

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Geometrická interpretace hudby
Geometric Interpretation of Music

Petra Kovačová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)
Studijní obor: B AJ-M

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Geometrická interpretace hudby potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

Horažďovice, 1. 5. 2020

Mé poděkování patří Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D., za odborné vedení práce, cenné rady, vstřícnost, a především za čas, který mi v průběhu zpracovávání bakalářské práce věnoval.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce je zaměřena na problematiku matematické interpretace hudby, konkrétně se zaměřuje na její geometrickou stránku. V práci je popsána historie propojování těchto dvou oborů, hudby a geometrie, dále jsou vysvětleny některé pojmy z matematické a hudební teorie vybrané tak, aby čtenáři postačovaly k pochopení práce. Je uvedeno několik různých pohledů na geometrickou reprezentaci hudebních jevů. Jeden z nich je postaven na notaci podle výškových tříd, intervalové reprezentaci akordů a jejich zaznamenání do trojúhelníkové sítě. Dále je rozvedena Neo-Riemannova teorie, blízké související s teorií grup, která zahrnuje grupové operace transponující či invertující výškové třídy, tudíž převádějící typy akordů mezi sebou. K jejich geometrickému znázornění je použita kruhová notace. Další část se věnuje konstrukci a vlastnostem Tonnetzu, tzn. notového, respektive akordového grafu. Je tvořen rovnostrannými trojúhelníky spojenými přes společné vrcholy, v jejichž centru leží příslušné kvintakordy. Znázorňování akordů v Tonnetzu úzce souvisí s hledáním efektivního voice leadingu, kterému je věnována část v této práci. V jedné z kapitol je definován lineární a kruhový prostor výšek a akordový prostor, znázorňování pomocí mřížek a duálních mnohostěnů. V poslední kapitole této práce je uvedena analýza části skladby pomocí zavedených geometrických interpretací.

KLÍČOVÁ SLOVA

geometrie, grupa, hudba, mřížky, Tonnetz

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the problematics of mathematical interpretation of music, precisely, it focuses on its geometrical side. In the text the history of connection of these two fields, music and geometry, is outlined. Moreover, some mathematical and musical terms are explained. They are chosen in order to enable the reader to sufficiently understand the text. There are several different perspectives on the geometrical interpretation of music. One of the models is based on the pitch class notation, interval representation of musical chords and their positioning into the triangle grid. Furthermore, the Neo-Riemann theory, which closely relates to the group theory, is explained. It involves group operations that transpose or invert pitch classes and thus transform chord types. The circular notation is used for the geometrical interpretation. The other part is about the construction and features of the Tonnetz, which is a note- or chord-based graph constructed by gluing equilateral triangles by the shared vertexes. In the centre the respective triads are located. The connection between the Tonnetz representation of chords and searching for an effective voice leading is described in this thesis. One of the chapters deals with the linear and circular pitch-class space and chord space, lattices and dual polytope representation. In the last part of this thesis, there is an analysis of a piece of musical composition using the geometrical interpretations explained.

KEY WORDS

geometry, mathematical group, music, lattices, Tonnetz

Obsah

Úvod	8
1 Propojení matematiky a hudby	10
1.1 Historický pohled na vztah matematiky a hudby	10
1.2 Vybrané hudební a matematické pojmy	11
2 Geometrický model	20
2.1 Síť, barycentrický systém souřadnic	20
2.2 Neo-Riemannova teorie, teorie grup	28
2.2.1 Kruhová notace	34
2.2.2 Operace P, L, R	35
2.2.3 Konstrukce Tonnetzu	39
2.2.4 Funkce zvětšených kvintakordů	43
3 Geometrické prostory	45
3.1 Prostor výšek	45
3.2 Transformace	46
3.2.1 Transpozice	47
3.2.2 Inverze	48
3.2.3 Permutace	49
3.3 Akordový prostor	50
3.4 Mřížky	56
3.4.1 Duály	56
3.4.2 Typy mřížek	60
4 Analýza části skladby pomocí uvedených metod	66
Závěr	68
Seznam použitých informačních zdrojů	70

Seznam obrázků.....	72
Příloha A – Seznam zvukových ukázek	76

Úvod

Tato bakalářská práce pojednává o propojení dvou zdánlivě odlišných oborů – matematiky a hudby – vědy a umění.

Existuje mnoho odborných textů zabývajících se touto problematikou, nicméně jen málo z nich klade důraz na geometrickou interpretaci hudby, obzvláště hovoříme-li o českých odborných textech. Proto také většina zdrojů, z nichž v této práci čerpám, je v anglickém jazyce, především ty mezioborové.

Cílem této bakalářské práce je vytvoření původního českého textu, který by byl elementárním teoretickým výkladem matematického popisu hudebních jevů s důrazem na jejich geometrickou interpretaci a formou rešerše osvětlil různé pohledy na propojení hudby s geometrií. Dalším cílem této práce je geometrické interpretace hudby propojit či vzájemně porovnat a zjistit, zda jsou použitelné v hudbě. Pro hlubší pochopení geometrické interpretace vybraných hudebních jevů je práce doplněna velkým množstvím obrázků, vytvořených v programu *GeoGebra*. Pro čtenáře nepříliš hudebně zdatné jsou pro lepší představu přiloženy také zvukové ukázky, které jsem vytvořila pomocí veřejně dostupného programu *MuseScore*. Seznam ukázek je uveden v Příloze A a samotné ukázky jsou k nalezení na stránkách http://kmdm.pedf.cuni.cz/prilohy/kovacova_bp.7z.

Historie objevování těchto souvislostí je popsána v první kapitole této práce. V dalších kapitolách jsou vysvětleny některé hudební a matematické pojmy. Tyto pojmy jsou vybrány tak, aby postačily k pochopení textu práce.

V části hudební teorie je nejvíce čerpáno ze Zenklova *ABC hudební nauky* [21], dále pak z publikace *Všeobecná hudební nauka* od Věry Grigové [3], nebo *Mathematics and Music* od Davida Wrighta [20].

Z matematických pojmů jsou uvedeny hlavně definice zavedené Matouškem a Nešetřilem v *Kapitolách z diskrétní matematiky* [5] či Veselým v *Základech matematické analýzy* [19].

Část nazvaná *Geometrický model* popisuje perspektivu Gutierreze a Taniguchiho [4], která se zakládá na znázornování akordů jakožto bodů do trojúhelníkové sítě. Dále se také v této části zabýváme matematicko-hudební teorií založenou na teorii grup, do které spadá konstrukce grafu zvaného Tonnetz, a kruhovou notací. Tato část je inspirována webovými stránkami Alexandera Popoffa [6–12].

Třetí část je věnována popisu geometrických prostorů, lineárního a kruhového prostoru výšek a akordového prostoru. Vycházím zde především z textů hudebního teoretika Dmitriho Tymoczka [15–18]. V zavedených geometrických prostorech je pak kladen důraz na tři transformace – transpozici, inverzi a permutaci, které lze interpretovat jak matematicky, tak hudebně. Dále je zde vysvětleno zaznamenávání akordů pomocí mřížek, mnohoúhelníků, mnohostěnů a jejich duálů.

V poslední kapitole této bakalářské práce je uveden rozbor části skladby pomocí v práci popsaných metod geometrického zobrazování akordů. Tento rozbor slouží jako propojení a porovnání rozebíraných perspektiv a pohledů na problematiku příslušné této rešerši.

1 Propojení matematiky a hudby

V této kapitole se nejprve seznámíme s propojením matematiky a hudby z historického hlediska, dále pak budou vysvětleny vybrané pojmy týkající se hudební i matematické problematiky, které považují za klíčové k porozumění dalším částem práce. V části 1.1 jsou z důvodu návaznosti textu uvedeny některé čtenáři možná neznámé pojmy, které jsou pouze stručně vysvětleny v poznámce pod čarou a budou detailněji rozebrány později.

1.1 Historický pohled na vztah matematiky a hudby

Lidé se v minulosti setkávali s intervaly¹ tónové řady nejprve v přírodě, později na nejprimitivnějších hudebních nástrojích. Intuitivně znali různé hudební intervaly, například oktávu pomocí zkrácení struny (tětivy luku) na polovinu nebo díky souzpěvu mužských, ženských a dětských hlasů, kvintu a kvartu potom poznali při přefukování píšťal². Tyto intervaly zcela postačovaly pro základní proměřování tónové soustavy. Problém však nastal, když se lidé pokoušeli o přesné přepočítávání a zjistili, že z intervalů nelze vytvořit ucelenou soustavu bez přizpůsobení některé tónové výšky. Tento nesoulad se projevuje jak v praxi při ladění nástrojů, tak při matematickém propočítávání intervalů. Již v 6. století př. n. l. intervaly znal řecký matematik Pythagoras a podle něj se také nazývá rozdíl mezi dvanáctou kvintou a sedmou oktávou *pythagorejské koma* [21, s. 126–127]. Připisuje se mu výrok: „Co je nejkrásnější? – Harmonie” [13, s. 41].

Pythagorejci, tedy Pythagorovi příznivci a následovníci, prosazovali studium tzv. *kvadrivia*, které se zabývalo čtyřmi matematickými disciplínami – aritmetikou, geometrií, astronomií a hudbou. Ve starém Řecku vnímali úzké souvislosti mezi jednotlivými složkami kvadrivia, a hudba byla považována za úzce spjatou s matematikou. Pythagorejci vyslovili zákon o úměrnosti výšky tónu délce struny nebo výšce vzduchového sloupce hudebních nástrojů. Tato zákonitost byla intuitivně využívána po staletí výrobcí hudebních nástrojů. Dále také vyslovili tzv. *zákon harmonie*, který říká, že k danému tónu vytvořenému chvějící se strunou získáme tón, který s ním ladí, seškrcením struny tak, aby poměr délek celé struny a vzniklého úseku byl vyjádřen pomocí malých přirozených čísel. Seškrcením struny v polovině, tedy v poměru 1:2, získáme oktávu, seškrcením struny ve dvou třetinách, tj. v poměru 2:3, získáme kvintu, kvartě potom odpovídá poměr 3:4. Vztah mezi oktávou

¹ Vzdálenost mezi dvěma tóny.

² Oktáva, kvinta a kvarta jsou intervaly.

a kvartou můžeme vidět v rovnosti $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ [1, s. 34–35]. Velká tercie je v poměru délky struny 4:5 a malá tercie potom v poměru 5:6 [15, s. 62]. Poměry 6:12, 8:12 a 9:12 dávají po řadě oktávu, kvintu a kvartu, navíc aritmetický průměr čísel 6, 12 je číslo 9 a harmonickým průměrem³ té samé dvojice je číslo 8. Tato čtveřice čísel (12, 9, 8, 6), byla řeckými mysliteli nazývána *hudební úměrou*. Aritmetické pojetí hudby můžeme doplnit i o geometrické aspekty, uvedená čtveřice má totiž vztah ke krychli, jelikož krychle má 6 stěn, 8 vrcholů, 12 hran a 9 rovin souměrnosti. [1, s. 34–35].

Mluvíme-li o ladění, ve středověku vyhovovalo pro zpěv a jednoduchou instrumentální hudbu tzv. *pythagorejské ladění*, které se vypočítávalo dělením struny na jednostrunném nástroji a dosažené tóny se pak transponovaly přes oktávu. V průběhu renesance se pak ujalo spíše *ladění didymické*, pojmenované po řeckém badateli Didymovi, k jehož odvození se používaly kromě oktávy a kvinty navíc ještě tercie⁴. Již v renesanci bylo toto ladění propracováno do ucelené matematické soustavy [21, s. 127–128]. Později se ujalo tzv. *rovnoměrně temperované dvanáctistupňové ladění*⁵, které vyrovnávalo pythagorejské koma a rozdělovalo oktávu na 12 přesně stejných dílků. V období baroka, konkrétně v 18. století, to byl Johann Sebastian Bach, kdo zkomponoval dva cykly skladeb ve všech tóninách, durových i mollových. Dílo se jmenuje *Dobře temperovaný klavír*. Využívá rovnoměrně temperovaného ladění, a přináší tak nové skladatelské možnosti [20, s. 143].

Pojetí přednesu různými umělci může být odlišné, proto otázky ladění v současné době spadají spíše do oblasti estetiky umění, než do fyziky a matematiky [21, s. 129].

1.2 Vybrané hudební a matematické pojmy

V této sekci jsou vysvětleny potřebné pojmy z příslušných oblastí matematiky a hudby, konkrétně definice hudebního tónu, předznamenání, intervalů, akordů a stupnic a způsobu jejich zaznamenávání do notové osnovy. Je také zavedena notace pomocí výšek a výškových tříd a propojení s matematikou skrze ekvivalence či permutace. Dále je také představen voice leading⁶, se kterým se dále v této práci často pracuje.

³ Harmonický průměr je převrácená hodnota aritmetického průměru, který počítáme z převrácených hodnot průměrovaných čísel.

⁴ Tercie je hudební interval.

⁵ Vzdálenosti mezi sousedními tóny v rovnoměrně temperovaném ladění jsou stejné.

⁶ Voice leading je postup od jednoho hudebního objektu k druhému.

Tóny a notace

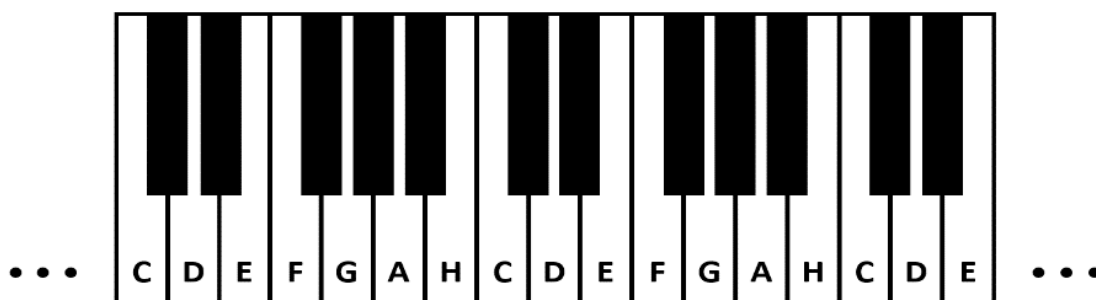
Hudební tón je výsledkem pravidelných vibrací vznikajících chvěním struny či vzduchového sloupce, které se šíří ve formě zvukových vln, *výška tónu* je potom frekvence těchto vibrací. Frekvence se měří v hertzech (Hz) a lidské ucho je schopné slyšet 20 – 20 000 Hz. Tón A_1 , jehož notaci v houslovém klíči můžeme vidět na obrázku (Obr. 1), má ve standardním současném ladění frekvenci 440 Hz⁷. Umístění not do notové osnovy závisí na výškách tónu a v různých klíčích se liší (Obr. 2). Je tomu tak proto, že každý znějící nástroj může zahrát jen tóny určité výšky. Za výšku tónu berme libovolné kladné reálné číslo. Hudební tón je tedy to, co slyšíme, a nota je jeho reprezentace v notové osnově. Noty/tóny označujeme C, D, E, F, G, A, H (Obr. 3).



Obr. 1. Tón A_1 v houslovém klíči (Příloha A – Ukázka 1).



Obr. 2. Tón C_1 v houslovém, violovém a basovém klíči.



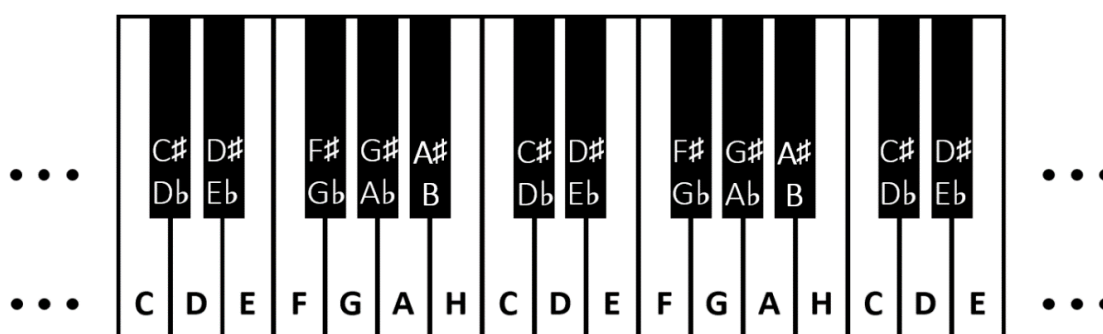
Obr. 3. Rozložení tónů na klavíru.

Představa klaviatury, která pokračuje v obou směrech do nekonečna tak, že tóny pokračují až za hranici lidské slyšitelnosti, nám dává nekonečnou množinu tónů různých výšek. Tato množina však neobsahuje všechny možné výšky, protože existují další výšky tónů mezi těmi vedlejšími na klaviatuře. My se ale budeme zabývat pouze tóny z klaviatury.

⁷ Tónu A_1 o frekvenci 440 Hz říkáme komorní A.

Předznamenání

Noty mohou být změněny pomocí *předznamenání*, tedy tzv. *křížků* (#) a *béček* (b). Jedná se o symboly, které zapisujeme do notové osnovy vždy před danou notu a které graficky znázorňují tón s výškou o půl tónu zvýšenou, nebo sniženou oproti původnímu tónu reprezentovanému danou notou za předznamenáním. Když zapíšeme křížek přímo před notu, označíme tím zvýšení tónu o půltón, béčko naopak výšku o půltón snižuje. Tóny, které mají před sebou v notaci předznamenání, jsou na klaviatuře umístěné na černých klávkách (Obr. 4) *Odrážka* (4) zruší platnost béčka i křížku. Někdy se používá také *dvojitý křížek* (##) a *dvojité béčko* (bb), které změní výšku o dva půltóny, tedy o celý tón [21, s. 12–14].



Obr. 4. Rozložení tónů na klavíru.

Intervaly

Hudební interval mezi dvěma tóny může být neformálně považován za rozdíl mezi jejich výškami [20, s. 6]. Pokud se ozvou oba tóny současně, jde o *harmonický interval*. Ozvou-li se tóny po sobě, pak jde o *interval melodický*. Rozdíl výšek tónů však zůstává stejný. Klavír je laděn *temperovaným laděním*, což znamená, že interval mezi jakýmkoli dvěma vedlejšími tóny klaviatury je stejný. Za vedlejší tóny považujeme vždy dvojici: černá a bílá klávesa. Pokud se mezi dvěma bílými klávesami nenachází žádná černá, pak jsou tyto dva tóny také sousední. Takový interval se nazývá *půltón*. *Oktáva* se skládá z dvanácti půltónů. Podle směru určování intervalů rozlišujeme *vzestupné a sestupné intervaly* [21, s. 78]. V *rovnoměrně temperovaném ladění*, tedy v ladění, ve kterém mají všechny shodné intervaly (tj. primy, sekundy, tercie atd.) stejnou velikost, je G# a Ab stejný tón. O takových tónech říkáme, že jsou *enharmonicky ekvivalentní* [21, s. 14].

Tab. 1: Základní intervaly podle počtu půltónů [20, s. 6]. Byla použita česká terminologie podle Grigové [3, s.126–130].

<i>čistá prima</i>	0 půltónů
<i>malá sekunda</i>	1 půltón
<i>velká sekunda</i>	2 půltóny = 1 celý tón
<i>malá tercie</i>	3 půltóny
<i>velká tercie</i>	4 půltóny
<i>čistá kvarta</i>	5 půltónů
<i>tritón</i>	6 půltónů
<i>čistá kvinta</i>	7 půltónů
<i>malá sexta/zvětšený kvinta</i>	8 půltónů
<i>velká sexta</i>	9 půltónů
<i>malá septima/zvětšená sexta</i>	10 půltónů
<i>velká septima</i>	11 půltónů
<i>oktáva</i>	12 půltónů
<i>malá nóna</i>	13 půltónů
<i>velká nóna</i>	14 půltónů
<i>malá decima</i>	15 půltónů
<i>velká decima</i>	16 půltónů

Matematický interval musíme odlišovat od toho hudebního. V této práci budeme pod pojmem „interval“ mít hudební interval.

Ekvivalence

Relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence*. Řekneme, že relace je na množině

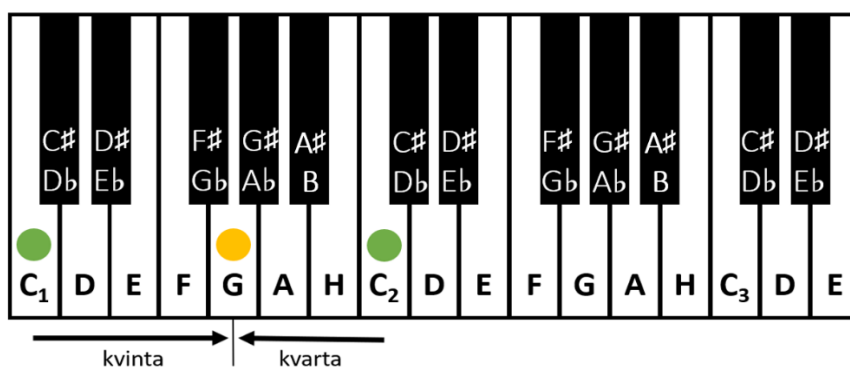
1. *reflexivní*, jestliže pro každé x z množiny platí, že x je v relaci s x ,
2. *symetrická*, jestliže kdykoli x je v relaci s y , pak i y je v relaci s x ,
3. *tranzitivní*, jestliže ze vztahů x je v relaci s y a y je v relaci se z plyne, že x je v relaci se z [5, s. 37, def. 1.5.1].

Nechť R je ekvivalence na množině X , nechť x je libovolný prvek množiny X . Množinu všech prvků y , které jsou ekvivalentní s x , nazýváme *třída ekvivalence R určená prvkem x* . Třídy ekvivalence jednoznačně určují relaci R [5, s. 39, def. 1.5.3 c)].

Tóny a relace

Řekneme, že dva tóny jsou spolu v relaci, pokud interval mezi nimi je n oktáv. Reflexivita, symetrie i tranzitivita jsou splněné, jde tedy o relaci ekvivalence, kterou nazveme *oktávová ekvivalence*. Takže například tóny C_1 a C_2 jsou v relaci, navíc také ekvivalentní

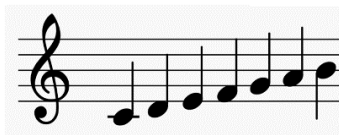
modulo oktáva (mod 12). Nota, která není označena indexem, označuje třídu ekvivalentního rozkladu, máme tedy *notové třídy*. Nota C je tedy ekvivalentní třída všech not $C_n, n \in \mathbb{Z}$. Kvůli mod 12 je například velká nóna ekvivalentní s velkou sekundou, protože $14 \equiv 2 \pmod{12}$; stejně tak velká tercie je ekvivalentní s velkou decimou, protože $16 \equiv 4 \pmod{12}$. Dále také sestupná kvarta je ekvivalentní se vzestupnou kvintou, jelikož $-5 \equiv 7 \pmod{12}$ (Obr. 5). To samé platí například pro sestupnou kvintu a vzestupnou kvartu, jelikož $-7 \equiv 5 \pmod{12}$ [20, s. 7, 32].



Obr. 5. Ekvivalence vzestupné kvinty a sestupné kvarty.

Stupnice

Stupnice je řada tónů stejné tóniny. Tónovou řadu, ve které jsou mezi jednotlivými stupni vzdálenosti jak celých tónů, tak půltónů, nazýváme *diatonická řada*. Základní tónová řada od tónu C je zároveň durovou stupnicí C dur (Obr. 6). Doplněním diatonické řady o tóny tak, aby bylo zahrnuto všech dvanáct stupňů oktávy, dostaneme *chromatickou stupnici* (Obr. 7). Ta tedy rozděluje oktávu na dvanáct stupňů po vzdálenostech jednoho půltónu [21, s. 14, 15, 56].



Obr. 6. Diatonická řada, stupnice C dur (Příloha A – Ukázka 2).



Obr. 7. Chromatická stupnice (Příloha A – Ukázka 3).

Akordy

Akord je základní stavební jednotkou harmonie. Jedná se o souzvuk tří a více tónů. Můžeme rozlišovat různé typy akordů podle obsažených intervalů mezi tóny. Akordům o třech tónech říkáme *kvintakordy*. *Durový kvintakord* se skládá z velké tercie a kvinty nad základním tónem⁸, *mollový kvintakord* se skládá ze základního tónu, malé tercie a kvinty (mod 12) [20, s. 31–33]. *Obraty akordů* jsou takové akordy, které vznikají přeložením tónů původního akordu. První obrat kvintakordu získáme přeložením primy o oktávu výš. Protože jeho krajní tóny tvoří sextu, jmenuje se *sextakord*. Druhý obrat vznikne přeložením spodního tónu sextakordu o oktávu výš, kterému pak podle obsažených intervalů říkáme *kvartsextakord* [21, s. 99]. Rozlišujeme čtyři základní typy kvintakordů: durový, mollový, zmenšený a zvětšený (Příloha A – Ukázka 4) [21, s. 97].



Obr. 8. Kvintakord C v houslovém klíči, zleva durový, mollový, zmenšený a zvětšený.

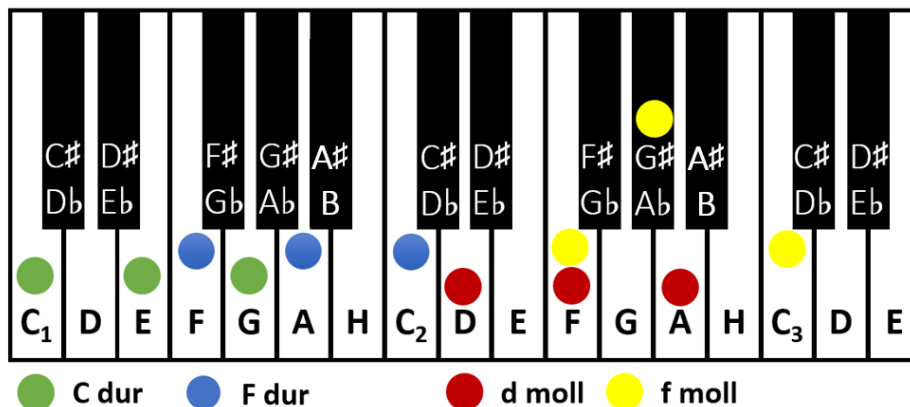
Dále se budeme zabývat akordy podle intervalových vzdáleností jejich sousedních tónů, budeme pracovat především s durovými a mollovými kvintakordy a popíšeme význam zvětšených kvintakordů. Pro účely této práce budeme za akordy považovat i dvojzvučky a to proto, abychom lépe rozlišili notové a akordové grafy rozebírané dále v práci.

