly ve tvaru $t: y = kx + q$. Hledáme neznámou q pomocí dosazení do kanonické rovnice paraboly.

Pro q existuje jediné řešení a sice $q = \frac{p}{2k}$. Rovnice tečny daným směrem \vec{s} má vždy tvar

$$t: y = \left(\frac{v}{u}\right)x + \frac{p}{2\left(\frac{v}{u}\right)}.$$

Diskuze:

- Je-li $v = 0$, potom úloha nemá řešení.
- Je-li $v \neq 0$, potom má úloha vždy právě jedno řešení.

5.2.2 Tečna paraboly daným bodem

Věta 21[9, str.12]: Rovnice

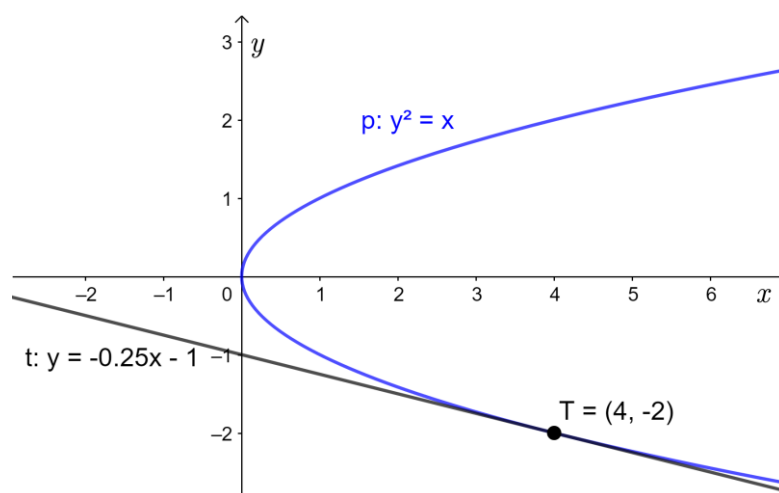
$$y_0y = px_0 + px; p > 0,$$

je rovnicí tečny k parabole s rovnicí

$$y^2 = 2px$$

v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$.

Pro ostatní typy paraboly se rovnice tečny vytvoří podobně. Odvození této věty pro body paraboly lze opět nalézt v souboru [4, str.47-49].

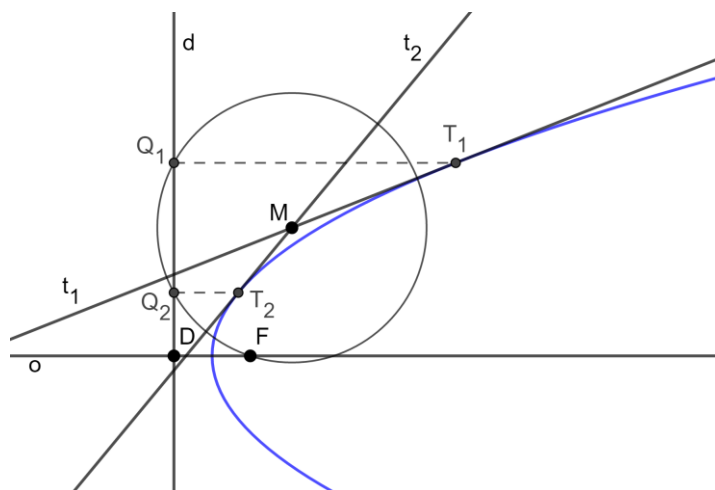


Obrázek 5.5 - Analytický popis tečny paraboly daným bodem

Příklad 20

(S) *K nenaryšované parabole určené ohniskem F a řídicí přímkou d ved'te daným bodem M tečny. [1, str. 47]*

Z bodu M zkonstruujeme kružnici $k = (M, |MF|)$. Průsečík této kružnice s řídicí přímkou d označme Q , tento bod je souměrně sdružený s ohniskem podle hledané tečny. Tečnu t sestrojíme jako osu úsečky FQ . Dotkový bod paraboly s tečnou je průsečíkem kolmice k řídicí přímce procházející bodem Q s tečnou t .



Obrázek 5.6 - Tečna paraboly daným bodem

Diskuze:

- Pokud $|MF| > |Md|$, pak je M vnějším bodem paraboly a kružnice k protíná řídicí přímku ve dvou různých bodech $Q_{1,2}$. Existují tedy dvě různé tečny.
- Pokud $|MF| = |Md|$, pak je M bodem paraboly a kružnice k se dotýká řídicí přímky v jednom bodě, tudíž existuje právě jedna tečna.

