Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dělitelnost v učebnicích matematiky

Divisibility in mathematics textbooks

Lucie Šmídová

Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání

Rok odevzdání 2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Dělitelnost v učebnicích matematiky potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Rakovníku dne 4. 5. 2020

Podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za odborné vedení práce, poskytnutí cenných rad a za čas, který mi při tvorbě práce věnovala.

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zaměřuje na problematiku dělitelnosti v českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň základní školy. Konkrétně popisuje, která kritéria jsou v učebnici obsažena, zda jsou žáci vedeni k účasti na odvození kritérií, jak jsou kritéria matematicky zdůvodněna, jaké modely pro zdůvodnění kritérií učebnice využívá a zda jsou v učebnici zařazeny úlohy ze skutečného života. Práce je rozdělena do dvou částí, první část je teoretická a jsou v ní zavedeny pojmy, které jsou pro dané téma nezbytné. Velká část je věnována dělitelnosti, jejím vlastnostem a kritériím dělitelnosti. Druhá část je tvořena analýzou vybraných učebnic matematiky zaměřenou na kritéria dělitelnosti. Bylo zjištěno, že v učebnicích jsou značné rozdíly, nejen v tom, která kritéria jsou v učebnicích obsažena, ale i v přístupu, jakým ke kritériím učebnice přistupují. Rozmanitost přístupů se projevuje nejvýrazněji v množství modelů použitých při zdůvodňování kritérií.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dělitelnost, kritéria dělitelnosti, učebnice matematiky, základní škola

ABSTRACT

The bachelor thesis is focused on the concepts of divisibility in Czech mathematics textbooks for lower secondary schools. Namely, it describes which divisibility rules they include, if pupils are led to participating on their derivation, how are the rules mathematically justified, which models are used in their explanation and if there are real word problems included in the textbook. The thesis is divided into two parts. The first part is theoretical and it introduces main concepts that are essential for the chosen topic. Its big part is dedicated to the divisibility, its characteristics and divisibility rules. The second part consists of the analysis of the selected textbooks focused on the divisibility rules. It was found that the selected textbooks differs not only in which rules they contain but also in the approach to studying the rules of divisibility. Diversity of approaches shows significantly in the number of models used to reasoning the divisibility rules.

KEY WORDS

Divisibility, divisibility rules, mathematics textbook, primary school

Obsah

1 Úvod

Bakalářská práce je věnována tématu dělitelnosti v učebnicích matematiky se zaměřením na kritéria dělitelnosti. Při výběru tématu jsem zohlednila svou dosavadní praxi na Základní škole Tuchlovice. Při výuce kritérií dělitelnosti jsem zde pracovala s učebnicí nakladatelství SPN, nicméně měla jsem potřebu doplnit výuku i o informace z jiných zdrojů, neboť z hlediska obsažených kritérií i jejich zdůvodnění mi učebnice nepřipadala dostačující. Díky tomu jsem narazila na řadu různých přístupů při práci s kritérii dělitelnosti od jejich odvození až po jejich aplikaci. Dalším důvodem ke zvolení tohoto tématu byla možnost jeho využití i mimo dané téma. Znalost kritérií dělitelnosti může žákům usnadnit práci i v řadě dalších témat probíraných v rámci matematiky (například u zlomků), ale mohou se s nimi setkat i v běžném životě.

Cílem práce je porovnat vybrané učebnice matematiky, respektive jejich části zaměřené na kritéria dělitelnosti. Při srovnání jsem se zaměřovala na tyto faktory a) která kritéria jsou v učebnici obsažena, b) zda jsou žáci vedeni k účasti na odvození kritérií, c) jak jsou kritéria matematicky zdůvodněna, d) jaké modely pro zdůvodnění kritérií učebnice využívá a e) zda jsou v učebnici zařazeny úlohy ze skutečného života.

V první části práce jsou vymezeny klíčové teoretické pojmy, které se vztahují ke zvolenému tématu. Kromě jiného je zde zavedena množina přirozených čísel, se kterou žáci na základní škole při probírání dělitelnosti pracují. Dále jsou zde uvedeny vlastnosti dělitelnosti, které jsou následně využívány v některých z vybraných učebnic. Velká část je také věnována samotným kritériím dělitelnosti včetně jejich důkazů.

V druhé části práce je uvedeno, jak vybrané učebnice k tématu kritérií dělitelnosti přistupují. Každé učebnici je věnován vlastní oddíl, ve kterém je podrobně popsán postup při zavedení a zdůvodnění jednotlivých kritérií. V závěru jsou potom tyto informace shrnuty a je odpovězeno na výše uvedené otázky.

2 Základní pojmy a číselné množiny

2.1 Množiny a přirozená čísla

Definice: Množina je soubor objektů (prvků), o kterých se dá jednoznačně říct, zda do dané množiny patří, či nikoliv. Množiny obvykle značíme velkými tiskacími písmeny (např.: A, B, M), jejich prvky pak malými tiskacími písmeny (např.: a, b, m). Pokud je m prvkem množiny M, píšeme $m \in M$. Pokud m není prvkem množiny M, píšeme $m \notin M$.

Množinu můžeme zapsat výčtem prvků (např. množinu, která obsahuje prvky $1, 2, 3, 4$, zapíšeme výčtem prvků následovně $M = \{1; 2; 3; 4\}$) nebo vlastností (množinu M z předchozího příkladu můžeme zapsat například takto $M = \{x \in \mathbb{N}: x < 5\}$). Vlastnost můžeme popsat pomocí matematického zápisu nebo i slovně (např. $M = \{x \in$ $\in \mathbb{N}: x \text{ označuje počet žáků v hodině matematiky}\}$).

Množiny, které obsahují konečný počet prvků, nazýváme *konečné*, množiny obsahující nekonečný počet prvků, nazýváme *nekonečné*. Speciálním případem konečné množiny je *prázdná množina*, která neobsahuje žádný prvek. Prázdnou množinu značíme $M = \emptyset$, případně $M = \{\,\}$. V případě zápisu $M = \{\emptyset\}$ nejde o prázdnou množinu, ale o jednoprvkovou množinu M obsahující prázdnou množinu.

Množiny A a B se rovnají, obsahují-li stejné prvky. Píšeme $A = B$.

Čísla se stejnými vlastnostmi rozdělujeme do charakteristických číselných množin – číselných oborů. Jelikož číselné obory patří v matematice mezi nejčastěji využívané množiny, mají své vlastní značení.

Tabulka 1: Značení významných číselných množin

Číselné obory	
$\mathbb{N}$	Přirozená čísla
$\mathbb{Z}$	Celá čísla
$\mathbb{Q}$	Racionální čísla
$\mathbb{R}$	Reálná čísla

2.1.1 Přirozená čísla

Přirozená čísla jsou jednou z historicky nejstarších a nejdůležitějších matematických konstrukcí. Intuitivně můžeme přirozená čísla chápat jako počty předmětů (respektive čísla, která tyto počty popisují). Toto „intuitivní“ pojetí přirozených čísel pro určení počtu využíval člověk již od pradávna, nicméně pokud jde o přesné zavedení množiny přirozených čísel, musíme se zaměřit na novodobé dějiny.

Pro přesné zavedení množiny přirozených čísel je stěžejní práce italského matematika, logika a filosofa Guisseppeho Peana. Peano ve své knize *Principy aritmetiky, výklad nové metody* (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*) jako první zformuloval vlastnosti přirozených čísel pomocí formální logiky (Polák, 2016).

Peanovy axiomy

Peanovy axiomy zavádějí množinu přirozených čísel na základě pojmu následovník a principu matematické indukce. Za následovníka čísla x v oboru přirozených čísel uvažujeme číslo, které je o jedna větší než číslo x $(\varphi(x) = x + 1)$. V následující části vycházím z knihy (Blažek, 1983).

Formální zápis Peanových axiomů:[1]

P1) $\exists 0 \colon 0 \in \mathbb{N}$

P2) $\forall x \in \mathbb{N};\ \exists y \in \mathbb{N} \colon \varphi(x) = y$

P3) $\forall x \in \mathbb{N} \colon \varphi(x) \neq 0$

P4) $\forall x, y \in \mathbb{N} : \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

P5) $\forall A \subseteq \mathbb{N} \colon \big(0 \in A \wedge (x \in A \Rightarrow \varphi(x) \in A)\big) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Slovní vyjádření:

P1) Existuje prvek, který označíme jako 0 a je přirozeným číslem.

P2) Každé číslo má svého následovníka.

P3) Nula není následovníkem žádného čísla.

P4) Pokud se následovníci dvou čísel rovnají, pak se rovnají i tato čísla.

P5) Jestliže je množina *A* podmnožinou přirozených čísel a obsahuje nulu a následovníka každého svého prvku, pak je *A* rovna množině ℕ.

Definice (S1): Sčítání přirozených čísel definujeme následovně:

a) $a + 0 = a$

[1] V této formě axiomy definují přirozená čísla včetně nuly. Pokud bychom chtěli množinu přirozených čísel zavádět bez ní, nahradili bychom symbol 0 symbolem 1.

b) $a + \varphi(b) = \varphi(a + b)$

Odtud je také možné odvodit vztah, že následník je číslo o jedna větší:

$$\varphi(a) = \varphi(a + 0) = a + \varphi(0) = a + 1,$$

odtud $\varphi(a) = a + 1$ (T1).

Definice (S2): Další možnost, jak definovat sčítání přirozených čísel, je takto:

$$m, n \in \mathbb{N}: m + n = \varphi^n(m)$$

Definicemi S1 a S2 je definovaná táž operace sčítání.

Věta (vlastnosti sčítání přirozených čísel): Pro libovolná přirozená čísla $x, y, z \in \mathbb{N}$ platí:

(Si) Sčítání přirozených čísel je komutativní: $x + y = y + x$

(Sii) Sčítání přirozených čísel je asociativní: $(x + y) + z = x + (y + z)$

(Siii) Nula je neutrální prvek pro operaci sčítání: $0 + x = x + 0 = x$

(Siv) Jestliže $x + z = y + z$, pak $x = y$.

Definice (N1): Násobení přirozených čísel definujeme následovně:

a) $m \cdot 0 = 0$

b) $m \cdot \varphi(n) = m \cdot n + m$

Definice (N2): Násobení přirozených čísel je zobrazení $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro které platí:

$$m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n = (\varphi^m)^n(0)$$

Definice N1 a N2 definují stejnou operaci násobení.

Věta (vlastnosti násobení přirozených čísel): Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{N}$ platí:

Ni) Násobení je komutativní: $x \cdot y = y \cdot x$

Nii) Násobení je asociativní: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Niii) Jedna je neutrální prvek: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Niv) Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Nv) Jestliže $z \neq 0$ a $x \cdot z = y \cdot z$, pak $x = y$.

2.2 Poziční číselné soustavy

Čísla obvykle zapisujeme pomocí číslic nebo jiných znaků v různých číselných soustavách. U číselných soustav rozlišujeme dva základní typy – soustavy poziční a soustavy nepoziční. U nepozičních soustav není hodnota znaku určena jeho pozicí, každý znak vyjadřuje pevně stanovenou hodnotu. Číslo je pak určeno součtem těchto hodnot.

V současnosti k zápisu čísel používáme soustavy poziční. V těchto soustavách je hodnota znaku dána jeho umístěním v zápisu čísla. Výhodou tohoto zápisu je možnost zapsat libovolně velká čísla pomocí malého množství znaků (číslic). Nejběžněji využívanou poziční soustavou je soustava desítková (dekadická).

Základní charakteristikou pozičních soustav je jejich základ z. Podle základu rozlišujeme různé druhy soustav (např. desítkovou, dvojkovou, šestnáctkovou, …). Základ také určuje, jakou váhu mají jednotlivé pozice v zápise čísla n, a počet symbolů, které se v zápise používají.

Rozvinutý zápis čísla (polynomiální zápis):

$$n = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 z^0, z, a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i < z.$$

Zkrácený zápis čísla:

$$n = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z, z, a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i < z$$

2.3 Relace dělitelnosti

Definice: Kartézským součinem množin A, B rozumíme množinu:

$$A \times B = \{[x; y]: x \in A \wedge y \in B\}$$

Z této definice vyplývá, že kartézský součin je množinou všech uspořádaných dvojic s prvky x z množiny A a s prvky y z množiny B. Tuto definici je možné zobecnit pro *n*-tici z *n* množin následovně:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n = \{[x_1; x_2; \dots x_{n-1}; x_n]: x_i \in A_i; 0 < 1 \leq n\}$$

Kartézskou mocninou A^n rozumíme kartézský součin $\overbrace{A \times A \times \cdots \times A \times A}^{n-krát}$, tedy uspořádanou *n*-tici prvků z množiny *A*.

Definice: *N*-ární relací mezi množinami $A_1; A_2; \dots A_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu n množin:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n$$

Definice: *N*-ární relací na množině *A* je libovolná podmnožina kartézské mocniny $R \subseteq A^n$.

Definice: Mějme dány množiny A a B, binární relací *R* pak rozumíme podmnožinu kartézského součinu množin A a B: $R \subseteq A \times B$

Definice: Binární relací R na množině A rozumíme binární relaci definovanou mezi dvěma stejnými množinami: $R \subseteq A \times A$

Z definic výše je zjevné, že relace je množinou, můžeme ji tedy značit pomocí velkých písmen (například *R*), nicméně běžnějším způsobem popisu relací je užití takzvaných relačních symbolů (například $\leq, \perp, \sim$). Tyto symboly výrazně zjednoduší zápis, proto budou v následujících částech práce využívány.

U binárních relací také může být užíván zápis aRb, který odpovídá skutečnosti, že $[a; b] \in R$ (tedy že prvek a je v relaci s prvkem b).

Dělitelnost je binární relace, obvykle se definuje pro celá čísla[2] a, b následovně: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Říkáme, že a dělí b, jestliže existuje $c \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \cdot c = b$. Pokud takové c neexistuje, říkáme, že a nedělí b. Zapisujeme $a|b$, resp. $a \nmid b$. Zápis $a|b$ můžeme interpretovat trojím způsobem: a) Číslo a dělí číslo b. b) Číslo a je dělitelem čísla b. c) Číslo b je násobkem čísla a.

Věta: Dělitelnost celých čísel má následující vlastnosti:

i) $\forall a \in \mathbb{Z} : a|a$ (reflexivita)

ii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$ (tranzitivita)

iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a|b \Rightarrow a|bc$

iv) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ab|c \Rightarrow (a|c \wedge b|c)$

v) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c|a \wedge c|b) \Rightarrow [c|(ak + bl)]$, pro libovolné $k, l \in \mathbb{Z}$

vi) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, : a|b \Rightarrow ac|bc$

Protože relace dělitelnosti je v centru naší pozornosti v této práci, provedeme důkazy jejích vlastností.

i) $\forall a \in \mathbb{Z} : a|a$

Z definice dělitelnosti plyne, že $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$. Pokud tedy chceme dokázat, že libovoné a je dělitelné samo sebou, potřebujeme najít c, pro které platí $a = a \cdot c$. Pro libovolné a je tato rovnost splněna, bude-li $c = 1$.

ii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$

Jelikož je dáno, že $b|c$, musí existovat $x \in \mathbb{Z}$ takové, že $c = b \cdot x$. Protože také víme, že a dělí b, musí také existovat $y \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = a \cdot y$. Odtud dosadíme do vyjádření čísla $c = b \cdot x = (a \cdot y) \cdot x = a \cdot (x \cdot y)$. Protože x a y jsou celá čísla, je zřejmé, že i jejich součin je celé číslo, a číslo a je tedy dělitelem čísla c.

iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a|b \Rightarrow a|bc$

Číslo b je dělitelné číslem a, je tedy možné ho opět vyjádřit $b = a \cdot x$. Chceme-li dokázat, že a dělí i součin bc, musíme dostat $bc = a \cdot z$, přičemž $z \in \mathbb{Z}$. Když dosadíme za b vyjádření

[2] Relace dělitelnosti bude v této části definována v oboru celých čísel, nicméně na základní škole se obvykle definuje v oboru přirozených čísel.

výše, dostaneme $bc = (a \cdot x) \cdot c = a \cdot (x \cdot c) = a \cdot z$. Jelikož čísla x a c jsou celá, je i jejich součin (z) celé číslo.

iv) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ab|c \Rightarrow (a|c \wedge\ b|c)$

Číslo c je dělitelné součinem ab, je tedy možné ho zapsat $c = a \cdot b \cdot x$, odtud potom díky komutativitě a asociativitě jako $c = a \cdot (b \cdot x) = a \cdot y$ nebo jako $c = b \cdot (a \cdot x) = b \cdot z$. Jelikož a, b, x jsou celá čísla, jsou i $y, z\ \in \mathbb{Z}$.

v) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c|a \wedge c|b) \Rightarrow [c|(ak + bl)]$ pro libovolné $k, l\ \in \mathbb{Z}$

Z předpokladu víme, že a můžeme vyjádřit jako $a = c \cdot x$ a b jako $b = c \cdot y$. Součet $ak + bl$ pak můžeme zapsat $ak + bl = c \cdot x \cdot k + c \cdot y \cdot l = c \cdot (x \cdot k + y \cdot l) = c \cdot z$. Jelikož čísla x, y, k, l jsou celá, je i číslo $z\ \in \mathbb{Z}$.

vi) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ : a|b\ \Rightarrow ac|bc$

Z předpokladu je zřejmé, že číslo b můžeme zapsat $b = a \cdot x$. Součin bc potom můžeme zapsat jako $b \cdot c = a \cdot x \cdot c = a \cdot c \cdot x = (a \cdot c) \cdot x$. Součin ac tedy zjevně dělí bc.