Notace podle výškových tříd

Notace podle výškových tříd, nebo také *pitch-class notace*, je notace pomocí uspořádaných n -výškových tříd. *Výšková třída*, nebo také *výšková kategorie*, je množina všech výšek tónů, což znamená množinu všech oktáv. Například výšková kategorie tónu A obsahuje všechny tóny A ve všech oktávách. Následuje příklad intervalové reprezentace akordů dle notace podle výškových tříd, a to konkrétně durových a mollových kvintakordů, jedná se tedy o uspořádané trojice tříd výšek (Obr. 9) [4, s. 2]. Výškovou třídu tónu C budeme považovat za referenční a přiřadíme jí číslo 0. Další čísla ve trojici zjistíme pomocí připočtení příslušných intervalových vzdáleností, u durových akordů (4,3,5) a u mollových (3,4,5).

C[0,4,7] (Příloha A – Ukázka 5), D[2,6,9], E[4,8,11], F[5,9,12], G[7,11,2], A[9,1,4], H[11,3,6],
c[0,3,7], (Příloha A – Ukázka 6), d[2,5,9], e[4,7,11], f[5,8,12], g[7,10,2], a[9,12/0,4], h[11,2,6],

⁸ Základový tón je prominentní tón akordu, podle něhož je akord nazvaný.



Obr. 9. Durové kvintakordy C a F a mollové d a f na klaviatuře.

Můžeme si povšimnout, že vzdálenosti mezi sousedními tóny všech uvedených durových akordů jsou vždy $4 + 3 + 5 = 12$. Uspořádaná n -tice $(4, 3, 5)$ je tedy intervalová reprezentace všech durových akordů, pro mollové je to pak $(3, 4, 5)$. Mějme příklad přirozené rotace intervalů: $(4, 3, 5)$, $(3, 5, 4)$, $(5, 4, 3)$. Použitím přirozené rotace jsme vlastně získali cykly akordu $(4, 3, 5)$ [4, s. 2].

Permutace, cykly

Prostá zobrazení konečné množiny X do sebe se nazývají *permutace* množiny X . Taková zobrazení jsou zároveň na. Máme-li prvky X srovnány v nějakém pořadí, můžeme si permutaci představovat jako nějaké jejich přerovnání. Například pro množinu $X = \{a, b, c, d\}$ je jedna možná permutace

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}.$$

V prvním řádku jsou vypsány prvky množiny X a ve druhém je pak pod každým prvkem takový prvek, na nějž se uvažovanou permutací prvek z prvního řádku zobrazí. Nejčastěji se pracuje s permutacemi množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Předpokládáme, že v prvním řádku budou tato čísla vždy zapsána v přirozeném pořadí, takže stačí uvést pouze druhý řádek. Tedy například zápis $(2, 4, 3, 1)$ označuje permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutace můžeme zapisovat pomocí jejich cyklů. Pro permutaci $p = (4, 8, 3, 5, 2, 9, 6, 1, 7)$ vypadá zápis pomocí cyklů takto:

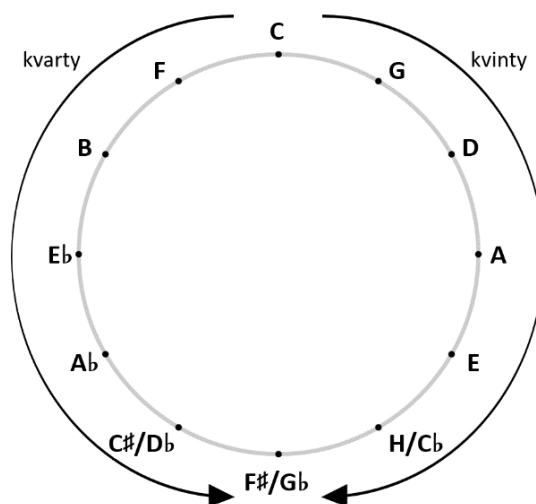
$$p = ((1, 4, 5, 2, 8)(3)(6, 9, 7)).$$

Ve vnitřních závorkách jsou vypsané prvky jednotlivých cyklů [5, s. 56, 57]. Permutace můžeme jednoduše propojit s akordy následujícím způsobem: použitím cyklických permutací na akordy získáme jejich obraty, jelikož intervalové vzdálenosti i výškové třídy zůstávají stejné, pouze se prohází. (viz. 2.1 – Orbity akordu).

Libozvučnost

O akordech mluvíme jako o libozvučných, respektive nelibozvučných podle toho, zda obsahují libozvučné, respektive nelibozvučné intervaly. Libozvuk a nelibozvuk závisí na rovnoměrnosti rozložení tónů v akordu a na jejich vzájemné blízkosti. Za nejlibozvučnější jsou považovány ty akordy, ve kterých tóny dělí oktávu ve shodujících se intervalech (Příloha A – Ukázka 5). Naopak nejméně libozvučně působí akordy s tóny nahromaděnými blízko u sebe (Příloha A – Ukázka 7) [4, s. 17].

Voice leading



Obr. 10. Kvintový, resp. kvartový kruh (Příloha A – Ukázka 8).

Klasická hudba se zakládá na dvou nezávislých disciplínách – *harmonii* a *kontrapunktu*. Harmonie stanovuje přijatelné akordy (současně znějící tóny) a sled akordů. Kontrapunkt je technika spojování jednotlivých tónů v sérii akordů za účelem vytvoření souběžné melodie. Akordy jsou obvykle spojované tak, aby se vytvořené melodické linky pohybovaly nezávisle (ne všechny stejným směrem), efektivně (přes krátké vzdálenosti) a aniž by se křížily, což umožňuje posluchačům rozeznávat více současných melodií. Teorie geometrických prostorů, ve kterých body představují akordy a úsečky lineární postup jednotlivých melodických linií (dále *voice leading* nebo *vedoucí/vodící hlas*), nám pomůže ukázat, jak spolu harmonie a kontrapunkt souvisejí. Voice leading, neboli vedoucí hlas, je tedy pohyb od jednoho hudebního objektu k druhému. Co rozhoduje o tom, zda mohou být dva akordy spojeny

efektivním voice leadingem, je otázka, kterou si hudebníci pokládají již po staletí. Ke znázornění voice leadingu můžeme použít *kvintový*, respektive *kvartový kruh* (Obr. 10), který popisuje efektivní voice leading mezi dvanácti durovými akordy. Jde o postup chromatickou stupnicí počínaje tónem C po čistých kvintách vzestupně (tedy sedmi půltónech ve směru hodinových ručiček), respektive čistých kvartách sestupně (tedy pěti půltónech proti směru hodinových ručiček) [17, s. 1].

Pokud se budeme zabývat i mollovými akordy, pak se používá tzv. *Tonnetz*, který zobrazuje efektivní voice leading mezi čtyřiadvaceti durovými i mollovými trojzvuky. Tento graf popisuje geometrický prostor, ve kterém body reprezentují akordy a úsečky potom efektivní voice leading neboli lineární postup melodických linií mezi nimi, tedy mezi koncovými body [17, s. 1–2].

2 Geometrický model

Následující kapitoly se zabývají dvěma podobnými úhly pohledu na geometrickou interpretaci akordů. Část 2.1 je věnována především zanášení akordů, jakožto bodů, do trojúhelníkové soustavy souřadnic a vlastnostmi těchto akordů. V části 2.2 jsou akordy znázorňovány pomocí kruhové notace. Tato část se zabývá problematikou Neo-Riemannovy teorie a spojováním hudby s teorií grup. Detailně popsány jsou tři vybrané operace, transformace kvintakordů, pomocí kterých je zkonstruován graf zvaný Tonnetz. Kromě durových a mollových kvintakordů je zaměřena pozornost také na kvintakordy zvětšené.

2.1 Síť, barycentrický systém souřadnic

V této části se budeme věnovat akordům, a to především jejich intervalové reprezentaci. Zavedeme trojúhelníkovou síť, do které budeme zanášet akordy a jejich obraty. Za podmínky, že se jedná o metrický prostor, dále pak podle poloměru kružnic opsaných trojúhelníků tvořených obraty akordu dokážeme stanovit libozvučnost daného akordu. Pro pochopení realizace akordů v praxi je u daných akordů uvedena jejich poloha na klaviatuře. Celá problematika je také rozšířena do třetí dimenze, která platí pro akordy o čtyřech tónech.

Metrický prostor

Nechť P je neprázdná množina a funkce $\delta: P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

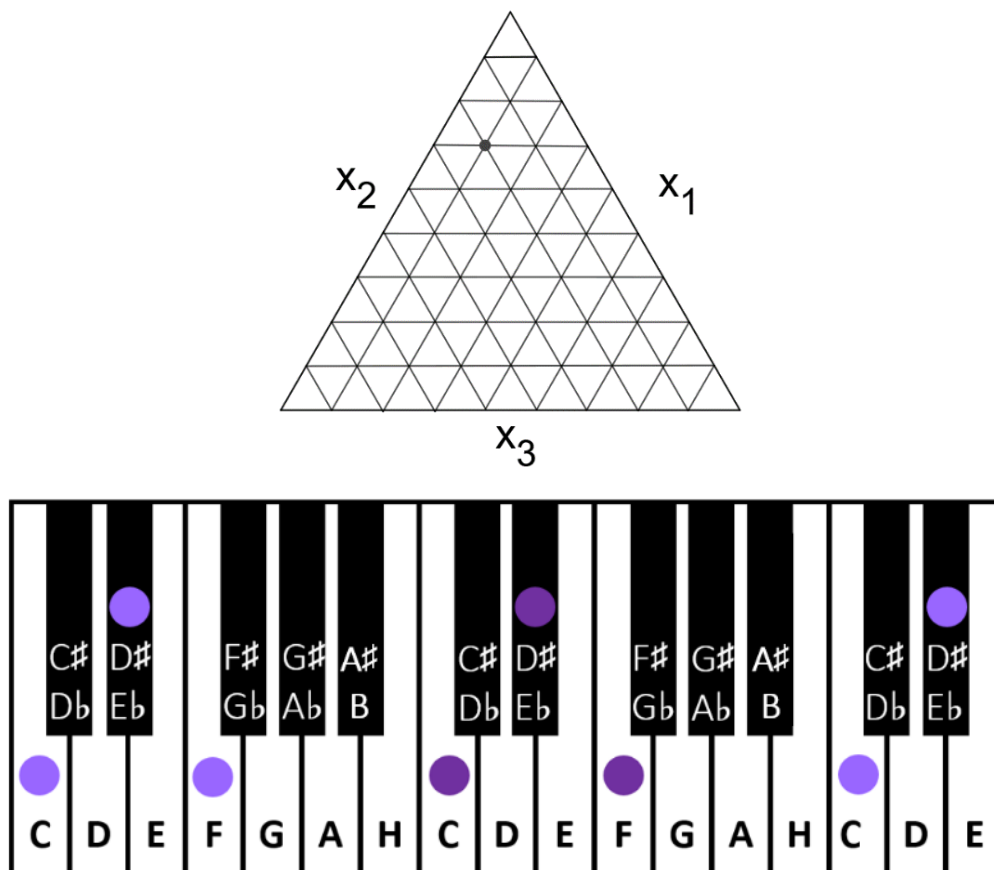
1. $\delta(x, y) \geq 0$ pro všechna $x, y \in P$, tj. δ je nezáporná funkce;
2. $\delta(x, y) = 0$, právě když $x = y$;
3. $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ pro všechna $x, y \in P$, tj. δ je symetrická funkce;
4. $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ pro všechna $x, y, z \in P$, tj. δ splňuje tzv. trojúhelníkovou nerovnost.

Potom δ je *metrika* a číslo $\delta(x, y)$ je vzdálenost bodů $x, y \in P$. Dvojici (P, δ) nazýváme *metrický prostor* [19, s. 338, def. 12.2.1].

Nechť X je lineární prostor (neboli vektorový prostor) nad polem \mathbb{R} . Nechť je na X definována reálná funkce p s těmito vlastnostmi:

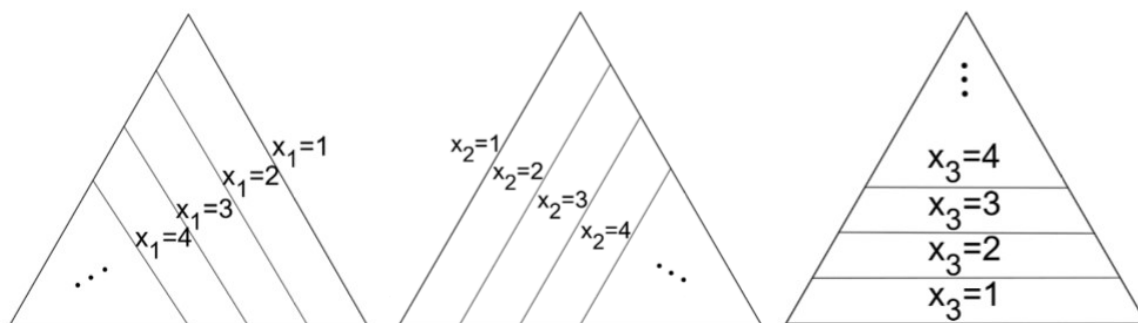
1. $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$
2. $p(x) = 0$, právě když $x = 0$,
3. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$,
4. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$.

Pak se funkce p nazývá *norma* na X . Budeme pro ni užívat označení $\|\cdot\|$, píšeme tedy $\|x\|$ místo $p(x)$. Dvojice (X, p) je *normovaný lineární prostor* nad daným polem [19, s. 339, def. 12.2.5]. Typickým příkladem pro nás může být *Euklidovská norma*, kterou definujeme v \mathbb{R}^n jako odmocninu součtu druhých mocnin souřadnic vektoru. V Euklidovském prostoru pak také máme euklidovskou metriku a klasické měření vzdáleností.



Obr. 11. Reprezentace akordu $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 7)$ v trojúhelníkové souřadnicové síti a na klaviatuře. [upraveno dle 4, s.4, Obr. 3b].

Na obrázku (Obr. 11) vidíme akord reprezentovaný bodem v trojúhelníkové souřadnicové síti (Obr. 12). Jedná se o akord $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 7)$, který jsme získali intuitivním zanesením do sítě na základě stejného principu, podle kterého umísťujeme body do kartézské soustavy souřadnic. Akord $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 7)$ je v našem modelu bod, ve kterém se protínají tyto přímky trojúhelníkové sítě: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$ [4, s. 4].



Obr. 12. Trojúhelníková souřadnicová síť [upraveno dle 4, s. 4, Obr. 3a].

Akordy tedy zobrazujeme jako body v síti, stejně tak i jejich obraty. Akordy se svými obraty pak tvoří mnohoúhelníky vepsané do kružnic (nebo mnohoštěny vepsané do koulí pro čtyřtónové akordy⁹) se středem v barycentru, tedy v těžišti trojúhelníkové sítě. Poloměry kružnic opsaných akordům stanovují vyrovnanost akordů, tzn. rovnoměrnost rozmístění jejich tónů, a tudíž míru libozvučnosti. Akordy těžiště jsou ty s maximální rovnoměrností distribuce tónů. Pro akordy o n tónech platí: $A_t = \left(\frac{12}{n}, \frac{12}{n}, \dots, \frac{12}{n}\right)$, jsou to například akordy o třech tónech (4, 4, 4) nebo o čtyřech tónech (3, 3, 3, 3). Díky zmíněné podmínce libozvučnosti můžeme tento geometrický model považovat za metrický prostor. Součet intervalových vzdáleností sousedních tónů akordu je vždy roven dvanácti, což je podmínka umožňující geometricky reprezentovat akordový prostor jako jednoduchou souřadnicovou síť. K zobrazování akordů reprezentovaných intervaly tedy používáme souřadnicový zápis omezený na přirozená čísla jejichž součet je pak vždy roven dvanácti.

Představme si například akord C dur, jehož souřadnicový zápis vypadá takto: $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 5)$. 4, 3 a 5 jsou přirozená čísla a $4 + 3 + 5 = 12$, tedy podmínka platí. Algebraický vztah $\sum_{i=1}^n x_i = 12$ je podmínka umožňující reprezentaci sítě umístěné do barycentra B (pro naše účely těžiště souřadnicového systému). V klasické geometrii je množina bodů v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 splňující tuto podmínku reprezentována trojúhelníkovou plochou. Reprezentace čtyřtónových akordů může být rozšířena podobným způsobem pomocí užití podmínky $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ [4, Preface + s. 2–6]. Množina bodů v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 splňující tuto podmínku je reprezentována shodnými trojúhelníkovými povrchy (Obr. 13) ve tvaru:

⁹ Pro každý další tón v akordu potřebujeme v geometrické interpretaci další dimenzi.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \text{ kde } x_4 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \text{ kde } x_4 = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \text{ kde } x_4 = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \text{ kde } x_4 = 6$$

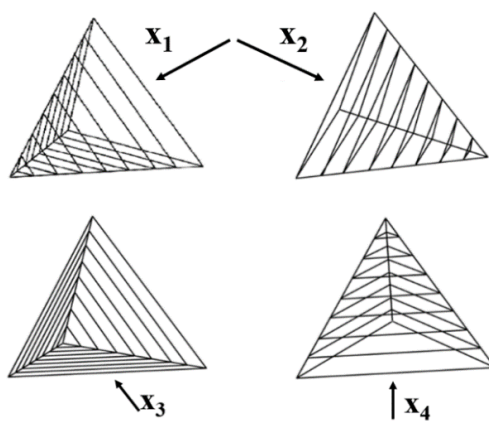
$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \text{ kde } x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \text{ kde } x_4 = 4$$

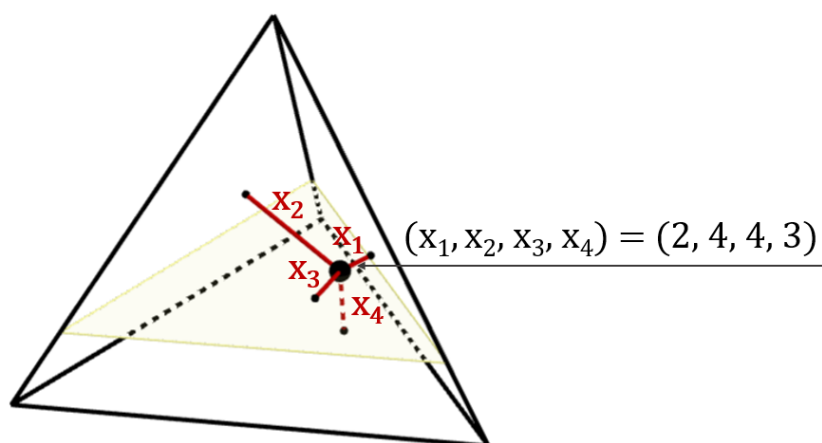
$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, \text{ kde } x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10, \text{ kde } x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \text{ kde } x_4 = 1.$$

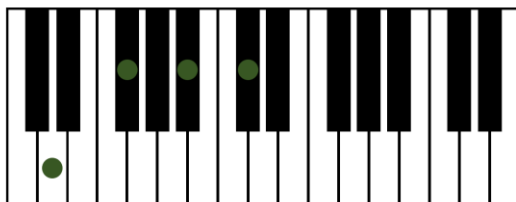


Obr. 13. Popis souřadnic ve čtyřstěnné síti [upraveno dle 4, s. 5, Obr. 5a].



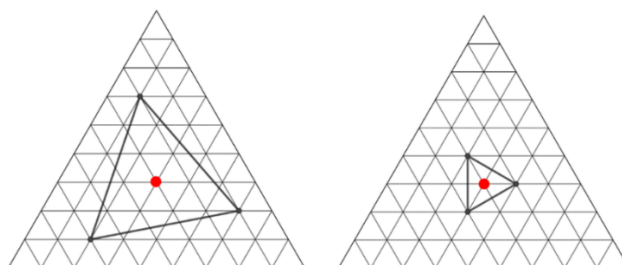
Obr. 14. Akord $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 4, 3)$ ve čtyřstěnné souřadnicové síti [upraveno dle 4, s. 5, Obr. 5b].

Symetrická úprava každé z proměnných umožňuje rozšíření souřadnic čtyřtónových akordů způsobem znázorněným na obrázku (Obr. 14). Následuje obrázek (Obr. 15) znázorňující daný akord na klaviatuře [4, Preface + s. 2–5].

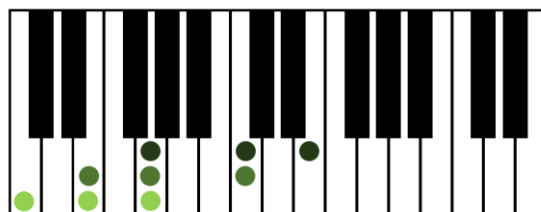


Obr. 15. Akord $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 4, 3)$ na klaviatuře (Příloha A – Ukázka 9).

Orbity akordu



Obr. 16. Orbity akordů $\overline{(3, 2, 7)}$ a $\overline{(4, 3, 5)}$ – oběh kolem barycentra [upraveno dle 4, s. 6, Obr. 6].



Obr. 17. Obraty akordu $(4, 3, 5)$ na klaviatuře (Příloha A – Ukázka 10).

Obraty akordu mají stejné intervalové vzdálenosti a jsou reprezentovány v naší intervalové notaci *orbitem* akordu definovaným následujícím způsobem: Mějme akord (x_1, x_2, x_3) . Obraty tohoto akordu získáme cyklickými permutacemi intervalů; cyklická permutace σ změní (x_1, x_2, x_3) v akord (x_2, x_3, x_1) a (x_3, x_1, x_2) . Například použitím permutace σ na akord $(4, 3, 5)$ získáme akordy $(3, 5, 4)$ a $(5, 4, 3)$ (Obr. 16). Spojením těchto bodů v barycentrické souřadnicové síti dostaneme rovnostranný trojúhelník, který nazveme orbit akordu $(4, 3, 5)$ a budeme ho značit $\overline{(4, 3, 5)}$. Orbit kvintakordu je rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy tvoří cyklické permutace intervalů akordu a jehož těžiště leží v $(4, 4, 4)$, což je těžiště souřadnicového systému [4, s. 6].

Metrika a index rovnosti

Existence popisovaného geometrického modelu, metrického prostoru, souvisí s podmínkou libozvučnosti. Jak již bylo uvedeno výše, libozvuk závisí mimo jiné na vzdálenosti sousedních tónů v akordu a na rovnoměrnosti jejich rozmístění. Zavedením vhodné metriky, tedy míry, můžeme vpisovat *orbitální akordy* (tzn. akordy a jejich cyklické permutace) do soustředných kružnic (koulí v \mathbb{R}^3) se středem v barycentru. Poloměry těchto kružnic (nebo koulí) pak určují *index rovnosti*, a to na základě následujícího principu: Akordy vepsané do kruhu (koule) malého poloměru budou blízko barycentru, a tudíž budou zobrazovat rovnoměrné rozložení tónů (libozvuk). Zároveň akordy přibližující se ke krajům mřížky budou zobrazovat větší shluk not (nelibozvučnost).

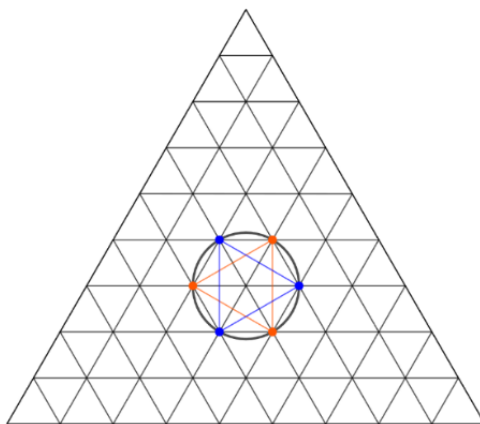
Metriku pro trojzvuky $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definujeme takto:

$$\delta(P, Q) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{2}}.$$

Mějme například akordy $P = (4, 3, 5)$ a $Q = (1, 3, 8)$, potom

$$\delta(P, Q) = \sqrt{\frac{(4-1)^2 + (3-3)^2 + (5-8)^2}{2}} = 3.$$

Pomocí indexu rovnosti $\|P\| = \delta(P, B)$, kde δ je vzdálenost a $B = (4, 4, 4)$ barycentrum, pak můžeme vypočítat, jak moc rovnoměrně jsou tóny oktávy v akordu rozmístěné. Vyšší hodnoty $\|P\|$ korespondují s vyšším stupněm nelibozvučnosti, tudíž ohraničující soustředné kružnice různých poloměrů se středem v barycentru korespondují s klasifikací nelibozvučných trojzvuků reprezentovaných rovnostrannými trojúhelníky [4, s. 6–7, 11].



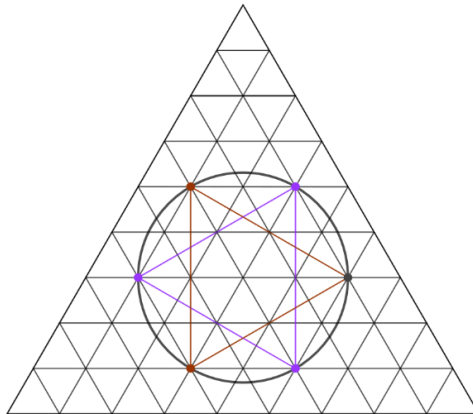
Obr. 18. Orbity durového a mollového kvintakordu (4,3,5) a (3,4,5)

[upraveno dle 4, s. 7, Obr. 7a].