- Pokud $|MF| < |Md|$, pak je M vnitřním bodem paraboly a kružnice k nemá s řídicí přímkou žádný společný bod, řešení tedy neexistuje.

Nebo lze pro řešení využít vrcholové tečny.

(A) Určete rovnici tečny paraboly, dané ohniskem $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a řídicí přímkou $d: x = -\frac{p}{2}$ procházející bodem $M[m, n]$.

Budeme postupovat podobně jako u předchozích kuželoseček. Necht' tečna t je vyjádřena rovnicí $t: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, zároveň $q = n - km$. Toto vyjádření dosadíme do kanonické rovnice paraboly 1.9 a získáváme

$$k^2x^2 + 2x(kq - p) + q^2 = 0.$$

Chceme, aby měla přímka s hyperbolou právě jeden společný bod. To nastane tehdy, je-li diskriminant roven 0.

$$D_1 = -2kqp + p^2 = 0.$$

Dosadím vztah platný pro q a dostáváme

$$2k^2pm - 2kpn + p^2 = 0,$$

$$D_2 = 4p^2(n^2 - 2pm),$$

$$k_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2pm}}{2m}.$$

Tento vztah již nejde zjednodušit, tudíž ho dosadíme do konečné rovnice tečny paraboly

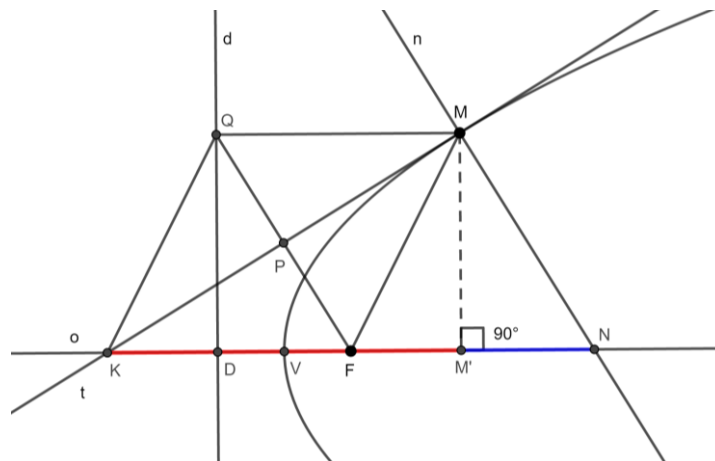
$$t: y = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2pm}}{2m}(x - m) + n.$$

Diskuze: Počet řešení se odvíjí od hodnoty determinantu D_2 .

- Je-li $D_2 > 0$, pak má úloha dvě řešení, tedy existují právě dvě tečny paraboly procházející vnějším bodem M .
- Je-li $D_2 = 0$, pak má úloha právě jedno řešení. Bod M je bodem paraboly a prochází jím pouze jedna tečna.
- Je-li $D_2 < 0$, pak daná úloha nemá řešení. Bod M je vnitřním bodem paraboly a tím neprocházejí žádné její tečny.

5.2.3 Parabola dána tečnami a body dotyku

Definice 14[9, str.5]: Necht' je v libovolném bodě M paraboly sestrojena tečna t . Patu kolmice z bodu M na osu o paraboly označíme M' , průsečík tečny t s osou o označíme K a průsečík normály k dané tečně s osou paraboly N . Potom úsečku KM' nazýváme **subtangenta** (červená) a úsečku $M'N$ **subnormála** (modrá).