Definice: Nechť $a, b, q, r\ \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, a nechť $a = b \cdot q + r$ a $0 < r < |b|$. Číslo q nazýváme částečným podílem při dělení čísla a číslem b. Číslo r nazýváme zbytkem při dělení čísla a číslem b. Číslo d nazýváme triviálním dělitelem čísla $a \in \mathbb{Z}$, právě když $d \in \{\pm 1, \pm a\}$. Pokud číslo d patří do množiny dělitelů čísla a a není triviálním dělitelem, nazýváme ho netriviálním dělitelem čísla a.

$$d \in D(a) - \{\pm 1, \pm a\}$$

Definice: Přirozené číslo $n > 1$ nazýváme prvočíslem, má-li pouze triviální dělitele. V případě, že má alespoň jednoho netriviálního dělitele, nazýváme ho číslo složené.

Definice: Každé přirozené číslo n je možné vyjádřit ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, kde $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ a čísla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou prvočísla, pro která platí $p_1 <\ p_2 <\ \ldots < p_k$. Tento tvar nazýváme kanonickým rozkladem čísla n.

Definice: Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n\ \in \mathbb{Z}$, nazýváme prvek $u \in \mathbb{Z}$ společný dělitel, právě když platí $u|a_1 \wedge u|a_2 \wedge \ldots \wedge u|a_n$. Číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme největší společný dělitel čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n\ \in$ $\in \mathbb{Z}$ a značíme $NSD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, právě když

a) $d|a_1 \wedge d|a_2 \wedge \ldots \wedge d|a_n$,

b) $\forall u \in \mathbb{Z}: (\ u|a_1 \wedge u|a_2 \wedge \ldots \wedge u|a_n) \Rightarrow\ u|d$.

Definice: Jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, nazýváme prvek $v \in \mathbb{Z}$ společný násobek, právě když $a_1|v \wedge a_2|v \wedge \dots \wedge a_n|v$. Číslo $n \in \mathbb{Z}$ nazýváme nejmenší společný násobek čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ a značíme $nsn(a_1, a_2, \dots, a_n)$, právě když

a) $a_1|n \wedge a_2|n \wedge \dots \wedge a_n|n$,
b) $\forall v \in \mathbb{Z}: (a_1|v \wedge a_2|v \wedge \dots \wedge a_n|v) \Rightarrow n|v$.

Definice: Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ nazýváme nesoudělná, pokud $NSD(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ nazýváme po dvou nesoudělná, pokud pro každé i, j, kde $1 \leq i < j \leq n$, platí $NSD(a_i, a_j) = 1$.

2.3.1 Kritéria dělitelnosti přirozených čísel

V níže uvedených důkazech budeme pro všechna uvedená kritéria dělitelnosti předpokládat, že číslo $n \in \mathbb{N}$ a je zapsané v desítkové soustavě. Při důkazech budeme vycházet z dekadického zápisu přirozeného čísla.

Dělitelnost dvěma

Věta: Číslo n je dělitelné dvěma, je-li poslední číslice tohoto čísla dělitelná dvěma.

Důkaz: Číslo n můžeme zapsat následovně:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Ze členů $a_1; a_{2;} \dots a_k$ je možné vytknout číslo 10.

$$n = 10(a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + \dots + a_2 10^1 + a_1) + a_0$$

$$n = \underbrace{2 \cdot 5(a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + \dots + a_2 10^1 + a_1)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná dvěma}} + a_0$$

Dělitelnost čísla n dvěma tedy závisí pouze na poslední číslici. Je-li tato číslice dělitelná dvěma, je dělitelné dvěma i číslo n. Číslo n je tedy dělitelné dvěma, pokud $a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Dělitelnost třemi

Věta: Číslo n je dělitelné třemi, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Zápis upravíme:

$$n = [a_k + (1O^k - 1)a_k] + [a_{k-1} + (10^{k-1} - 1)a_{k-1}] + \dots + [a_2 + 99a_2] + a_1 + 9a_1 + a_0$$

$$n = \underbrace{[a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0]}_{\text{Tato závorka odpovídá cifernému součtu}} + \underbrace{[(10^k - 1)a_k + \dots + 99a_2 + 9a]}_{\text{Tato část je dělitelná třemi}}$$

Číslo n je tudíž dělitelné třemi, pokud je jeho ciferný součet dělitelný třemi.

Dělitelnost čtyřmi

Věta: Číslo n je dělitelné čtyřmi, je-li poslední dvojčíslí tohoto čísla dělitelné čtyřmi.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Ze členů $a_2; a_{3;} \dots a_k$ je možné vytknout číslo 10^2, které je dělitelné 4.

$$n = 10^2(a_k 10^{k-2} + a_{k-1}10^{k-3} + \cdots + a_3 10^1 + a_2) + a_1 10^1 + a_0$$

$$n = \underbrace{4 \cdot 25(a_k 10^{k-2} + a_{k-1}10^{k-3} + \cdots + a_3 10^1 + a_2)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná čtyřmi}} + a_1 10^1 + a_0$$

Dělitelnost osmi tedy závisí na posledních dvou členech $a_1 10^1 + a_0$.

Dělitelnost pěti

Věta: Číslo n je dělitelné pěti, je-li poslední číslice tohoto čísla 0 nebo 5.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Ze členů $a_1; a_{2;} \dots a_k$ je možné vytknout číslo 10.

$$n = 10 \cdot (a_k 10^{k-1} + a_{k-1}10^{k-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0$$

$$n = \underbrace{5 \cdot 2 \cdot (a_k 10^{k-1} + a_{k-1}10^{k-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná pěti}} + a_0$$

Dělitelnost čísla n pěti tedy zjevně vyplývá z poslední číslice daného čísla. Aby číslo n bylo dělitelné pěti, musí mít na místě jednotek 0 nebo 5, tedy $a_0 \in \{0; 5\}$.

Dělitelnost šesti

Věta: Číslo n je dělitelné šesti, je-li zároveň dělitelné dvěma a třemi.

Důkaz: Chceme dokázat, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: (2|n \ \wedge 3|n) \Rightarrow 6|n.$$

Pokud je číslo n dělitelné dvěma, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2 \cdot k$. Protože 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, musí být číslo k dělitelné třemi, existuje tedy $l \in \mathbb{N}$, pro které platí $k = 3 \cdot l$. Po dosazení dostáváme:

$$n = 2 \cdot (3 \cdot l) = 2 \cdot 3 \cdot l = 6 \cdot l$$

Číslo n tedy můžeme zapsat $n = 6 \cdot l$, z čehož vyplývá, že číslo n je dělitelné šesti.

Dělitelnost sedmi

Věta: Číslo n je dělitelné sedmi, je-li dělitelný sedmi součet, který získáme tak, že číslice čísla n odzadu postupně vynásobíme čísly 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3,… a následně sečteme.

Důkaz: Nejprve se zaměříme na zbytky po dělení u mocnin čísla 10.

$$10^0 = 7 \cdot 0 + 1$$
$$10^1 = 7 \cdot 1 + 3$$
$$10^2 = 7 \cdot 14 + 2$$
$$10^3 = 7 \cdot 142 + 6$$
$$10^4 = 7 \cdot 1\,428 + 4$$
$$10^5 = 7 \cdot 14\,285 + 5$$
$$10^6 = 7 \cdot 142\,857 + 1$$
$$\vdots$$

Pokud bychom pokračovali, dostaneme nekonečnou periodickou posloupnost čísel $1, 3, 2, 6, 4, 5, \ldots$. Jednotlivé členy posloupnosti určují zbytky mocnin čísla 10 po dělení číslem 7. Číslo n vyjádříme pomocí rozvinutého zápisu:

$$n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + a_4 10^4 + a_5 10^5 + \cdots$$

Za mocniny čísla 10 dosadíme předchozí rovnosti.

$$n = a_0(7 \cdot 0 + 1) + a_1(7 \cdot 1 + 3) + a_2(7 \cdot 14 + 2) + a_3(7 \cdot 142 + 6) +$$
$$+ a_4(7 \cdot 1\,428 + 4) + a_5(7 \cdot 14285 + 5 + \cdots$$
$$= (a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \cdots) +$$
$$+ \underbrace{7 \cdot (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 14 + a_3 \cdot 142 + a_4 \cdot 1428 + a_5 \cdot 14285 + \cdots)}_{\text{Tato část je dělitelná 7}}$$

Jelikož výraz v druhé závorce je dělitelný sedmi, neovlivňuje zbytek po dělení číslem 7. Součet v první závorce tedy dává po dělení sedmi stejný zbytek jako původní číslo. Je-li tento součet dělitelný sedmi, je i číslo n dělitelné sedmi.

Dělitelnost osmi

Věta: Číslo n je dělitelné osmi, je-li poslední trojčíslí tohoto čísla dělitelné osmi.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Ze členů $a_3; a_4; \ldots a_k$ můžeme vytknout číslo 10^3, které je dělitelné osmi.

$$n = 10^3(a_k 10^{k-3} + a_{k-1} 10^{k-4} + \cdots + a_4 10^1 + a_3) + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$
$$n = \underbrace{8 \cdot 125 \cdot (a_k 10^{k-3} + a_{k-1} 10^{k-4} + \cdots + a_4 10^1 + a_3)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná osmi}} + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Odtud vyplývá, že číslo n je dělitelné osmi, pokud je osmi dělitelný výraz $a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, tedy poslední trojčíslí čísla n.

Dělitelnost devíti

Věta: Číslo n je dělitelné devíti, je-li ciferný součet tohoto čísla dělitelný devíti.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Zápis upravíme:

$$n = [a_{k+}(1O^k - 1)a_k] + [a_{k-1} + (10^{k-1} - 1)a_{k-1}] + \cdots + [a_2 + 99a_2] + a_1 + 9a_1 + a_0$$

Po přerovnání dostaneme:

$$n = \underbrace{[a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0]}_{\text{Tato závorka odpovídá cifernému součtu}} + \underbrace{[(10^k - 1)a_k + \cdots + 99a_2 + 9a]}_{\text{Tato část je dělitelná devíti}}$$

Číslo n je tudíž dělitelné devíti, pokud je jeho ciferný součet dělitelný devíti.

Dělitelnost desíti

Věta: Číslo n je dělitelné desíti, je-li poslední číslice tohoto čísla nula.

Důkaz:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Ze členů $a_1; a_{2;} \ldots a_k$ je možné vytknout číslo 10.

$$n = \underbrace{10(a_k 10^{k-1} + a_{k-1}10^{k-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná deseti}} + a_0$$

Odtud vyplývá, že dělitelnost deseti závisí na poslední číslici čísla n. Číslo n je tedy dělitelné desíti v jediném případě, a to pro $a_0 = 0$.

Dělitelnost jedenácti

Věta: Číslo n je dělitelné jedenácti, je-li alterovaný ciferný součet tohoto čísla dělitelný jedenácti.

Důkaz: Číslo n zapíšeme

$$n = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \cdots + a_{k-1}10^{k-1} + a_k 10^k.$$

Od čísla n odečteme číslo $x_1 = 11 \cdot (a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{k-2}a_{k-1} + 10^{k-1}a_k)$.

$$n - x_1 = (a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \cdots + a_{k-1}10^{k-1} + a_k 10^k) - 11 \cdot (a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{k-2}a_{k-1} + 10^{k-1}a_k)$$

$$n - x_1 = a_0 - a_1 - 10 \cdot (a_2 + 10^1 a_3 + \cdots + 10^{k-3}a_{k-1} + 10^{k-2}a_k)$$

Toto číslo má po dělení 11 stejný zbytek jako původní číslo n.

K získanému rozdílu přičteme číslo $x_2 = 11 \cdot (a_2 + 10^1 a_3 + \cdots + 10^{k-3}a_{k-1} + +10^{k-2}a_k)$. Dostaneme

$$n - x_1 + x_2 = [a_0 - a_1 - 10 \cdot (a_2 + 10^1 a_3 + \dots + 10^{k-3} a_{k-1} + 10^{k-2} a_k)] + 11 \cdot (a_2 + 10^1 a_3 + \dots + 10^{k-3} a_{k-1} + 10^{k-2} a_k),$$

$$n - x_1 + x_2 = a_0 - a_1 + a_2 + 10 \cdot (a_3 + 10^1 a_4 + \dots + 10^{k-4} a_{k-1} + 10^{k-3} a_k).$$

I toto číslo má po dělení jedenácti stejný zbytek jako původní číslo n.

Pokud bychom takto pokračovali až k přičtení či odečtení čísla x_k, dostali bychom alterovaný součet jednotlivých číslic čísla n, tedy

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \dots$$

Tento součet má také stejný zbytek po dělení jedenácti jako původní číslo n.

Dělitelnost stem

Věta: Číslo n je dělitelné stem, je-li jeho poslední dvojčíslí 00.

Důkaz: Důkaz dělitelnosti stem je obdobný jako u dělitelnosti deseti.

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Z členů $a_2; a_{3;} \dots a_k$ je možné vytknout číslo 100.

$$n = 100 \cdot (a_k 10^{k-2} + a_{k-1} 10^{k-3} + \dots + a_3 10^1 + a_2) + 10 \cdot a_1 + a_0$$

$$n = \underbrace{100 \cdot (a_k 10^{k-2} + a_{k-1} 10^{k-3} + \dots + a_3 10^1 + a_2)}_{\text{Tato část je zjevně dělitelná stem}} + 10 \cdot a_1 + a_0$$

Dělitelnost stem tedy závisí na posledním dvojčíslí, aby bylo toto dvojčíslí dělitelné stem, musejí být obě jeho číslice 0.

3 Kritéria dělitelnosti v učebnicích matematiky

Vzhledem k tomu, jak rozsáhlé téma je dělitelnost v oboru přirozených (respektive celých) čísel, omezíme se pouze na jednu část, a tou jsou kritéria dělitelnosti. Využití kritérií dělitelnosti může výrazně ulehčit práci při složitějších výpočtech, jako je prvočíselný rozklad, hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele, při operacích se zlomky apod.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) platného od 1. 9. 2017 je dělitelnost zařazena ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace pro 2. stupeň základního vzdělávání.

Očekávané výstupy dle RVP ZV:

M-9-1-03 žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

Učivo dle RVP ZV:

Prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti

3.1 Výběr učebnic

Při výběru učebnic jsem se snažila zohlednit jednak to, aby byly zařazeny aktuálně využívané učebnice, ale i učebnice, které ke kritériím dělitelnosti přistupují originálním způsobem. Mezi vybrané učebnice jsem zařadila i učebnici *Matematika s Betkou*, která nemá schvalovací doložku MŠMT. O této učebnici jsem se dozvěděla v průběhu svého vysokoškolského studia a rozhodla jsem se jí zařadit pro originální zobrazení čísel, které je v ní využito při zdůvodňování kritérií dělitelnosti.

Tabulka 2: Přehled analyzovaných učebnic matematiky

Učebnice	Autor / Autoři	Nakladatelství	Rok	Ročník
Matematika 6	Zdeněk Půlpán, Michal Čihák	SPN	2013	6.
Matematika s Betkou	Jarmila Novotná, Marie Kubínová, Václav Sýkora, Jana Hanková, Marta Sinková	Scientia	1997	7.
Matematika A–F	Milan Hejný, Pavel Šalom, Darina Jirotková,	H-mat	2015–2018	6.–9.

	Jana Hanušová, Anna Sukniak, Eva Bomerová			
Matematika 6 Aritmetika	Helena Bittnerová, Eduard Fuchs, Pavel Tlustý	Fraus	2007	6.
Matematika dělitelnost	Jiří Herman, Vítězslava Chrápavá, Eva Jančovičová, Jaromír Šimša	Prometheus	1994	Prima
Matematika dělitelnost	Michaela Jedličková, Petr Krupka, Jana Nechvátalová	NOVÁ ŠKOLA	2015	6.
Matematika pro 6. ročník základních škol 2	Oldřich Odvárko, Jiří Kadleček	Prometheus		6.
Realisticky.cz	Martin Krynický	x	2010 – současnost	6.

Pro zjednodušení bude v následujících částech práce na učebnice odkazováno prostřednictvím nakladatelství, ve kterém byla učebnice vydána. Pro odlišení dvou řad učebnic nakladatelství Prometheus bude označována jako „Prometheus A“ učebnice *Matematika – dělitelnost* autorů Hermana, Chrápavé, Jančovičové a Šimši. Učebnice *Matematika pro 6. ročník základních škol 2* autorů Odvárka a Kadlečka bude označována jako „Prometheus B“.

Při analýze jsem se zaměřovala na to, a) jaká kritéria jsou v učebnici přítomna, b) zda a jak jsou žáci vedeni k participaci na odvození kritérií dělitelnosti, c) zda a jak jsou kritéria odůvodněna z matematického hlediska, d) jaké modely učebnice pro odvozování a zdůvodňování kritéria využívá, e) zda učebnice uvádí příklady z reálného života, v nichž lze kritéria dělitelnosti aplikovat.