Durový a mollový akord $(4, 3, 5)$ a $(3, 4, 5)$ mají orbity (Obr.18) vepsané do nejmenších možných kružnic o poloměru $\delta = 1$, což z nich dělá nejlibozvučnější třítonové akordy [4, s. 7]. Vypočteme to následujícím způsobem:

$$P = (4, 3, 5), B = (4, 4, 4): \|P\| = \delta(P, B) = \sqrt{\frac{(4-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2}{2}} = 1$$

$$P = (3, 4, 5), B = (4, 4, 4): \|P\| = \delta(P, B) = \sqrt{\frac{(3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2}{2}} = 1$$

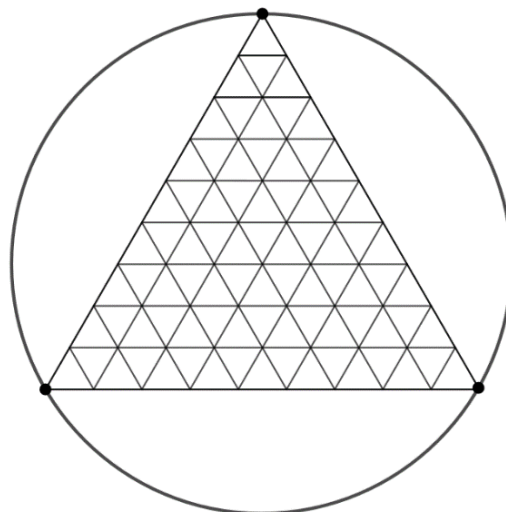


Obr. 19. Orbity akordů $\overline{(2,4,6)}$ a $\overline{(4,2,6)}$ [upraveno dle 4, s. 7, Obr. 7b].

$$P = (2, 4, 6), B = (4, 4, 4): \|P\| = \delta(P, B) = \sqrt{\frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2}{2}} = 2$$

$$P = (4, 2, 6), B = (4, 4, 4): \|P\| = \delta(P, B) = \sqrt{\frac{(4-4)^2 + (2-4)^2 + (6-4)^2}{2}} = 2$$

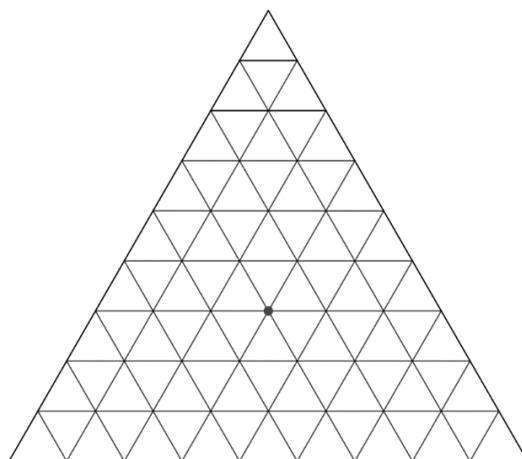
Orbity $\overline{(2, 4, 6)}$ a $\overline{(4, 2, 6)}$ (Obr.19) jsou kružnice o poloměru $\delta = 2$ (Obr. 19) [4 s. 7].



Obr. 20. Orbit nejnelibozvučnějšího akordu $\overline{(1,1,10)}$ [upraveno dle 4, s. 7, Obr. 7c].

Skupina $\overline{(1, 1, 10)}$ je nejnelibozvučnější trojice s kružnicí o poloměru $\delta = 3\sqrt{3}$ [4, s. 7].

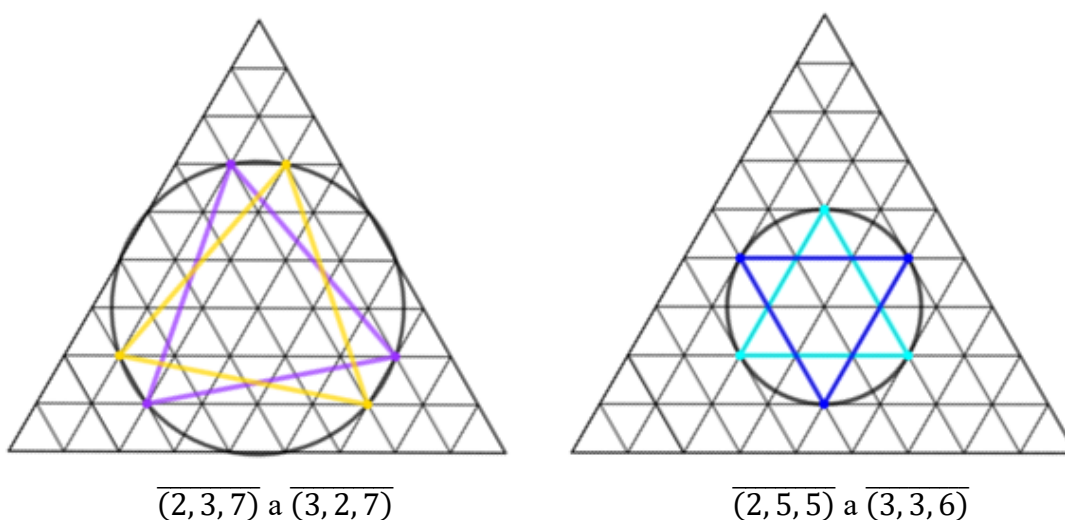
$$P = (1, 1, 10), B = (4, 4, 4): \|P\| = \delta(P, B) = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (1-4)^2 + (10-4)^2}{2}} = 3\sqrt{3} \text{ (Obr. 20).}$$



Obr. 21. Akord barycentra $B = (4, 4, 4)$ [upraveno dle 4, s. 8, Obr. 7d].

Akord barycentra $B = (4, 4, 4)$ reprezentuje tzv. *posílený akord*. Protože je to střed souřadnicového systému, není řádně zobrazen jako vepsaný rovnostranný trojúhelník v žádné z δ -kružnic (Obr.21). Když budeme B považovat za vepsaný kružnici poloměru $\delta = 0$, znamená to, že jde o nejlibozvučnější akord, což v tomto případě není pravda. Nicméně jeho strategická pozice je podstatná pro základy této teorie [4, s. 8].

Orbity některých akordů jsou symetrické, například $\overline{(2, 3, 7)}$ a $\overline{(3, 2, 7)}$ nebo $\overline{(2, 5, 5)}$ a $\overline{(3, 3, 6)}$. Můžeme to vidět na následujícím obrázku (Obr. 22) [4, s. 8].



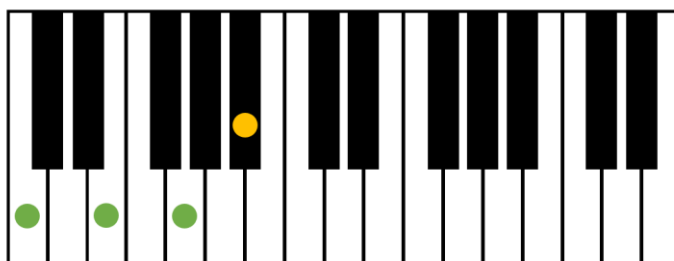
$\overline{(2, 3, 7)}$ a $\overline{(3, 2, 7)}$

$\overline{(2, 5, 5)}$ a $\overline{(3, 3, 6)}$

Obr. 22. Symetrické orbity [upraveno dle 4, s. 8, Obr. 8a, 8b].

Obohacení a redukce

Mějme trojzvuk (x_1, x_2, x_3) a přidejme tón do tohoto akordu. Tento tón rozdělí jeden z původních intervalů na dva a vytvoří tak nový čtyřtónový akord ve formě $(j, x_1 - j, x_2, x_3)$. Tento akord nazveme *obohacením původního akordu* (x_1, x_2, x_3) . Recipročně, když začneme čtyřtónovým akordem (x_1, x_2, x_3, x_4) a eliminujeme jeden z jeho tónů, získáme spojení dvou vedlejších intervalů původního akordu, např. $(x_1, x_2 + x_3, x_4)$. Tento nový akord nazveme *redukci* nebo *degradací* původního akordu. Tímto způsobem můžeme naši teorii širěji aplikovat také na akordy o libovolném počtu tónů [4, s. 9]. Mějme například akord C dur skládající se z tónů C, E, G, tedy $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 5)$. Přidáme-li tón Hb (=B), vznikne akord $(x_1, x_2, x_3 - j, j) = (4, 3, 3, 2)$, což je akord označovaný jako C7 (Obr. 23). Je tomu tak proto, že přidaný tón je od prvního tónu akordu v základním tvaru vzdálený o septimu (7) [4, s. 9].



Obr. 23. Obohacený akord C dur – C7 (Příloha A – Ukázka 11).

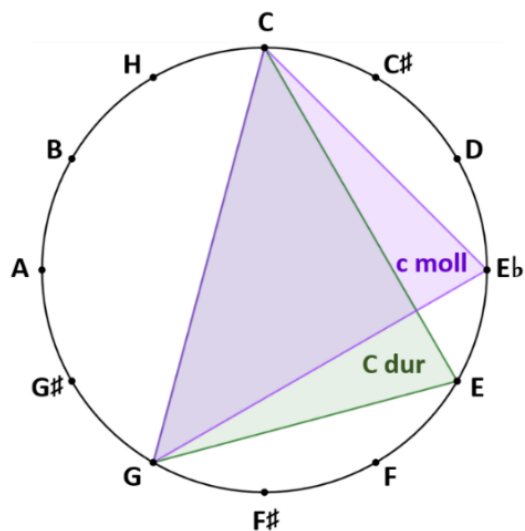
2.2 Neo-Riemannova teorie, teorie grup

Neo-Riemannova teorie je matematická hudební teorie, která nese název svého autora – Huga Riemanna.

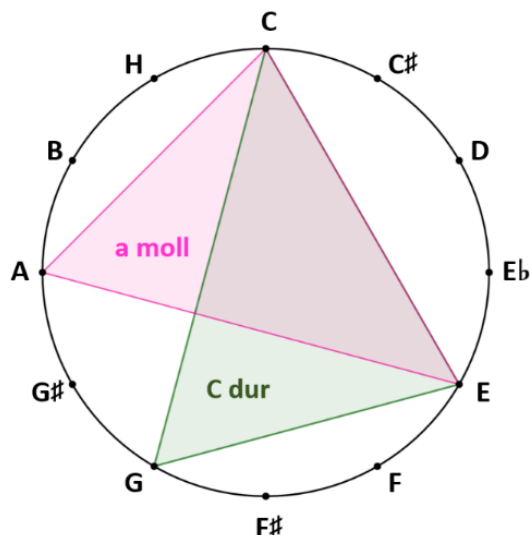
Riemann (1849–1919 n. l.) byl německý muzikolog, v dnešní době považován za jednoho ze zakladatelů moderní hudební teorie [14].

Za Riemannova života se klasická hudba rapidně rozvíjela a nebylo jednoduché ji analyzovat tradičními hudebními nástroji. Lidé se přestali zajímat pouze o hudební objekty, ale začali také zkoumat možné transformace mezi nimi. Riemann tedy vyvinul novou teorii založenou na transformacích akordů. Neo-Riemannova teorie vychází z přístupu Davida Lewina¹⁰, který se zabývá transformacemi a ty potom aplikuje na durové a mollové kvintakordy (Obr. 24, Obr. 25). Lewin ve svém díle spojuje hudbu a matematickou teorii grup [6]. Tyto spojitosti budou nastíněny dále.

¹⁰ David Lewin je hudební teoretik, jehož dílo je považováno za jedno z nejrevolučnějších v oblasti hudební teorie v posledních dekáдах [3].



Obr. 24. Transformace akordu C dur na c moll kruhové notaci (Příloha A – Ukázka 12).



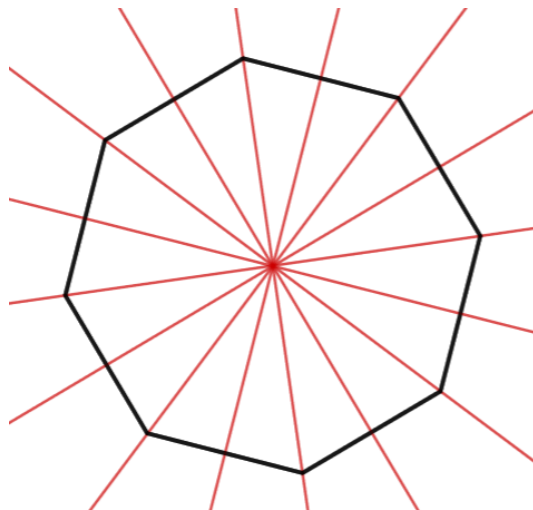
Obr. 25. Transformace akordu C dur na a moll v kruhové notaci (Příloha A – Ukázka 13).

Grupa

Grupa je množina G s asociativní binární operací $*$ splňující následující podmínky:

1. Existuje prvek $n \in G$ zvaný jednotkový (neutrální) takový, že pro všechna $a \in G$ platí $a * n = n * a = a$. Pokud takový prvek existuje, je jen jeden.
2. Pro všechna $a \in G$ existuje $b \in G$, pro něž $a * b = b * a = n$, kde n je jednotkový prvek. Takové b se jmenuje *inverzní prvek* k prvku a a obvykle se označuje a^{-1} . Inverzní prvek je také určen pro každé $a \in G$ jednoznačně [5, s. 344].

V tomto odstavci definujeme pojmy, které čtenář najde v běžných učebnicích algebry a geometrie, například: Coxeter – *Regular Polytopes* [2, s. 41–46]. *Řád grupy* je počet prvků grupy. Podmnožině prvků grupy, jejichž násobky pokryjí celou grupu, říkáme *množina generátorů*. Pokud je grupa generovaná pouze jedním prvkem, pak jí nazýváme *cyklická*. *Dihedrální grupa* (D_n) je grupa shodností pravidelného mnohoúhelníku (otočení, osové souměrnosti). Pravidelný n -úhelník má celkem $2n$ různých shodností, které ho zachovávají; ty tvoří prvky dihedrální grupy D_n (Obr. 26).



Obr. 26. Souměrnosti pravidelného mnohoúhelníku.

Matematická grupa a tónová soustava

Představme si nekonečnou klaviaturu, na které zahrajeme libovolný tón. Když zahrajeme tón o dvě oktávy vyšší než původní tón a následně tón o tři oktávy vyšší než ten druhý, je to vlastně operace přechodu přes pět oktáv. Pokud myslíme skládáním postupnou aplikaci, můžeme skládat operace tak, že nám to vždy dá nějakou další operaci, uzavřenost na operaci je tedy splněna. V matematickém zápisu to vypadá takto:

$$T_n \circ T_m = T_{n+m}.$$

Při „přechodu“ o 0 oktáv skončíme na stejném tónu, na kterém jsme začali. Máme tedy speciální operaci, které říkáme identita. Označíme ji T_0 . Platí:

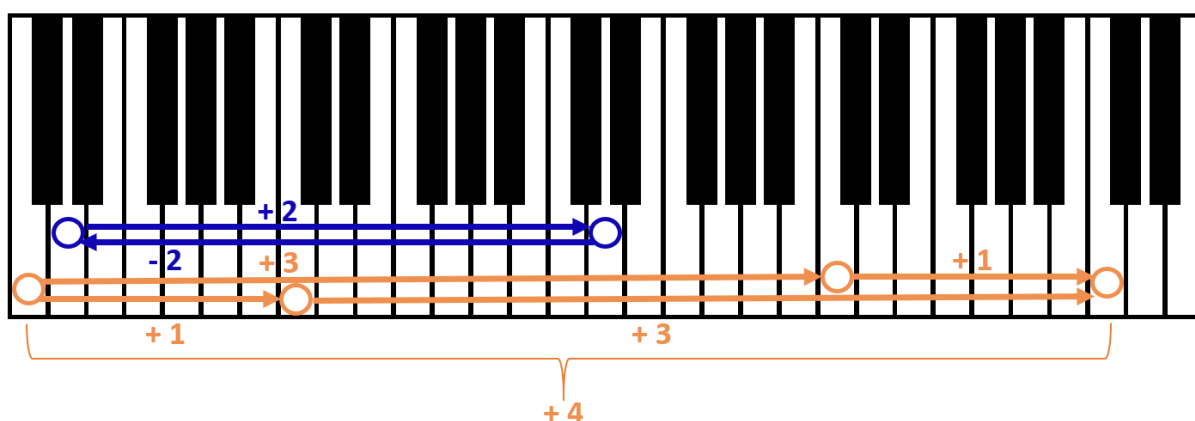
$$\forall n: T_n \circ T_0 = T_0 \circ T_n = T_n.$$

Když přejdeme například přes 5 oktáv a zahrajeme tedy tón o 2 oktávy vyšší než původní tón, zpět se dostaneme pohybem o -2 oktávy neboli o 2 oktávy na opačnou stranu, což je ekvivalentní s použitím operace identita. Pro všechny operace tedy vždy existuje operace *inverzní*, která nás vždy dostane na původní tón. Mějme operace T_p , T_q a T_r .

Když přejdeme nejprve o $(r + q)$ a pak o p oktáv, vznikne úplně stejná operace jako při přechodu nejprve o r a poté o $(p + q)$ oktáv. Vždy získáme přechod o $(p + q + r)$ oktáv, tedy různým pořadím přechodu o určitý počet oktáv se dostaneme vždy na stejný tón. Platí:

$$T_p \circ (T_q \circ T_r) = (T_p \circ T_q) \circ T_r$$

a řekneme, že skládání operací je *asociativní*. Na obrázku (Obr. 27) to můžeme vidět pro případy $p = 1, q = 2, r = 1$. Definovali jsme tedy matematickou grupu, která je izomorfní se \mathbb{Z} , viz. [6].



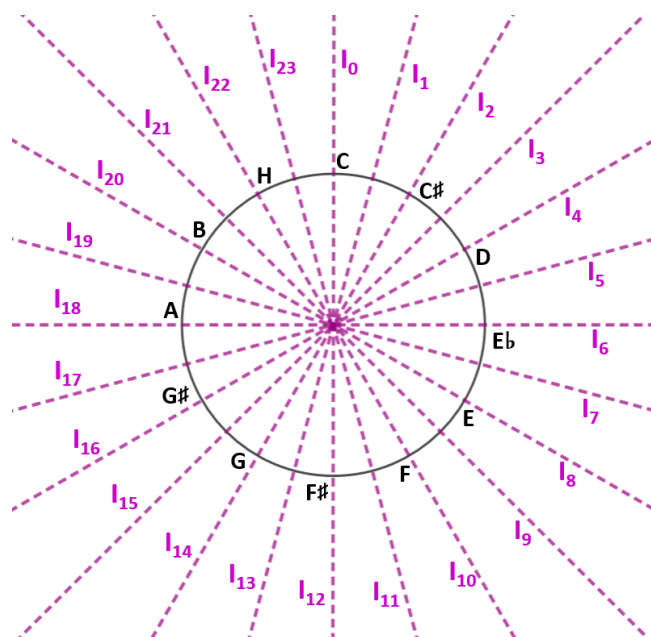
Obr. 27. Oktávová ekvivalence.

Cyklická grupa a tónová soustava

Tato část o cyklické grupě a část 2.2.1 o kruhové notaci jsou inspirovány zdrojem [8]. Budeme pracovat s půltónovou kružnicí, na níž leží rovnoměrně rozmístěné body znázorňující třídy výšek C, C#/Db, D, D#/Eb, E, F, F#/Gb, G, G#/Ab, A, A#/B, H. Předpokládáme oktávovou ekvivalenci. Víme, že oktáva má dvanáct půltónů, máme tedy vlastně cyklickou grupu řádu 12, jelikož řád grupy je počet jejích prvků. Můžeme ji zapsat následujícím způsobem:

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle z \mid z^{12} = 1 \rangle,$$

z je generátor této grupy. Generátor z je operace transponující výškové třídy o jeden půltón nahoru, tedy platí $z \cdot [n] = [n + 1] \bmod 12$, prvky grupy pak nazveme transpozice. Kromě operace z se budeme také zabývat operací inverze, kterou označíme I_n . Tato operace invertuje výškové třídy kolem vybrané referenční třídy výšek, index n potom označuje konkrétní inverzní operátor. Pro naše potřeby označíme inverzní operátory takto (Obr. 28):

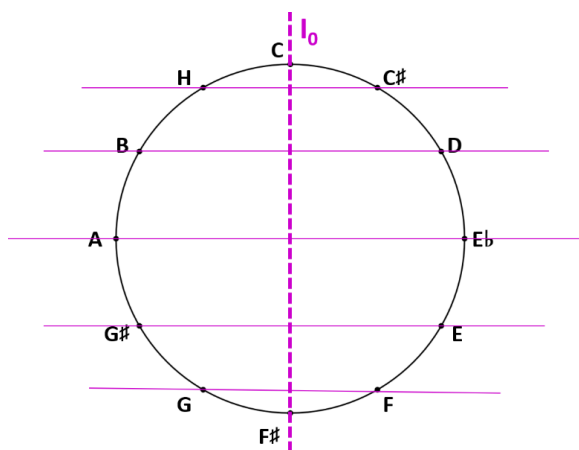


Obr. 28. Inverzní operátory v kruhové notaci.

Použijeme-li tedy například inverzní operátor I_0 , invertujeme výškové třídy přes referenční třídu C. Provedením I_0 na C vznikne C, aplikací I_0 na C# získáme H, z D bude B atd. (**Obr. 29**). Matematicky to můžeme zapsat takto:

$$[n] \cdot I_0 = [-n].$$

Všechny operace teď rozumíme mod 12.

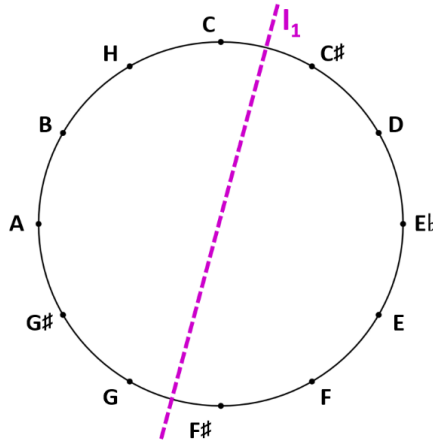


Obr. 29. Použití inverzního operátoru I_0 na akord C dur [upraveno dle 8].

Do naší cyklické grupy \mathbb{Z}_{12} můžeme přidat I_0 nebo například prvky $(z \cdot I_0)$, $(z^2 \cdot I_0), \dots, (I_0 \cdot z \cdot I_0)$ atd., které ukážeme na následujících příkladech:

Vezmeme-li grupu prvků $(z \cdot I_0)$, výšková třída $[n]$ invertuje kolem $[0]$ a vznikne výšková třída $[-n]$, která se následně transponuje o jeden půltón nahoru a vznikne

třída výšek $[-n + 1]$. Když to shrneme, provedením $(z \cdot I_0)$ na výškovou třídu $[n]$ vzniká třída výšek $[-n + 1]$ a platí $(z \cdot I_0) = I_1$ (Obr. 30). Užitím I_0 dvakrát za sebou získáme tu samou výškovou třídu, s jakou jsme začínali, tedy platí $I_0^2 = 1$. Grupa generovaná I_0 je cyklická grupa řádu 2. Operace je svou vlastní inverzí, jedná se tedy o involuci. Všechny prvky typu $(z^p \cdot I_0)$ jsou inverze, které označíme $(z^p \cdot I_0) = I_p$ a protože máme k dispozici dvanáct transformací, získáváme dvanáct inverzních operátorů.



Obr. 30. Inverzní operátor I_1 [upraveno dle 8].

Dále $(I_0 \cdot z \cdot I_0)$. Jak již víme, $(z \cdot I_0) = I_1$ je inverze (jde tedy vlastně o případ $(I_0 \cdot I_1)$). Máme $(z \cdot I_0) \cdot [n] = [-n + 1]$, který známe z předchozího příkladu. Pak platí

$$(I_0 \cdot z \cdot I_0) = [n - 1],$$

což je transpozice, a to konkrétně $z^{11} = z^{-1}$. To znamená, že máme relaci $(I_0 \cdot z \cdot I_0) = z^{-1}$, 12 inverzních operátorů nám stačí ke zformování grupy a veškeré další operace jdou popsat pomocí transpozic nebo inverzí. Platí tyto vztahy:

1. $z^p \cdot z^q = z^{p+q}$
2. $z^p \cdot I_q = z^p \cdot z^q \cdot I_0 = I_{p+q}$
3. $I_p \cdot z^q = z^p \cdot I_0 \cdot z^q = z^p \cdot z^{-q} \cdot I_0 = I_{p-q}$
4. $I_p \cdot I_q = z^p \cdot I_0 \cdot z^q \cdot I_0 = z^{p-q}$

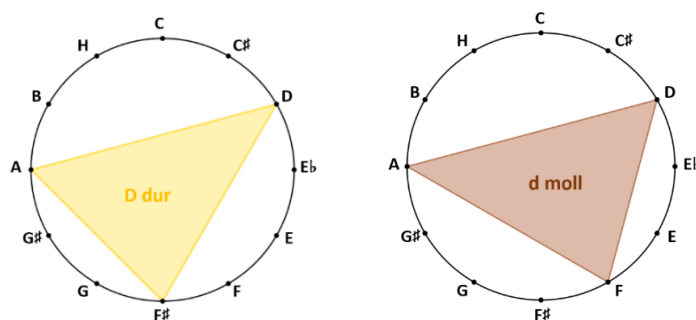
T/I -grupa, grupa s transpozicemi a inverzemi, kde z je operátor transpozice, je dána podmínkou:

$$G = \langle z, I_0 \mid z^{12} = I, I_0^2 = 1, I_0 \cdot z \cdot I_0 = z^{-1} \rangle.$$

Když se chceme dostat z prvku C na D, můžeme použít buď z^2 , nebo I_2 .

2.2.1 Kruhová notace

V kruhové notaci můžeme také zaznamenat akordy. Akordy se skládají z tónů a my zaznamenáváme jejich výškové třídy. Na obrázku (Obr. 31) vidíme příklad:



Obr. 31. Akordy D dur a d moll v kruhové notaci (Příloha A – Ukázka 14).