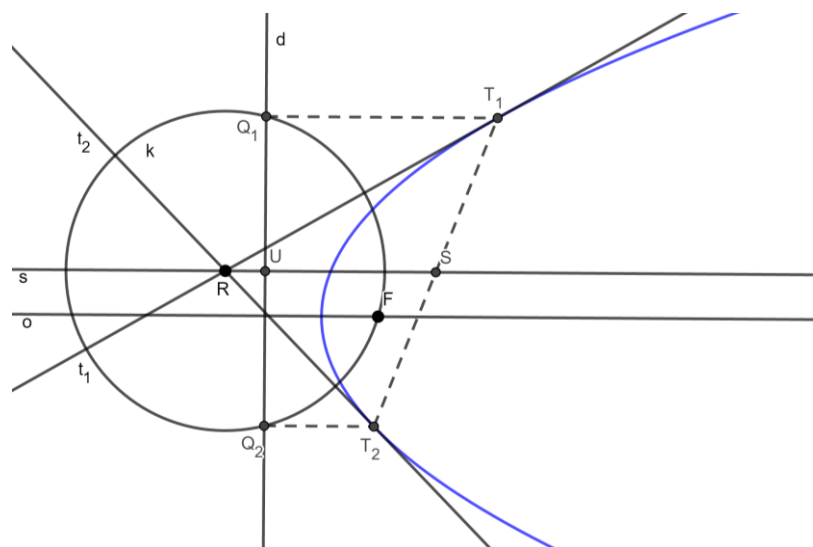
Obrázek 5.7 - Subtangenta a subnormála paraboly

Věta 22 [4, str.53]: Subtangenta je půlena vrcholem a délka subnormály je konstantní a rovna parametru paraboly.

Důkaz: (Obr. 5.7) Obě tvrzení plynou z vlastností základních geometrických útvarů. Úsečka KM , leží na tečně paraboly, Q je bodem souměrně sruženým podle ohniska paraboly, potom z vlastností tečny plyne, že úhlopříčky čtyřúhelníku $KFMQ$ jsou na sebe vzájemně kolmé a jeho protilehlé strany jsou vzájemně rovnoběžné. $KFMQ$ je tedy čtverec nebo kosočtverec. Odtud plyne $|KP| = |PM|$ a protože $PV \parallel MM'$, je $|KV| = |VM'|$. Čímž je dokázána první polovina tvrzení.

Čtyřúhelník $FNMQ$ je též rovnoběžník, tedy $|QF| = |NM|$, dále pravoúhlý trojúhelník ΔFDQ je shodný s trojúhelníkem $\Delta NM'M$ podle věty UU. Máme tedy též dokázáno, že $|M'N| = |DF| = p$.

Věta 23 [4, str.53]: Přímka, která spojuje průsečík dvou tečen paraboly se středem spojnice jejich bodů dotyku je rovnoběžná s osou paraboly.



Obrázek 5.8 - Věta č.23

Důkaz: (Obr. 5.8) Průsečík tečen t_1, t_2 označíme R , jejich body dotyku s parabolou postupně T_1, T_2 , paty kolmic z bodů dotyku T_1, T_2 na řídicí přímku značíme Q_1, Q_2 . Tečna t_1 je osou úsečky FQ_1 , stejně tak t_2 je osou FQ_2 . Z toho plyne, že $|RQ_1| = |RF| = |RQ_2|$, a proto sestrojíme-li kružnici $k = (R, |RF|)$, pak na ni leží všechny tři tyto body Q_1, Q_2, F . Bodem R vedme rovnoběžku s s osou paraboly, která je kolmá na úsečku Q_1Q_2 , tětivu kružnice k . Kolmice na tětivu procházející středem kružnice protíná tětivu v jejím středu U . Přímka s protíná strany lichoběžníku $Q_1Q_2T_1T_2$ v bodech U, S . Protože $s \parallel Q_1T_1 \parallel Q_2T_2$ je úsečka US střední příčka již zmíněného lichoběžníku, odtud plyne, že S je středem úsečky T_1T_2 .

Příklad 21

(S) Sestrojte parabolu, jsou-li dány její dvě různé tečny t_1, t_2 a body dotyku T_1, T_2 , ($T_1 \neq T_2$). [13]

Nechť R je průsečíkem tečen t_1, t_2 a současně $T_1, T_2 \neq R$. Pak sestrojíme střed S úsečky T_1T_2 , přímka s procházející body R, S je podle věty 23 rovnoběžná s osou paraboly. Dále sestrojíme rovnoběžky s přímkou s procházející body T_1, T_2 , označíme je q_1, q_2 . Pokud zobrazíme tyto přímky souměrně podle příslušných tečen, pak získáme průvodiče, jejichž společným průsečíkem je ohnisko F . Nyní zobrazíme ohnisko v osově souměrnosti podle příslušných tečen, získáváme body Q_1, Q_2 , o kterých víme, že leží na řídicí přímce. Tudíž jsou dány všechny objekty potřebné k bodové konstrukci paraboly (Příklad 17, str.48).