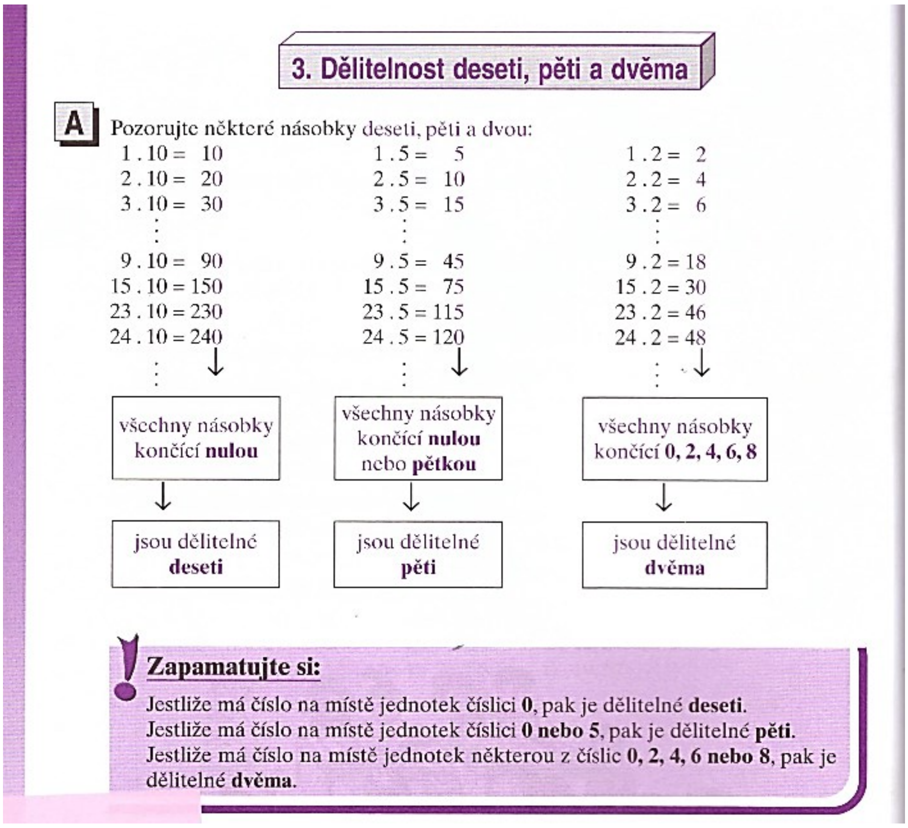
Pojmy dělitel a násobek ve všech vybraných učebnicích předcházejí kritériím dělitelnosti. V učebnicích nakladatelství Prometheus A, Fraus a NOVÁ ŠKOLA jsou žáci navíc seznámeni i s dělitelností součtu, rozdílu a součinu čísel. V některých učebnicích kritériím předcházejí také pojmy prvočíslo a číslo složené, nicméně při zkoumání kritérií dělitelnosti se s těmito pojmy nesetkáme.

3.1.1 *Matematika 6 – Aritmetika*, nakladatelství SPN

V této učebnici není tématu kritérií dělitelnosti věnován velký prostor, zvláště pokud jde o jejich objevení, respektive odvození. Navíc jako jedna z mála učebnic z výběru vůbec nezmiňuje kritérium dělitelnosti čtyřmi, a to ani v jiné učebnici této řady.

Dělitelnost čísly 10, 5 a 2

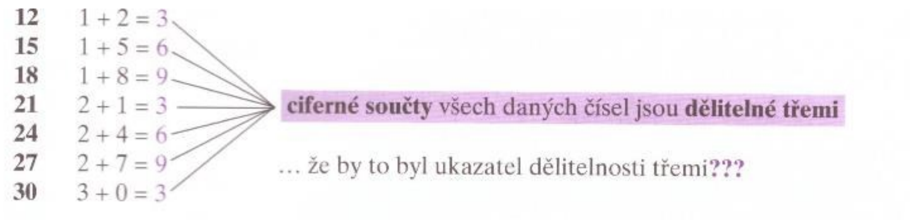
Jak je vidět na obr. 1, dělitelnost čísly 10, 5 a 2 je zavedena souhrnně na základě několika násobků daných čísel. Pod sloupcem vypsaných násobků je zapsána vlastnost, kterou mají všechny násobky v daném sloupci, a poté následuje samotná formulace kritérií dělitelnosti.



Obrázek 1: Dělitelnost číslem 10, 5, 2 (SPN, 6. ročník, s. 56)

Dělitelnost čísly 3 a 9

U dělitelnosti třemi je na úvod uvedena řada čísel, které jsou dělitelné třemi. Je na nich ukázáno, že číslo dělitelné třemi může končit na všechny možné číslice, tudíž podle poslední číslice dělitelnost třemi poznat nejde. V další části je navrženo zkusit sčítat číslice, ze kterých se čísla skládají – provést ciferný součet (viz obr. 2).



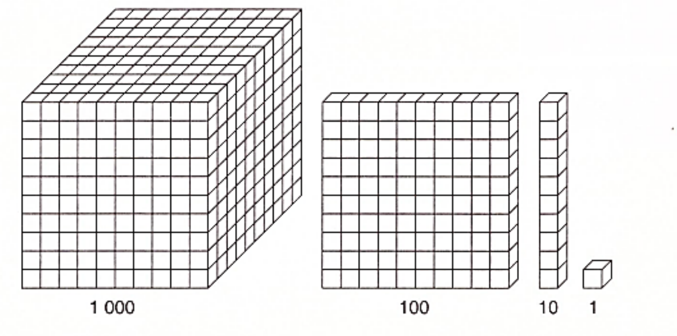
Obrázek 2: Ciferný součet (SPN, 6. ročník, s. 59)

Protože všechny takto získané součty jsou dělitelné třemi, učebnice naznačuje, že ciferný součet je znakem dělitelnosti třemi. To je následně ještě ověřeno na několika dalších úlohách s většími čísly. Poté je uvedeno samotné kritérium dělitelnosti třemi.

Obdobně je zavedeno i kritérium dělitelnosti devíti, nejprve je uvedeno několik násobků devíti, na nich je vidět, že mohou končit na všechny možné číslice. Proto je opět vyzkoušen ciferný součet, který u všech uvedených čísel vychází dělitelný devíti. Následně je ověřeno na několika větších číslech a poté zformulováno kritérium dělitelnosti devíti.

3.1.2 *Matematika s Betkou 2*, nakladatelství Scientia

Tato učebnice pro znázornění čísel využívá jako základní stavební jednotku krychličku o hraně 1 (jednotka). Potom 10 je tyč tvořená deseti jednotkovými krychličkami, 100 je destička tvořená stem jednotkových krychliček a 1 000 je krychle tvořená tisícem základních krychliček (viz obr. 3). Toto znázornění je využíváno i při zavádění kritérií dělitelnosti.



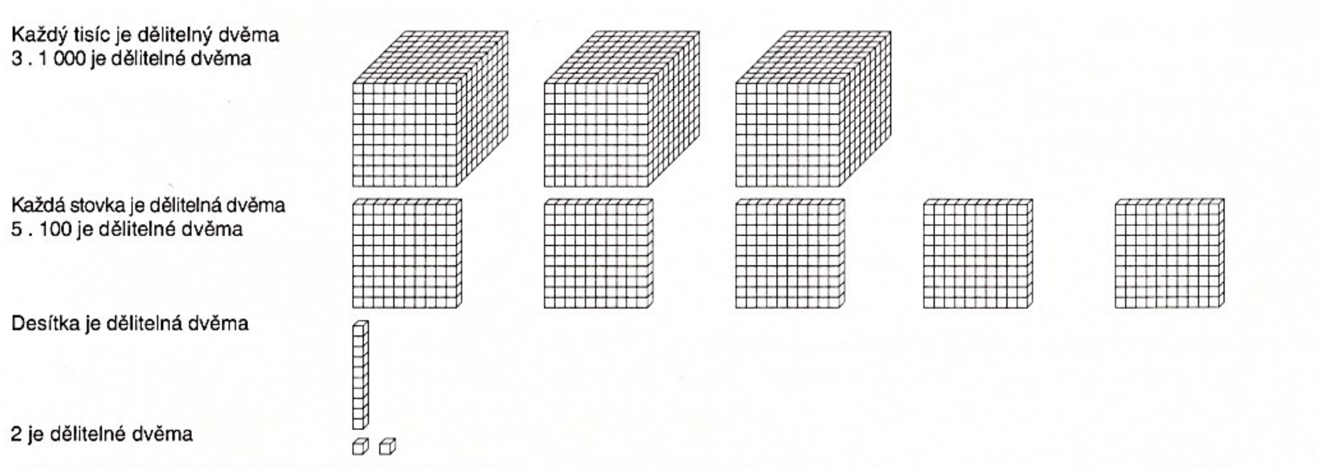
Obrázek 3: Grafické znázornění čísel 1 000, 100, 10, 1 (Scientia, 7. ročník, s. 107)

Dělitelnost čísly 2, 10 a 5

Úvodní příklad ke kritériím dělitelnosti dává Betce a Kryšpínovi, hlavním postavám provázejícím žáky celou učebnicí, za úkol rozdělit se o 35 bonbónů rovným dílem. Již v této úloze je náznak využití rozvinutého zápisu, když je navrženo rozdělit bonbóny do dvou části $35 = 30 + 5$, kde 30 bonbónů je možné rozdělit na dvě stejně velké části. U čísla 5 je zřejmé, že rozdělit nepůjde, pokud bonbóny nechceme dělit na kousky. V další úloze je dáno několik čísel, o kterých mají žáci rozhodnout, zda jsou dělitelná dvěma, a zkusit na základě zjištění odhadnout, jak lze o dělitelnosti dvěma rozhodnout bez dělení.

Zdůvodnění pravidla je provedeno na příkladu čísla 3 512. Číslo je nejprve zapsáno pomocí rozvinutého zápisu a následně zobrazeno pomocí krychliček (viz obr. 4).

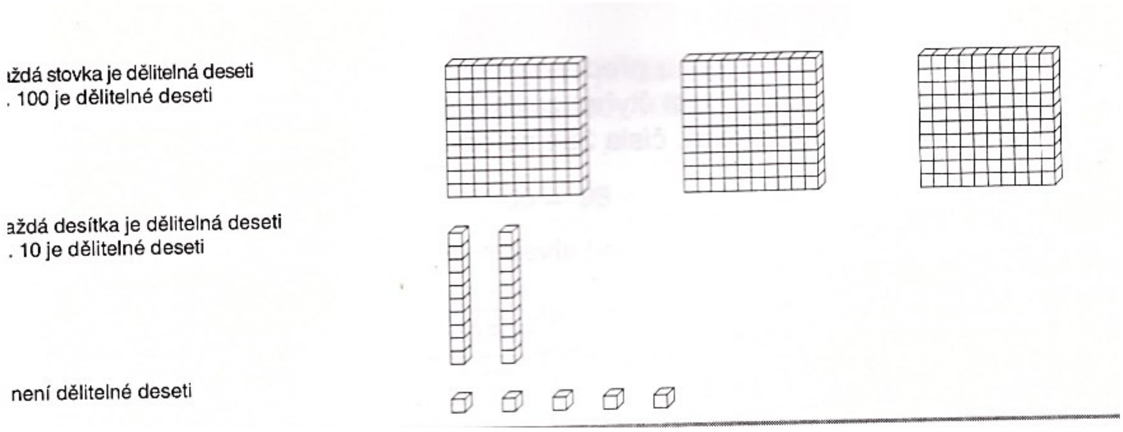
$$3\,512 = 3\,000 + 500 + 10 + 2 = 3 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2$$



Obrázek 4: Grafické znázornění čísla 3 512 (Scientia, 7. ročník, s. 107)

Protože každý tisíc je dělitelný dvěma ($1\,000 = 2 \cdot 500$), je i násobek $3 \cdot 1\,000$ dělitelný dvěma. Obdobně platí i pro 100 ($100 = 2 \cdot 50$) a 10 ($10 = 2 \cdot 5$) a jejich násobky $5 \cdot 100$ a $1 \cdot 10$. Proto je pro dělitelnost dvěma rozhodující, zda je dvěma dělitelný počet jednotek.

Na úvod dělitelnosti deseti je úkolem pomocí dělení rozhodnout, zda jsou daná čísla dělitelná deseti, a na základě výsledků opět odhadnout, jak poznat čísla dělitelná deseti bez provedení dělení. Následně je kritérium zdůvodněno obdobně, jako tomu bylo u dělitelnosti dvěma.



Obrázek 5: Znázornění čísla 325 (Scientia, 7. ročník, s. 109)

Vychází se z čísla 325, to je nejprve zapsáno pomocí rozvinutého zápisu a následně znázorněno pomocí krychliček (viz obr. 5).

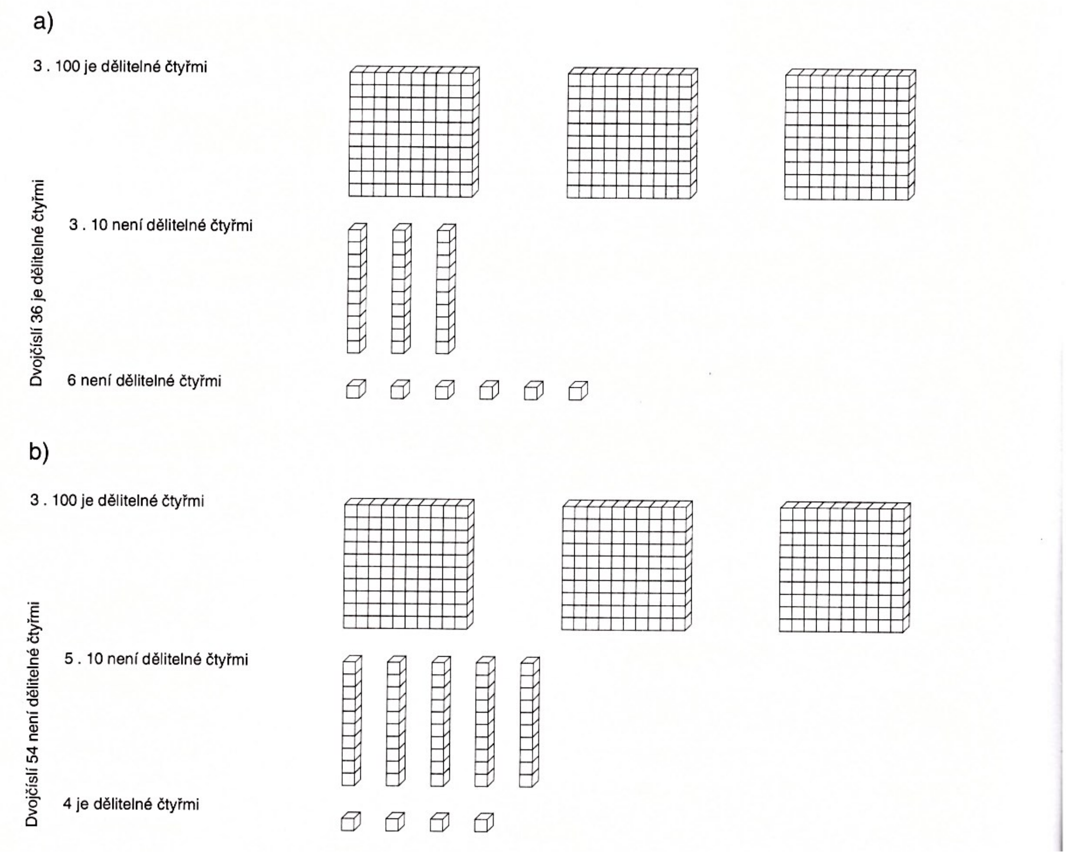
$$325 = 300 + 20 + 5 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$$

Protože desítky, stovky, tisíce, … jsou násobkem deseti, dělitelnost deseti je opět závislá pouze na počtu jednotek. Z číslic, které na místě jednotek mohou být, je pouze nula dělitelná deseti.

U dělitelnosti pěti není kritérium v zásadě vůbec zdůvodněno. Žáci si mají na číslech dle vlastního výběru ověřit, zda jsou tato čísla dělitelná pěti, a zkusit pravidlo zformulovat. Po tomto zadání následuje již samotné znění kritéria.

Dělitelnost číslem 4

I u dělitelnosti čtyřmi je úvodní úloha zaměřena na určení, zda jsou čísla dělitelná čtyřmi. Dvě čísla jsou daná, další si mají žáci vybrat sami. Stejně jako v předchozích případech je i zde účelem pokusit se odhalit pravidlo pro určení dělitelnosti bez provedení dělení. Zadaná čísla jsou opět následně rozebrána a je zde zdůvodněno, proč jsou, nebo nejsou dělitelná čtyřmi (viz obr. 6).



Obrázek 6: Znázornění čísel 336 a 354 (Scientia, 7. ročník, s. 110)

$$336 = 300 + 30 + 6 = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6$$

$$354 = 300 + 50 + 4 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4$$

Protože číslo 10 není dělitelné čtyřmi, nemůžeme o dělitelnosti rozhodovat pomocí poslední číslice. Čísla 100, 1 000, … čtyřmi dělitelná jsou, proto jejich násobky jsou vždy dělitelné čtyřmi. Dělitelnost čtyřmi tedy závisí na posledním dvojčíslí vyšetřovaného čísla.