Všech dvanáct durových a dvanáct mollových akordů můžeme transponovat stejně, jako jsme to dělali s výškovými třídami. Použití transpozice na durové a mollové akordy vypadá takto:

$$z \cdot n_{dur} = z \cdot [n, n + 4, n + 7] = [(n + 1), (n + 1) + 4, (n + 1) + 7] = (n + 1)_{dur}$$

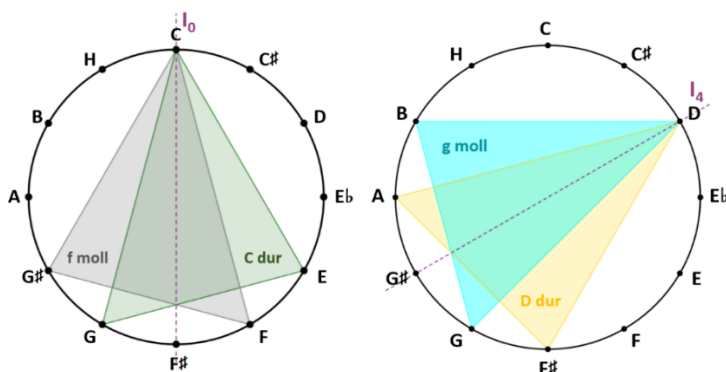
$$z \cdot n_{moll} = z \cdot [n, n + 3, n + 7] = [(n + 1), (n + 1) + 3, (n + 1) + 7] = (n + 1)_{moll}$$

Inverze fungují u akordů stejně jako u výškových tříd a to tak, že inverzní operátor invertuje typ akordu. Pro příklad, použitím operátoru I_0 na kvintakord C získáme kvintakord f moll, aplikací I_4 na kvintakord D dur vznikne kvintakord g moll. Protože jde o involuci, aplikací I_4 na g moll získáme znovu D dur (Obr. 32). Platí:

$$I_0 \cdot n_{dur} = (5 - n)_{moll}$$

$$I_0 \cdot n_{moll} = (5 - n)_{dur}$$

Inverzní operátory můžeme aplikovat na výškové kategorie akordu, stejně jako transpozice.



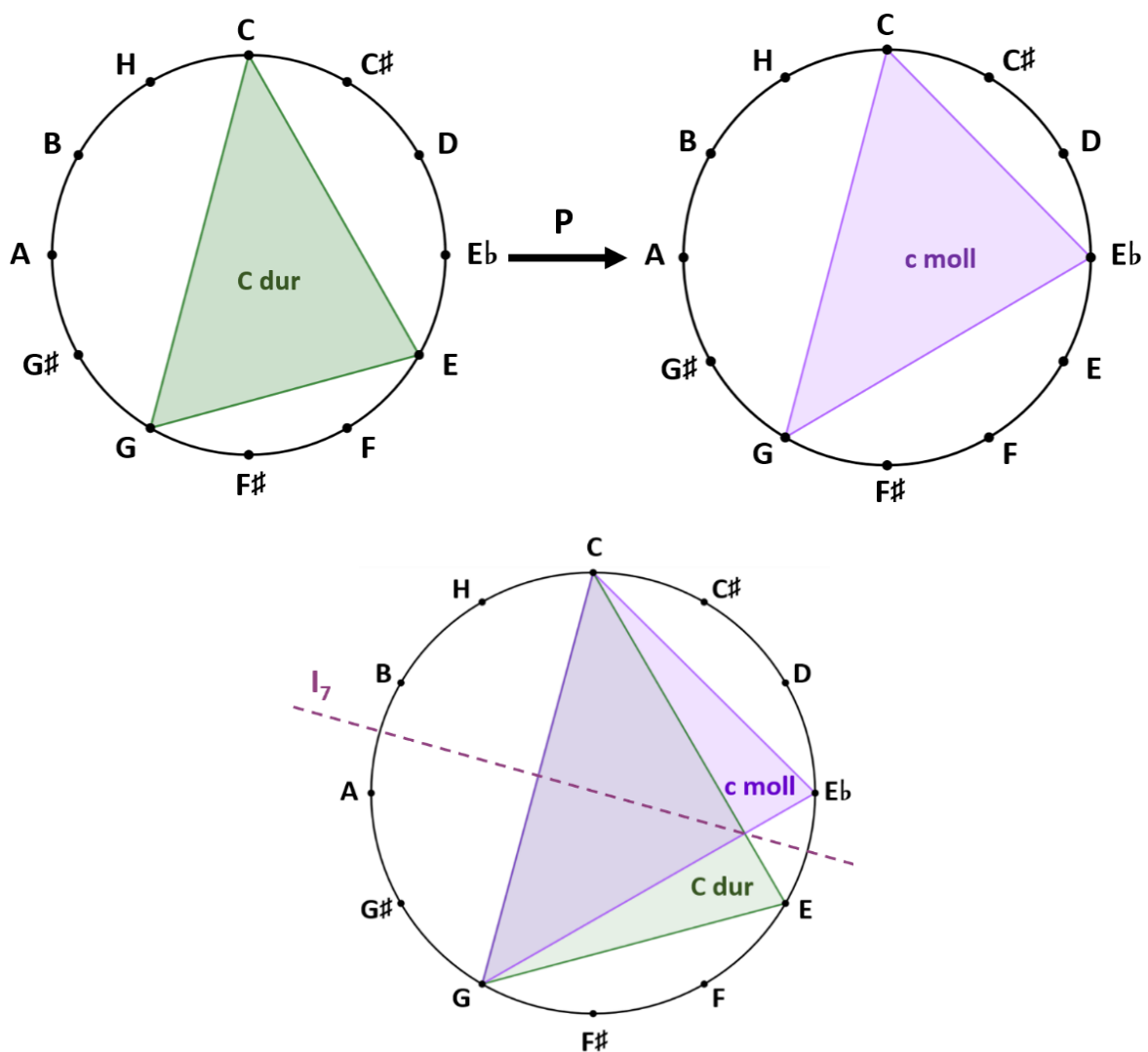
Obr. 32. Involuce – aplikace inverzního operátoru I_0 na akordy C dur a f moll a operátoru I_4 na akordy D dur a g moll [upraveno dle 8].

2.2.2 Operace P, L, R

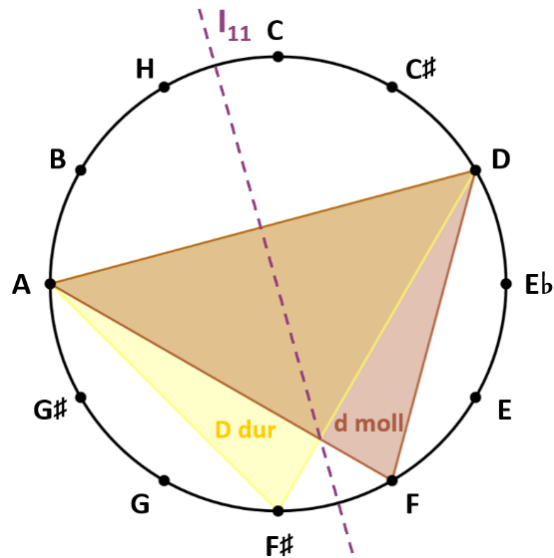
Tato kapitola zabývající se operacemi P, L, R je inspirována zdroji [9] a [10]. V této sekci se budeme zabývat pouze durovými a mollovými kvintakordy. Definujeme operace P, L, R jako transformace durových a mollových kvintakordů. Tyto transformace zachovávají dva společné tóny a převrátí zbylý tón podél osy symetrie, která zamění právě ty dva společné tóny.

Operace P

Operace P je inverzní operace, jejíž použití na durové kvintakordy n_{dur} způsobí prohození neboli záměnu výškových tříd $[n]$ a $[n + 7]$. To má následek, že se posune výšková třída $[n + 4]$ na $[n + 3]$. Pro příklad, použití operace P na akord C dur je vlastně inverze I_7 (Obr. 33). Kdybychom použili P například na akord D dur, měli bychom inverzní operaci I_{11} (Obr. 34).



Obr. 33. Použití operace P na akord C dur (inverze I_7) [upraveno dle 9].

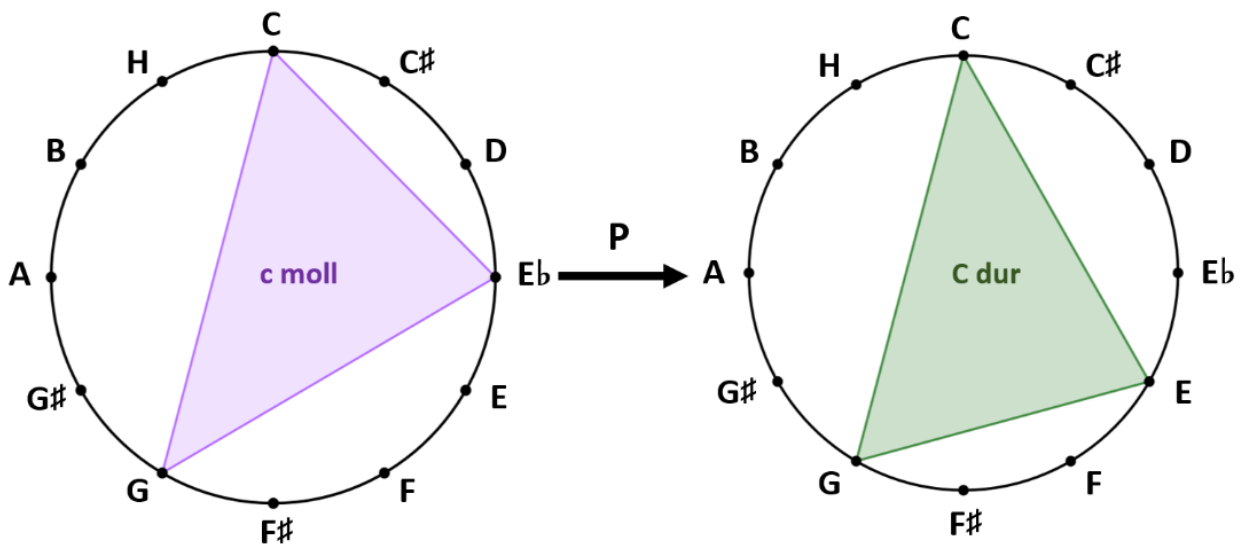


Obr. 34. Použití operace P na akord D dur (inverze I_{11}) [upraveno dle 9].

Aplikací operace P na mollové akordy získáme inverzi, která zamění výškové třídy $[n]$ a $[n + 7]$. Z obrázků (Obr. 34, Obr. 35) můžeme vidět, že se jedná o operaci identity, tedy P je involuce. Platí:

$$P \cdot n_{dur} = n_{moll}$$

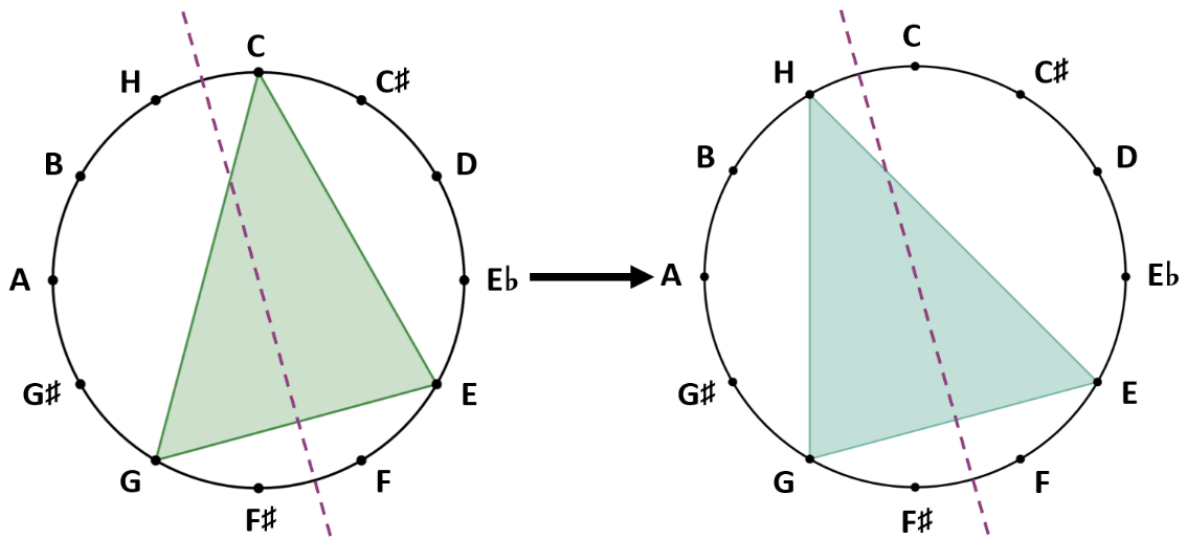
$$P \cdot n_{moll} = n_{dur}$$



Obr. 35. Použití operace P [upraveno dle 9].

Operace L

Aplikací *Operace L* na durový akord n_{dur} , získáme, stejně jako u operace P , inverzi zaměňující výškové třídy akordu. V tomto případě jde o výškové třídy $[n + 4]$ na $[n + 7]$ (Obr. 36).

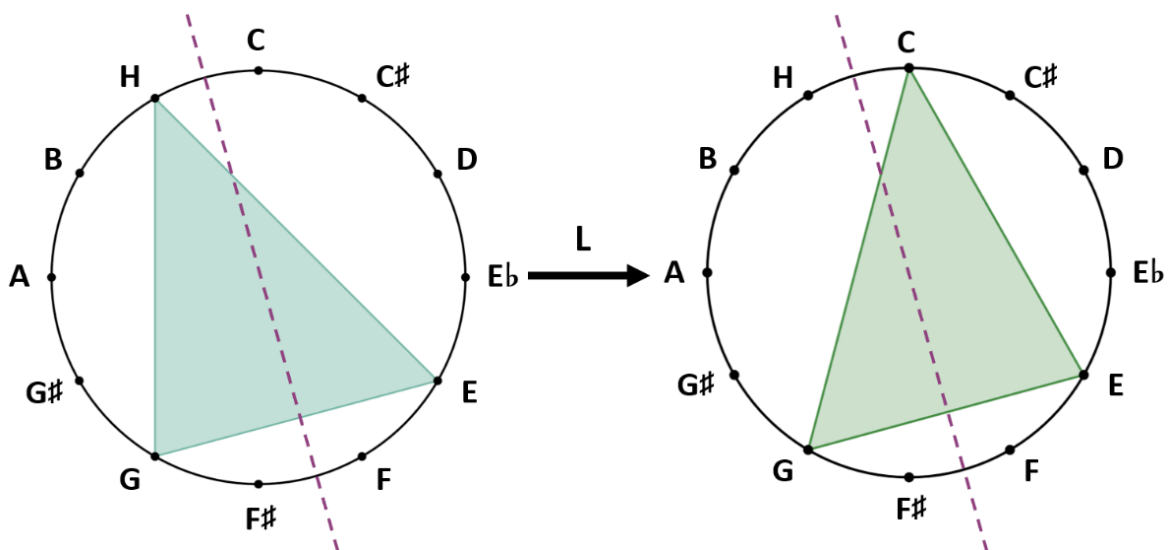


Obr. 36. Záměna výškových tříd $[n + 4]$ a $[n + 7]$, C dur a e moll [upraveno dle 9].

Po aplikaci inverzního operátoru L na mollový akord bude výsledkem jiný akord, který bude mít vyměněné výškové třídy $[n]$ a $[n + 3]$ (Obr. 37). Získáváme:

$$L \cdot n_{dur} = (n + 4)_{moll}$$

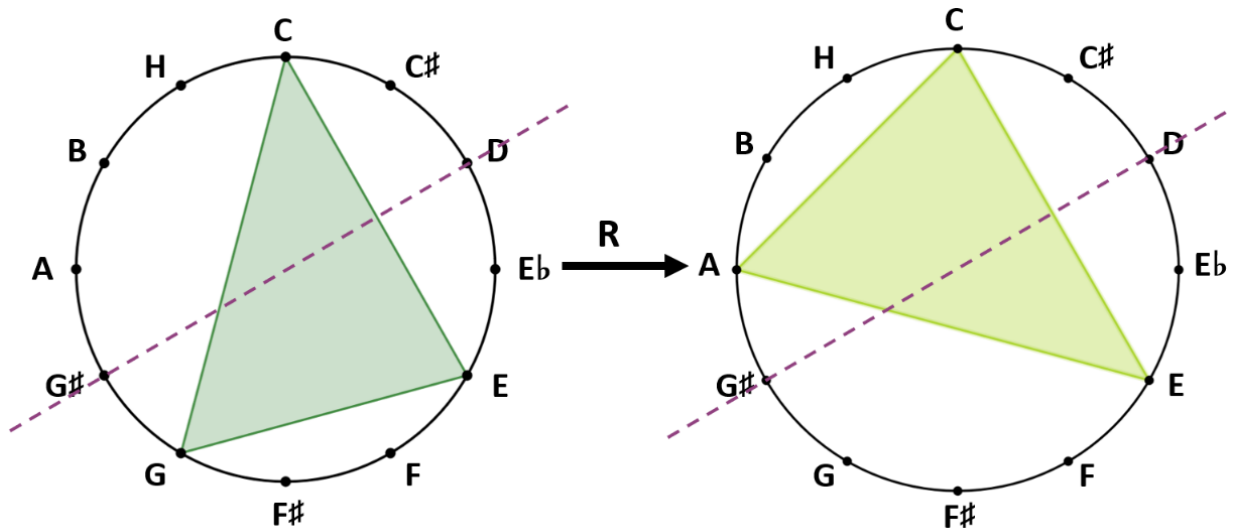
$$L \cdot n_{moll} = (n + 8)_{dur}$$



Obr. 37. Použití operace L [upraveno dle 9].

Operace *R*

Použitím operace *R* (Relative) na durový akord n_{dur} získáme inverzi, která vymění výškové třídy $[n]$ a $[n + 4]$ (Obr. 38, Obr. 39).

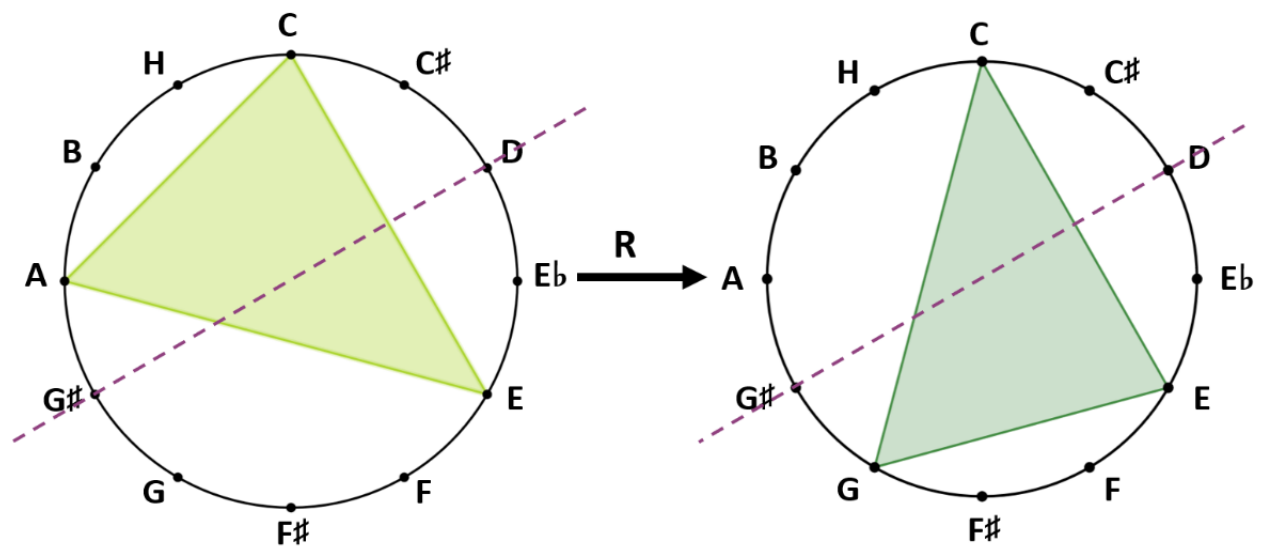


Obr. 38. Záměna výškových tříd $[n]$ a $[n + 4]$ [upraveno dle 9].

Získáváme:

$$R \cdot n_{dur} = (n + 9)_{moll}$$

$$R \cdot n_{moll} = (n + 3)_{dur}$$



Obr. 39. Použití operace *R* [upraveno dle 9].

PLR-grupa

Pomocí operací P , L a R můžeme zformovat grupu. Tyto tři operace jsou na sobě závislé a platí: $P = RLRLRLR = R(LR)^3$. Musíme tedy určit strukturu grupy generované operacemi L a R . Platí:

$$LR \cdot n_{dur} = (n + 5)_{moll}$$

$$LR \cdot n_{moll} = (n + 7)_{dur}$$

Z toho by šlo ukázat, že LR je řádu 12. Platí, že $(LRP)^2 = 1$, tedy máme vztahy

$$(LR)^{12} = P^2 = ((LR)P)^2 = 1.$$

Získali jsme *PLR-grupu*:

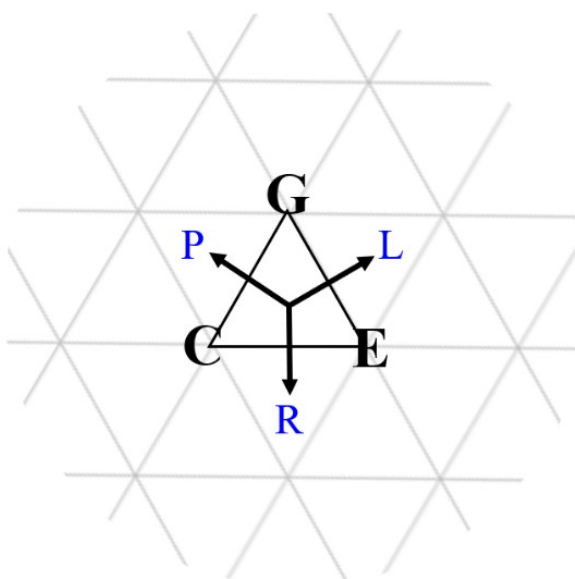
$$G = \langle L, R, P \mid P = R(LR)^3, (LR)^{12} = P^2 = (LRP)^2 = 1 \rangle,$$

kteřá je izomorfní s již zmíněnou T/I -grupou. LR je řádu 12, což znamená, že následnou aplikací R a L můžeme projít přes všech 12 mollových a 12 durových kvintakordů.

2.2.3 Konstrukce Tonnetzu

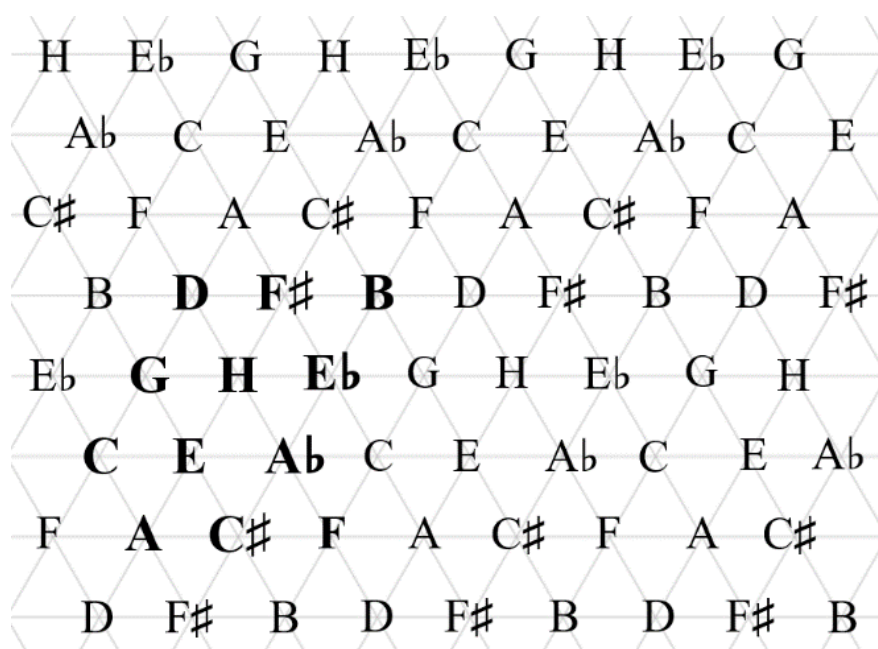
Konstrukce Tonnetzu

Za pomoci P , L a R transformací můžeme nalézt způsob, jak propojit durové a mollové akordy v mřížce [10]. Začneme kvintakordem C dur, který se skládá z výškových kategorií C, E a G, které můžeme zaznamenat jako vrcholy trojúhelníku, v jehož středu je právě akord C dur. Na obrázku (Obr. 40) vidíme směry operací P , L a R .



Obr. 40. Akord C dur a operace P , L a R v Tonnetzu [upraveno dle 10].

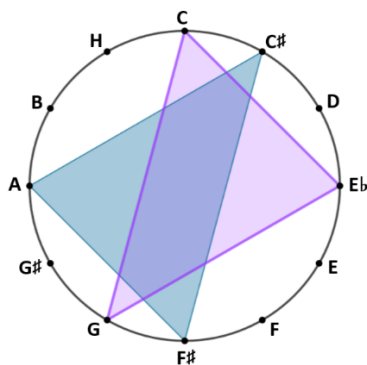
S použitím transformací *PLR*-grupy můžeme přidat další trojúhelníky stejného typu. Například operace *P* převede akord C dur [C, E, G] do akordu c moll skládajícího se z výškových kategorií C, Eb a G. Můžeme tedy přilepit trojúhelník se společnými vrcholy C a G. To samé uděláme s operacemi *L* a *R* a poté i s nově vytvořenými trojúhelníky tak, že nakonec využijeme všech čtyřia dvacet kvintakordů. Získáme diagram, který se nazývá Tonnetz a který je zkonstruovaný pomocí operací z Neo-Riemannovy teorie. Využijeme všechny kvintakordy, Tonnetz je nekonečný a vzory se opakují. Základní oblast této opakující se mřížky můžeme vidět zvýrazněnou na následujícím obrázku (Obr. 41). Jde o rozvinutou verzi mřížky ležící v rovině, nicméně topologie této mřížky je stejná jako topologie toru¹¹, který bychom získali správným slepením vyznačené základní oblasti. Tento typ mřížky je velice užitečný pro vizualizaci transformací mezi akordy [10].



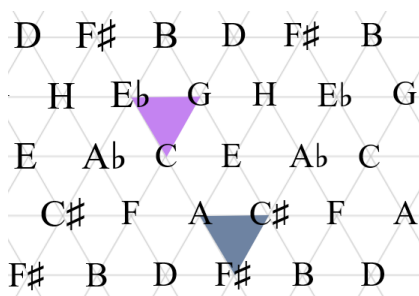
Obr. 41. Základní oblast Tonnetzu [upraveno dle 10].

Pro příklad, práce s mřížkou uvedeme *RPRP* transformaci, transformaci T_6 (transpozici o šest půltónů), která slouží jako přechod z akordu c moll na akord a f# moll (Příloha A – Ukázka 15). Na obrázcích můžeme vidět geometrickou interpretaci této transformace v kruhové notaci (Obr. 42) a v Tonnetzu (Obr. 43) [10].