Diskuze: Parabola nemá žádné vzájemně rovnoběžné tečny, tudíž existuje vždy právě jeden jejich průsečík. Současně přímky souměrné přímky ke q_1, q_2 se protínají právě v jenom bodě. Parabola je tedy dána jednoznačně.

(A) Určete rovnici paraboly, jsou-li dány rovnice jejich tečen $t_1: -ax + by = 0$, $t_2: ax + by = 0$, ($a, b \in \mathbb{R}$), a k nim příslušné body dotyku s parabolou $T_1 = [t_1, t_2]$, $T_2 = [t_1, -t_2]$.

Vyřešením soustavy rovnic t_1, t_2 získáme průsečík tečen $R = [0, 0]$. Dále necht' $M' = [t_1, 0]$ vznikne kolmým průmětem bodu T_1 na osu paraboly $o: y = 0$.

Z věty 22 plyne, že $V = \left[\frac{t_1}{2}, 0\right]$ je vrchol paraboly. Dále necht' n je normála v bodě T_1 paraboly k tečně t_1 a její rovnici uvažujeme ve tvaru

$$-bx - ay + c = 0,$$

doplněním bodu T_1 dopočítáme konstantu c

$$-bt_1 - at_2 + c = 0 \rightarrow c = bt_1 + at_2.$$

Její konečná rovnice je tedy

$$-bx - ay + bt_1 + at_2 = 0.$$

Označíme-li N průsečík normály n s osou paraboly o , můžeme jeho souřadnice snadno dopočítat, dosadíme-li $y = 0$ do rovnice normály

$$-bx - 0a + bt_1 + at_2 = 0,$$

$$bx = bt_1 + at_2 \rightarrow x = t_1 + \frac{a}{b}t_2,$$

získáváme $N = \left[t_1 + \frac{a}{b}t_2, 0 \right]$.

Z věty 22 dále plyne, že $|M'N|$ je velikost parametru p

$$|M'N| = p = \sqrt{\left(t_1 - t_1 + \frac{a}{b}t_2 \right)^2 - 0^2} = \left| \frac{a}{b}t_2 \right|.$$

Nakonec vše dosadíme do rovnice paraboly.

- Je-li $t_1 > 0$, pak jsou T_1, T_2 vpravo od průsečíku R a rovnice

$$y^2 = 2 \left| \frac{at_2}{b} \right| \left(x - \frac{t_1}{2} \right)$$

je hledanou rovnicí paraboly.

- Je-li $t_1 < 0$, pak jsou T_1, T_2 vlevo od průsečíku R a rovnice

$$y^2 = -2 \left| \frac{at_2}{b} \right| \left(x - \frac{t_1}{2} \right)$$

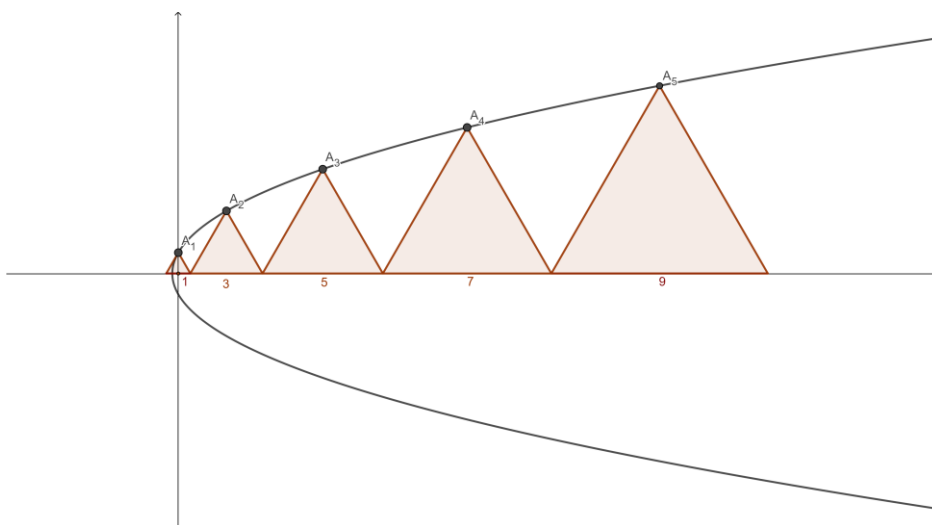
je hledanou rovnicí paraboly

Pozn.: Daný příklad uvádíme zejména, abychom si ukázali využití vět 22 a 23. V analytickém řešení vycházíme opět z vhodné volby zadaných tečen.