Dělitelnost čísly 9 a 3

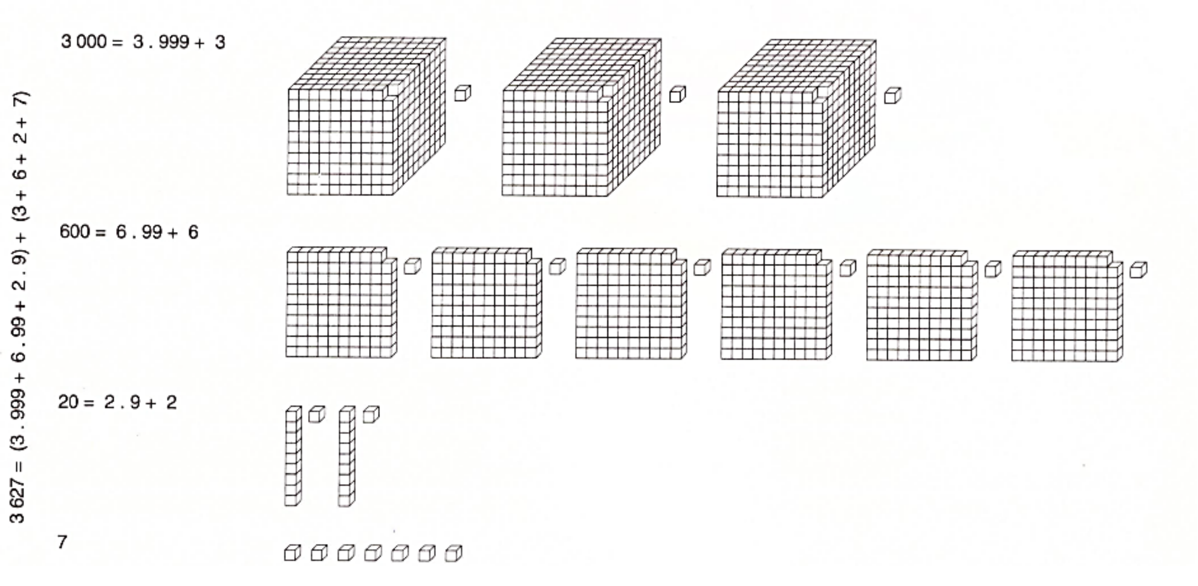
Před samotným zavedením kritérií dělitelnosti devíti a třemi se mají žáci zaměřit na dělitelnost devíti u čísel 10, 100, 1 000, … Žádné z těchto čísel není dělitelné devíti, ale každé z nich dává po dělení devíti zbytek 1. Je tedy možné je zapsat:

$$10 = 9 + 1, \qquad 100 = 99 + 1, \qquad 1\,000 = 999 + 1, \ldots$$

Čísla 9, 99, 999, … jsou dělitelná devíti i třemi.

U konkrétního čísla, v tomto případě 3 627, autoři opět vycházejí z grafického znázornění pomocí krychliček a rozvinutého zápisu (viz obr. 7).

$$3\,627 = 3\,000 + 600 + 20 + 7 = 3 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$$



Obrázek 7: Znázornění čísla 3 627 (Scientia, 7. ročník, s. 111)

Jsou-li čísla 10, 100 a 1 000 rozepsána, zápis čísla 3 627 je možné upravit následovně:

$$3\,627 = 3 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 7 =$$

$$= (3 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7) =$$

$$= (3 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (3 + 6 + 2 + 7)$$

Výraz v první závorce je evidentně dělitelný devíti, protože každý ze sčítanců devíti dělitelný je. Aby bylo devíti dělitelné celé číslo, je třeba, aby byl devíti dělitelný i součet čísel v druhé závorce, což je v tomto případě splněno. Tento součet zároveň odpovídá součtu číslic daného čísla. Zcela analogicky platí pravidlo i pro dělitelnost třemi.

3.1.3 *Matematika A–F* (Hejného metoda), nakladatelství H-mat

Na rozdíl od ostatních vybraných učebnic není v učebnicích Hejného metody kapitola věnovaná přímo tématu kritérií dělitelnosti. Kritéria jsou postupně objevována v rámci dílčích částí onačených jako „dělitelnost“, a to již v učebnicích pro 1. stupeň základních škol, i když v nich jde spíše o propedeutiku. Proto budou výsledky analýzy u této učebnice prezentovány podle učebnice, a ne podle jednotlivých kritérií. Dalším rozdílem oproti většině zkoumaných učebnic je také to, že se zabývají i složitějšími kritérii, jako jsou kritéria dělitelnosti šesti, osmi, nebo jedenácti.

Učebnice využívají řadu zajímavých metod, mimo jiné práci se stovkovou tabulkou, což je tabulka čísel od 1 do 100 (viz obr. 8).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obrázek 8: Stovková tabulka (tabulka vytvořena podle *Matematika AB – příručka učitele*)

Při analýze učebnic této řady jsem využívala metodických příruček, jelikož jsou stěžejní pro pochopení záměru autorů. V samotných učebnicích nejsou matematické závěry zpravidla zformulovány.

Učebnice pro 1. stupeň[3]

V učebnici pro 4. ročník základních škol se setkáváme s několika úlohami, které sice přímo nevedou ke kritériím dělitelnosti, ale vedou žáky ke zkoumání vztahu číslic a dělitelnosti číslem 3. Úlohy, které mají souvislost s kritériem dělitelnosti třemi, jsou uvedené níže, nicméně v učebnici na sebe přímo nenavazují.

[3] Učebnice Hejného metody pro 1. stupeň byly vydány v nakladatelství Fraus.

Z číslic 2, 4 a 8 mohu vytvořit čtyři různá dvoumístná čísla dělitelná třemi: 24, 42, 48 a 84. Číslice se mohou opakovat.

Kolik různých dvoumístných čísel dělitelných třemi mohu vytvořit z číslic:

1, 3, 7; 1, 3, 5; 5, 6, 7 3, 6, 9 2, 5, 8?

Číslo 104 není dělitelné číslem 3, neboť $104 : 3 = 34\ (2)$. Změň číslici 1 tak, aby nové číslo bylo dělitelné číslem 3. Najdi 3 různá řešení. (s. 74)

Obě tyto úlohy nepřímo poukazují na souvislost dělitelnosti třemi a číslic, ze kterých se dané číslo skládá. V zadání první úlohy je vidět, že dělitelná třemi jsou i čísla, ve kterých jsou prohozené číslice. Druhá úlohy zase ukazuje, že stačí změnit pouze jednu číslici, a to i ve vyšších řádech.

Zjisti, pro která vstupní čísla je součet cesty ve stovkové tabulce dělitelný číslem 3.

a) _ → _ → _ b) _ ↓ _ → _ c) _ → _ ↓ _ d) _ → _ ↑ _ e) _ ↑ _ ↑ _

(s. 75)

U této úlohy vycházíme ze stovkové tabulky a umístění čísel v ní. Kromě varianty d), kde součet cesty nikdy nebude dělitelný třemi, vedou všechny cesty k číslu dělitelnému třemi, bez ohledu na počáteční číslo – součet zbytků po dělení třemi je vždy dělitelný třemi.

V učebnici pro 5. ročník jsou obsaženy úlohy naznačující myšlenku kritéria dělitelnosti šesti. Konkrétně jde o hru „Tleskni dvě, dupni tři“, ve které hrají tři žáci – hlasatel, tleskač a dupač. Hlasatel počítá, tleskač tleskne na každé druhé číslo a dupač dupne na každé třetí číslo. Samozřejmě tam, kde se ozve tlesknutí i dupnutí současně, se nachází číslo dělitelné šesti, tento fakt ale žákům odhalen není. Další úloha pak navazuje na hru.

Monika (hlasatel), Julka (tleskač), a Klára (dupač) tuto hru trénovaly a předvedly skvělý výkon. Spletly se až ve 156. sekundě, kdy nezaznělo ani tlesknutí, ani dupnutí. Které číslo ve 156. sekundě řekla Monika? Která z dívek to spletla? Kolikrát v průběhu prvních 155 sekund bylo slyšet tlesknutí? Kolikrát dupnutí? Kolikrát zaznělo tlesknutí a dupnutí současně? (s. 32)

V následující úloze mají žáci za úkol nakreslit obdélník 5×11, vepsat do něj čísla od 0 do 54 a vyškrtat sudá čísla takto / a čísla dělitelná třemi takto\. Po splnění úkolu dostáváme tabulku na obr. 9.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29
30	31	32	33	34
35	36	37	38	39
40	41	42	43	44
45	46	47	48	49
50	51	52	53	54

Obrázek 9 : Dělitelnost číslem 6, (tabulka vytvořena podle učebnice *Matematika 5*, H-mat, s. 32)

Zde je opět vidět, že čísla dělitelná šesti jsou škrtnutá oběma směry, ovšem stejně jako v předchozím případě na to žáci nejsou upozorněni.

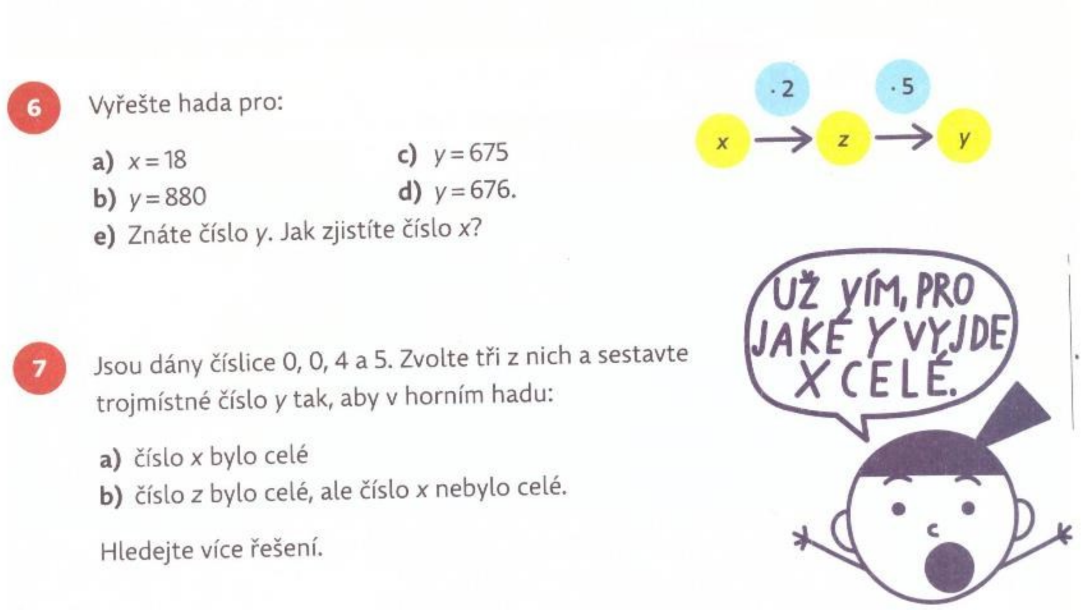
Dělitelnost je zařazována v průběhu celé řady učebnic pro 2. stupeň. Budeme se zaměřovat pouze na úlohy, které se přímo týkají jednotlivých kritérií. Pro přehlednost bude uvedeno, ve které z učebnic se nacházíme. Úlohy ale nebudou roztříděny podle toho, ke kterému kritériu se vztahují, neboť v řadě případů se v nich prolíná více kritérií.

Učebnice B

S prvním pojmem spojeným s kritériem dělitelnosti se setkáváme v učebnici B. Jde o ciferný součet, který je zde záměrně umístěn odděleně od kritéria dělitelnosti třemi, aby si žáci ihned neuvědomili, že mezi těmito pojmy je nějaká spojitost. V prvních dvou úlohách žáci vymýšlejí čísla se zadaným ciferným součtem. V dalších třech úlohách je tento úkol navíc zkombinován s ověřením dělitelnosti dvěma, třemi, čtyřmi a pěti. Již v této části autoři předpokládají, že se objeví první hypotézy o dělitelnosti jednotlivými čísly. Například ve třetí úloze mají žáci ověřit, která trojciferná čísla s ciferným součtem 6 jsou dělitelná třemi. Žáci dojdou k závěru, že každé takové číslo je dělitelné třemi.

Další úloha je zaměřená na dělitelnost 2, 5 a 10. Jde o vyřešení „hada“ se zadanými čísly (viz obr. 10). Zvolená čísla reprezentují tři varianty, které nás mohou z hlediska dělitelnosti čísly 5 a 10 zajímat. U úlohy b) vyjde *z* i *x* celé (přirozené), u c) vyjde celé *z*, ale *x* už vyjde desetinné a u d) vyjde desetinné *z* i *x*. Díky těmto výsledkům by si měli žáci uvědomit, že číslo dělitelné pěti může končit 0 nebo 5. Důležitá je i výzva Kiry, která by měla vést k formulaci, že číslo *x* vyjde celé, pokud *y* bude končit nulou (bude dělitelné deseti).

Následující úlohy by měly žáky dovést k aplikaci objevených pravidel. V poslední úloze z této části je úkolem ze zadaných slov vytvořit závěr z předchozích úloh: „Číslo je dělitelné deseti právě tehdy, když je dělitelné 2 a 5.“, případně jiné pravdivé variace.



6 Vyřešte hada pro:

a) $x = 18$ **c)** $y = 675$

b) $y = 880$ **d)** $y = 676.$

e) Znáte číslo y. Jak zjistíte číslo x?

7 Jsou dány číslice 0, 0, 4 a 5. Zvolte tři z nich a sestavte trojmístné číslo y tak, aby v horním hadu:

a) číslo x bylo celé

b) číslo z bylo celé, ale číslo x nebylo celé.

Hledejte více řešení.

Obrázek 10: Dělitelnost čísly 2, 5, 10 (H-mat, *Matematika B*, s. 41)

V další kapitole věnované dělitelnosti se učebnice vrací k ciferného součtu a dostává se k dělitelnosti číslem 3. V první úloze této části je úkolem najít čísla dělitelná třemi s ciferným součtem 4, 5 a 6. Samozřejmě pro čísla 4 a 5 řešení neexistuje a pro všechna čísla s ciferným součtem 6 platí, že jsou dělitelná třemi. Následují dvě úlohy, ve kterých je cílem najít dvojciferná a trojciferná (v učebnici jsou použity termíny dvoumístná a trojmístná) čísla se zadaným ciferným součtem a určit, kolik z nich je dělitelných třemi. Na základě těchto dvou úloh by žáci měli přijít s hypotézou, že čísla dělitelná třemi mají ciferný součet dělitelný třemi.

K ověření této hypotézy je potřeba zjistit, zda ji nějaké číslo nevyvrací, což je také účelem jedné z dalších úloh. Označení CS(x) v následujících úlohách značí ciferný součet čísla x.

Číslo 516 i číslo CS(516) = 5 + 1 + 6 = 12 jsou dělitelná číslem 3.

Najděte takové číslo m, které je dělitelné 3, ale číslo CS(m) není dělitelné 3.

Najděte takové číslo n, které není dělitelné 3, ale číslo CS(n) je dělitelné 3. (s. 52)

Je samozřejmé, že žádné takové číslo, které by splňovalo tvrzení a) ani b), se najít nepodaří. Poslední úloha vztahující se k dělitelnosti třemi spočívá v tom, že máme nalézt čísla, pro která platí, že dané číslo a jeho ciferný součet dávají po dělení třemi zbytek 1 (stejně jako číslo 517). Tato úloha má žáky navést k tomu, že ciferný součet dává po dělení třemi vždy stejný zbytek jako zkoumané číslo.

Mezi úlohy o dělitelnosti třemi je vložena jedna, která se zaměřuje na dělitelnost čtyřmi. Jde o obdobnou úlohu jako u dělitelnosti třemi. Vychází se z čísla 516. Toto číslo je dělitelné čtyřmi a i jeho ciferný součet $5 + 1 + 6 = 12$ je dělitelný čtyřmi. Máme se pokusit najít čísla:

a) Číslo m, které je dělitelné 4, ale číslo CS(m) není dělitelné 4.
b) Číslo n, které není dělitelné 4, ale číslo CS(n) je dělitelné 4.

Oproti případu s dělitelností třemi zde existuje nekonečně mnoho čísel, která splňují některé z daných tvrzení.

Učebnice C

V této učebnici je pozornost věnována dělitelnosti devíti. Začíná zavedením pojmu zrcadlové číslo. Například čísla 216 a 612 jsou navzájem zrcadlová, navíc jsou obě dělitelná číslem 9. Prvním úkolem je najít taková trojmístná zrcadlová čísla, z nichž jedno je a druhé není dělitelné devíti. Takové číslo samozřejmě neexistuje. Dle autorů je cílem navést žáky k tomu, aby „zafixovali“ jedno číslo a zjistili, že součet zbylých dvou je konstantní, například pokud žáci mají číslo ABC, položí $B = 0$ a pak $A + C = 9$. Pokud se žákům nepodaří objevit kritérium v první úloze, ve druhém je jejich úkolem doplnit na vynechané pozice v číslech číslici tak, aby získané číslo bylo dělitelné devíti.

Další dvě úlohy jsou zaměřeny na zbytky po dělení devíti. Do čísel $15*$, $5*1$ a $*60$, se mají doplňovat číslice tak, aby čísla dávala po dělení zbytky 1, 2, 3, 6 a 7. Účelem těchto úloh je, aby si žáci uvědomili, že i zbytek po dělení devíti nezávisí na pořadí čísel, ale jen na ciferném součtu.

Hledejte číslice A, B (případně C) tak, aby číslo
a) $AB - A - B$, b) $ABC - A - B - C$ bylo dělitelné 9. Hledejte více řešení. (s. 56)

V této úloze se autoři nespokojí jen s příklady, neboť oba výrazy jsou dělitelné devíti pro libovolné číslice A, B, C. Pro obecný důkaz je potřeba si uvědomit:

a) $AB - A - B = 10 \cdot A + B - A - B = 9 \cdot A$
b) $ABC - A - B - C = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C - A - B - C = 99 \cdot A + 9 \cdot B =$
$= 9 \cdot (11 \cdot A + B)$

Z těchto úprav je zřejmé, že bez ohledu na zvolené číslice budou oba výrazy vždy dělitelné devíti.

Učebnice D

V této učebnici se autoři vrací k cifernému součtu a porovnání zbytků po dělení daného čísla a po dělení jeho ciferného součtu. První úloha se zaměřuje na zbytky při dělení číslem 3, 6 a 9. Označení zb(x : y) v následující úloze značí zbytek po dělení čísla x číslem y.