¹¹ Klasický trojdimenzionální torus neboli anuloid je těleso ve tvaru donutu [23].

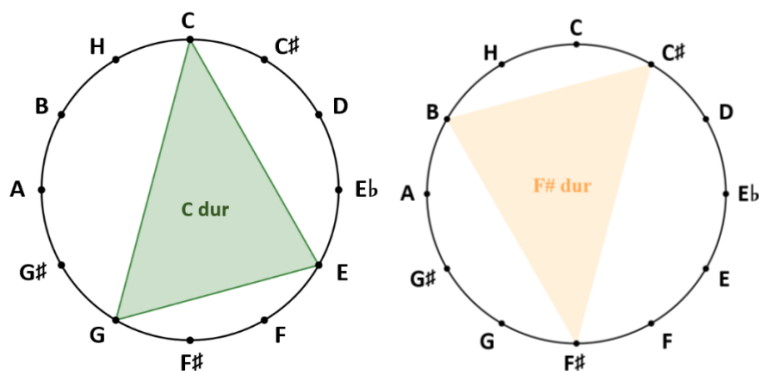


Obr. 42. Transformace *RPRP* v kruhové notaci použitá na akord c moll.

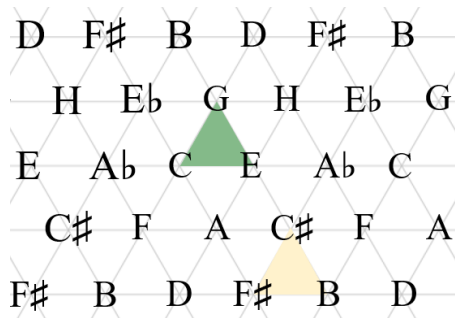


Obr. 43. Transformace *RPRP* v Tonnetzu použitá na akord c moll [upraveno dle 10].

Pro porovnání následuje ta samá transformace, tentokrát použitá na durové kvintakordy C dur a F# dur (Obr. 44, Obr. 45) [10] (Příloha A – Ukázka 16).



Obr. 44. Transformace *RPRP* v kruhové notaci použitá na akord C dur [upraveno dle 10].

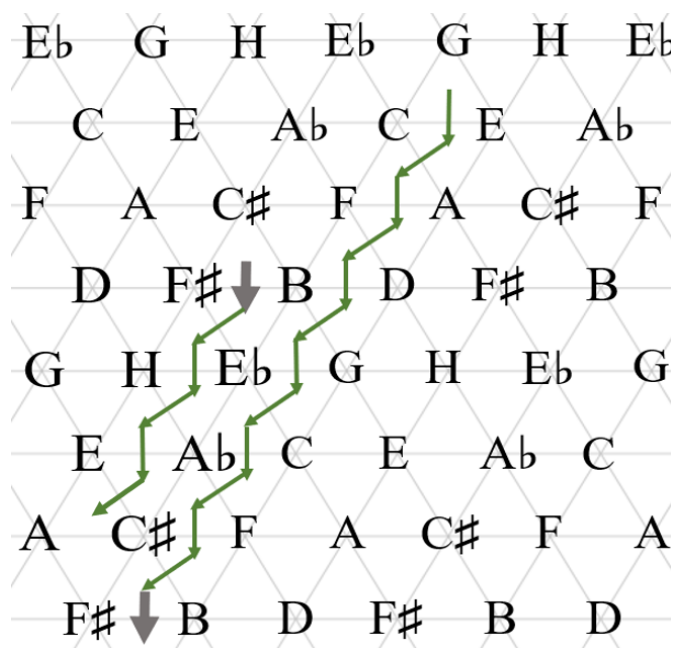


Obr. 45. Transformace *RPRP* v Tonnetzu použitá na akord C dur.

Zůstává otázkou, zda v Tonnetzu existují cesty, tedy v Neo-Riemannově teorii série operací, pomocí kterých bychom se dostali do každého akordu, tedy do každého bodu mřížky, právě jednou. Takovýmto cestám se říká *Hamiltonovské cesty*. Takovou cestu můžeme vidět například při znázornění ukázky Beethovenovy 9. symfonie (Obr. 46, 47) [10].



Obr. 46. Hamiltonovská cesta v Beethovenově 9. symfonii [upraveno dle 10] (Příloha A – Ukázka 17).

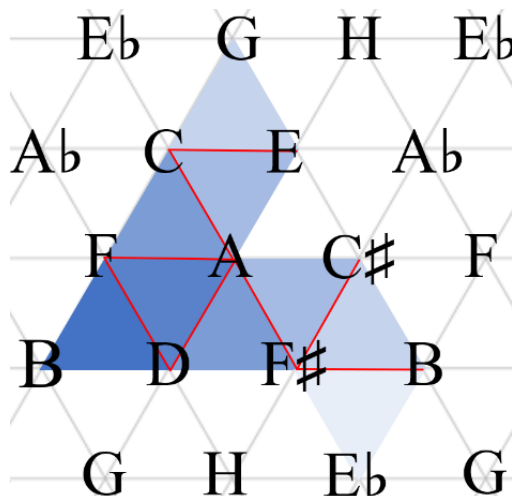


Obr. 47. Hamiltonovská cesta v Beethovenově 9. symfonii znázorněná v Tonnetzu [upraveno dle 10].

Simpliciální komplexy

Ke konstrukci Tonnetzu nám ve skutečnosti stačí pouhé spojování zobecněných trojúhelníků, formálně *simplexů*, přes shodné vrcholy (Obr. 48), nepotřebujeme transformace ani teorii grup [11]. Jedno-, dvoj- a trojdimenzionální simplex jsou po řadě úsečky, trojúhelníky a čtyřstěny [15, s. 95, Obr. 3.9.2]. *Simpliciální komplexy* jsou tvořeny těmito simplex. 0 - simplex je pro nás nota, 1 - simplex dvojzvuk a 2 - simplex je trojzvuk.

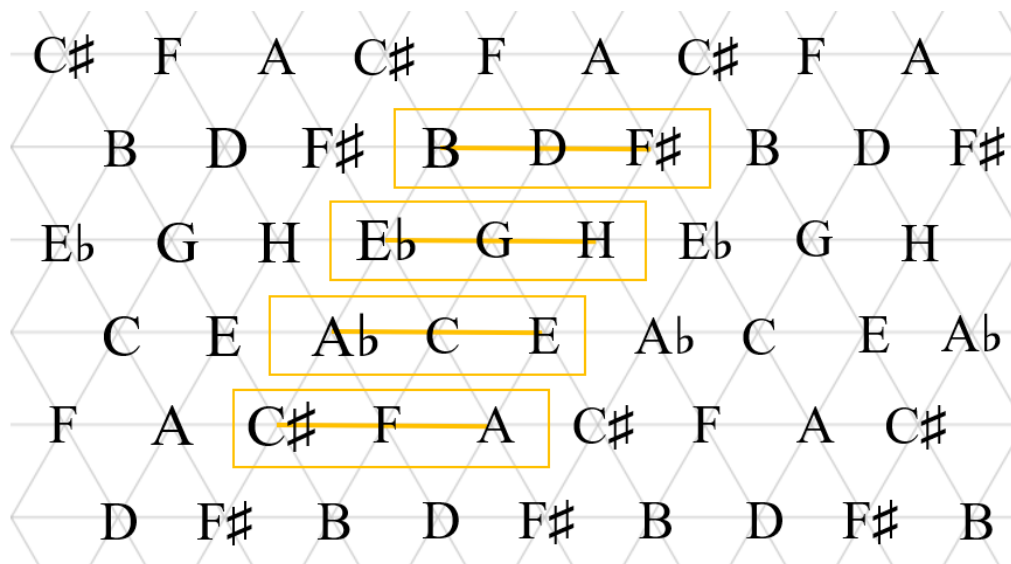
Zaměříme se na durové a mollové kvintakordy a vytvoříme simpliciální komplex tak, že spojíme dohromady každé dva simplexy, které mají společnou notu nebo dyádu¹² [11].



Obr. 48. Konstrukce Tonnetzu pomocí spojování trojúhelníků přes společné strany.

2.2.4 Funkce zvětšených kvintakordů

V Tonnetzu mohou být zobrazeny i jiné akordy než durové a mollové kvintakordy, například kvintakordy zvětšené. Když uvažujeme enharmonickou ekvivalenci¹³, máme čtyři různé zvětšené kvintakordy (Obr. 49) [12].



Obr. 49. Zvětšené kvintakordy znázorněné v Tonnetzu [upraveno dle 12]

(Příloha A – Ukázka 18).

¹² Slovem dyáda myslíme souzvuk dvou tónů.

¹³ Enharmonická ekvivalence znamená, že například tóny G# a Ab nebo C# a Db jsou stejné.

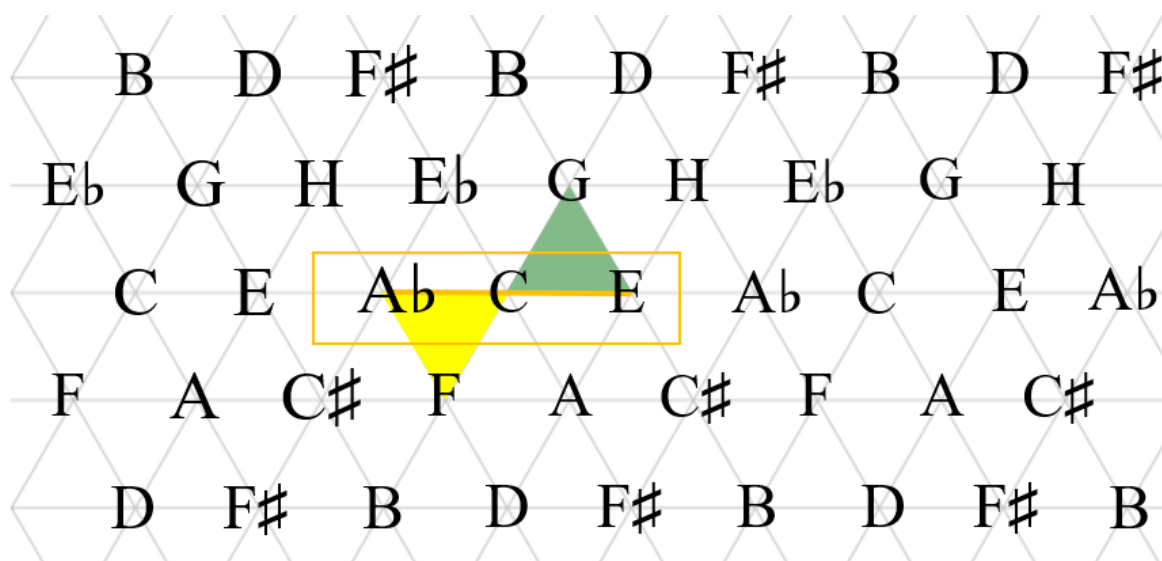
N stranách 35, 37 a 38 jsme definovali operace P , L , R , které generují grupu izomorfní s dihedrální grupou o čtyřadvaceti prvcích (D_{24}). Pro připomenutí, z kvintakordu C dur bychom pomocí těchto operací získali kvintakordy c moll (P), a moll (R) a e moll (L). Grupa může být dána takto:

$$G = \langle R, L | (LR)^{12} = R^2 = L^2 = 1 \rangle.$$

Můžeme totiž vypustit operaci P , jelikož $P = R(LR)^3$. Když bychom ale vypustili operaci R , dostali bychom grupu izomorfní s dihedrální grupou řádu šest (D_6). Byla by dána takto:

$$G_{PL} = \langle P, L | P^{12} = L^2 = 1, LPL = PLP \rangle.$$

Jasněji je to vidět při pohybu v Tonnetzu. Po vypuštění operace R bychom se mohli pohybovat pouze diagonálně, a to ve směru severovýchod a jihozápad. Když tedy začneme na akordu C dur, můžeme přejít pouze přes tyto akordy: E dur, e moll, C dur, c moll, Ab dur, ab moll. Nastává problém pohybu mezi jednotlivými „pruhy“ Tonnetzu. Mějme například akordy C dur a f moll. Každý z nich patří do jiného pruhu, takže se nemůžeme dostat z jednoho na druhý pouze za pomoci operací P a L . Když však projdeme přes zvětšenou triádu, spojíme požadované dva pruhy právě pomocí zvětšeného kvintakordu C dur (Obr. 50) [12].



Obr. 50. Přejít z akordu C dur na f moll pomocí zvětšeného kvintakordu [C, E, Ab]

[upraveno dle 12] (Příloha A – Ukázka 19).

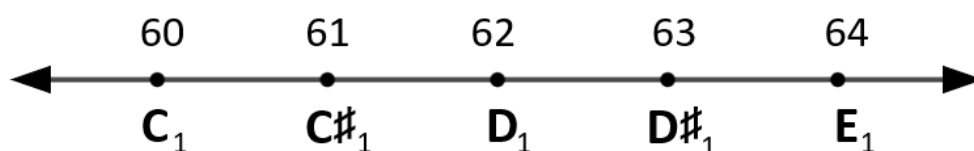
3 Geometrické prostory

V této části se budeme zabývat geometrickými prostory, a to konkrétně lineárním a kruhovým prostorem výšek a akordovým prostorem o dvou a více dimenzích. Kruhový prostor výšek pak detailněji popisuje kružnici užitou v předchozí kapitole při znázorňování akordů v kruhové notaci. Dále jsou v této části uvedené tři transformace – transpozice, inverze a permutace – měnící akordové typy. Je vysvětleno znázorňování tónů a akordů pomocí dvou typů mřížek, dále pak pomocí duálů. Dostaneme se i do vyšších dimenzí.

3.1 Prostor výšek

Lineární prostor výšek

Mějme výšky a, b . Vzdálenost mezi nimi určíme jejich rozdílem $|a - b|$. Platí, že pro všechny výšky $a + x, b + x$ je vzdálenost stejná. Mějme dvě konstanty k_1 a k_2 ; k_1 nám určí číslo korespondující s frekvencí 440 Hz, což je tón A_1 (komorní A), k_2 určí velikost oktávy: $k_2 = 12$. Tímto jsme vytvořili lineární *prostor výšek*, ve kterém je tónu C_1 přiřazeno libovolné číslo a jednotkou délky je půltón. Pokud bychom si například zvolili $C_1 = 60$, pak by platilo $C\#_1 = 61$, $D_1 = 62$ a takto dále po chromatické řadě. Tento prostor je vlastně spojitá čára, přímka, obsahující bod pro každou myslitelnou výšku, pro naše účely pro tóny na klávesách klavíru (Obr. 51) [15, s. 29-30].

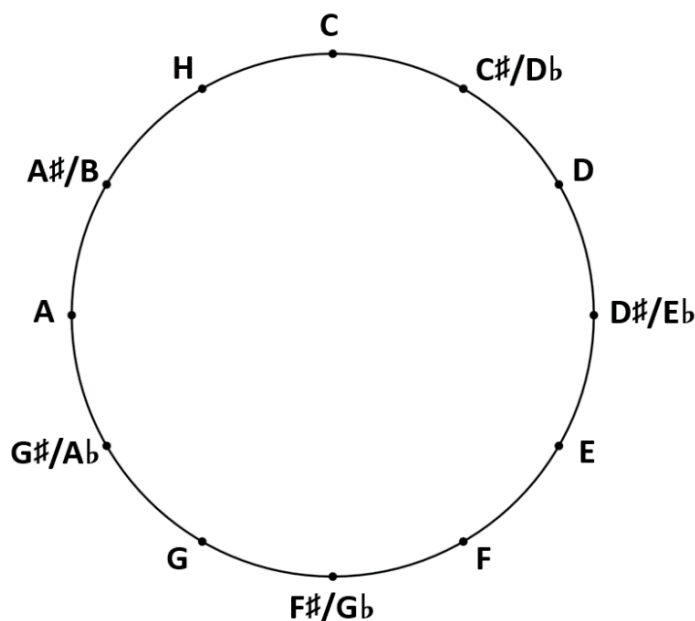


Obr. 51. Lineární prostor výšek.

Kruhový prostor výšek

V lineárním prostoru je každá vzdálenost 12 stejná. Žádná oktáva není ničím speciální, dvě výšky vzdálené o oktávu patří do stejné výškové třídy. Geometricky mohou být výškové třídy reprezentovány pomocí kružnice, jejíž každý bod reprezentuje všechny výšky lišící se o oktávu, tedy každý bod na kružnici zobrazuje nějakou třídu výšek (Obr. 52). Například jeden z bodů, který nazveme C, reprezentuje výšky tónů C_1, C_2, C_3, \dots . Musíme si uvědomit, že prostor výšek a prostor výškových kategorií jsou úzce spjaté a z lineárního prostoru výšek můžeme přenést spoustu vlastností do kruhového prostoru výškových tříd.

Prostor výškových tříd je však kruhový pouze v abstraktním smyslu. Není zasazený do dvoudimenzionálního prostoru, kruhovitost spočívá jen v tom, že se jednodimenzionální rovná čára vrátí do svého počátku. Vzdálenost mezi dvěma třídami výšek definujeme jako nejkratší vzdálenost mezi jakýmkoli dvěma výškami patřícími do příslušných tříd. Pro příklad, vzdálenost výšek tónů C a G je vzdálenost C_1 od G_1 , C_2 od G_2 atd. Intuitivní představa vzdálenosti výšek dvou tónů připomíná například představu vzdálenosti mezi hodinami během dne, která je také jaksi abstraktní [15, s. 30–31]. Tento prostor jsme již vlastně používali v předchozích kapitolách v kruhové notaci.



Obr. 52. Kruhový prostor výšek.

3.2 Transformace

V prostoru výšek se budeme zabývat transformacemi, které zachovávají vzdálenost. Je to transpozice a inverze, které korespondují s geometrickými operacemi posunutí a zrcadlení. Co se týče zrcadlení, hudebníci používají termín inverze pro dvě nezávislé transformace. První přemění základní tvar akordu na jeho obrat, tedy například akord $[C_1, E_1, G_1]$ na $[E_1, G_1, C_2]$. Toto nazýváme obraty akordu. Druhý používaný význam, který budeme nazývat inverze, transformuje například durový kvintakord na mollový kvintakord (bude vysvětleno) [15, s. 33].

Polyfonní hudba¹⁴ používá nezávislé melodie k vyjádření efektivního voice leadingu. Aby toto bylo možné, musíme být schopni určit efektivitu, respektive velikost voice leadingu. Neexistuje obecný princip, který by platil pro všechny akordy, nicméně často stačí velikost voice leadingu pouze porovnávat, nemusíme stanovit jeho přesnou velikost. K porovnávání velikosti voice leadingu nám stačí následující kritéria: 1. čím větší pohyb, tím větší voice leading; 2. pokud se hlasy kříží, považujeme to za „větší“ alternativu stejně velkého nekřížícího se voice leadingu. Z těchto dvou kritérií lze vyvodit, že čím rovnoměrněji akord rozděluje oktávu, tím menší je voice leading k jeho transpozicím. Efektivní voice leading je takový, při kterém se všechny hlasy pohybují pouze o krátké vzdálenosti [15, s. 50].

Při určování velikosti voice leadingu také hraje roli podobnost akordů. Řekneme, že dva typy akordů jsou si *podobné*, pokud existuje malý voice leading mezi jejich transpozicemi, tudíž například zmenšený kvintakord je mollovému kvintakordu blíže než shluku chromatických tónů, tedy souzvuku tří ve stupnici následujících tónů. Můžeme říct, že každý zmenšený kvintakord je částečně spojený přes transpozici s jakýmkoli durovým akordem. Pro příklad, zmenšený kvintakord C je částečně spojený přes transpozici s mollovým kvintakordem f, protože $[C, E_b, G_b]$ je podobný $[C, E_b, G]$ a ten je transpozičně spojený s akordem $[F, A_b, C]$. Úplně stejně to platí pro inverze. Můžeme říct, že akord $[C, D_b, G]$ je částečně spojený přes inverzi s akordem $[E_b, G, A]$, protože $[C, D_b, G]$ je podobný $[C, D, F\sharp]$ a ten je inverzně spojený s $[E_b, G, A]$ [15, s. 52].

3.2.1 Transpozice

Transponované akordy jsou *shodné akordy*, tzn. intervalové vzdálenosti mezi odpovídajícími si tóny obsaženými v akordech jsou stejné. Tóny obsažené v akordech se liší pouze ve výšce, při transpozici dochází k posunutí všech výšek akordu o stejný interval. Příkladem může být kvintový kruh, ve kterém je každý následující akord na kružnici transponován o kvintu výše (Příloha A – Ukázka 8). Hudební termín transpozice koresponduje s matematickým výrazem posunutí.

Na ukázkou: transpozice durového kvintakordu C $[C, E, G] = [0, 4, 7]$ je durový kvintakord F $[F, A, C] = [5, 9, 0]$, protože $[5, 9, 0] = [0 + 5, 4 + 5, 7 + 5] \bmod 12$ [17, s. 2;

¹⁴ Polyfonní hudební kompozice je skladba o více hlasech, ve které jsou jednotlivé hlasy rovnocenné, tzn. žádný není vedoucí ani doprovodný.

18, s. 72]. Jde tedy o posunutí výškových tříd o pět půltónů. Transpozice C dur například o sedm půltónů je potom G dur $[7, 11, 2]$, protože $[7, 11, 2] = [0 + 7, 4 + 7, 7 + 7]$.

Řekneme, že je akord symetrický podle transpozice (*T*-symetrický), pokud existuje transpozice, která ho nechá nezměněný. Máme dva typy transpozičně symetrických akordů. Jeden typ rozděluje kružnici výškových tříd rovnoměrně. Druhý může být rozdělen na stejně velké části, které kružnici také rozdělí rovnoměrně. Například akord $[H, C, F, F\#]$ nerozděluje kružnici rovnoměrně. Můžeme ho však rozdělit na dvojici tritónů¹⁵, z nichž každý rozděluje kružnici na poloviny. Akordy podobné nějakému z těchto symetrických akordů nazveme částečně symetrické a můžeme je spojit efektivním voice leadingem s některou z jejich transpozic. Pro příklad, mějme durový kvintakord C $[C, E, G]$, který je podobný akordu $[C, E, G\#]$. Je tomu tak proto, že voice leading mezi $[C, E, G]$ a $[C, E, G\#]$ je malý. Také durový kvintakord E tedy musí být podobný zvětšenému kvintakordu C. Je tomu tak proto, že můžeme transponovat malý voice leading mezi $[C, E, G]$ a $[C, E, G\#]$ jednotným zvýšením o velkou tercii, získáme pak akordy $[E, G\#, H]$ a $[E, G\#, C]$. Máme efektivní voice leading z durového kvintakordu E na zmenšený kvintakord C [15 s. 53–54].

3.2.2 Inverze

Hudební pojem obrat akordu je synonymem pro matematický pojem zrcadlení nebo inverze. V geometrické interpretaci jsou inverzně spojené akordy shodné, osově souměrné akordy, které odpovídají odečtení od konstantní hodnoty. Například durový kvintakord C $[C, E, G] = [0, 4, 7]$ je inverzně spojený s mollovým akordem c $[C, E\flat, G] = [0, 3, 7]$, protože odpovídá odečtení od konstanty $k = 7$, tedy $[0, 3, 7] = [7 - 7, 7 - 4, 7 - 0]$. Hudebně jsou transpozice a obraty velice důležité, protože zachovávají charakter akordu, tedy akordy znějí velice podobně [17, s. 2–3; 18, s. 72].

Řekneme, že je akord inverzně symetrický (*I*-symetrický), pokud je invariantní vůči zrcadlení v prostoru výškových tříd [17, s. 5; 18, s. 74]. Akord zůstane nezměněný při inverzi, pokud noty, ze kterých se skládá, jsou poskládané symetricky kolem průměru kružnice. Mějme například částečně inverzně symetrické akordy. Akord $[C, D\#, E]$ je sice nesymetrický, ale je blízky akordu $[C, D, E]$, protože voice leading mezi akordy $[C, D\#, E]$ a $[C, D, E]$ je malý. Pokud invertujeme voice leading kolem zafixovaného bodu D, vznikne $[C, D\flat, E] \rightarrow [C, D, E]$. Obrácením tohoto voice leadingu a propojením s tím předchozím vzniká

¹⁵ Tritón je interval šesti půltónů.

$[C, D\sharp, E] \rightarrow [C, D, E] \rightarrow [C, Db, E]$. Když odebereme prostřední akord, vznikne nám voice leading mezi inverzně spojenými akordy, tedy $[C, D\sharp, E] \rightarrow [C, Db, E]$ [15, s. 56–57]. Například septakordy¹⁶ $F\sharp[6, 9, 0, 4]$ a $F[5, 9, 0, 3]$ jsou spojené ve vztahu inverze a jsou velice blízké *I*-symetrickému akordu $[5.5, 9, 0, 3.5]$, tudíž mezi nimi můžeme najít efektivní voice leading: $[6, 9, 0, 4] \rightarrow [5, 9, 0, 3]$ [17, s. 5–6]. Platí to samé, co u transpozic: inverzně symetrické akordy přenáší symetrii na blízké akordy. Mějme akord *A*, který je blízký akordu invariantnímu vůči symetrii. Pokud tuto symetrii použijeme na akord *A*, vznikne opět akord blízký tomu invariantnímu ($I(A)$), tudíž akordy *A* a $I(A)$ mohou být spojeny efektivním voice leadingem [15, s. 57]. Částečně *T*-symetrické kvintakordy (např. *C* dur) a částečně *P*-symetrické akordy (např. $[C, Db, Eb]$) mohou být také *I*-symetrické [17, s. 6; 18, s. 74].