5.2.4 Parabola a rovnostranné trojúhelníky

Příklad 22

Rovnostranné trojúhelníky o stranách $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ jsou umístěny postupně na jedné přímce, nazveme ji o . Dokažte analyticky i synteticky, že vrcholy A_n , co neleží na přímce o leží na parabole, tak jak je na obrázku 5.9, a jejich vzdálenosti od ohniska jsou celočíselné. [11]



Obrázek 5.9 - Parabola a rovnostranné trojúhelníky

(A)[11] Zvolme si kartézskou soustavu souřadnic tak, že střed nejmenšího trojúhelníku leží v počátku této soustavy. Potom vrchol A_1 má x -ovou souřadnici 0, y -ovou lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty a tedy $A_1 = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Náš n -tý trojúhelník má základnu o velikosti $2n - 1$, nyní získáme jeho souřadnice. Vzdálenost vrcholu A_n od osy x je rovna součtu základen všech n trojúhelníků, od kterého je nutno odečíst polovinu základny prvního a n -tého trojúhelníka

$$x_n = S_n - \frac{1}{2} - \frac{2n - 1}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1) - 1 - (2n - 1)}{2}$$

$$x_n = n(n - 1).$$

Vzdálenost od osy y spočítáme opět pomocí Pythagorovy věty

$$y_n = \sqrt{(2n - 1)^2 - \left(\frac{2n - 1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12n^2 - 12n + 3}{4}}$$

$$y_n = \frac{\sqrt{3}}{2}(2n - 1).$$

Množina vrcholů trojúhelníku je tedy popsána souřadnicemi $A_n = [x_n, y_n]$. Vyjádříme si tedy n pomocí y_n

$$y_n = \frac{\sqrt{3}}{2}(2n - 1) \rightarrow n = \frac{2\sqrt{3}y_n + 3}{6}$$

a doplníme ho do rovnice x_n

$$x_n = \frac{2\sqrt{3}y_n + 3}{6} \left(\frac{2\sqrt{3}y_n + 3}{6} - 1 \right) = \left(\frac{2\sqrt{3}y_n + 3}{6} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}y_n + 3 - 6}{6} \right)$$

$$x_n = \frac{1}{36} (12y^2 - 9).$$

Úpravou této rovnice získáváme rovnici paraboly

$$y^2 = 3 \left(x + \frac{1}{4} \right).$$

Vrchol paraboly je v bodě $V = \left[-\frac{1}{4}, 0 \right]$ a její parametr $p = \frac{3}{2}$. Pomocí toho parametru získáme ohnisko $F = \left[\frac{1}{2}, 0 \right]$.

Pro vzdálenost bodů paraboly od ohniska $|A_n F|$ platí

$$|A_n F| = \sqrt{\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + (y_n - 0)^2} = \sqrt{\left(n(n-1) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left((2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$|A_n F| = n^2 - n + 1.$$

Tato hodnota je pro všechna přirozená čísla n celočíselná.

(S) Sestrojíme-li tečnu v bodě A_1 , která svírá s osou paraboly 60° , z vlastností střídavých úhlů víme, že daná tečna s rovnoběžkou p_1 procházející bodem A_1 , který je zároveň jedním z průvodičů tohoto bodu, svírá též úhel 60° . Dále zobrazíme přímkou p_1 souměrně podle tečny, tím získáme průvodič p_2 , jeho průsečík s osou paraboly je ohnisko F . Daný bod F je zároveň vrcholem rovnostranného trojúhelníku.

Nejmenší ohnisková vzdálenost je tedy zároveň stranou nejmenšího rovnostranného trojúhelníku a sice 1.

Dále chceme ověřit, zda ohnisková vzdálenost je skutečně pro všechna n celočíselná. Aplikujeme Pythagorovu větu na trojúhelníky $\Delta FS_i A_n, i = 1, \dots, n$, kde S_i jsou středy základů trojúhelníků, abychom získali $|FA_n|$, což je ohnisková vzdálenost. Nejprve však musíme získat obecné odvození velikostí odvěsen těchto trojúhelníků.