Zjistěte, pro které přirozené číslo n platí:

a) $zb(n : 3) = zb((n + 12) : 3)$

b) $zb(n : 6) = zb\big((n + 12) : 6\big)$

c) $zb\ (n : 9) = zb\ \big((n + 9) : 9\big)$

d) $zb(n : 9) = zb\big((n + 9k) : 9\big)$, přičemž k je jakékoliv přirozené číslo. (s. 20)

Dle autorů jsou důležitým výstupem této úlohy dvě tvrzení, která budou žáci využívat při dokazování v následujících úlohách.

1) Přičteme-li k číslu n násobek čísla m a provedeme dělení číslem m, dostáváme stejný zbytek jako při dělení $n{:}\,m$.
2) Pokud w je součet $w = u + v$ a $x|u$, pak $x|w \;\Leftrightarrow x|v$. (Příručka učitele CD, s. 128)

Dalším úkolem je doplnit tabulku, ve které se nacházejí čísla od 546 do 552. Žáci se mají zaměřit na ciferný součet, zbytek čísla po dělení třemi a zbytek ciferného součtu těchto čísel po dělení třemi. Na základě výsledků, které žáci získali v učebnici B, je možné předpokládat, že oba zbytky budou stejné, což samozřejmě výsledky v tabulce potvrdí.

Na základě této myšlenky se v další úloze žáci pokusí ověřit, zda toto zachování zbytků platí i pro dělení čísly 6 a 9. Pro číslo 9 se tvrzení potvrdí, pro číslo 6 nikoliv (například $12 :\ 6 =\ 2\ (0)$ ale $(1 + 2) :\ 6 = 0\ (3)$). Dále se žáci věnují pouze číslu 9.

Žáci mají nejprve ověřit dvě tvrzení pro dvojciferná čísla, následně i pro trojciferná a čtyřciferná čísla. První tvrzení říká, že když je ciferný součet čísla roven devíti, pak je toto číslo dělitelné devíti. Toto tvrzení je platné bez ohledu na to, zda jde o číslo dvojciferné, trojciferné či čtyřciferné. Druhé tvrzení říká, že pokud je číslo dělitelné devíti, pak je jeho ciferný součet roven 9. Toto tvrzení zřejmě není platné, například číslo 99 je dělitelné devíti a jeho ciferný součet je roven 18.

Posledním krokem je důkaz samotného kritéria pro dvojciferná, trojciferná a čtyřciferná čísla (v rozšiřujících úlohách i pro čísla pěticiferná a šesticiferná). K tomu jsou využita tvrzení z první úlohy a vztahy $AB - A - B$ a $ABC - A - B - C,$ jejichž dělitelnost devíti byla dokazována v učebnici C. Po tomto důkazu následují úlohy k procvičení objeveného kritéria.

Zde je pěkně vidět, jak na sebe poznatky v jednotlivých učebnicích navazují a jak se nové poznatky propedeuticky připravují už v nižších ročnících.

Další úloha se zabývá dělitelností číslem 8.

Zapište, jak musíme volit číslici *X*, případně i číslici *Y* tak, aby následující číslo bylo dělitelné 8:

a) $X144$ b) $X324$

c) $XY12$ d) $XY14$ (s. 22)

Pro odvození kritéria jsou klíčové první dva případy. Bez ohledu na doplněnou číslici bude a) vždy dělitelné osmi a b) nikdy osmi dělitelné nebude. Stejně tak u c) a d) X nikdy výsledek neovlivní. U c) je potřeba, aby bylo Y liché, u d) bez ohledu na doplněné číslice nebude získané číslo dělitelné osmi.

Kritérium dělitelnosti čtyřmi je v učebnici odvozeno na základě „triku“.

Kira tvrdí, že má trik na dělitelnost trojmístného čísla ABC číslem 4.
Kira: Řekni mi, zda je číslice B sudá, nebo lichá, a ukaž mi číslici C. Já ti řeknu, zda je ABC dělitelné 4.
Pokuste se odhalit trik Kiry. (s. 54)

Trik je velmi jednoduchý, ABC bude dělitelné 4, když bude B sudé a C bude 0, 4 nebo 8, anebo když bude B liché a C bude 2 nebo 6. Při důkazu autoři vycházejí z rozvinutého zápisu.

$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$$

Číslo $100 \cdot A$ je dělitelné čtyřmi vždy, o dělitelnosti tedy rozhoduje jen výraz

$$10 \cdot B + C = 8 \cdot B + (2 \cdot B + C).$$

Odtud vyplývá, že $4|ABC$ právě tehdy, když $4|(2 \cdot B + C)$.

Učebnice F

Poslední učebnice této řady se zaměřuje na dělitelnost osmi, šesti, jedenácti a dvanácti. V první úloze jde v podstatě o formulaci kritéria dělitelnosti osmi. Jsou zadány dva úkoly. V prvním se má najít trojciferné číslo ABC takové, že BC je dělitelné osmi, ale ABC není dělitelné osmi. Takové číslo najít lze, například číslo 164, což ukazuje, že poslední dvojčíslí nestačí k určení dělitelnosti osmi (na rozdíl od dělitelnosti čtyřmi). Druhý úkol je podobný, úkolem je najít čtyřciferné číslo $ABCD$ takové, že BCD je dělitelné osmi, ale $ABCD$ není dělitelné osmi. Takové číslo najít nelze a na základě tohoto zjištění by už neměla být formulace kritéria dělitelnosti osmi problémem.

Jednou z dalších úloh je rozhodnout o pravdivosti několika tvrzení. Tato úloha má zásadní význam, jelikož kromě dalších tvrzení obsahuje i formulace vedoucí ke kritériu dělitelnosti šesti. Dalším důležitým zjištěním je, že je-li číslo dělitelné číslem a a číslem b, nemusí to nutně znamenat, že je dělitelné i číslem $a \cdot b$. To platí pouze, pokud jsou čísla nesoudělná, na což upozorňuje dvojice tvrzení (T1) a (T2). Nepravdivá jsou tvrzení (T2) a (T5).

Odhalte lži:

(T1) Číslo, které je dělitelné číslem 2 i číslem 3, je dělitelné také číslem 6.

(T2) Číslo, které je dělitelné číslem 2 i číslem 4, je dělitelné také číslem 8.

(T3) Sudé číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když $3|n$.

(T4) Jeli $3|\mathrm{CS}(n)$, pak n je dělitelné 6 tehdy a jen tehdy, když n je sudé.

(T5) Číslo ABA je dělitelné číslem 11, právě když $B = 2A$.

(T6) $(12|ABA) \Rightarrow (B \neq 1 \text{ a } B \neq 7)$

(T7) $(12|ABA) \Rightarrow (\text{není pravda, že } 12|BAB)$ (s. 8)

V dalších dvou úlohách mají žáci postupně doplňovat do čísel

$$987654321 * 123456789, \qquad 132132132 * 132132132,$$
$$456456456 * 456456456, \qquad 86422468 * 86422468$$

za hvězdičku číslice tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné 3, 4, 6, 8, 9 a 12. Je jasné, že dělitelnost 8 a 4 doplněná číslice nemůže ovlivnit, protože v žádném z čísel se nenachází v posledním trojčíslí ani dvojčíslí. U čísel 3 a 9 stačí vhodně doplnit tak, aby ciferný součet byl dělitelný 3 nebo 9. U čísel 6 a 12 jde o kombinaci dělitelnosti dvěma čísly, u 6 jde o dělitelnost 2 a 3 (viz tvrzení výše) a u 12 jde o kombinaci dělitelnosti 3 a 4.

Zbývající úlohy se zaměřují na dělitelnost jedenácti. V první máme zvolit číslici B, máme-li zadané číslice A, C z množiny $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ tak, aby číslo ABC bylo dělitelné jedenácti. Řešením je, že číslice B by měla být součtem číslic A, B. Toto řešení vychází z rozvinutého zápisu.

$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C = 100 \cdot A + 10 \cdot (A + C) + C = 110 \cdot A + 11 \cdot C$$

Autoři očekávají, že tomuto zápisu budou u žáků předcházet pokusy s nahrazováním písmen číslicemi, případně úvahy vedoucí na rozklad čísel dělitelných 11 na součet, například $141 = 110 + 33$.

Další úkol je obdobou předcházejícího, jen A, C jsou z množiny $N = \{6; 7; 8; 9\}$. V tomto případě je třeba zohlednit, že jejich součet přesáhne číslo 10 (nejmenší možný součet za daných podmínek je 12). To v tomto případě bude $B = A + C - 11$.

> Máme čtyři číslice A, A, B, B. Z nich náhodně sestavíme čtyřmístné číslo, jaká je pravděpodobnost, že bude dělitelné 11? (s. 8)

Tato úloha je kombinací kombinatorické a aritmetické úlohy. V první fázi musí žáci najít všechna čísla, která lze z daných číslic sestrojit, a potom musejí určit, která z těchto čísel jsou dělitelná jedenácti. Určení dělitelnosti by vzhledem k předchozím příkladům nemělo dělat větší problémy.

V posledních dvou úlohách jde o určení znamének v kritériu dělitelnosti pro trojciferná, čtyřciferná a pěticiferná čísla. Předchozí úlohy by měly žáky nasměrovat k myšlence, že znaménka se musejí střídat a že v zásadě nezáleží, kterým znaménkem začneme. Pravidlo pro pěticiferná čísla by mělo žáky navést k tomu, že alterovaný součet nemusí vycházet vždy ± 11, aby bylo číslo dělitelné jedenácti, ale že tento součet může být i násobkem jedenácti.

3.1.4 *Matematika 6 – Aritmetika*, nakladatelství Fraus

Tato učebnice se věnuje kritériím dělitelnosti 2, 3, 4, 5, 9 a 10. Každému kritériu předchází minimálně jedna motivační úloha, která má žáky dovést k nalezení pravidla, tyto úkoly většinou zahrnují práci se stovkou tabulkou (podobně jako učebnice určené pro Hejného metodu). Žáci vybarvují násobky daného čísla a na základě výsledku se snaží odhalit kritérium dělitelnosti. Po úlohách následuje rámeček „Co jsme objevili?“, ve kterém je vysvětlení hledaného pravidla a jeho zdůvodnění. Samotné znění kritéria dělitelnosti je ve většině případů obsaženo v rámečku označeném „Slovníček“.

Dělitelnost čísly 2, 10 a 5

Dělitelnosti číslem 2 jsou věnovány dvě úlohy, každá z nich zaměřená na jeden aspekt dělitelnosti dvěma. První úloha je zaměřena na páry, respektive, kdy je možné rozdělit osoby v úloze do dvojic (viz obr. 11).

Druhá úloha využívá tabulku pro zkoumání násobků čísla 2 (respektive čísel dělitelných číslem 2).

> Podívejte se znovu na tabulku, kterou jste vybarvovali v předchozí kapitole (v úloze 1.7). Pozorujte násobky čísla 2.

V tabulce v pracovním sešitu vybarvěte jen násobky čísla 2 nebo, jak už víme, čísla dělitelná dvěma.

- Kolik je takových čísel v první řádce od 1 do 10?
- Kolik násobků 2 je od 1 do 100?
- Kolik je v tabulce čísel dělitelných jedničkou? (s. 42)

Obrázek 11: Dělitelnost číslem 2 (Fraus, 6. ročník, s. 42)

Tato úloha je také doplněna obrázkem stovkové tabulky, ve které je vybarven první řádek tak, aby žáci věděli, co je jejich úkolem. Na obr. 12 je zobrazena tabulka po vybarvení všech řádků.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obrázek 12: Tabulka dělitelnost dvěma (tabulka vytvořena podle učebnice Fraus, s. 42)

Z tabulky na obr. 12 je jasně vidět, že dvěma je dělitelná polovina čísel v každém řádku i celé tabulce. Navíc je zřejmé, že daná čísla musí končit číslicí 2, 4, 6, 8 nebo 0.

Úvodní úloha k dělitelnosti deseti je navázaná na peníze, konkrétním úkolem je určit, zda je možné mít určitou částku v desetikorunách. Tím se dělitelnost vhodně propojuje s činností z běžného života, kterou by měla většina žáků 6. ročníku zvládnout.

Další úkoly už jsou opět navázány na tabulku a snaží se žáky dovést k nalezení a aplikaci kritéria dělitelnosti.

V tabulce v pracovním sešitě vybarvěte násobky deseti.

Která jsou to čísla a jak je poznáte?

- Napište nejmenší takový násobek, který již není v tabulce. Kolikátý je od první desítky?
- Napište dvacátý a stodesátý násobek. Jak ho určujete?
- Napište největší čtyřciferné a nejmenší pěticiferné číslo dělitelné 10. (s. 43)

Při zdůvodnění dělitelnosti jsou využity vlastnosti dělitelnosti součtu a součinu v kombinaci s rozvinutým zápisem čísla. Nejprve je zdůrazněno, že každé číslo dělitelné deseti končí na nulu, a jestliže číslo končí číslem 0, nechá se zapsat jako $x \cdot 10$ (např. $70 = 7 \cdot 10, 670 = 67 \cdot 10, \ldots$). Protože číslo 10 je dělitelné deseti, je i celý součin, a díky tomu i zkoumané číslo, dělitelný deseti. Následně je zdůvodněno, proč číslo, které nekončí 0, nemůže být dělitelné deseti. K tomu je využit rozvinutý zápis čísla, na kterém je ukázáno, že kromě členu na místě jednotek jsou všechny členy dělitelné deseti. Není-li tedy poslední číslice 0, celý součet nemůže být dělitelný deseti.

V případě dělitelnosti pěti je v první úloze využita tabulka, přičemž úkolem je vybarvit čísla, která jsou násobkem pěti, a pokusit se odvodit pravidlo. Následuje několik úloh o počtu čísel dělitelných pěti v daném intervalu.

Zdůvodnění dělitelnosti pěti je rozděleno na dva případy; pro čísla, která končí 0, a čísla, která končí 5. Končí-li číslo 0, je dělitelné deseti. Protože 10 je násobek pěti, je jasné, že i každý násobek deseti je i násobek pěti. Je-li na místě jednotek 5, využijeme rozvinutého zápisu. Pokud jsou všechny sčítance dělitelné číslem x, je pak tímto číslem dělitelný i jejich součet. Číslice na pozici desítek nebo vyšších jsou vždy násobky deseti, a pokud je na místě jednotek číslice 5, která je také dělitelná pěti, musí být dělitelné i celé číslo. V učebnici uvedeno na příkladu:

$$735 = 73 \cdot 10 + 5$$

Protože oba sčítance $73 \cdot 10$ i 5 jsou dělitelné pěti, musí být dělitelný pěti rovněž jejich součet 735. (str. 45)

Dělitelnost číslem 4

Prvním úkolem je opět vybarvit násobky čtyř v tabulce. Je zadáno, aby si žáci na fólii udělali obdobnou tabulku pro čísla od 101 do 200 a pro čísla 201 do 300. I v těchto tabulkách mají vybarvit násobky čtyř a následně umístit tabulky přes sebe. To by mělo žáky upozornit na to, že čísla dělitelná čtyřmi jsou ve všech tabulkách na stejných pozicích, bez ohledu na číslici na místě stovek (viz obr. 13, 14 a 15).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obrázek 13: Tabulka 1–100 (tabulka vytvořena podle učebnice Fraus, s. 46)

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Obrázek 14: Tabulka 101–200 (tabulka vytvořena podle učebnice Fraus, s. 46)

201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

Obrázek 15: Tabulka 201–300 (tabulka vytvořena podle učebnice Fraus, s. 46)

Další úloha se snaží žáky navést přes zápis čísla jako součet násobku sta a dvojciferného čísla. Odkazuje na řešení předchozích úloh, která by měla žákům pomoci najít zdůvodnění. V posledním úloze mají žáci rozhodnout o některých vlastnostech čísel dělitelných čtyřmi. Položeny jsou následující otázky:

Je každé sudé číslo dělitelné čtyřmi?
Je některé liché číslo dělitelné čtyřmi?
Je každé číslo, které je dělitelné deseti, dělitelné také čtyřmi?
Je každé číslo, které je dělitelné stem, dělitelné také čtyřmi?
Jak poznáš, že je číslo dělitelné stem?
Existuje číslo, které je dělitelné pěti a současně čtyřmi? (s. 46)

Z tabulky je zřejmé, že na první pohled nejde snadno poznat, zda je číslo dělitelné čtyřmi, ale díky použití fólie je vidět, že se násobky čtyř vždy nacházejí na stejných pozicích. O dělitelnosti čtyř tedy rozhodují jen poslední dvě číslice.

Dělitelnost čísly 3 a 9

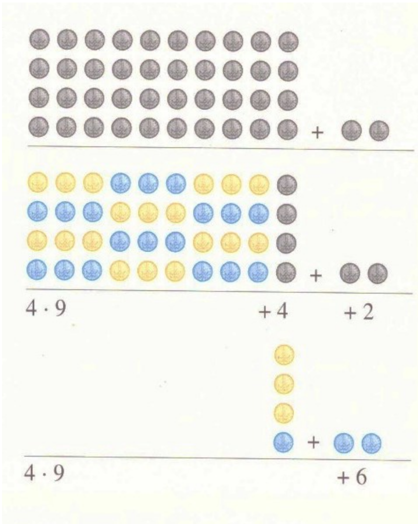
U dělitelnosti číslem 3 se opět začíná řešit pomocí tabulky. Kromě vybarvení násobků čísla 3 je úkolem pokusit se najít společný znak násobků a určení jejich počtu v tabulce od 1 do 100. Další úloha se zaměřuje na čísla 10, 100 a 1000, konkrétně na to, jaký zbytek po dělení třemi dávají.