3.2.3 Permutace

Permutace je další symetrická operace. Zde budeme předpokládat, že akordy mohou obsahovat opakující se tóny. Z tohoto pohledu budeme rozlišovat akordy $[C, C, C]$ a $[C, C]$, jelikož mají různý počet kopií tónu *C*. Můžeme říct, že akord $[C, C, C]$ je permutačně symetrický (*P*-symetrický), protože existuje voice leading, který přehází tóny v akordu $[C, C, C]$. Musíme předpokládat, že dokážeme rozeznat $[C_a, C_b, C_c] \rightarrow [C_c, C_a, C_b]$, což v praxi není možné. Také tento typ akordů přenáší symetrii na podobné akordy, tedy pokud máme malý voice leading mezi akordem *A* a akordem *S*¹⁷, tedy permutačně symetrickým akordem, můžeme permutovat oba akordy rovnoměrně a získáme malý voice leading mezi jejich permutacemi. Protože akord *S* je permutačně symetrický, pak je malý i voice leading mezi permutací akordu *A* ($P(A)$) a *S*. Pro příklad, mějme shluk chromatických tónů $[H, C, Db]$, který je podobný $[C, C, C]$, protože voice leading mezi nimi je malý. Po přerovnání a otočení směru voice leadingu získáme $[C, C, C] \rightarrow [C, Db, H]$. Když tyto voice leadingy spojíme, dostaneme $[H, C, Db] \rightarrow [C, C, C] \rightarrow [C, Db, H]$ a po odebrání prostředního akordu potom získáme $[H, C, Db] \rightarrow [C, Db, H]$, tedy malý voice leading spojující akord $[H, C, Db]$ sám se sebou [15, s. 58].

Částečně *P*-symetrické akordy jsou považovány za extrémně nelibozvučné a hodí se spíše do statické hudby, ve které téměř nedochází ke změně harmonie a hlasy se pohybují pouze malými vzdálenostmi. Tyto akordy jsou typické pro avantgardní kompozice [17, s. 5; 18, s. 74].

¹⁶ Septakord je souzvuk čtyř tónů, který vzniká z kvintakordu přidáním malé nebo velké tercie nad nejvyšší tón.

¹⁷ Akord *S* zde používáme jako obecný zápis permutačně symetrického akordu.

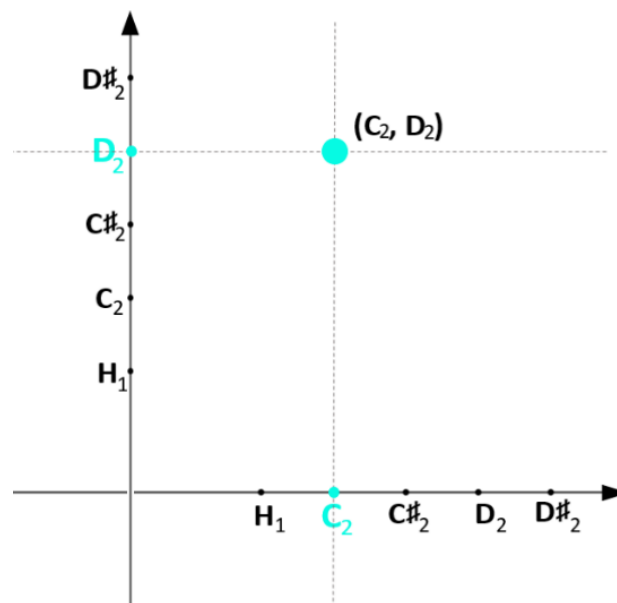
3.3 Akordový prostor

Uspořádaný akordový prostor

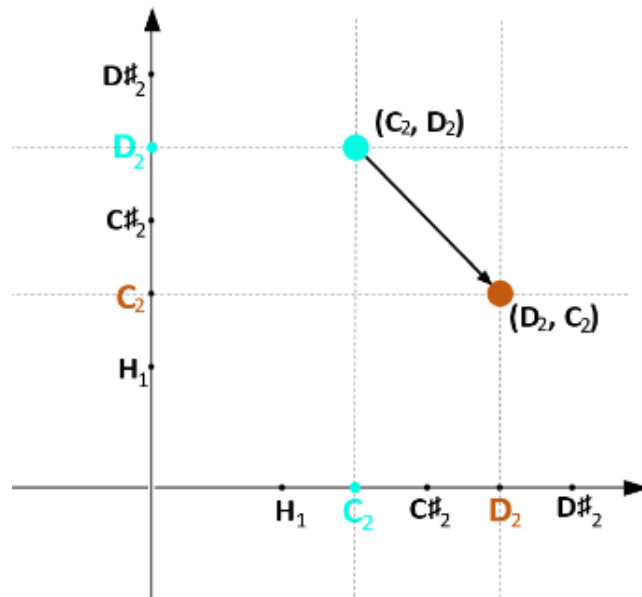
Mějme geometrický model, ve kterém jsou akordy reprezentovány jako body v prostorech vyšších dimenzí. V akordovém prostoru budeme konstruovat voice leadingové grafy, které ukazují spojení mezi akordy. Funguje to tak, že se můžeme rozhodnout, zda znázorníme dvojjzvuk jako dva body v jednodimenzionálním prostoru (Obr. 53) nebo jako jeden bod ve dvojdímenzionálním prostoru (Obr. 54). Ve dvojdímenzionálním prostoru můžeme znázorňovat postupy mezi hudebními objekty jako úsečky mezi nimi (Obr. 55). Tímto způsobem můžeme lehce zaznamenat také dvojhlasou hudbu [15, s. 65].



Obr. 53. Dvojjzvuk C₁D₁ v jednodimenzionálním akordovém prostoru
[upraveno dle 15, s. 66, Obr. 3.1.1 a)].

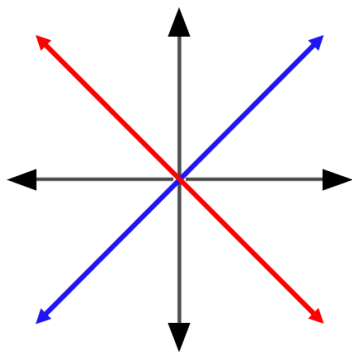


Obr. 54. Dvojjzvuk C₁D₁ ve dvojdímenzionálním akordovém prostoru
[upraveno dle 15, s. 66, Obr. 3.1.1 b)].

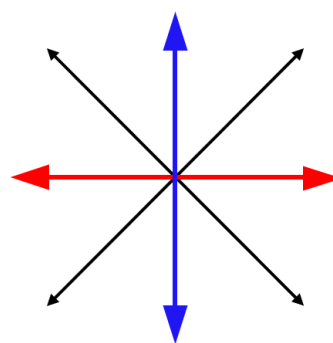


Obr. 55. Znáznornění postupu mezi dvojjzvuky pomocí úsečky ve dvojdimenzionálním akordovém prostoru [upraveno dle 15, s. 66, Obr. 3.1.2].

Horizontální a vertikální úsečky reprezentují pohyby jednotlivých hlasů při změně akordu, úsečky v diagonálním směru, tedy ty svírající úhel 45° s osou x , reprezentují pohyb, při kterém se oba hlasy pohybují stejným směrem (na obrázku modrou barvou (Obr. 56)). Pokud se hlasy pohybují opačným směrem, je to reprezentováno úsečkami na druhé diagonále (na obrázku červenou barvou (Obr. 56)). Otočíme soustavu tohoto prostoru o 45° ve směru hodinových ručiček, takže diagonální pohyby se stanou horizontálními a vertikálními. Prostor zůstává stejný, jen na něj jinak nahlížíme (Obr. 57) [15, s. 66].

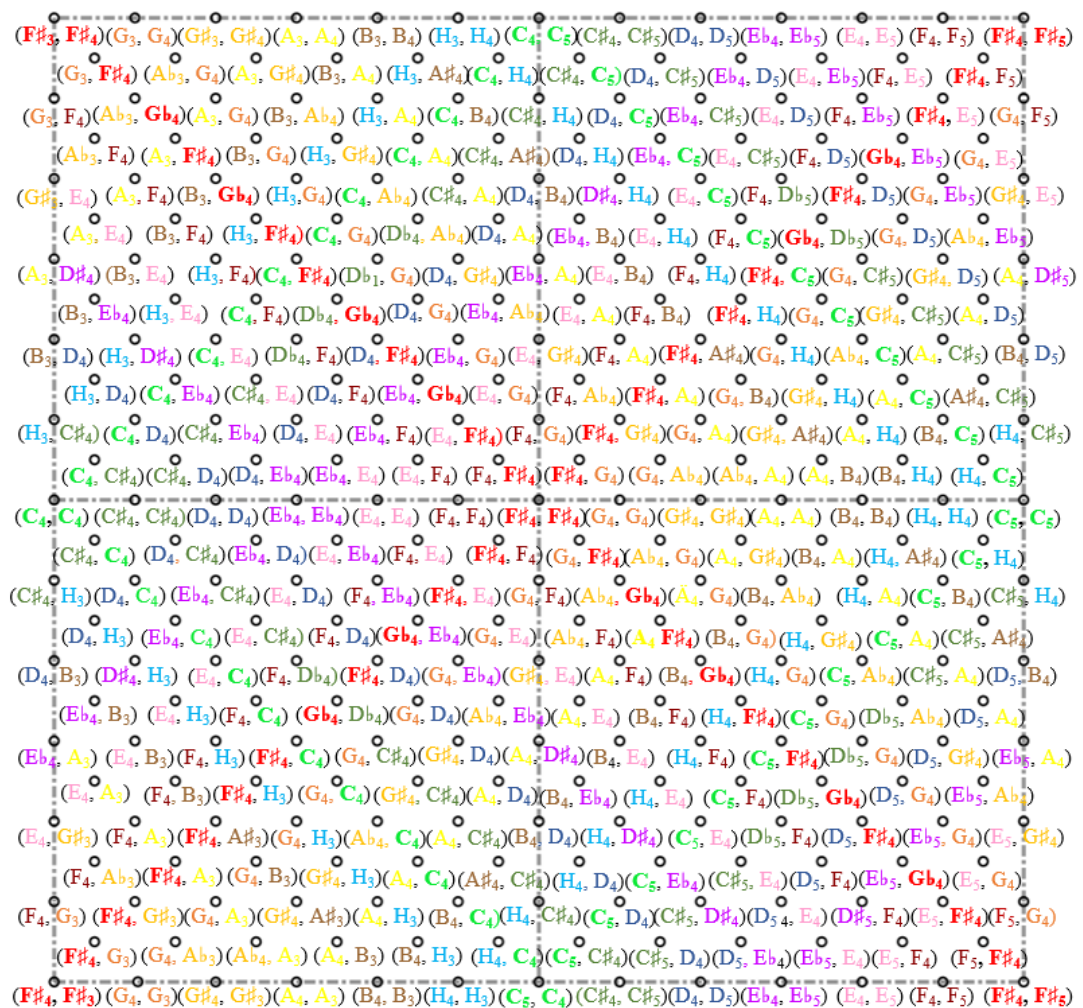


Obr. 56. Souřadnicový systém dvojrozměrného akordového prostoru [upraveno dle 15, s. 67, Obr. 3.1.5].



Obr. 57. Souřadnicový systém dvojrozměrného akordového prostoru otočený o 45° [upraveno dle 15, s. 67, Obr. 3.1.5].

Na následujícím obrázku (Obr. 58) vidíme část nekonečného dvojrozměrného uspořádaného prostoru. Všimněme si jeho periodicity, skládá se vlastně z jediného vzoru, který se opakuje, a pokrývá tak celou rovinu; na obrázku vidíme čtyři celé vzory. Body v levém dolním rohu jsou spojeny transpozicí o oktávu s body v pravém horním rohu a to tak, že první tón v páru zůstane stejný a druhý je v pravém horním kvadrantu o oktávu vyšší. Úplně stejný princip platí pro pohyb tónů z levého horního rohu do pravého dolního, kdy se zvýší první prvek dvojice tónů o oktávu. Díky této možnosti spojování kvadrantů pomocí diagonálních pohybů nám stačí tento obrazec, abychom mohli generovat celý nekonečný prostor [15, s. 67]. Můžeme si také představit, že by se levý spodní roh části prostoru z obrázku (Obr. 58) zdvihl z papíru a překlopil se na levý horní. Touto transformací spojujeme dvojice tónů, které jsou shodné, co se týče jejich výšek, ale v opačném pořadí, jako kdyby druhý kvadrant byl obrazem prvního v zrcadle. Geometricky jde o transformaci zrcadlení. Pro pravé kvadranty na obrázku platí úplně to samé [15, s. 68].



Obr. 58. Část dvojrozměrného akordového prostoru [upraveno dle 15, s. 68, Obr. 3.1.5].

Dvojměrný akordový prostor

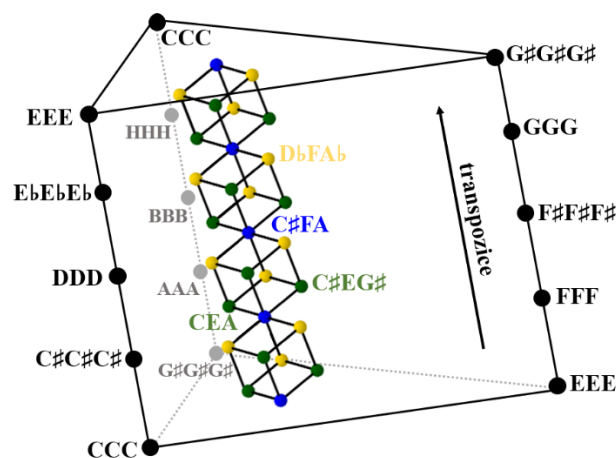
V lineárním modelu si lehce vysvětlíme, že můžeme ignorovat oktávu a pořadí. Zavedli jsme třídy výšek a „smotali“ přímku do kruhu. Když chceme ale tyto hudební parametry ignorovat také ve dvoudimenzionálním prostoru, není až tak jasné, jak to udělat [15, s. 65]. Naším cílem je tedy svinout nekonečný prostor z přechozího obrázku (Obr. 58) tak, abychom slepili všechny různé body reprezentující stejný akord, ať už jsou tóny v jakémkoli pořadí či oktávě. Vznikne nám nový geometrický prostor, který je analogický k našemu základnímu vzoru z obrázku (Obr. 58), ve kterém body znázorňují dvojtónové akordy, v tomto případě neuspořádané dvojice výškových tříd. Body sice označujeme uspořádanými dvojicemi, např. HC, nicméně znázorňuje to jak dvojjzvuk [H, C], tak dvojjzvuk [C, H]. Znovu můžeme otočit souřadnicové osy tak, aby byl diagonální hudební pohyb reprezentován horizontálním pohybem geometrickým. V otočeném prostoru budou horizontální pohyby zaznamenávat diagonální pohyb v obou hlasech, vertikální potom opačný pohyb hlasů o stejnou vzdálenost. Akordy na stejné horizontální přímce jsou tedy spojené přes transpozici. Unisono, tedy dvojjzvuky se dvěma stejnými tóny, můžeme najít na krajích vzoru. Ostatní intervaly najdeme na horizontálních přímkách. Čím větší je interval mezi danými dvěma tóny ve dvojjzvuku, tedy akord rozděluje oktávu rovnoměrněji, tím víc se linky, které je reprezentují, blíží k centru. Tím pádem horizontální linka procházející středem figury znázorňuje tritóny rozdělující pomyslnou kružnici výškových tříd na dvě poloviny [15, s. 70–72]. Všechny dvojtónové akordy leží na stejné vertikální lince jako jejich transpozice o tritón.

Trojrozměrný akordový prostor

Nyní rozšíříme dvojdímní akordový prostor na trojdímní. Potřebujeme tedy tři osy souřadnic, abychom mohli zaznamenat tři různé hlasy trojtónových akordů. Opět máme uspořádaný periodický prostor, který by mohl být rozdělen na jednotlivé shodné trojdímní části, které vždy obsahují jednoho zástupce každého trojtónového akordu. To, že se soustředíme na jednu z těchto částí je vlastně to samé, jako ignorovat oktávu a pořadí tónů v akordu. Shodné trojdímní části uspořádaného trojrozměrného akordového prostoru jsou pravidelné trojboké hranoly. Zvětšené kvintakordy rozdělující oktávu na tři shodné části leží na vertikální přímce procházející těžištěm spodní podstavky hranolu a v obrázku (Obr. 59) je reprezentujeme modrými body. Akordy, které rozdělují oktávu téměř rovnoměrně, jsou situovány také poblíž centra hranolů. Zelené body reprezentují mollové kvintakordy, žluté potom ty durové. Čím méně rovnoměrně jsou tóny v akordu rozmístěné, tím dále od vertikální přímky procházející těžištěm podstavky jsou situované. Na krajích hranolů

potom leží akordy, které obsahují více stejných not. Akordy se dvěma opakujícími se tóny najdeme na bočních stěnách hranolu, trojtónová unizona, tedy nejméně rovnoměrné akordy, potom na hranách. Na obrázku vidíme pouze některé akordy, nicméně také tento trojrozměrný akordový prostor je nekonečný a jakákoli trojice výškových tříd odpovídá nějakému bodu v hranolu [15, s. 85–86].

Voice leadingy jsou v tomto případě zobecněné úsečky mezi jednotlivými body. Stoupající diagonální pohyb všech tří hlasů odpovídá stoupajícímu vertikálnímu pohybu tónů v hranolu. Vertikální přímky v hranolu mizí v horní stěně a znovu se objevují v podstavě, otočené o třetinu otočky. To znamená, že když všechny tři hlasy postupují z [C, C, C] do [E, E, E], příslušná úsečka roste podél levé hrany hranolu. Když dosáhne [E, E, E], znovu se objeví v podstavě stěně, a to konkrétně v pravém rohu. Pokračuje podél pravé hrany až do [G♯, G♯, G♯], kde opět zmizí a objeví se ve spodní stěně v [G♯, G♯, G], odkud pokračuje stoupáním po hraně až do [C, C, C]. Můžeme si tedy představit trojúhelníkové stěny slepené k sobě po rotaci o 120°. To samé platí pro všechny transpozice jakéhokoli akordu. Linky v centru hranolu spojují akordy, které mohou být spojeny voice leadingem, při kterém se pohybuje pouze jeden hlas, a to jen o jeden půltón [15, s. 85–86].



Obr. 59. Hranol s trojúhelníkovou podstavou znázorňující jednu z částí trojdimenzionálního akordového prostoru [upraveno dle 15, s. 86, Obr. 3.8.2].

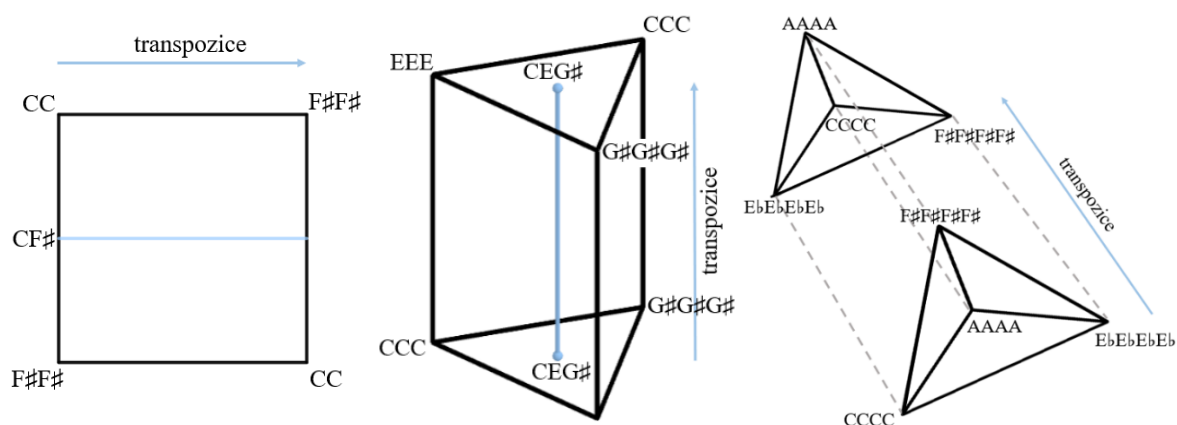
Vícerozměrné akordové prostory

Již víme, že potřebujeme dimenzi pro každý reprezentovaný hlas, takže pro reprezentaci čtyř hlasů potřebujeme čtyři dimenze. Také víme, že když ignorujeme oktávu a pořadí, je každý prostor periodický a skládá se z vícedimenzionálních ekvivalentních částí. Na obrázku (Obr. 60) vidíme vždy jednu z těchto vícedimenzionálních částí, a to ve dvoj-, troj-

a čtyřdimenzionálních případech. Na prvním obrázku vidíme čtverec, jehož levá strana je přilepená k pravé, otočené o půlobrat. Pokud se snažíme zobecňovat tento princip, nebudeme tento obrazec brát jako čtverec, ale jako dvojdimenzionální hranol, který by vznikl, kdybychom přetáhli levou stranu (tedy tu jednodimenzionální) horizontálně doprava a zformovali tedy dvojdimenzionální obrazec. Každý akord je na stejné vertikální lince jako jeho transpozice o tritón. Tímto přetažením levé strany horizontálně doprava vlastně transponujeme každý akord o šest půltónů výše, kdy jsou na pravé a levé straně stejné akordy. Tyto dvě strany slepíme s jejich „otočením“, takže prostor získá kruhovou strukturu; při pohybu kolmo na stranu se vždy dostaneme tam, kde jsme začali [15, s. 93].

Trojdimenzionální část je také hranol vzniklý tažením spodní trojúhelníkové stěny nahoru. Výsledná struktura má dvě dvojdimenzionální trojúhelníkové stěny. Každá z nich obsahuje trojtónové akordy, z nichž každý je na stejné stěně jako jeho transpozice o velkou tercii. Tažením spodní stěny nahoru akordy transponujeme a děláme to tak dlouho, dokud netransponujeme o čtyři půltóny, takže vrchní stěna obsahuje stejné akordy jako spodní. Otočením o 120°, že si akordy odpovídají. Jejich slepení způsobí vznik jakéhosi donutu z trojúhelníků, tedy máme opět kruhovou strukturu, jelikož pohybem po kolmicích na trojúhelníkové stěny se nakonec dostaneme tam, kde jsme začali (Obr. 60) [15, s. 94].

Pro čtyři dimenze platí to samé, jen musíme přidat další dimenzi pro čtvrtý hlas. Opět získáme hranol, jehož stěny jsou tentokrát čtyřstěny neboli trojdimenzionální analogie trojúhelníků (Obr. 60). Potom akordy a jejich transpozice o malou tercii leží na stejném řezu čtyřstěnem. Opět proběhne stejné stoupání spodního čtyřstěnu, tentokrát o malou tercii, znovu proběhne rotace a vznikne jakýsi čtyřdimenzionální donut [15, s. 94–95].



Obr. 60. Dvoj-, troj- a čtyřdimenzionální části akordového prostoru [upraveno dle 15, s. 94, Obr. 3.9.1].

Obecný princip je takový, že pro dimenzi n je akordovým prostorem n -dimenzionální hranol vzniklý tažením zobecněného trojúhelníku¹⁸ do přidané dimenze. Zobecněný trojúhelník je stěnou hranolu a obsahuje akordy, jejichž součty obsažených výškových tříd jsou shodné, a proto je každý n -tónový akord na stejné stěně jako jeho transpozice o $12/n$ půltónů. Tažením stěny do přidané dimenze transponujeme všechny akordy. Pokračujeme až dokud akord není transponovaný o $12/n$ půltónů, kdy vzniknou stejné akordy jako v původní stěně. Slepáním těchto dvou stran s otočením tak, aby akordy souhlasily vytvoříme kruhovou strukturu a vytvoříme vícedimenzionální analogy donutů [15, s. 95].

3.4 Mřížky

Tato podkapitola se zabývá znázorňováním částečně symetrických akordů pomocí trojdimenzionálních mřížek, dále pak pomocí duálních mnohoúhelníků a mnohostěnů. Je také nastíněno rozšíření do vyšších dimenzí a to proto, aby čtenář pochopil, jak tuto teorii aplikovat na vícetónové akordy.

3.4.1 Duály

Mnohoúhelník

Kružnici n úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$, které spojují vedlejší páry n bodů A_1, A_2, \dots, A_n , nazveme n -úhelník. Úsečkám říkáme *strany* a bodům *vrcholy*. Pokud jsou všechny vrcholy koplanární, říkáme útvaru *rovinný mnohoúhelník*, v opačném případě mluvíme o *zborceném polygonu*. Řekneme, že mnohoúhelník je *rovnostranný*, když má všechny strany stejně dlouhé, a *rovnoúhlý*, pokud má všechny úhly stejně velké. Mnohoúhelník je *pravidelný*, pokud je zároveň rovnostranný a rovnoúhlý. Pravidelný mnohoúhelník má *střed*, což je bod, od něhož mají všechny vrcholy stejnou vzdálenost [2, s. 1, def. 1.1, s. 2].

Mnohostěn

Mnohostěn můžeme definovat jako konečnou množinu rovinných mnohoúhelníků, které jsou spojeny tak, že každý z mnohoúhelníků sdílí každou ze svých stran s právě jedním dalším mnohoúhelníkem. Tyto mnohoúhelníky nazýváme *stěny* a jejich stranám říkáme *hrany*. Také mnohostěny tvoří uzavřenou plochu a rozdělují prostor na dvě oblasti. Když spojíme bod a n -úhelník pomocí n trojúhelníků, získáme jehlan, dva shodné n -úhelníky můžeme spojit n pravoúhelníky pro vytvoření hranolu. Čtyřstěn je jehlan s trojúhelníkovou podstavou,

¹⁸ Zobecněným trojúhelníkem myslíme n -rozměrné zobecnění trojúhelníku nebo také simplex. 0-simplex je bod, 1-simplex je úsečka, 2-simplex je trojúhelník, 3-simplex je čtyřstěn, atd.

jehož stěny se skládají ze čtyř trojúhelníků, z nichž jeden může být považován za podstavu. Pokud jsou všechny čtyři trojúhelníky rovnostranné, mluvíme o *pravidelném čtyřstěnu* [2, s. 4, def. 1.2].

Dimenzionální analogie

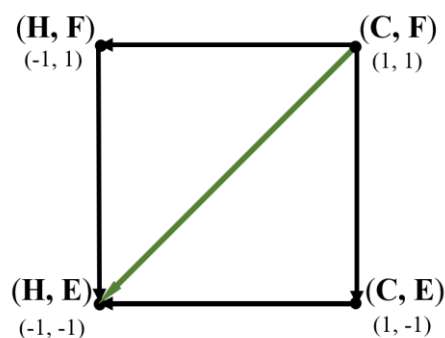
V prostoru o nulové dimenzi je jediným útvarem bod, v prostoru o jedné dimenzi můžeme mít jakýkoli počet bodů, z nichž spojnice jakýchkoli dvou bodů je úsečka, což je vlastně jednodimenzionální analog mnohoúhelníku a mnohostěnu. Spojením dvou bodů (tedy 0-simplexů) získáme úsečku (1-simplex), spojením úsečky s dalším bodem neležícím na ní zkonstruujeme trojúhelník (2-simplex), tedy nejjednodušší případ mnohoúhelníku. Spojením trojúhelníku se čtvrtým bodem mimo tento útvar zkonstruujeme čtyřstěn (3-simplex), tj. nejjednodušší mnohostěn atd. Jakékoli $n + 1$ body neležící v n -rozměrném prostoru jsou vrcholy n -dimenzionálního simplexu [2, s. 118–120, def. 7.1, 7.2]. *Simplex* je tedy vlastně n -rozměrné zobecnění trojúhelníku.