Velikost odvěsny $|S_i A_n|$ je současně výškou rovnostranného trojúhelníku a proto

$$|S_i A_n| = \sqrt{(2n-1)^2 - \left(\frac{1}{2}(2n-1)\right)^2} = \frac{\sqrt{3(2n-1)^2}}{2}.$$

Dále vzdálenost $|FS_i|$ je rovna součtu velikostí základů všech n trojúhelníků, ale tentokrát od něj odečítáme celou základnu prvního trojúhelníku, který leží na opačné polopřímce a polovinu poslední základny, tedy

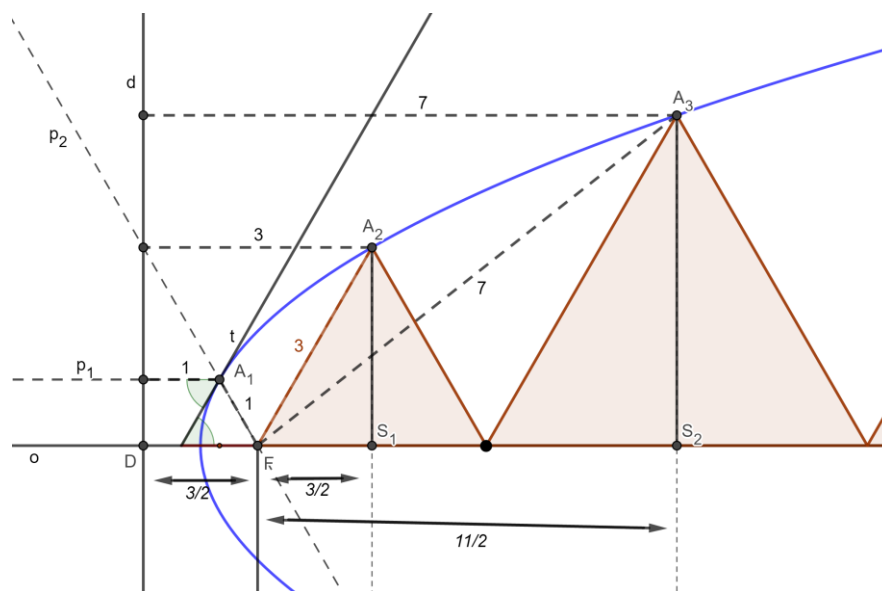
$$|FS_i| = S_n - 1 - \frac{2n - 1}{2} = \frac{2n^2 - 2n - 1}{2} = n(n - 1) - \frac{1}{2}.$$

Nyní máme všechny prostředky pro výpočet přepony $|FA_n|$

$$|FA_n| = \sqrt{\left(n(n - 1) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(2n - 1)^2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4n^4 - 8n^3 + 12n^2 - 8n + 4}{4}}$$

$$|FA_n| = \sqrt{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 1} = \sqrt{(n^2 - n + 1)^2} = n^2 - n + 1.$$

Tato vzdálenost je pro všechna n celočíselná.



Obrázek 5.10 - (S) Parabola a rovnostranné trojúhelníky

Pozn.: Tento příklad uvádíme téměř na závěr, protože se naprosto odlišuje od všech předchozích. Jedná se o vlastnost paraboly, která není tolik známa, zároveň v jejím důkazu využíváme spoustu užitečných postupů, například vlastnosti tečny.

5.3 Oskulační kružnice paraboly

Narozdíl od předchozích dvou kuželoseček má parabola jen jednu hyperoskulační kružnici, na její rovnici a konstrukci se nyní podíváme.

Příklad 23 [1, str. 50]

(A) Určete rovnici oskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu V.

Postup je opět stejný jako v předchozích dvou kuželosečkách. Řešíme soustavu rovnic kružnice $k: (x - s)^2 + y^2 = s^2$ a paraboly dané rovnicí $y^2 = 2px$. Protože požadujeme kružnici ve vrcholu paraboly, tak její vrchol $V = [0,0]$ musí být jejich jediným průsečíkem.

To nastane v případě

$$x^2 - 2x(p - s) = 0,$$

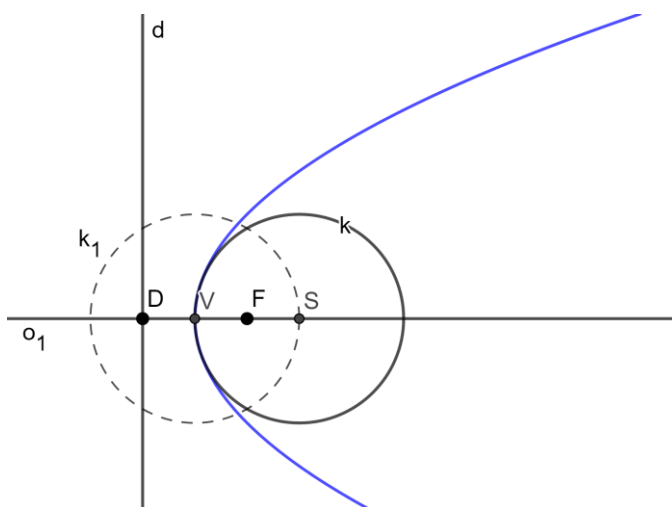
tedy když $s = p$.