V další úloze je využita kombinace rozvinutého zápisu a možnosti vyjádření mocnin deseti jako součtu násobku tří a jedné (tedy 9 + 1, 99 + 1, …). Zde konkrétně je to uvedeno na příkladu:

$$102 = (99 + 1) + 2 = 99 + 3$$

Jelikož oba sčítance v uvedeném zápise jsou dělitelné třemi, je i jejich součet, tedy číslo 102, dělitelný třemi.

V poslední části odvození pravidla pro dělitelnost třemi vycházíme z obr. 16, který vyjadřuje, jak je možné určit, zda je číslo 42 dělitelné třemi.



Obrázek 16: Znázornění čísla 42 (Fraus, 6. ročník, s. 47)

Nejprve je číslo 42 vyjádřeno jako součet $42 = 4 \cdot 10 + 2$. V každém z řádků jsou vytvořeny trojice. Na konci každého z řádků potom zůstává jedna mince navíc. Mince rozdělené do trojic je možné odebrat, protože odstraněný počet bude dělitelný třemi. Zbývá tedy tolik mincí, kolik bylo původně řádků, v tomto případě 4, a mince, které byly na místě jednotek, v tomto případě 2. Původní číslo bude dělitelné třemi, pokud ze zbylých mincí půjdou vytvořit trojice. Součet zbývajících mincí odpovídá součtu cifer daného čísla.

Dělitelnost devíti není příliš rozvedena, v odpovídající úloze je žákům zadáno najít pravidlo a doporučeno vyjít ze stejného principu jako u dělitelnosti třemi.

3.1.5 *Matematika – Dělitelnost*, nakladatelství Prometheus, autoři Jiří Herman, Vítězslava Chrápavá, Eva Jančovičová, Jaromír Šimša

Tato učebnice je určena pro žáky víceletých gymnázií. Je psaná odborněji, zdůvodnění kritérií se vždy opírá o rozvinutý zápis čísla.

Dělitelnost čísly 10, 5 a 2

Odvození kritérií dělitelnosti 10, 5 a 2 je provedeno vždy prostřednictvím ověření dělitelnosti u dvou čísel, což nedává žákům téměř žádný prostor pro samostatné objevení zákonitostí.

> Příklad 1. Rozhodněte, zda čísla 2 836 a 2 830 jsou dělitelná deseti.
> Součástí příkladu je i řešení. V jeho první části se autoři opírají o poslední číslici. Následně na základě rozvinutého zápisu zdůvodňují, proč je pro určení dělitelnosti tak důležitá:
>
> $$2\,836 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{6}$$
> $$2\,830 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{0}$$
>
> Vidíme, že v obou rozkladech jsou první tři sčítance dělitelné deseti (protože čísla 1 000, 100, 10 jsou dělitelná deseti), a o tom, zda číslo je, nebo není dělitelné deseti, rozhoduje pouze poslední sčítanec. Ten je však vyjádřen číslicí zapsanou na místě jednotek daného čísla. (str. 24–25)

Obdobně je tomu i u dělitelnosti pěti, úkolem je zdůvodnit dělitelnost pěti u dvou čísel, příklad je opět s řešením.

> Příklad 2. Zdůvodněte, proč číslo 2 836 není dělitelné pěti a číslo 2 835 je dělitelné pěti. (str. 25)

$$2\,836 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{6}$$
$$2\,835 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{5}$$

Zdůvodnění opět vychází z rozvinutého zápisu a z faktu, že čísla 1 000, 100, a 10 jsou dělitelná pěti. Následuje formulace kritéria dělitelnosti pěti.

U dělitelnosti dvěma už řešení úvodní úlohy není, je zde pouze zadání, rozvinutý zápis čísel a samotné kritérium dělitelnosti.

$$2\,836 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{6}$$
$$2\,830 = 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + \boxed{0}$$

Dělitelnost čísly 4 a 8

Stejně jako v předchozích případech vychází odvození pravidla ze dvou číselných příkladů.

$$2\,636 = 2 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6$$
$$2\,630 = 2 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0$$

Protože v těchto rozkladech jsou čtyřmi dělitelné pouze první dva sčítance, je provedeno „zkrácení“ zápisu:

$$2\,636 = 2 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + \boxed{36}$$

$$2\,630 = 2 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + \boxed{30}$$

O tom, zda číslo je, či není dělitelné čtyřmi, rozhoduje proto pouze sčítanec v rámečku, tedy poslední dvojčíslí daného čísla. (s. 28)

Dělitelnost osmi není uvedena příkladem, jako tomu bylo u předchozích případů, ale hledáme mezi čísly 10, 100, 1 000, 10 000, … první násobek osmi.

$$10 = 8 \cdot 1 + 2$$

$$100 = 8 \cdot 12 + 4$$

$$1\,000 = 8 \cdot 125$$

Odtud je zřejmé, že členy na pozici tisíců a vyšší neovlivní, zda bude číslo dělitelné osmi. O tom, zda je číslo dělitelné osmi, tedy rozhoduje poslední trojčíslí. Tento fakt je podpořen příkladem.

$$43\,648 = 43 \cdot 1\,000 + \boxed{648}$$

Z rozkladu čísla 43 648 plyne, že číslo 43 648 dává při dělení osmi stejný zbytek jako číslo 648. (s. 29)

Dělitelnost čísly 9 a 3

I v této části se vychází z ověření dělitelnosti devíti u dvou čísel, toto ověření je provedeno dělením.

$$3\,753 : 9 = 417 \text{ (beze zbytku)}$$

$$25\,781 : 9 = 2\,864 \text{ (zbytek 5)}$$

Při odvození kritéria učebnice vychází z rozvinutého zápisu čísla 3 753.

$$3\,753 = 3 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3$$

Čísla 1 000, 100 a 10 nejsou dělitelná devíti, ale čísla 999, 99 a 9 jsou dělitelná devíti. Díky tomu čísla 1 000, 100 a 10 dávají po dělení devíti zbytek 1. Potom:

- $3 \cdot 1\,000$ dává při dělení zbytek $3 \cdot 1 = 3$
- $7 \cdot 100$ dává při dělení zbytek $7 \cdot 1 = 7$
- $5 \cdot 10$ dává při dělení zbytek $5 \cdot 1 = 5$
- 3 dává při dělení zbytek 3

Součet těchto zbytků je číslo dělitelné devíti ($3 + 7 + 5 + 3 = 18$), proto i číslo 3 753 je dělitelné devíti. Pokud se stejný postup zopakuje pro druhé číslo, dává součet $2 + 5 + 7 + 8 + {}$ $+1 = 23$. Toto číslo není dělitelné devíti, navíc zbytek při dělení devíti je stejný jako při dělení původního čísla. Součet průběžných zbytků odpovídá součtu číslic daného čísla – cifernému součtu.

U dělitelnosti třemi vychází učebnice ze stejného principu. Dané číslo se nejprve rozepíše pomocí rozvinutého zápisu. Čísla 1 000, 100 a 10 dávají stejně jako v předchozím případě po dělení třemi zbytek 1.

$$2\,712 = 2 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2$$

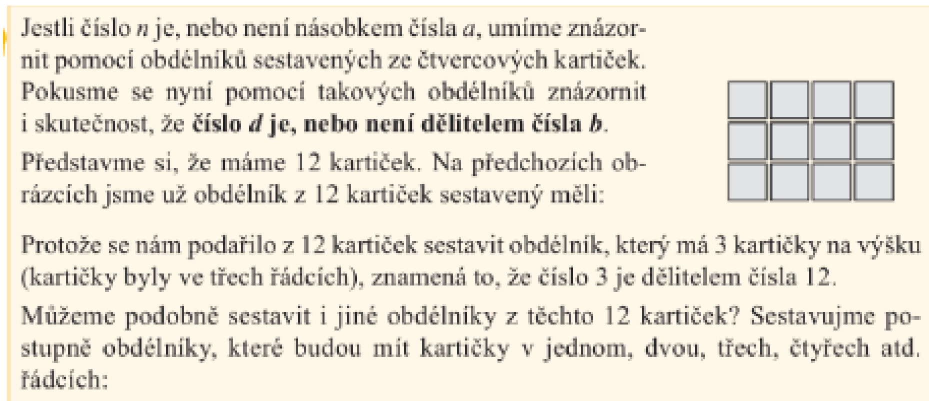
$$1\,000 = 3 \cdot 333 + 1, \qquad 100 = 3 \cdot 33 + 1, \qquad 10 = 3 \cdot 3 + 1$$

Stejně jako u dělitelnosti devíti o tom, zda je číslo dělitelné třemi, rozhoduje ciferný součet. Také platí, že ciferný součet zkoumaného čísla dává po dělení třemi stejný zbytek jako toto číslo.

3.1.6 *Matematika – Dělitelnost*, nakladatelství NOVÁ ŠKOLA

V této učebnici jsou kritéria dělitelnosti rozdělena do dvou tematických celků, první je nazvaný „Co nám prozradí poslední číslice?“ a druhý „Co nám prozradí ciferný součet?“. Je logické, že v první části je zařazena dělitelnost 2, 5, 10, 100, 4 a 8, v druhé je zařazena dělitelnost 3 a 9.

Samotným kritériím předcházejí kapitoly o násobcích a dělitelích, kde je často využíváno znázornění čísel pomocí čtverečků, ze kterých se skládají obdélníky (viz obr. 17). Délky stran těchto obdélníků určují dělitele daného čísla, respektive, kterých čísel je zkoumané číslo násobek. Tato forma zobrazování čísel je hojně využívána i v průběhu obou částí věnovaných kritériím dělitelnosti.



Jestli číslo n je, nebo není násobkem čísla a, umíme znázornit pomocí obdélníků sestavených ze čtvercových kartiček. Pokusme se nyní pomocí takových obdélníků znázornit i skutečnost, že **číslo *d* je, nebo není dělitelem čísla *b*.**

Představme si, že máme 12 kartiček. Na předchozích obrázcích jsme už obdélník z 12 kartiček sestavený měli:

Protože se nám podařilo z 12 kartiček sestavit obdélník, který má 3 kartičky na výšku (kartičky byly ve třech řádcích), znamená to, že číslo 3 je dělitelem čísla 12.

Můžeme podobně sestavit i jiné obdélníky z těchto 12 kartiček? Sestavujme postupně obdélníky, které budou mít kartičky v jednom, dvou, třech, čtyřech atd. řádcích:

Obrázek 17: Dělitel, násobek (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 18)

Co nám prozradí poslední číslice?

Úvodní příklad této části poukazuje na to, že je možné setkat se s dělitelností i v běžném životě. Zde konkrétně na příkladu vaření vajíček – poukazuje na fakt, že pokud máme 93 vajec, není možné, abychom měli jen plné krabičky po deseti kusech, a že tento počet není vyhovující, pokud bychom měli vejce přidělovat po dvou kusech. Další úloha vede žáky k tomu, aby se zamysleli, zda existují i další situace, kdy se nám schopnost poznat násobek čísla na první pohled hodí.

Dělitelnost čísly 10 a 100

Odůvodnění kritéria dělitelnosti deseti je založeno na písemném sčítání – nejprve je ukázáno, že součet libovolného počtu desítek dává číslo končící na nulu, a následně, že tyto součty mohou vyjadřovat násobky čísla deset (viz obr. 18). Z toho vyplývá, že libovolný násobek čísla deset končí na nulu. U dělitelnosti stem jde o analogický postup, pouze místo čísla 10 pracujeme s číslem 100.

Vzpomeňme si na písemné sčítání. Sčítejme pod sebou několikrát číslo 10:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{10} \\ 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ \underline{10} \\ 30 \end{array} \qquad 9\,\text{krát}\left\{\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ \underline{10} \end{array}\right. \atop \quad 90 \qquad n\text{-krát}\left\{\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ \underline{10} \end{array}\right. \atop \quad n0$$

Vidíme, že na posledním místě výsledku bude vždy číslice 0. Je to tak proto, že všechny sčítance, tedy čísla 10, mají na posledním místě právě číslici 0.
Součet několika stejných sčítanců můžeme zapsat jako násobení:

$$10 + 10 = 2 \cdot 10 = 20 \qquad 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\underbrace{10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{9\,\text{krát}} = 9 \cdot 10 = 90 \qquad \underbrace{10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{n\text{-krát}} = n \cdot 10$$

Každý násobek čísla 10 má na posledním místě napsánu číslici 0.

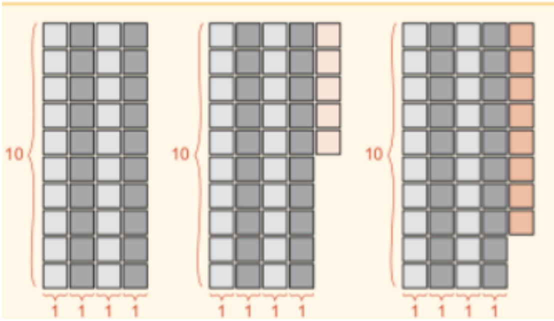
Obrázek 18: Dělitelnost deseti (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 27)

Dělitelnost čísly 2 a 5

Před zavedením dalších kritérií je částečně vysvětlen rozvinutý zápis čísla, zatím je omezen pouze na vyjádření pomocí čísla 10.

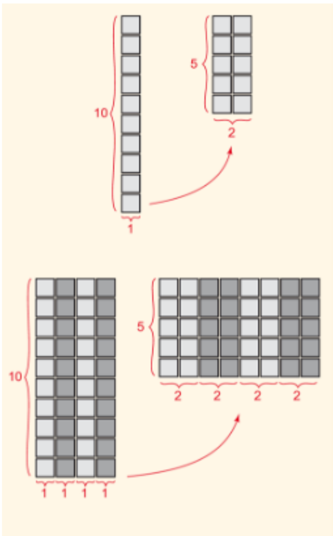
> Každé přirozené číslo *n* můžeme zapsat jakou součet čísla, které je násobkem čísla 10, a čísla, které je zapsáno poslední číslicí čísla *n*. (s. 28)

Toto tvrzení je podloženo grafickým znázorněním. Čísla, která jsou dělitelná deseti, můžeme poskládat ze čtverců do tvaru obdélníka o jedné straně 10 (viz obr. 19). Pokud číslo dělitelné deseti není, několik čtverců „přebývá“. Každé číslo lze tedy vyjádřit jako součet čtverců, které tvoří obdélník o straně 10, a těch, které přebývají.



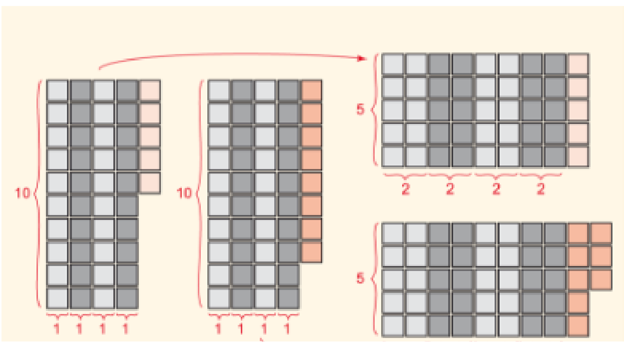
Obrázek 19: Rozvinutý zápis (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 28)

U řady čísel lze vytvořit různé „úplné obdélníky“. U čísla deset jsou dvě možnosti – obdélníky 10×1 a 5×2 (respektive 4 možnosti, pokud bereme i otočené obdélníky 1×10 a 2×5). Možnost vytvoření obdélníku o straně 5 platí pro každý násobek deseti (viz obr. 20). Odtud je zřejmé, že každé číslo, které je násobkem deseti, je zároveň násobkem pěti, tedy každé číslo končící na nulu je dělitelné pěti.



Obrázek 20: Násobky deseti (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 29)

O tom, zda půjde na obdélník o straně 5 přeskládat i číslo, které není násobkem deseti, rozhoduje počet čtverců, které přebývají. Aby šlo požadovaný obdélník sestrojit, musí přebývat právě 5 čtverců (viz obr. 20).



Obrázek 21: Dělitelnost pěti (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 29)

U dělitelnosti dvěma se vychází ze stejného modelu pouze s tím rozdílem, že čísla jsou skládána do obdélníků se dvěma řádky. Opět je evidentní, že čísla, která jsou násobkem deseti, lze takto přeskládat vždy, záleží tedy na tom, zda jde přeskládat i přebývající část. Pro číslice 0, 2, 4, 6 a 8 vznikne obdélník se dvěma řádky, pro číslice 1, 3, 5, 7 a 9 bude vždy jeden čtverec přebývat.

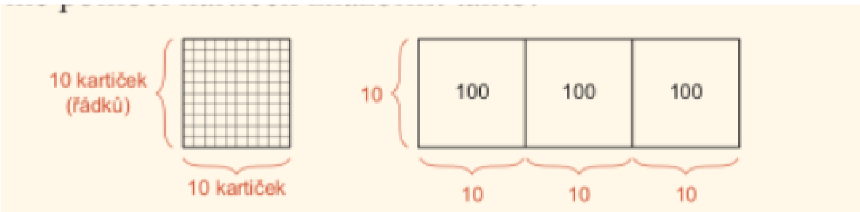
Dělitelnost čísly 4 a 8

O dělitelnosti dalšími čísly není možné rozhodnout podle poslední číslice. To je v učebnici také zdůvodněno:

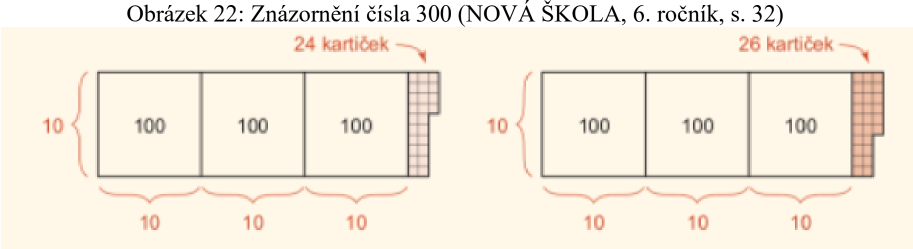
> Protože číslo 10 nemá žádné jiné dělitele než čísla 1, 2, 5, a 10, nemůžeme podle poslední číslice přirozeného čísla rozhodovat o dělitelnosti žádnými jinými čísly než 2, 5 a 10. (s. 31)

Proto se v dalším příkladu vychází z čísla 100 a z faktu, že 100 je dělitelné číslem 4. Díky tomu jsou i všechny násobky čísla sto dělitelné čtyřmi. Každé přirozené číslo, které je alespoň trojciferné, pak jde napsat jakou součet násobku čísla 100 a dvojciferného čísla.