Polytop

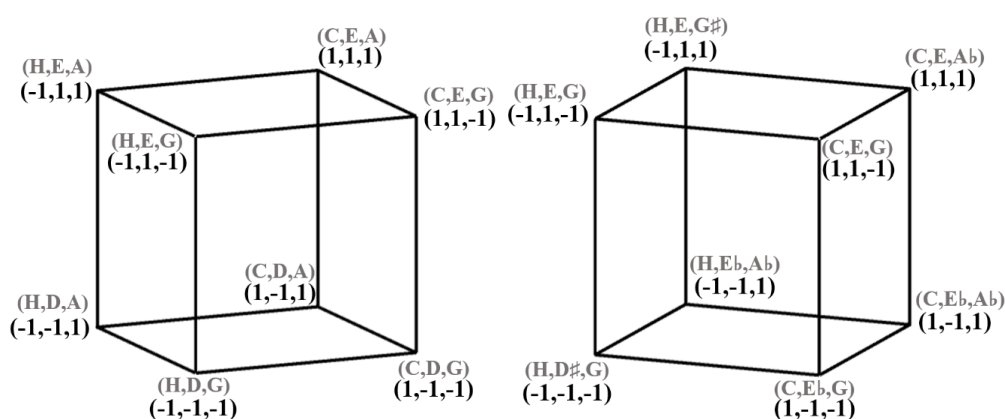
Polytop definujeme jako konvexní těleso v n -rozměrném prostoru uzavřené konečným počtem nadrovin [2, s. 126–127, def. 7.4]. Je to obecný termín pro posloupnost: bod, úsečka, mnohoúhelník, mnohostěn atp. Dva body se spojují v úsečku, čtyři úsečky ohraničují čtverec, šest čtverců krychli, osm krychlí n -rozměrnou krychli, kterou nazveme nadkrychle atd. [2, s. 118]; n -rozměrnou krychli nazýváme nadkrychle, n -rozměrnému polytopu, který je konvexní a jehož stěny jsou simplexu o 1 nižší dimenze, říkáme *křížový polytop* [16, s. 6]. Je to například čtverec nebo osmistěn.

Voice leadingové mřížky

Akordové mřížky zobrazující voice leading jsou většinou sestaveny z nadkrychlí. Jednostupňové pohyby hlasů v akordu jsou potom reprezentovány různými prostorovými dimenzemi, můžeme tedy zobrazit různé způsoby snižování (nebo zvyšování) jednotlivých tónů v akordu po krocích. Na následujícím obrázku (Obr. 61) vidíme všechny různé způsoby, jak lze snižovat tóny dvojjzvuku a následně vytvořit dvojjzvuk o stupeň níže ve stupnici. Ten samý princip platí i pro třítónové akordy, rozdíl je pouze v reprezentaci pomocí krychle namísto čtverce (Obr. 62). Je tomu tak proto, že pro tři tóny potřebujeme tři souřadnice. Tento princip platí jak v chromatické, tak v diatonické stupnici [16, s. 12–13].



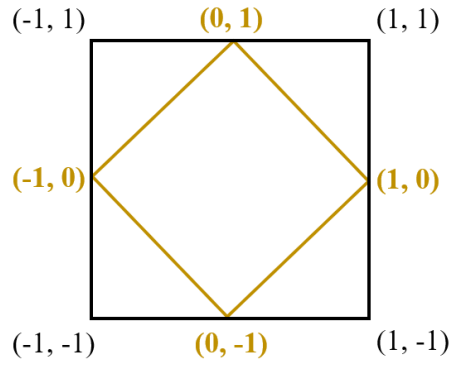
Obr. 61. Způsoby, jak lze snížit dvojjzvuk a následně vytvořit akord o stupeň níže ve stupnici, znázorněné ve čtverci [upraveno dle 16, s. 12, Obr. 6].



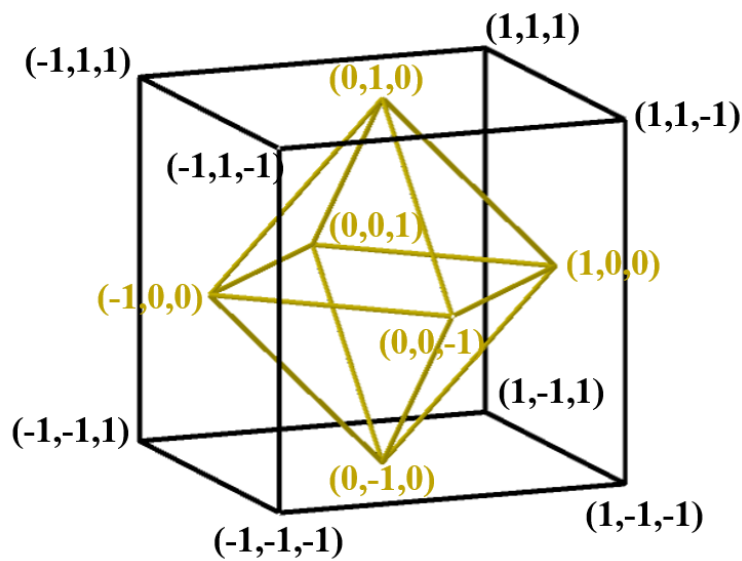
Obr. 62. Způsoby, jak lze snížit trojjzvuk a následně vytvořit akord o stupeň níže ve stupnici, znázorněné v krychli [upraveno dle 16, s. 13, Obr. 7].

Dualita

Ke každému mnohoúhelníku existuje útvar, který nazýváme *duální*. Vrcholy útvaru korespondují se stranami duálu a naopak, strany mezi dvojicemi vrcholů útvaru korespondují se stranami mezi dvojicemi stran duálu. To znamená, že například ve čtverci budou místo jeho stran vrcholy a místo vrcholů strany duálu (Obr. 63), duál čtverce je čtverec. Můžeme to rozšířit i do dalších dimenzí, například ve trojrozměrném prostoru budou vrcholy duálu korespondovat se středy stěn. Duálem krychle je osmistěn, který má vrcholy ve středech stěn krychle (Obr. 64). Duálem osmistěnu je krychle, což ilustruje obecný princip, že každý polytop je duálem svého duálu. Když se zamyslíme nad ostatními útvary v rovině a prostoru, můžeme si všimnout, že čtverec, trojúhelník a čtyřstěn jsou samoduální. Dualita mezi krychlí a osmistěnem může být rozšířena do vyšších dimenzí, takže také nadkrychle a křížový polytop jsou navzájem duální [16, s. 6].



Obr. 63. Samodualita čtverce [upraveno dle 16, s. 8, Obr. 3].



Obr. 64. Krychle a její duál v podobě osmistěny [upraveno dle 16, s. 8, Obr. 4].

Když má čtverec vrcholy o souřadnicích $(\pm 1, \pm 1)$, pak vrcholy duálního útvaru mají souřadnice $(\pm 1, 0)$ a $(0, \pm 1)$ (Obr. 63) [16, s. 8, Obr. 3]. Pokud má krychle vrcholy o souřadnicích $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, pak souřadnice vrcholů duálu jsou $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ a $(0, 0, \pm 1)$. Každý z vrcholů osmistěny je umístěn do středu jedné ze stěn krychle (Obr. 64) [16, s. 8, Obr. 4].

Krychle a osmistěny jsou vůči sobě duální a tato dualita může být rozšířena do libovolných dimenzí. V n -dimenzionálním kartézském prostoru vytvoříme n -dimenzionální krychli s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$, duální osmistěn pak bude mít vrcholy o souřadnicích permutace $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$. Každá stěna nadkrychle bude ohraničena vrcholy, které sdílejí právě jedno číslo v určité konkrétní pozici pořadí. Jak je zjevné z obrázku (Obr. 63), jakákoli souřadnice sdílená se stěnou krychle je nenulová souřadnice přidruženého vrcholu duálního n -rozměrného osmistěny [16, s. 7].

Hudební interpretace duality

Hudebně můžeme brát nadkrychli $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ jako reprezentaci akordového grafu, který zobrazuje všechny možné postupy snižování tónů, které převedou uspořádaný akord o n tónech na akord o stupeň pod ním. Každá $+1$ souřadnice odkazuje na jednu z not původního akordu, -1 je potom nota o stupeň pod ní. Můžeme se dostat z $(+1, +1)$ do $(-1, -1)$, a to přes $(+1, -1)$ nebo $(-1, +1)$. Stejně tak se můžeme dostat z $(+1, +1, +1)$ do $(-1, -1, -1)$ přes přechodné souřadnice $(+1, +1, -1)$ a $(+1, -1, -1)$ (Obr. 64). Duální křížový polytop, který má vrcholy o souřadnicích permutace $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$, může být interpretován jako notový graf zaznamenávající tutéž informaci. Budeme postupovat následovně: Začneme s původním akordem na vrchu stěny (tedy s akordem, jenž má všechny souřadnice vrcholů $+1$, jedná se tedy o původní, nesnížený akord). Každý jednotlivý krok snižování potom bude reprezentován jednoduchým převrácením, při kterém je každý vrchní bod nahrazen jeho spodním analogem (tedy -1 v pozici stejného pořadí). Můžeme snižovat a snižovat, nahrazovat souřadnice $+1$ za protějšek, tedy -1 , dokud se nedostaneme na spodní stěnu, kde už dále snižovat nelze [16, s. 9].

Když tedy máme n -dimenzionální krychli v n -notovém akordovém prostoru, která reprezentuje jednostupňový voice leading v každém hlase, můžeme využít dualitu k vytvoření analogu k Tonnetzu, ve kterém vrcholy reprezentují třídy výšek a simplexy tvořící stěny reprezentují akordy podle příslušných výšek. Efektivní voice leading je reprezentován „obraty simplexů“, které převedou jednu stěnu osmistěnu na druhou, s níž sdílí hranu [16, s. 14–15].

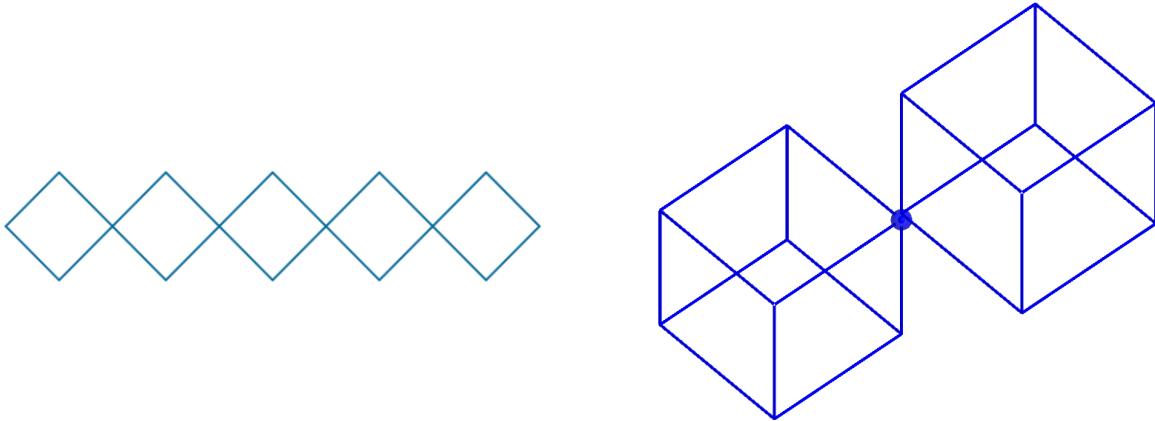
3.4.2 Typy mřížek

U vícedimenzionálních akordových prostorů nastává problém s jejich vizualizací, které již není tak intuitivní. My se zabýváme především částečně symetrickými akordy a voice leadingy mezi nimi. Pro tyto účely nám stačí jednoduché dvoj- a trojdimenzionální mřížky reprezentující veškeré hudební vztahy, které potřebujeme [15, s. 103].

Pod pojmem mřížka si můžeme představit graf, jehož vrcholy leží na pravidelné čtvercové nebo krychlové síti, na které jsou vedlejší body spojené stranami (u čtverce v rovině) nebo hranami (u krychle v prostoru). Naše grafy jsou takto mřížkové pouze lokálně, protože obsahují jakási překroucení [15, s. 103, pozn. 34].

Můžeme rozlišovat dvě skupiny mřížek znázorňujících n -tónové akordy jakékoli stupnice. Prvním typem jsou mřížky, ve kterých je daná stupnice

rovnoměrně rozdělena počtem tónů v akordu. Získáme tak kružnici n -dimenzionálních krychlí spojených přes společné vrcholy, jednodimenzionální a dvoudimenzionální případy můžeme vidět na obrázku (Obr. 65) [16, s. 15]. Pomocí tohoto typu mřížky můžeme zobrazovat částečně rovnoměrné dvoj, troj, čtyř nebo šestitónové akordy ve dvanáctitónovém chromatickém prostoru [15, s. 103].



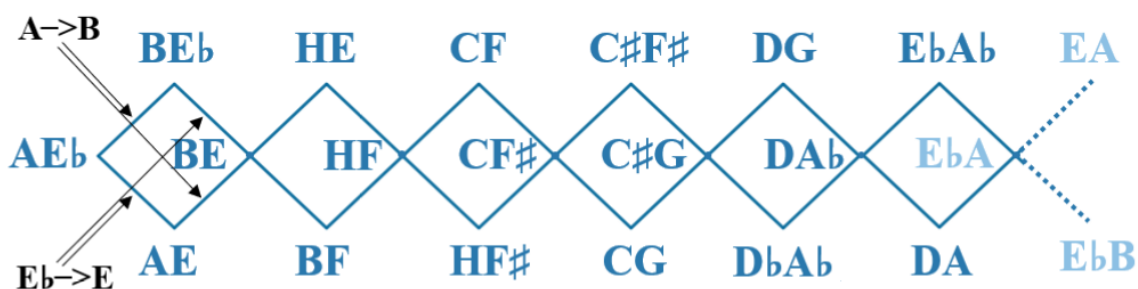
Obr. 65. Mřížka prvního typu, ve které je stupnice rozdělena tóny v akordu rovnoměrně, jedno- a dvourozměrná [upraveno dle 16, s. 16, Obr. 9].

Druhým typem mřížek jsou mřížky znázorňující akordy, jejichž počet tónů je nesoudělný s počtem tónů stupnice. Opět získáme kruh krychlí, tentokrát však spojených přes společné stěny [16, s. 15]. Pomocí tohoto typu mřížky můžeme potom reprezentovat pěti- a sedmitónové akordy ve dvanáctitónovém chromatickém prostoru, dále pak jakékoli akordy jakékoli stupnice [15, s. 103]. Rozdíl mezi těmito dvěma typy je, že v prvním případě je dimenze mřížky podmíněná počtem tónů v akordech, které chceme znázornit, tedy ke znázornění dvou-, tří- a čtyřtónových akordů potřebujeme dvou-, tří- a čtyřdimenzionální mřížku. V druhém případě o dimenzi rozhoduje počet různých typů akordů, které znázorňujeme. Můžeme tudíž užít jednodimenzionální graf k reprezentaci voice leadingů mezi stejnými akordy, dvoudimenzionální graf k reprezentaci dvou typů akordů, trojdimenzionální graf ke znázornění tří typů akordů a tak dále [16, s. 15]. Oba typy mřížek jsou odvozeny od nadkrychlí spojených k sobě, buď přes společné vrcholy nebo stěny. Už víme, že můžeme akordový graf převést na notový nahrazením nadkrychlí jejich duály, tudíž musíme pouze určit, jak se budou tyto duály, tj. křížové polytopy, spojovat [16, s. 16].

První typ mřížek

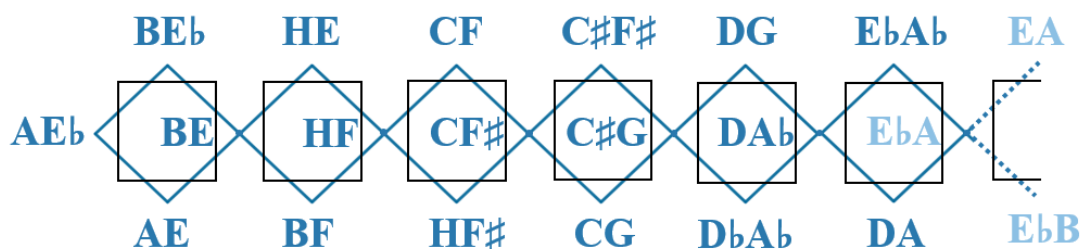
V prvním typu mřížek platí, že pokud počet tónů v akordu dělí počet not stupnice beze zbytku, potom stupnice obsahuje dokonale vyrovnané akordy. Ty pak leží přímo v centru akordového prostoru a tvoří body spojující vedlejší krychle v mřížce. Zbylé hrany v mřížce znázorňují cesty, kterými lze snižovat a zvyšovat každý tón v těchto akordech. Pro akordy obsahující n tónů pak existuje n možných tónů ke snížení. Když snížíme jeden tón, zbyde nám jich $(n - 1)$. Stejným způsobem pak můžeme tóny snižovat dále. Geometricky tyto cesty snižování načrtnou obrys n -dimenzionální krychle s vrcholy o souřadnicích obsahujících 0 nebo 1. Souřadnice všech vrcholů můžeme odvodit tak, že začneme ve vrcholu $(1, 1, \dots, 1)$ a snižujeme postupně všechny souřadnice, dokud nedojdeme k bodu $(0, 0, \dots, 0)$ [15, s. 105–106].

Na obrázku (Obr. 66) vidíme půltónový voice leading mezi čistými kvartami (resp. kvintami) a tritóny (zvětšenými kvartami/zmenšenými kvintami). Jedná se o kruh čtverců spojených přes společný vrchol, na obrázku (Obr. 66) zobrazené v rozvinuté formě. Kruh je to proto, že se po určitém počtu kroků dostaneme opět do stejných výškových tříd. Vrcholy, přes které jsou čtverce spojené, zobrazují tritóny, zbylé dva vrcholy každého z čtverců potom reprezentují čisté kvarty a kvinty. Dvě osy, které svírají s horizontálně umístěnou osou $x \pm 45^\circ$ znázorňují pohyb jednotlivých hlasů. Ukažme si to na příkladu dvojzvuku [B, E]. Diagonální pohyb posune tón B nahoru, přičemž tón E zůstane fixovaný na místě. Opačný diagonální pohyb přesunou tón E o půltón dolů a na místě zůstane fixovaný tón B. Zafixuje se tón H a E sestoupí diagonálním pohybem o půltón, zafixuje se F a B se posune nahoru o půltón. Získáme tak dvojzvuk HF o stupeň výše ve stupnici. [16., s. 19].



Obr. 66. Mřížka znázorňující půltónový voice leading mezi čistými kvartami a tritóny [upraveno dle 16., s. 19, Obr. 13 a)].

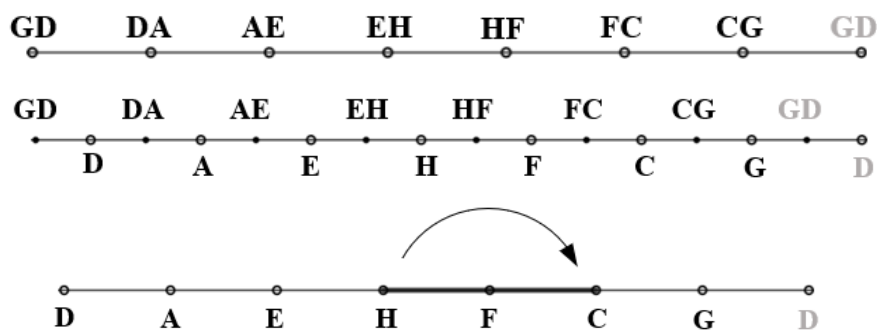
Duální grafy konstruujeme tak, že nahradíme všechny strany původního čtverce dvěma body a spojíme vždy dva z těchto nových bodů (ty blíže k původnímu vrcholu) stranami (Obr. 67). Vznikne tak řada čtverců, jejichž vrcholům jsou přiřazeny výškové třídy, jelikož každá strana originálního grafu je v duálním grafu nahrazena bodem reprezentující tón (který není ovlivněn pohybem podél strany). Čtverce jsou nespojené a jejich horizontální strany reprezentují čisté kvarty, vertikální pak tritóny [16, s. 19].



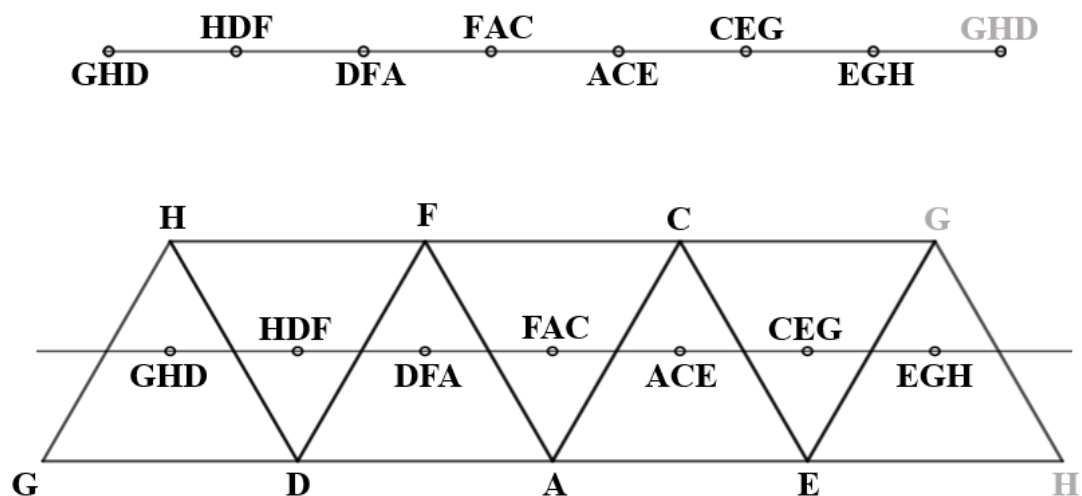
Obr. 67. Duály čtverců mřížky znázorňující půltónový voice leading mezi čistými kvartami a tritóny [upraveno dle 16, s. 19, Obr. 13 b)].

Druhý typ mřížek

Pokud se zaměříme pouze na jeden typ akordu, akordový graf je zobecněný kvintový kruh spojující akordy spojené přes transpozici o jednostupňový voice leading. Notový graf, duál, zkonstruujeme tak, že nahradíme každý vrchol akordového grafu n -dimenzionálním simplexem (n je počet not v akordu a počet vrcholů v simplexu). Výsledkem je kruh simplexů spojených přes společnou „stěnu“. Na obrázku můžeme vidět případy pro jednu (Obr. 68) a dvě (Obr. 69) dimenze. Grafy znázorňují postupné voice leadingsy mezi akordy nejprve o dvou notách (Obr. 68), poté o třech (Obr. 69) [16, s. 26].

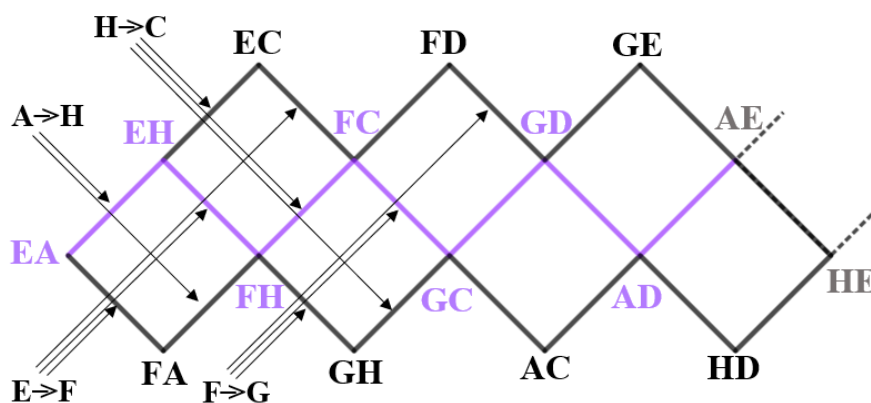


Obr. 68. Jednodimenzionální notový graf znázorňující voice leadingsy mezi rovnoměrnými akordy [upraveno dle 16, s. 27, Obr. 18 a)].

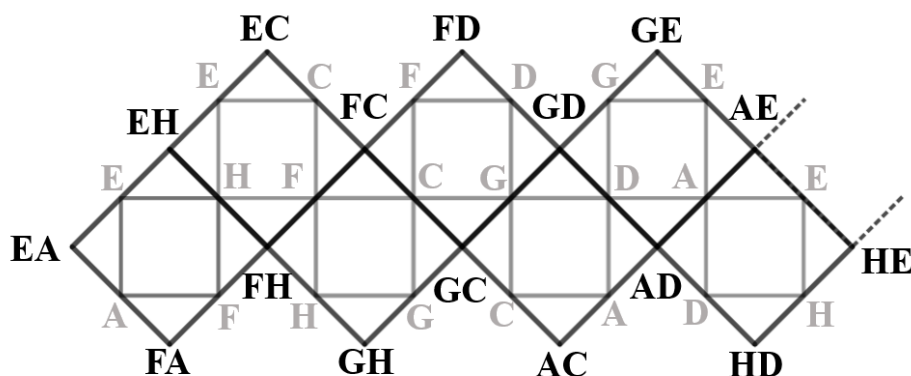


Obr. 69. Dvojdímní notový graf znázorňující voice leadingy mezi rovnoměrnými akordy [upraveno dle 16, s. 27, Obr. 18 b)].