Rovnice oskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu má tedy tvar

$$(x - p)^2 + y^2 = p^2.$$

(S) *Sestrojte oskulační kružnici paraboly.*

Řešení tohoto příkladu je po předchozím analytickém odvození opravdu triviální. A sice pokud vím, že její poloměr je roven parametru p , sestrojím kružnici ve vrcholu V s daným poloměrem, průsečík této kružnice s polopřímkou VF je hledaným středem oskulační kružnice.



Obrázek 5.11 - Oskulační kružnice paraboly

Závěr

Cílem práce bylo postupně proložit základní teorii kuželoseček příklady a seznámit čtenáře s dvěma různými pohledy na jejich vyřešení pomocí syntetických, nebo analytických metod. Čímž jsme docílili propojení početních řešení se syntetickými konstrukcemi.

Zároveň jsme v práci ukázali využití geometrických transformací, které jsme nejprve vysvětlili a procvičili na příkladu, a dále jsme je užívali jak pro vhodnou volbu kuželoseček, tak i pro vhodnou volbu jiných objektů, např. v příkladě 8 (str.26-27). příslušnému ověření uvedli ve vztahu ekvivalence.

U každé ze základních kuželoseček jsme zmínili několik příkladů, z toho čtyři typy a jejich řešení se objevili u každé jednotlivě, tudíž mohou čtenáři případně porovnávat konečné výsledky těchto úloh, například tečny v obecném bodě nebo oskulační kružnice ve vrcholech kuželosečky atd. V průběhu práce jsme zmínili příklady jednoduché týkající se základních vlastností jako jsou například bodové konstrukce nebo sestavení rovnic kuželoseček, ale též příklady, jejichž řešení není na první pohled jednoznačné. Částečně speciálním příkladem je příklad 22 (str.57-59), který nám též nastiňuje, jakým směrem by bylo možné práci dále rozšiřovat o více takovýchto specifických příkladů.

Teoreticky bychom její obsah mohli též obohatit například úvodem do teorie rovinných křivek, mezi které se kuželosečky řadí, řezy rovinného kužele nebo historickou souvislostí. Z praktického hlediska v práci samozřejmě neuvádíme množství zajímavých výpočtů a konstrukcí, jimiž bychom mohli práci rozšířit. Též bychom mohli doplnit například zadání příkladů k procvičení