Kritérium dělitelnosti čtyřmi je uvedeno na příkladu dvou čísel 324 a 326. Nejprve je znázorněno číslo 300 (viz obr. 22), následně i čísla 324 a 326 (viz obr. 23).

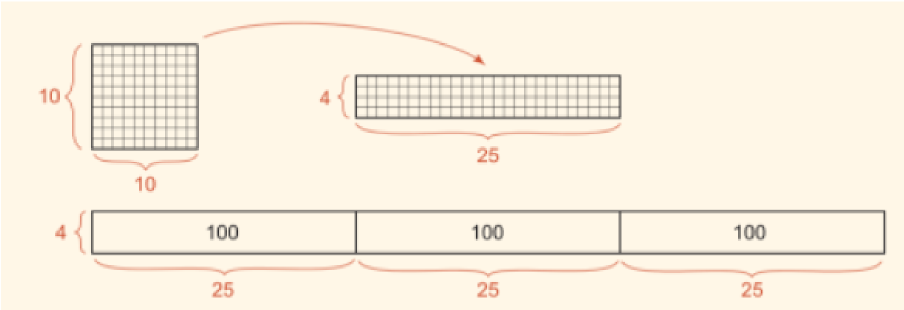


Obrázek 22: Znázornění čísla 300 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 32)

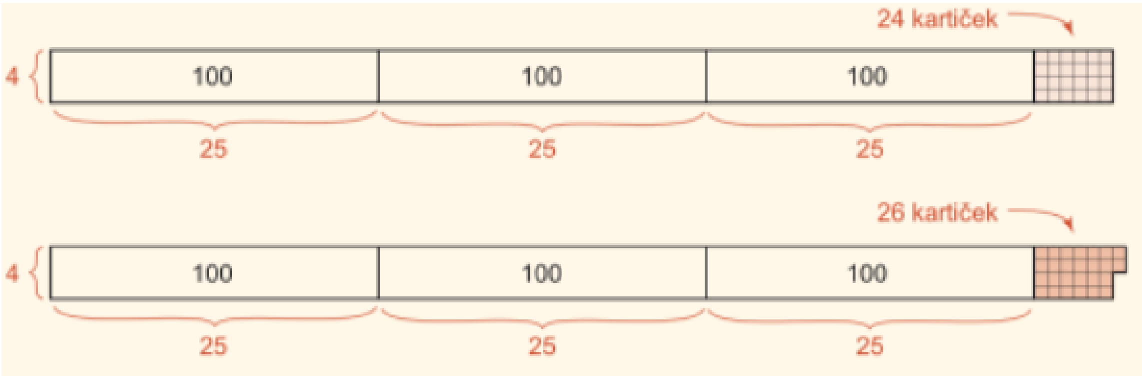


Obrázek 23: Znázornění čísel 324 a 326 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 32)

Z tohoto znázornění však není patrné, zda je dané číslo dělitelné čtyřmi. Jelikož násobky 100 jsou dělitelné čtyřmi, je možné je přeskládat na obdélníky o jedné straně 4 (viz obr. 24). Toho využijeme a obě čísla přeskládáme. Pokud vznikne úplný obdélník s jednou stranou délky 4, pak je zkoumané číslo dělitelné čtyřmi.



Obrázek 24: Znázornění čísla 300 – přeskládání (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 32)



Obrázek 25: Znázornění čísel 324 a 326 – přeskládání (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 32)

Z obrázku 25 je patrné, že číslo 324 je dělitelné čtyřmi, ale číslo 326 nikoliv. Také je zřejmé, že násobky čísla 100 nemohou nikterak ovlivnit, zda bude možné obdélník vytvořit, záleží tedy pouze na posledním dvojčíslí daného čísla.

Dělitelnost osmi je zmíněna pouze okrajově. Jeden z úkolů pro žáky spočívá v tom, že se mají pokusit znázornit pomocí obdélníků, že číslo je dělitelné osmi, pokud je osmi dělitelné jeho poslední trojčíslí. Při tom mají využít informaci, že číslo 1000 je dělitelné osmi. Postup je zřejmou analogií předchozího případu, nicméně zde je bez řešení a chybí i formulace samotného kritéria, to je zmíněno až v přehledu kritérií z celé části „Co nám prozradí poslední číslice?“.

Co nám prozradí ciferný součet?

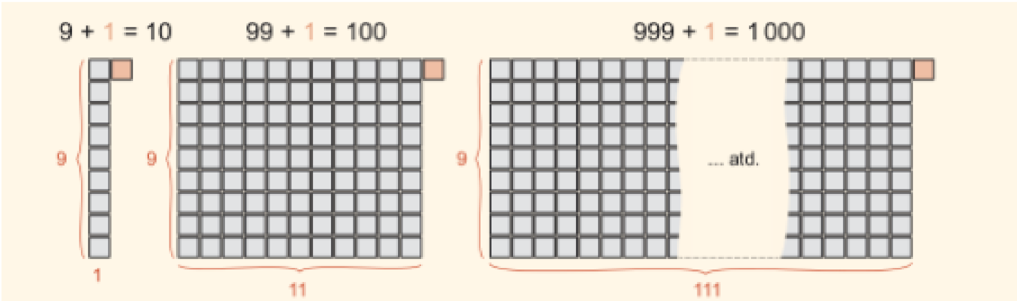
Tato kapitola je uvedena úlohou, která nesouvisí s dělitelností třemi ani devíti, jak by se dalo očekávat. Je zaměřená na dělitelnost jedenácti, konkrétně na její použití při přidělování rodných čísel a na kontrolu správnosti rodného čísla pomocí alterovaného součtu. Tato forma ověření ukazuje, že to, zda je číslo dělitelné, ne vždy závisí na poslední číslici (případně dvojčíslí, trojčíslí), ale na všech číslicích, ze kterých se zkoumané číslo skládá, což platí i v případě dělitelnosti třemi a devíti.

Dělitelnost čísly 9 a 3

Před zavedením samotného kritéria dělitelnosti 9 jsou žáci upozorněni na to, že čísla 10, 100, 1 000, … je možné zapsat jako součet:

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1\,000 = 999 + 1$$
$$\vdots$$

Čísla 9, 99, 999, … jsou vždy dělitelná devíti. Při pokusech složit z čísel 10, 100, 1 000, … obdélník o straně 9 bude vždy přebývat právě jeden čtverec, jak je vidět na obr. 26.

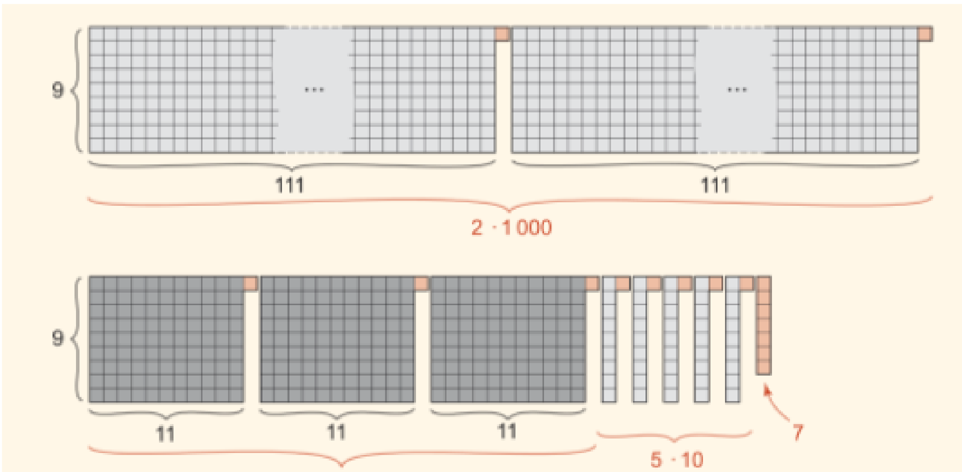


Obrázek 26: Znázornění čísel 10, 100, 1 000 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 34)

Při znázornění konkrétního čísla je podle učebnice třeba vycházet z úplného rozvinutého zápisu.

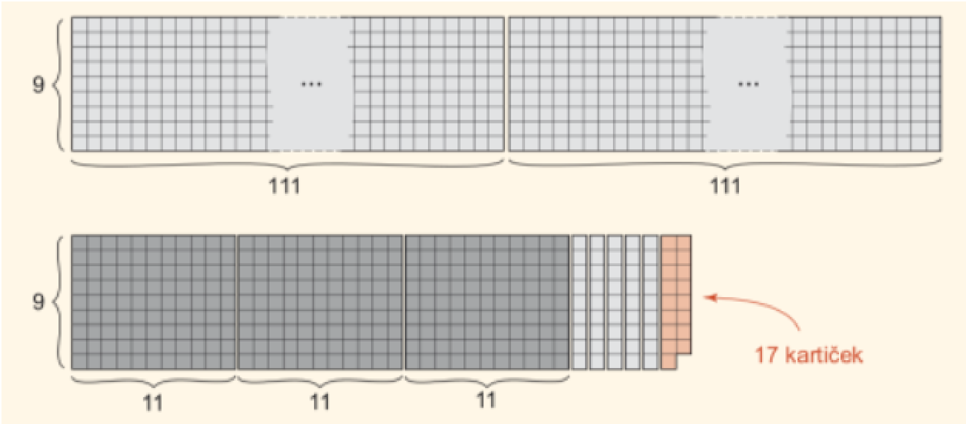
$$2\,357 = 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$$

Po znázornění pomocí obdélníků, dostáváme obr. 27.



Obrázek 27: Znázornění čísla 2 357 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 35)

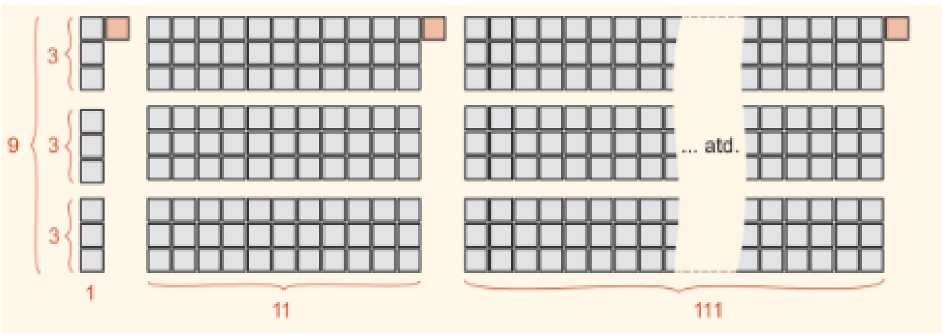
Pro odvození kritéria je třeba provést přeskládání, při kterém jsou přebývající čtverce přesunuty na konec útvaru (viz obr. 28).



Obrázek 28: Znázornění čísla 2 357 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 35)

O tom, zda vznikne úplný obdélník, tedy rozhoduje počet čtverců, které byly přesunuty na konec útvaru. Pokud je možné z přebývajících čtverců sestavit obdélník o straně 9, je dané číslo dělitelné devíti. Učebnice dále upozorňuje, že k určení jejich počtu je třeba si uvědomit, že z každé desítky, stovky, tisíce,… zbývá právě jeden čtverec a navíc ty, které jsou na místě jednotek – počet čtverců tedy odpovídá součtu jednotlivých cifer zkoumaného čísla, a na tomto místě učebnice uvádí pojem ciferný součet.

U dělitelnosti číslem 3 je postup analogický jako u dělitelnosti devíti. Je uvedeno, že dělitelnost třemi je možné ověřit stejně jako dělitelnost devíti, protože čísla 9, 99, 999, … jsou dělitelná jak devíti, tak i třemi.



Obrázek 29: Znázornění čísel 10, 100, 1 000 (NOVÁ ŠKOLA, 6. ročník, s. 36)

Z každé desítky, stovky, tisíce,… zbývá jeden čtverec (viz obr. 29). O tom, zda je číslo dělitelné třemi, tedy opět rozhoduje ciferný součet. Pokud je dělitelný třemi, je i dané číslo dělitelné třemi.

3.1.7 *Matematika pro 6. ročník základní školy*, autoři Odvárko a Kadleček, nakladatelství Prometheus

Učebnice této řady se zaměřuje na kritéria dělitelnosti 10, 5, 2 a 3. Úlohy jsou ve většině případů spojeny s příběhem, ve kterém je dělitelnost propojena se situací z běžného života. Po odvození kritéria většinou následuje několik úloh na procvičení, ty zde ale nebudu dále rozebírat.

Dělitelnost čísly 10 a 5

V úvodní úloze mají žáci za úkol vybrat z řady čísel ta, která jsou dělitelná deseti. Zároveň je žákům doporučeno využít dělení. V druhé úloze učebnice vychází z příběhu.

> Honza a loupežníci. Deset loupežníků se hádá o 1 991 zlaťáků. „Já vás spravedlivě podělím a jako odměnu si vezmu jen to, co už rozdělit nejde," nabídl se Honza. Odpočítal pro sebe 991 zlaťáků a zbytek rozdělil na deset stejných dílů.
>
> a) Kolik zlaťáků dostal každý loupežník?
>
> b) Neošidil loupežníky? Neměl mezi ně rozdělit více zlaťáků?
>
> c) Jaká měla být ta nejmenší Honzova odměna? (s. 54)

V dalším příkladu je odvozeno kritérium dělitelnosti. Nejprve je vypsáno prvních pět násobků deseti a upozorněno na fakt, že všechny končí nulou. Následně jsou žáci dotázáni, zda je pravdivé tvrzení, že každé číslo končící nulou je dělitelné deseti. Příklad je uzavřen rámečkem s formulací kritéria dělitelnosti 10.

Při zavedení kritéria pěti je úvodní úloha obdobná jako u dělitelnosti deseti. Oproti předchozímu případu je navíc zadáno, že zkoumaná čísla jsou dělitelná deseti, úkolem je určit, která z nich jsou dělitelná pěti.

Protože všechna čísla z předchozí úlohy byla dělitelná pěti, je v další úloze navrženo kritérium, že číslo dělitelné pěti musí končit nulou. Úkolem pro žáky je najít čísla, která jsou dělitelná pěti, ale nekončí nulou. Zároveň je položena otázka, kterou číslicí nalezená čísla končí.

V dalším příkladu je odvozeno kritérium dělitelnosti 5 obdobně jako u dělitelnosti 10. Je vypsáno prvních sedm násobků čísla 5. Tyto násobky vždy končí 0 nebo 5, proto číslo dělitelné pěti musí končit jednou z těchto číslic.

Dělitelnost číslem 2

V první úloze je úkolem určit, zda je možné, aby se 27 vojáků seřadilo do dvojstupu tak, aby nikdo nezbyl. V další úloze opět žáci z daných čísel vybírají ta, která jsou dělitelná dvěma, a mají zapsat, kterými číslicemi tato čísla končí.

V poslední úloze jsou pak vypsány násobky čísla 2, žáci mají zkontrolovat, zda jsou vypsány správně. Násobky jsou zde rozděleny do pěti sloupců, přičemž v každém sloupci jsou čísla, která končí stejnou číslicí. Toto znázornění je doplněno závěrem, že všechna čísla končící na 2, 4, 6, 8 a 0 jsou dělitelná dvěma. Pokud číslo končí jinou číslicí, nemůže být dělitelné dvěma.

Dělitelnost číslem 3

Úvodní příklad této části shrnuje dosud objevená kritéria a poukazuje na to, že ve všech byla pro určení dělitelnosti klíčová poslední číslice zkoumaného čísla. Na základě tohoto zjištění jsou žáci navedeni, aby se pokusili najít podobnou vlastnost čísel dělitelných třemi, a je vypsáno několik násobků čísla 3. Tyto násobky ovšem končí na všechny možné číslice, není tedy možné podle poslední číslice poznat, zda je číslo dělitelné třemi.

V následující úloze je žákům navržen pokus – při sečtení číslic v číslech 18, 21, 24 a 27, která jsou násobky čísla 3, je výsledkem číslo dělitelné třemi. Žáci mají ověřit, zda to platí i u dalších násobků čísla 3. Následuje definice ciferného součtu a po ní úloha, která objevené pravidlo ověřuje na číslech 7 134 a 842. Nakonec je formulováno kritérium dělitelnosti třemi.

3.1.8 Realisticky.cz

Na adrese www.realisticky.cz je umístěna on-line učebnice, jejímž autorem je Martin Krynický. Učebnice je rozdělena do jednotek, které jsou dvou typů. První je označen „lekce“ a obsahuje zadání úloh, jejich řešení a pedagogické poznámky autora. Druhý typ je označen „příklady“ a obsahuje pouze zadání úloh.