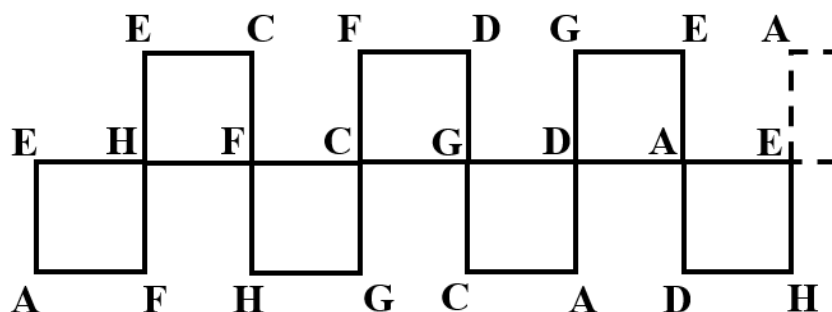
Při znázorňování dvou typů akordů je zajímavé, že notový graf obsahuje určité nadbytky, více různých úseček totiž reprezentuje stejný akord. Je tomu tak proto, že originální akordový graf obsahuje čtverce spojené přes společnou stranu, a když zkonstruujeme duál každého ze čtverců obsažených v grafu, společné vrcholy z akordového grafu se změni ve zdvojené strany v notovém grafu [16, s. 29–30]. Na následujícím obrázku (Obr. 70) vidíme jednostupňový voice leading mezi terciemi a kvartami v C diatonické stupnici. Každý čtverec obsahuje tři kvarty a jednu tercii. Kvarty jsou střídavě napříč centrem obrazce a tercie potom na venkovních vrcholech [15, s. 104]. Duální mřížka reprezentuje voice leading mezi dvěma nejrovnoměrnějšími dvojjzvuky (tj. tercií a kvartou). Začneme s dvojjzvukovou mřížkou (Obr. 70). Spojením duálů každého čtverce (Obr. 71), získáme nadpočetnou mřížku, ve které se některé dvojjzvuky vyskytují vícekrát (Obr. 72) [16, s. 31, Obr. 22].



Obr. 70. Mřížka znázorňující jednostupňový voice leading mezi terciemi a kvartami v C diatonické stupnici [upraveno dle 16, s. 31, Obr. 22 a)].



Obr. 71. Mřížka znázorňující jednostupňový voice leading mezi terciemi a kvartami v C diatonické stupnici a duální mřížka reprezentující voice leading mezi terciemi a kvartami [upraveno dle 16, s. 31, Obr. 22 b)].



Obr. 72. Nadpočetná mřížka z duálů, ve které se některé dvojzvuky vyskytují vícekrát [upraveno dle 16, s. 31, Obr. 22 c)].

4 Analýza části skladby pomocí uvedených metod

V této části bakalářské práce je provedena analýza prvních čtyř taktů části Allegro z díla Preludio I. Johanna Sebastiana Bacha. Jsou geometricky interpretovány akordy, které se v této ukázce vyskytují v rozložené podobě, a to pomocí metod představených v této práci.

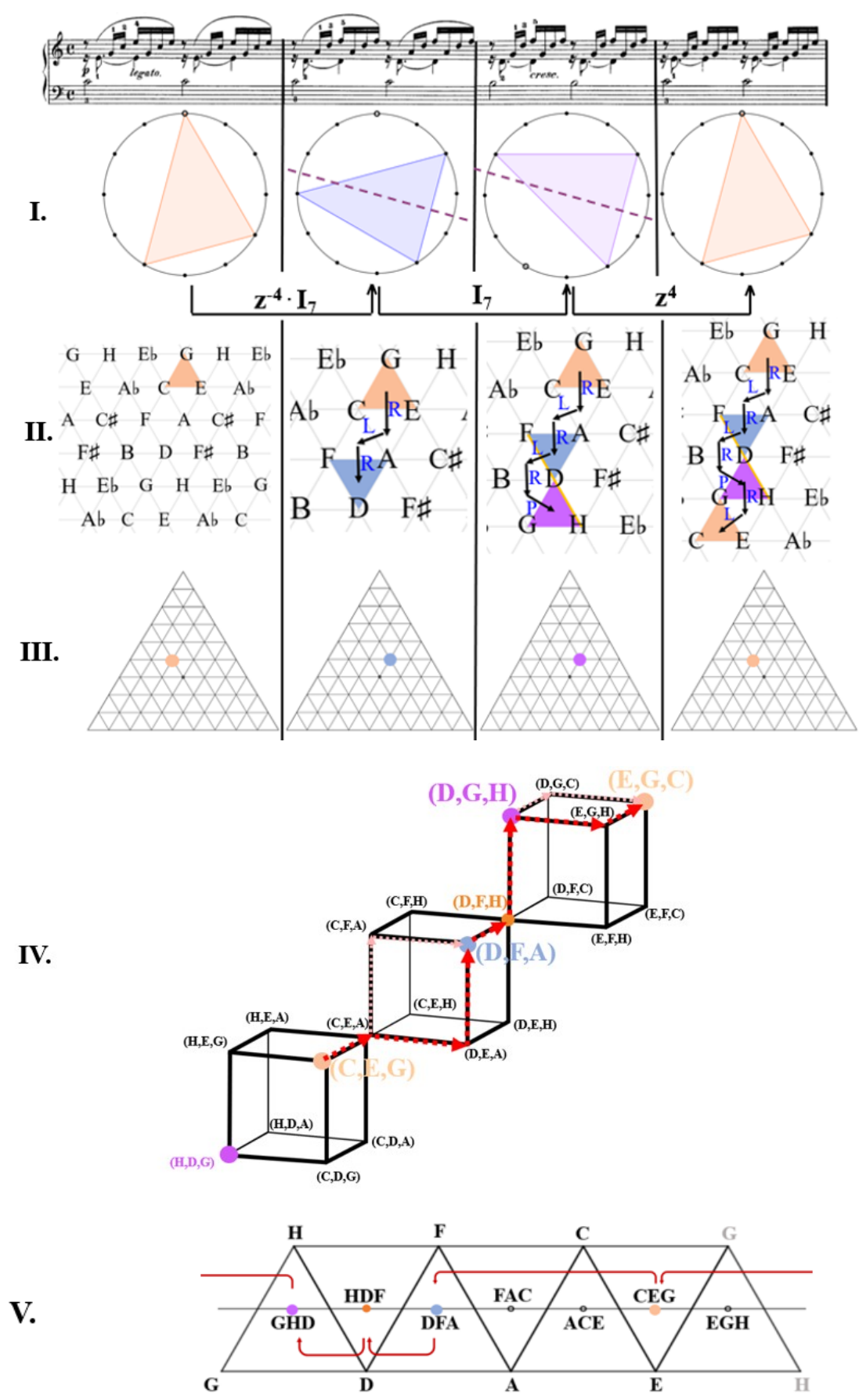
V části I. jsou akordy geometricky interpretovány v kruhovém prostoru výšek, tzn. pomocí kruhové notace. Pod každou změnou akordu je popsáno, jaký operátor byl použit, ať už transpozice, inverze či jejich kombinace. Můžeme si také všimnout, že některé body na kružnici jsou zvýrazněné prázdným kolečkem, přestože nepatří trojúhelníku příslušnému danému akordu. Takto jsou označeny tóny, které harmonicky doplňují daný kvintakord a slouží jako přechodový tón k dalšímu akordu. Mezi druhým a třetím zobrazovaným akordem je i tento doplňující tón symetrický podle dané osy, není to však pravidlem.

V části II. jsou ty samé akordy znázorněné v Tonnetzu. Je označena také série operací, které použijeme, abychom se dostali z jednoho akordu na druhý. Je uvedena jen jedna konkrétní možnost, ale mohli bychom samozřejmě použít i jiné série operací.

V části III. jsou potom akordy zaneseny do trojúhelníkové sítě podle jejich intervalové reprezentace. Jelikož jde o kvintakordy, můžeme podle tohoto typu zobrazení určit pouze, zda se jedná o kvintakord durový nebo mollový.

V části IV. vidíme trojdimenzionální mřížku v diatonické stupnici, konkrétně krychle spojené přes společný vrchol. Ve vrcholech leží třítónové akordy, hrany potom znázorňují jednostupňové voice leadingy mezi nimi. Červené šipky na obrázku znázorňují postupy mezi jednotlivými akordy. Pokud leží akordy na protějších vrcholech jedné stěny, pak existují dva způsoby, jak je propojit. Na obrázku jsou vždy tyto paralelní postupy znázorněny světlou šipkou. Je nutno zdůraznit, že neuvažujeme pořadí, tedy například akordy [C, E, G] a [G, C, E] jsou totožné, jelikož jde o souzvuk daných tónů v libovolném pořadí. Proto tedy nezobrazujeme celý řetěz krychlí, kde bychom opět našli více způsobů, jak dané akordy spojit, ale jen jednu část, která všechny zobrazované akordy obsahuje. Můžeme si všimnout podobnosti mezi znázorňováním v Tonnetzu a na trojdimenzionální mřížce. Počet operací, které použijeme pro přechod mezi dvěma akordy koresponduje s počtem hran, přes které musíme přejít v řetězu krychlí.

V části V. jsou akordy zobrazeny ve dvojdimenzionální mřížce druhého typu, která se velice podobá znázornění v Tonnetzu.



Obr. 73. Geometrická interpretace Bachova Preludia.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vypracovat elementární teoretický výklad matematického popisu hudebních jevů s důrazem na jejich geometrickou interpretaci a formou řešerše osvětlit různé pohledy na propojení hudby s geometrií, jak jsem již zmínila v úvodu. Byl vytvořen původní český text popisující a porovnávající různé typy geometrického znázorňování hudebních objektů, především tónů a akordů. Ve čtvrté kapitole byla provedena geometrická interpretace části skladby Johanna Sebastiana Bacha.

Jak ve čtvrté kapitole, tak v celé práci byly rozebírány především durové a mollové kvintakordy, tudíž akordy o třech tónech. Dále bylo nastíněno zobrazování akordů o více než třech tónech pomocí přidávání dimenzí pro každý další hlas v akordu.

Za nejvíce odlišný typ geometrických zobrazování, které jsem v práci rozebírala, považuji znázorňování akordů pomocí trojúhelníkové sítě souřadnic. Tato metoda zobrazování akordů se od ostatních zmíněných geometrických interpretací liší především v tom, že akordy v trojúhelníkové síti jsou reprezentovány pomocí bodů, nikoli trojúhelníků, jak je tomu například v kruhové notaci, v kruhovém prostoru výšek nebo v Tonnetzu. Rovnostranné trojúhelníky vznikají až spojením bodu akordu s body jeho obrátů. Výhodou tohoto typu geometrické interpretace je, že orbitům akordu můžeme opsat kružnici a pomocí velikosti jejího poloměru stanovit libozvučnost akordu, aniž bychom akord slyšeli. Tato metoda by tudíž mohla být využita například při komponování skladeb pomocí počítače, kdy by se dala jednoduše ověřovat libozvučnost daných akordů.

Při zobrazování akordů, konkrétně kvintakordů, v Tonnetzu se také setkáváme s rovnostrannými trojúhelníky, rozdílem od modelu trojúhelníkové sítě však je, že vrcholy trojúhelníků jsou tvořeny tóny obsaženými v akordu, nikoli akordy a jejich obraty. Kvintakord v Tonnetzu je tedy celý trojúhelník. Výhodou tohoto grafu je, že v něm můžeme zachytit nejen jednotlivé akordy, ale i vztahy mezi nimi. Pomocí úseček mezi tóny, tzn. pomocí stran trojúhelníků, můžeme určit, zda mezi akordy existuje efektivní voice leading. Tento princip je, ačkoli většinou pouze intuitivně, využíván hudebními skladateli. Geometrická interpretace akordů pomocí Tonnetzu může tedy posloužit jako pomocný nástroj při hudební kompozici a spojování akordů.

Operace, pomocí kterých jsme zkonstruovali Tonnetz, mohou být také použity k zobrazování vztahů mezi akordy v kruhové notaci, respektive v kruhovém prostoru výšek, ve kterém jsou akordy opět reprezentovány trojúhelníky, tentokrát obecnými.

Pro přechody mezi akordy pak můžeme používat transformace, konkrétně transpozice a inverze, tj. posunutí a zrcadlení. Pokud jsou akordy (alespoň částečně) symetrické podle transpozice, inverze nebo permutace, pak mezi nimi existuje efektivní voice leading. Další možností zobrazování voice leadingu jsou mřížky, mnohoúhelníky či mnohostěny a jejich duály. Obě tyto interpretace tudíž mohou sloužit jako pomoc při komponování skladeb. Geometrická interpretace hudby je také přínosem pro matematiky, kteří mohou skrze znalosti z geometrie nahlédnout do podstaty hudby.

Tato bakalářská práce je textem shrnujícím různé pohledy na geometrickou interpretaci hudby. V hudbě, jakožto druhu umění, jde hlavně o předání emocí a estetické hodnoty. K ideálnímu stavu, tedy k takovému stavu, ve kterém by platily všechny matematické vztahy, na kterých je hudba založena, v praxi mnohdy nedochází. Onomu ideálnímu stavu se však při hudební interpretaci skladeb špičkovými hráči je možno natolik přiblížit, že veškeré měřitelné nuance a disproporce jsou pro účely této práce zanedbatelné. Tato práce ukazuje, že hudba jako taková má matematické základy, které lze geometricky interpretovat a které mohou být nápomocné při komponování skladeb či jejich analýze.

„Hudba je daleko bližší matematice než literatuře – ne snad přímo matematice jako takové, ale dozajista něčemu, jako je matematické myšlení nebo matematické vztahy.“ Igor Stravinskij

Seznam použitých informačních zdrojů

- [1] BEČVÁŘ, Jindřich. Hrdinský věk řecké matematiky. *Historie matematiky. I: Seminář pro vyučující na středních školách: Jevíčko, 19. 8. – 22. 8. 1993: Sborník*. Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993, s. 20-170.
- [2] COXETER, Harold Scott MacDonald. *Regular polytopes*. Toronto: Dover Publications, inc., 1973. ISBN 0-486-61480-8
- [3] GRIGOVÁ, Věra. *Všeobecná hudební nauka*. Olomouc: Alda, 1998. 225 s. ISBN 80-85600-46-3
- [4] GUTIERREZ, Miguel a TANIGUCHI, Makoto. *A New Geometry of Musical Chords in Interval Representation: Dissonance, Enrichment, Degeneracy and Complementation*. Bloomington: iUniverse, 2010. ISBN 978-1-4502-2797-1
<http://pdfs.semanticscholar.org/c8a8/452b91bd6fc243d760475cea9cb9cf91474b.pdf>
- [5] MATOUŠEK, Jiří a NEŠETRIL, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: Karolinum, 2002. 381 s. ISBN 80-246-0084-6
- [6] POPOFF, Alexandre. An introduction to neo-Riemannian theory (1). *alpof*[online]. 11. 8. 2013 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2013/08/11/an-introduction-to-neo-riemannian-theory-1/>.
- [7] POPOFF, Alexandre. An introduction to neo-Riemannian theory (3). *alpof*[online]. 1. 9. 2013 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2013/09/01/an-introduction-to-neo-riemannian-theory-3/>
- [8] POPOFF, Alexandre. An introduction to neo-Riemannian theory (5). *alpof*[online]. 2. 11. 2013 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2013/11/02/an-introduction-to-neo-riemannian-theory-5/>
- [9] POPOFF, Alexandre. An introduction to neo-Riemannian theory (6). *alpof*[online]. 19. 12. 2013 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2013/12/19/an-introduction-to-neo-riemannian-theory-6/>
- [10] POPOFF, Alexandre. An introduction to neo-Riemannian theory (9) *alpof*[online]. 26. 1. 2014 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2014/01/26/an-introduction-to-neo-riemannian-theory-9/>
- [11] POPOFF, Alexandre. Musical chords and topology (1). *alpof* [online]. 19. 3. 2014 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2014/03/29/musical-chords-and-topology-1/>

- [12] POPOFF, Alexandre. Transformational Music Theory (15) *alpof* [online]. 18. 9. 2016 [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://alpof.wordpress.com/2016/09/18/transformational-music-theory-14-2/>
- [13] SVOBODA, Karel, ed. *Zlomky předsokratovských myslitelů*. Překlad Karel Svoboda. Vyd. 2. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 200 s.
- [14] THE EDITORS OF ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. Hugo Riemann. *Encyclopædia Britannica* [online]. Encyclopædia Britannica, inc., 14.7.2019. [cit. 22. 4. 2020]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/biography/Hugo-Riemann>
- [15] TYMOCZKO, Dmitri. *A geometry of music: Harmony and counterpoint in the extended common practice*. New York: Oxford University Press, 2011. 449 s. ISBN 978-0-19-533667-2
- [16] TYMOCZKO, Dmitri. The Generalized Tonnetz. *Journal of Music Theory*. 2012, vol. 56, no. 1, s. 1-52. ISSN 0022-2909
- [17] TYMOCZKO, Dmitri. *The Geometry of Musical Chords* (preprint) [online]. [cit. 23.4.2020]. Dostupné z: <https://pdfs.semanticscholar.org/c8a8/452b91bd6fc243d760475cea9cb9cf91474b.pdf>
- [18] TYMOCZKO, Dmitri. The Geometry of Musical Chords. *Science*. 7. 7. 2006, vol. 313, no. 5783, s. 72-74. ISSN 0036-8075
- [19] VESELÝ, J. *Základy matematické analýzy (Druhý díl)*. Praha: Matfyzpress, 2009. 296 s.
- [20] WRIGHT, David. *Mathematics and Music*. American Mathematical Soc., 2009.
- [21] ZENKL, Luděk. *ABC hudební nauky*. Praha: Editio Bärenreiter Praha, 2003. ISBN 978-80-86385-21-1

Seznam obrázků

Obr. 1. Tón A_1 v houslovém klíči.....	12
Obr. 2. Tón C_1 v houslovém, violovém a basovém líči.....	12
Obr. 3. Rozložení tónů na klavíru.....	12
Obr. 4. Rozložení tónů na klavíru.....	13
Obr. 5. Ekvivalence vzestupné kvinty a sestupné kvarty.....	15
Obr. 6. Chromatická stupnice.....	15
Obr. 7. Diatonická řada, stupnice C dur.....	15
Obr. 8. Kvintakord C v houslovém klíči, zleva durový, mollový, zmenšený a zvětšený.....	16
Obr. 9. Durové kvintakordy C a F a mollové d a f na klaviatuře.....	17
Obr. 10. Kvintový, resp. kvartový kruh.....	18
Obr. 11. Reprezentace akordu $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 7)$ v trojúhelníkové souřadnicové síti a na klaviatuře.....	21
Obr. 12. Trojúhelníková souřadnicová síť.....	22
Obr. 13. Popis souřadnic ve čtyřstěnné síti.....	23
Obr. 14. Akord $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 4, 3)$ ve čtyřstěnné souřadnicové síti.....	23
Obr. 15. Akord $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 4, 3)$ na klaviatuře.....	24
Obr. 16. Orbity akordů $\overline{(3, 2, 7)}$ a $\overline{(4, 3, 5)}$ – oběh kolem barycentra.....	24
Obr. 17. Obraty akordu $(4, 3, 5)$ na klaviatuře.....	24
Obr. 18. Orbity durového a mollového kvintakordu $(4, 3, 5)$ a $(4, 3, 5)$	25
Obr. 19. Orbity akordů $\overline{(2, 4, 6)}$ a $\overline{(4, 2, 6)}$	26
Obr. 20. Orbit nejnelibozvučnějšího akordu $\overline{(1, 1, 10)}$	26
Obr. 21. Akord barycentra $B = (4, 4, 4)$	27
Obr. 22. Symetrické orbity.....	27
Obr. 23. Obohacený akord C dur – $C7$	28
Obr. 24. Transformace akordu C dur na c moll kruhové notaci.....	29

Obr. 25. Transformace akordu C dur na a moll v kruhové notaci.....	29
Obr. 26. Souměrnosti pravidelného mnohoúhelníku.....	30
Obr. 27. Oktávová ekvivalence.....	31
Obr. 28. Inverzní operátory v kruhové notaci.....	32
Obr. 29. Použití inverzního operátoru I_0 na akord C dur.....	32
Obr. 30. Inverzní operátor I_1	33
Obr. 31. Akordy D dur a d moll v kruhové notaci.....	34
Obr. 32. Involuce – aplikace inverzního operátoru I_0 na akordy C dur a f moll a operátoru I_4 na akordy D dur a g moll.....	34
Obr. 33. Použití operace P na akord C dur (inverze I_7).....	35
Obr. 34. Použití operace P na akord D dur (inverze I_{11}).....	36
Obr. 35. Použití operace P	36
Obr. 36. Záměna výškových tříd $[n + 4]$ a $[n + 7]$, C dur a e moll.....	37
Obr. 37. Použití operace L	37
Obr. 38. Záměna výškových tříd $[n]$ a $[n + 4]$	38
Obr. 39. Použití operace R	38
Obr. 40. Akord C dur a operace P , L a R v Tonnetzu.	39
Obr. 41. Základní oblast Tonnetzu.....	40
Obr. 42. Transformace $RPRP$ v kruhové notaci použitá na akord c moll.....	41
Obr. 43. Transformace $RPRP$ v Tonnetzu použitá na akord c moll.....	41
Obr. 44. Transformace $RPRP$ v kruhové notaci použitá na akord C dur.....	41
Obr. 45. Transformace $RPRP$ v Tonnetzu použitá na akord C dur.....	41
Obr. 46. Hamiltonovská cesta v Beethovenově 9. symfonii.....	42
Obr. 47. Hamiltonovská cesta v Beethovenově 9. symfonii znázorněná v Tonnetzu.....	42

Obr. 48. Konstrukce Tonnetzu pomocí spojování trojúhelníků přes společné strany.....	43
Obr. 49. Zvětšené kvintakordy znázorněné v Tonnetzu.....	43
Obr. 50. Přechod z akordu C dur na f moll pomocí zvětšeného kvintakordu [C, E, Ab].....	44
Obr. 51. Lineární prostor výšek.....	45
Obr. 52. Kruhový prostor výšek.....	46
Obr. 53. Dvojjzvuk C_1D_1 v jednodimenzionálním akordovém prostoru.....	50
Obr. 54. Dvojjzvuk C_1D_1 ve dvojdimeznionálním akordovém prostoru.....	50
Obr. 55. Znázornění postupu mezi dvojjzvuky pomocí úsečky ve dvojdimeznionálním akordovém prostoru.....	51
Obr. 56. Souřadnicový systém dvojjrozměrného akordového prostoru s přímkami znázorňujícími pohyby jednotlivých hlasů.....	51
Obr. 57. Souřadnicový systém dvojjrozměrného akordového prostoru otočený o 45°	51
Obr. 58. Část dvojjrozměrného akordového prostoru.....	52
Obr. 59. Hranol s trojúhelníkovou podstavou znázorňující jednu z částí trojdimeznionálního akordového prostoru.....	54
Obr. 60. Dvoj-, troj a čtyřdimeznionální části akordového prostoru.....	55
Obr. 61. Způsoby, jak lze snížit dvojjzvuk a následně vytvořit akord o stupeň níže ve stupnici, znázorněné ve čtverci.....	58
Obr. 62. Způsoby, jak lze snížit trojjzvuk a následně vytvořit akord o stupeň níže ve stupnici, znázorněné v krychli.....	58
Obr. 63. Samodualita čtverce.	59
Obr. 64. Krychle a její duál v podobě osmistěnu.....	59
Obr. 65. Mřížka prvního typu, ve které je stupnice rozdělena tóny v akordu rovnoměrně, jedno- a dvojjrozměrná.....	61
Obr. 66. Mřížka znázorňující půltónový voice leading mezi čistými kvartami a tritóny.....	62

Obr. 67. Duály čtverců mřížky znázorňující půltónový voice leading mezi čistými kvartami a tritóny.....	63
Obr. 68. Jednodimenzionální notový graf znázorňující voice leadingy mezi rovnoměrnými akordy.....	63
Obr. 69. Dvojnotový graf znázorňující voice leadingy mezi rovnoměrnými akordy.....	64
Obr. 70. Mřížka znázorňující jednostupňový voice leading mezi terciemi a kvartami v C diatonické stupnici.....	65
Obr. 71. Mřížka znázorňující jednostupňový voice leading mezi terciemi a kvartami v C diatonické stupnici a duální mřížka reprezentující voice leading mezi terciemi a kvartami....	65
Obr. 72. Nadpočetná mřížka z duálů, ve které se některé dvojzvuky vyskytují vícekrát.....	65
Obr. 73. Geometrická interpretace Bachova Preludia.....	67

Příloha A – Seznam zvukových ukázek

Ukázky lze najít taky na stránkách: http://kmdm.pedf.cuni.cz/prilohy/kovacova_bp.7z

Ukázka 1. Komorní A = 440 Hz. *1_a_440.mp3*

Ukázka 2. Diatonická stupnice. *2_diatonicka_stupnice.mp3*

Ukázka 3. Chromatická stupnice. *3_chromaticka_stupnice.mp3*

Ukázka 4. Typy kvintakordů. *4_typy_kvintakordu.mp3*

Ukázka 5. Kvintakord C dur. *5_C_dur.mp3*

Ukázka 6. Kvintakord c moll. *6_c_moll.mp3*

Ukázka 7. Nelibozvučný akord. *7_nelibozvucny_akord.mp3*

Ukázka 8. Kvintový kruh. *8_kvintovy_kruh.mp3*

Ukázka 9. Akord (2, 4, 4, 3). *9_(2,4,4,3).mp3*

Ukázka 10. Orbit akordu (4, 3, 5). *10_orbit_(4,3,5).mp3*

Ukázka 11. Akord C7. *11_C7.mp3*

Ukázka 12. Akordy C dur a c moll. *12_C_dur_c_moll.mp3*

Ukázka 13. Akordy C dur a a moll. *13_C_dur_a_moll.mp3*

Ukázka 14. Akordy D dur a d moll. *14_D_dur_d_moll.mp3*

Ukázka 15. Akordy c moll f \sharp moll. *15_c_moll_fis_moll.mp3*

Ukázka 16. Akordy C dur a F \sharp dur. *16_C_dur_Fis_dur.mp3*

Ukázka 17. Beethovenova symfonie a operace P, L, R. *17_beethoven.mp3*

Ukázka 18. Zvětšené kvintakordy. *18_zvetsene_kvintakordy.mp3*

Ukázka 19. Přejchod přes zvětšený kvintakord. *19_prechodny_zvetseny_kvintakord.mp3*