Seznam obrázků

Obrázek 1.1 - Úhel mezi souřadnicovými systémy	3
Obrázek 1.2 - Elipsa, kde $a > b$	7
Obrázek 1.3 - Elipsa, kde $a < b$	7
Obrázek 1.4 - Hyperbola, kde $a > b$	7
Obrázek 1.5 - Hyperbola, kde $a < b$	7
Obrázek 1.6 - Parabola, kde $p > 0$	8
Obrázek 1.7 - Parabola, kde $p < 0$	8
Obrázek 1.8 - Parabola, kde $p > 0$	8
Obrázek 1.9 - Parabola, kde $p < 0$	8
Obrázek 2.1 - Apolloniiovská definice.....	12
Obrázek 3.1 – Elipsa	14
Obrázek 3.2 - Charakteristický trojúhelník elipsy	15
Obrázek 3.3 - Bodová konstrukce elipsy.....	16
Obrázek 3.4 - Příklad 4.....	17
Obrázek 3.5 - Řídící a vrcholová kružnice elipsy	21
Obrázek 3.6 - Tečny elipsy rovnoběžné s daným směrem s	22
Obrázek 3.7 - Analytický popis tečny elipsy daným bodem	23
Obrázek 3.8 - Tečna daným bodem	24
Obrázek 3.9 - Osová afinita mezi kružnicí a elipsou	27
Obrázek 3.10 - Oskulační kružnice elipsy ve vrcholu A.....	30
Obrázek 4.1 - Hyperbola	31
Obrázek 4.2 - Charakteristický trojúhelník hyperboly	32
Obrázek 4.3 - Bodová konstrukce hyperboly	33
Obrázek 4.4 - Asymptoty hyperboly	35
Obrázek 4.5 - Řídící kružnice hyperboly.....	36
Obrázek 4.6 - Řídící a vrcholová kružnice hyperboly.....	36
Obrázek 4.7 - Analytický popis tečny hyperboly daným bodem.....	38
Obrázek 4.8 - Tečny hyperboly daným bodem.....	38
Obrázek 4.9 - Věta č.13	41
Obrázek 4.10 - Oskulační kružnice hyperboly ve vrcholu A	44
Obrázek 5.1 -Parabola	45
Obrázek 5.2 - Bodová konstrukce paraboly	46
Obrázek 5.3 - Vlastnosti řídící přímky a vrcholové tečny	50
Obrázek 5.4 - Tečna rovnoběžná s daným směrem s	50
Obrázek 5.5 - Analytický popis tečny paraboly daným bodem.....	52
Obrázek 5.6 - Tečna paraboly daným bodem	52
Obrázek 5.7 - Subtangenta a subnormála paraboly.....	54
Obrázek 5.8 - Věta č.23	54
Obrázek 5.9 - Parabola a rovnostranné trojúhelníky	57
Obrázek 5.10 - (S) Parabola a rovnostranné trojúhelníky	59
Obrázek 5.11 - Oskulační kružnice paraboly.....	60

Použité zdroje

- [1] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. Řada teoretické literatury.
- [2] PISKA, Rudolf a MEDEK Václav. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. Řada teoretické literatury.
- [3] GLEASER, Georg, STACHEL Hellmuth a ODEHNAL Boris. *The universe of conics: from the ancient Greeks to 21st century developments*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [4] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7
- [5] KOČANDRLE Milan a BOČEK Leo. *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-120-5.
- [6] ŠINDEL Libor a VLACH Oldřich. *Analytická geometrie*. Ostrava [cit. 2020-03-18]. Dostupné z:
https://homel.vsb.cz/~jan939/LAIT/analyticka_geometrie.pdf?fbclid=IwAR14imPKls-PNATiDzjhYy8u8OkCiES-7pKmX7ZYj_stk5KyUIMzFL2Yw8U
- [7] VAŇKOVÁ, Markéta. *Elipsa*. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Brno, 2016 [cit. 2020-03-17]. Dostupné z:
https://is.muni.cz/th/gma2j/Bakalarska_prace.pdf.
- [8] KŘÍŽOVÁ, Kateřina. *Hyperbola*. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Brno, 2015 [cit. 2020-03-17]. Dostupné z:
https://is.muni.cz/th/11y52/Bakalarska_prace.pdf.
- [9] KOBYLKA, Jakub. *Parabola*. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Brno, 2016 [cit. 2020-03-17]. Dostupné z:
<https://is.muni.cz/th/x90h7/parabola.pdf>.
- [10] ŘEPÍK, Michal. *Kuželosečky v obecné poloze II* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z:

http://www.michalrepik.cz/matematika/kuzelosecky_v_obecne_poloze2.html

[11] BOGOMOLNY, Alexander. *Parabola and Abutting Equilateral Triangles* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/ParabolaAndEquilateralTriangles.shtml#solution>

[12] PLICHTOVÁ, Petra. *Afinita a kolineace*. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta. Praha. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/plichtova/Diplomka/AfinitaAKolineace/?page=PrimkaAElipsa>

[13] HROMADOVÁ, Jana. *Deskriptivní geometrie I: Kuželosečky* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/DG1-Kuzelosecky.html>

[14] *Kuželosečky. In: Příklady.eu* [online]. [cit. 2020-04-11]. Dostupné z: <https://www.priklady.eu/cs/matematika/kvadraticke-utvary-v-rovine/kuzelosecky.alej?fbclid=IwAR2-jQaL6o5oU5Ny2puRrYfsukU2J2eI-wBxwLMbqPrN5Ca69291nB6ojD8>

[15] *Vzájemná poloha elipsy a přímky* [online]. [cit. 2020-04-11]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka_geometrie/kuzelosecky.php?kapitola=elipsaAPrimka

[16] *Apollonios z Pergy* [online]. [cit. 2020-04-24]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1023/apollonios>