Učebnice se věnuje kritériím dělitelnosti čísly 10, 5, 2, 4, 3, 9 a 6, zmíněna jsou ale i kritéria dělitelnosti čísly 100 a 8. Následující část je rozdělena do částí odpovídajících jednotlivým lekcím učebnice.

Dělitelnost čísly 10 a 5

V úvodní úloze mají žáci vypsat několik dvojciferných, trojciferných a čtyřciferných čísel, která jsou dělitelná deseti, a najít jejich společný znak. Zdůvodnění je zde provedeno na základě rozvinutého zápisu (násobky 10, 100, 1 000… jsou vždy dělitelné deseti, číslice na místě jednotek musí být 0, aby bylo celé číslo dělitelné deseti) a navíc také pomocí desetinných čísel. Je uvedeno, že při dělení číslem 10 posouváme desetinnou čárku o jedno místo doleva, aby číslo, které tímto postupem získáme, bylo přirozené. Proto musí být na místě jednotek 0. Obdobně je v učebnici zdůvodněno i kritérium dělitelnosti stem.

V další úloze jsou žáci vyzváni, aby našli znak dělitelnosti pěti. Kritérium je zdůvodněno pomocí rozvinutého zápisu.

$$5\,785 = 5 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5$$

Červeně vyznačená čísla jsou vždy dělitelná pěti. Aby byl celý součet dělitelný pěti, musí být na místě jednotek 0 nebo 5. Pokud by na místě jednotek byla jiná číslice, bylo by výsledné číslo součtem části, která je dělitelná pěti, a části, která dělitelná pěti není. Takto vzniklé číslo pak nemůže být dělitelné pěti.

Dělitelnost číslem 2

K lekci zaměřené na dělitelnost dvěma je přidán ciferný součet, ačkoliv s kritériem dělitelnosti dvěma nesouvisí. Jde o záměr autora, ciferný součet je probírán v této lekci, aby si ho žáci rovnou nespojili s dělitelností třemi v odpovídající lekci. Ciferný součet je definován a je ukázáno, že se nemění, pokud dojde k prohození číslic ve zkoumaném čísle.

V další úloze mají žáci najít kritérium dělitelnosti dvěma. Zdůvodnění je opět založeno na rozvinutém zápisu čísla.

$$6\,824 = 6 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4$$

Stejně jako v předchozím případě červeně vyznačená čísla i jejich násobky jsou vždy dělitelné dvěma, opět tedy závisí na poslední číslici. Pokud číslo končí na 2, 4, 6, 8 nebo 0, je dělitelné dvěma, v opačném případě jej lze opět rozložit na součet dvou částí, přičemž jedna je dělitelná dvěma a druhá není dělitelná dvěma.

Dělitelnost číslem 4

V první úloze této lekce mají žáci za úkol vyzkoušet, zda k ověření dělitelnosti 4 stačí, aby poslední číslice zkoumaného čísla byla dělitelná 4. Ověření je provedeno na konkrétním čísle, v tomto případě 114. Poslední číslice tohoto čísla je dělitelná 4, ale celé číslo dělitelné 4 není. Žáci jsou vedeni k tomu, aby se pokusili tento fakt zdůvodnit pomocí rozvinutého zápisu.

$$114 = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4$$

Autor uvádí, že pokud žáci zkusí dělit jednotlivé členy, zjistí, že zbytek po dělení 4 vzniká při dělení členu $1 \cdot 10$. Číslo 10 není dělitelné 4, proto k určení dělitelnosti čtyřmi nestačí zkoumat pouze poslední číslici, ale je nutné se zaměřit na poslední dvojčíslí.

Na konci lekce zaměřené na dělitelnost čtyřmi je zařazena úloha, ve které se žáci mají pokusit o nalezení dalších čísel, u kterých je možné dělitelnost poznat podle posledního dvojčíslí. K této úloze se pak autor vrací na začátku další lekce zaměřené na dělitelnost třemi.

Dělitelnost číslem 3

První úloze této části předchází návrat k úloze z minulé lekce, tedy nalezení čísel, jejichž dělitelnost jde určit z posledního dvojčíslí. Čísla, která splňují tuto podmínku, musí dělit čísla 100, 1 000, 10 000, … Tuto podmínku splňují čísla 4, 20, 25, 50 a 100. Po této úloze následuje shrnutí doposud objevených pravidel. Tato pravidla je možné rozdělit do dvou skupin podle toho, zda o dělitelnosti rozhoduje poslední číslice zkoumaného čísla, nebo poslední dvojčíslí zkoumaného čísla.

V další úloze se mají žáci pokusit navrhnout kritérium dělitelnosti třemi. Autor očekává, že se budou pokoušet napodobovat dříve nalezená kritéria. Smyslem příkladu je podle něj hlavně vyvracení nesprávných hypotéz. Následně jsou žáci navedeni, aby vypsali násobky tří a ověřovali své hypotézy. V souvislosti s vypsanými násobky jsou žáci upozorněni, že není možné najít dvojciferné číslo, které je dělitelné třemi a které by po přehození číslic dělitelné třemi nebylo.

Následují dvě úlohy, ve kterých mají žáci vyzkoušet, zda přemístění cifer v daném trojciferném čísle ovlivní jeho dělitelnost třemi. V první úloze mají žáci vybrat jedno trojciferné číslo, které je dělitelné třemi. Poté mají z číslic vybraného čísla vytvářet nová čísla a ověřit, kolik z nich je dělitelných třemi. Dospějí k závěru, že každé takto získané číslo je dělitelné třemi. V druhé úloze je zadání analogické, jen mají žáci vycházet z trojciferného čísla, které není dělitelné třemi. V tomto případě žádné ze vzniklých čísel nebude dělitelné třemi. Z těchto příkladů vyplývá, že změna pořadí cifer neovlivní dělitelnost třemi.

V další úloze je úkolem vydělit třemi postupně čísla 10, 100, 1 000, 10 000… a následně vyzkoušet, jak se výsledek změní, pokud je 1 nahrazena 2, 3, 4, … V první části je vždy zbytek po dělení třemi roven 1. Při nahrazení číslem 2 je zbytek vždy roven 2 atd. Následují dvě úlohy, kde žáci doplňují do zadaných čísel číslice tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné třemi. Dle autora už zde žáci využívají ciferný součet, ačkoliv si to ve většině případů neuvědomují. Po těchto úlohách následuje formulace kritéria dělitelnosti 3.

Dělitelnost čísly 3 a 9

Před zavedením dělitelnosti devíti je zdůvodněno kritérium dělitelnosti třemi pomocí rozvinutého zápisu.

$$285 = 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot (99 + 1) + 8 \cdot (9 + 1) + 5 =$$
$$= 2 \cdot 99 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 1 + 5 =$$
$$= 2 \cdot 99 + 8 \cdot 9 + 2 + 8 + 5$$

První část čísla (červená) je dělitelná třemi bez ohledu na cifry, ze kterých se číslo skládá. Druhá část, která odpovídá cifernému součtu, dělitelná třemi být nemusí. Pokud třemi dělitelná je, je třemi dělitelné i zkoumané číslo. Následuje několik úloh na procvičení objeveného kritéria.

V následující úloze je úkolem najít a zdůvodnit kritérium dělitelnosti devíti. Zdůvodnění je provedeno analogicky jako u dělitelnosti třemi.

$$585 = 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 = 5 \cdot (99 + 1) + 8 \cdot (9 + 1) + 5 =$$
$$= 5 \cdot 99 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 1 + 5 =$$
$$= 5 \cdot 99 + 8 \cdot 9 + 5 + 8 + 5$$

Opět platí, že první část je vždy dělitelná devíti. Druhá část (ciferný součet) tedy určuje, zda je číslo dělitelné devíti.

Dělitelnost číslem 6

K odvození kritéria dělitelnosti šesti je využita tabulka, která je použita v učebnici z řady Hejného metody pro 5. ročník (viz obr. 9). V této tabulce žáci vyškrtávají tímto způsobem / čísla dělitelná dvěma a tímto způsobem \ čísla dělitelná třemi. Číslo, které je přeškrtnuté oběma čarami, je dělitelné šesti. Z této tabulky pak vychází závěr, že číslo, které je dělitelné šesti, musí být dělitelné dvěma a třemi zároveň.

Posledním kritériem zmíněným v této učebnici je kritérium dělitelnosti osmi. Jeho odvození předchází připomenutí úlohy z předchozích lekcí – nalezení čísel, jejichž dělitelnost je možné poznat podle posledního dvojčíslí. Tento znak lze použít pro čísla, která dělí 100, 1 000, 10 000, … Také je žákům připomenuto, že u dělitelnosti dvěma stačilo zkoumat poslední číslici, protože číslo 2 je dělitelem 10. U čísla 2 tedy stačila poslední číslice, u čísla 4 bylo třeba použít poslední dvojčíslí.

Jelikož číslo 8 nedělí čísla 10 a 100, zkoumat poslední dvojčíslí není pro určení dělitelnosti osmi dostačující. Je uvedeno, že protože číslo 8 dělí 1 000, 10 000, …, je možné při určování dělitelnosti osmi vycházet z posledního trojčíslí zkoumaného čísla.

4 Závěr

V závěru postupně odpovím na otázky položené v části 4.1.

a) Jaká kritéria jsou v učebnici přítomna?

Z hlediska kritérií obsažených v učebnicích jsou mezi nimi značné rozdíly. Ve všech učebnicích z výběru se objevují kritéria dělitelnosti číslem 2, 5, 10 a 3. Ostatní kritéria v některých učebnicích chybí (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Kritéria dělitelnosti ve zkoumaných učebnicích matematiky

Učebnice	Dělitelnost číslem									
	2	5	10	100	3	9	4	8	6	11
Matematika 6 (SPN)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Matematika s Betkou (Scientia)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne
Matematika A–F (H-mat)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne
Matematika 6 (Fraus)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne
Matematika Dělitelnost (Prometheus A)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne
Matematika Dělitelnost (NOVÁ ŠKOLA)	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne
Matematika pro 6. ročník (Prometheus B)	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Realisticky.cz	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne

b) Jsou žáci vedeni k participaci na odvození kritérií dělitelnosti?

Míra zapojení žáků do odvození kritérií se v jednotlivých učebnicích značně liší. V tomto ohledu nejlépe vychází učebnice Hejného metody, které žáky v zásadě pouze navádějí tak, aby kritéria objevili samostatně. Z tohoto důvodu také nejsou kritéria v této řadě učebnic formulována, jejich objevení je úkolem pro žáky. Protipólem této řady by z hlediska participace žáků mohla být učebnice nakladatelství SPN, kde jsou žákům kritéria předložena bez většího předchozího zkoumání. Nicméně ve většině učebnic z výběru je žákům alespoň nějaký prostor pro samostatné zkoumání ponechán.

c) Jak jsou kritéria odůvodněna z matematického hlediska?

Obecné důkazy se v žádné z učebnic neobjevují. Jedinou výjimkou je kritérium dělitelnosti devíti u učebnic Hejného metody. V ostatních případech jsou kritéria dělitelnosti zdůvodňována na základě konkrétních čísel. Většinou je k tomu využit rozvinutý zápis těchto čísel, případně jeho kombinace s grafickým znázorněním. Vzhledem k věku žáků, kdy se s kritérií dělitelnosti setkávají (zpravidla v 6. ročníku), je to pochopitelné. Žáci ještě nedisponují algebraickým aparátem.

d) Jaké modely učebnice využívají?

Ve většině učebnic je při zdůvodňování využit rozvinutý zápis čísel. V tomto ohledu tvoří výjimku učebnice nakladatelství SPN a Prometheus B, ve kterých se rozvinutý zápis nevyskytuje vůbec. Naopak v řadě Prometheus A je téma kritérií dělitelnosti na rozvinutém zápise v podstatě založeno.

Dalším modelem využívaným ve vybraných učebnicích je stovková tabulka, tu využívají učebnice nakladatelství Fraus a H-mat, odtud ji přejímá i *Realisticky.cz*. V učebnicích Hejného metody je stovková tabulka v souvislosti s kritérii dělitelnosti využita jen okrajově, a to u úloh v učebnicích pro 1. stupeň základní školy. Oproti tomu učebnice nakladatelství Fraus využívá stovkovou tabulku – vyznačování násobků v tabulce – před zavedením všech kritérií a pokusech o jejich odvození. V učebnici *Realisticky.cz* je použita pro dělitelnost šesti.

Kromě stovkové tabulky se v učebnicích také poměrně často vyskytují různé druhy grafických znázornění, která vytváří vizuální představu rozvinutého zápisu čísla. Ve vybraných učebnicích se objevilo znázorňování pomocí mincí (Fraus), čtverečků (NOVÁ ŠKOLA) a krychliček (Scientia). Pomocí těchto jednotek se zobrazují zkoumaná čísla a zkoumá se jejich dělitelnost. Každá z těchto forem má své výhody. U mincí jde o propojení matematiky a činnosti, se kterou se žáci setkávají v běžném životě. Metoda zobrazování pomocí čtverců je variabilní, protože je možné je přeskládat do obdélníků s požadovanou délkou strany, která potom odpovídá děliteli zkoumaného čísla. Krychličky a útvary z nich představují propojení mocnin deseti a geometrické představy mocnin (10^1 – délka, 10^2 – obsah, 10^3 – objem).

Dalším způsobem, který ke zdůvodnění kritérií 10 a 100 používá učebnice *Realisticky.cz*, je využití operace dělení desetinných čísel čísly 10 a 100. Přestože ve většině z vybraných učebnic předcházejí desetinná čísla dělitelnosti, v žádné jiné tato souvislost využita není.

e) Uvádí učebnice příklady z reálného života?

Zde jsou výsledky velmi skromné. Ve výběru jsou pouze čtyři řady učebnic, ve kterých se vyskytují úlohy s reálným podkladem, a i tak v některých pouze okrajově. V učebnici nakladatelství Scientia je pouze úvodní úloha založena na reálné situaci. V učebnici nakladatelství NOVÁ ŠKOLA mají reálný základ pouze úvodní motivační úlohy jednotlivých částí zaměřených na dělitelnost. V tomto ohledu nejlépe vycházejí učebnice nakladatelství Fraus a Prometheus B, ve kterých jsou úlohy s reálným kontextem zařazovány v průběhu celé části zaměřené na kritéria dělitelnosti.

Pro přehlednost jsou v tabulce 4 uvedeno porovnání hlavních prvků, které byly v průběhu analýzy učebnic sledovány.

Tabulka 4: Shrnutí analýzy učebnic matematiky

Učebnice (nakladatelství)	Participace žáků na odvození	Využití rozvinutého zápisu	Využití grafického znázornění	Formulace kritérií v učebnici	Důkazy kritérií	Přítomnost úloh z reálného prostředí
Matematika 6 (SPN)	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
Matematika s Betkou (Scientia)	Částečně	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Matematika A–F (H-mat)	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne
Matematika 6 (Fraus)	Ano	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Matematika Dělitelnost (Prometheus A)	Částečně	Ano	Ne	Ano	Ne	Ne
Matematika Dělitelnost (NOVÁ ŠKOLA)	Částečně	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano

Matematika pro 6. ročník základní školy 2 (Prometheus B)	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ano
Realisticky.cz	Ano	Ano	Ne	Ano	Ne	Ne

Díky zpracování této práce jsem objevila řadu nových a zajímavých přístupů k výuce nejen kritérií dělitelnosti, ale i k dělitelnosti obecně. Jako největší přínos v tomto ohledu vidím variabilitu modelů, které mohou pomoci větší názornosti při výkladu této látky a následném zdůvodňování platnosti kritérií. Věřím, že získané informace mi do budoucna pomohou v další pedagogické praxi, a pro žáku budou vítaným zpestřením výuky.

5 Seznam obrázků a tabulek

Seznam obrázků

Seznam tabulek

6 Seznam literatury

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-654-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-658-1.

BLAŽEK, Jaroslav, Emil CALDA, Milan KOMAN a Blanka KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

DLAB, Vlastimil a Jindřich BEČVÁŘ. *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. Praha: vydali V. Dlab a J. Bečvář vlastním nákladem, 2016. ISBN 978-80-260-9838-6.

HARMINC, Matúš. *Elementární teorie čísel*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2015. ISBN 978-80-7290-827-1.

HEJNÝ, Milan a Naďa VONDROVÁ. *Elementární matematika: rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie. 2. vyd.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-014-5.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda A.* Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-0-8.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda B.* Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-1-5.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda AB, příručka učitele.* Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-2-2.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda C.* Praha: H-mat, 2016. ISBN 978-80-905756-3-9

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Daniel VYBÍRAL. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda D.* Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-905756-8-4.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda CD, příručka učitele.* Praha: H-mat, 2017. ISBN 978-80-905756-9-1.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda E.* Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-00-5

HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda F.* Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-06-7.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda EF: příručka učitele.* Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-2-2.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989. ISBN 80-08-00014-7.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA. *Matematika: prima. Dělitelnost.* Praha: Prometheus, 1994. ISBN 80-85849-41-0.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Petr KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: dělitelnost.* Brno: NOVÁ ŠKOLA, 2015. ISBN 978-80-7289-527-4.

KADLEČEK, Jiří a Oldřich ODVÁRKO. *Matematika pro 6. ročník základní školy. 2, Desetinná čísla, dělitelnost. 2. vyd.* Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-143-4.

KRYNICKÝ, Martin. *Realisticky.cz* [online]. 2010 [cit. 2020-04-25]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů. 2. opravené vyd.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-190-7.

POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* Plzeň: Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-327-8.

PŮLPÁN, Zdeněk a Michal ČIHÁK. *Matematika 6: pro základní školy.* Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-364-4.