UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Elementární funkcionální rovnice

Elementary functional equations

Martin Čížek

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Elementární funkcionální rovnice potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 30. dubna 2020

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce, Mgr. Dereku Pilousovi, Ph.D., za cenné rady, důležité připomínky a ochotu, se kterou mě přijal pod své vedení. Dále bych rád poděkoval rodině a slečně Miroslavě Brichtové za podporu při psaní této práce.

ABSTRAKT

Tato práce pojednává o problematice funkcionálních rovnic. Nejprve definujeme základní pojmy k pochopení pojmu funkcionální rovnice. V další kapitole popisujeme dvě základní metody, kterými lze funkcionální rovnice řešit. V hlavní části se zaměříme na elementární funkce a jejich vlastnosti, které tvoří nejdůležitější učivo matematické analýzy na střední škole. Ukážeme možnost propojení elementárních funkcí a funkcionálních rovnic. Nakonec vyřešíme několik konkrétních příkladů pomocí prezentovaných metod a rovnic. Celá práce je doplněna o teoretické definice a dokázané vlastnosti a věty potřebné pro pochopení jednotlivých kroků řešení.

KLÍČOVÁ SLOVA

elementární funkce, funkcionální rovnice

ABSTRACT

This thesis deals with the problematics of functional equations. First of all we define the basic concepts to understand the term of functional equation. The next chapter describes two basic methods by which functional equations can be solved. In the main part we will focus on elementary functions and their properties, which form the most important curriculum of mathematical analysis in high school. We show the possibility of linkage elementary functions and functional equations. Finally, we will solve a few specific examples using the presented methods and equations. The whole work is complemented by theoretical definitions and proven features and theorems necessary for understanding the individual steps of solutions.

KEY WORDS

elementary functions, functional equations

Použité symboly a značení

$\mathbb{N}$	Přirozená čísla
$\mathbb{Z}$	Celá čísla
$\mathbb{Q}$	Racionální čísla
$\mathbb{R}$	Reálná čísla
$\mathbb{R}^+ - \{1\}$	Kladná reálná čísla bez jedné
$x \in \mathbb{R}$	x je reálné číslo
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Funkce z reálných čísel do reálných čísel
$f(0) = 0$	Funkční hodnota v bodě nula se rovná nule
D_f, H_f	Definiční obor funkce f, obor hodnot funkce f
$f^2(x)$	$\iff (f(x))^2 = f(x) \cdot f(x)$
$\exists, \forall$	Existuje, pro každé
$\overset{x \geq 0}{=}$	Úprava je možná za předpokladu, že x je větší než nula
$\overset{(4.4)}{=}$	K úpravě jsme použili rovnost (4.4)

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato práce je koncipována jako učební text především pro studenty bakalářského studia nebo rozšiřujícího matematického semináře na střední škole. Pomoci by ale měla i čtenářům, kteří se jen zajímají o téma funkcionálních rovnic. Práce staví na základech středoškolské matematiky a ukazuje možnosti propojení dvou základních témat, kterými jsou funkce a rovnice.

V první části práce se seznámíme s funkcionálními rovnicemi jako spojením, již zmíněných, dvou témat a ukážeme si, jak příklady s funkcionálními rovnicemi vypadají. V další části ukážeme dvě základní metody, kterými lze funkcionální rovnice řešit. Navazující kapitola je stěžejní teoretickou částí práce. V ní ukážeme funkcionální rovnice, kterými lze zavést takzvané elementární funkce. Nechybí zde teorie (definice, věty a vlastnosti), které při řešení rovnic využíváme. Poslední část pak obsahuje konkrétní příklady a jejich možné řešení.

Na téma funkcionálních rovnic jsem prostudoval více pramenů - knih, příruček a absolventských prací. Velká většina z nich téma popisuje pouze ze strany funkcí. To znamená, že se zabývají převážně složitějšími vlastnostmi funkcí ze zadaných rovnic, případně jejich konkrétním dokazováním. V předkládané práci bych chtěl představit návaznost vysokoškolského tématu na středoškolskou látku. Konkrétně pak to, jak vlastnosti elementárních funkcí, se kterými se v matematice pracuje dnes a denně, lze propojit jiným úhlem pohledu. Některé teoretické části vychází z publikace Funkcionální rovnice od Ljubomira Davidova, jelikož jsou srozumitelné a snadno pochopitelné i pro čtenáře, kteří se doposud s funkcionálními rovnicemi nesetkali.

Kapitola 2

Definice funkcionální rovnice

Práce se zabývá řešením funkcionálních rovnic a je tedy potřeba se na počátku seznámit, případně si připomenout, základní pojmy, které s tímto tématem souvisí. Funkcionální rovnice jsou určitým typem rovnic, ve kterých vystupují funkce, a potřebujeme definovat co je rovnice a funkce.

Definice 1. Rovnice je výroková forma ve tvaru $L(x) = P(x)$. Výraz $L(x)$ se nazývá levá strana rovnice, $P(x)$ se nazývá pravá strana rovnice a x je neznámá. (Polák, 1991)

Definice 2. Reálná funkce[1] (dále jen funkce) je předpis, který každému bodu x dané množiny A přiřazuje reálné číslo y. (Symboly x a y se nazývají proměnné; x je „nezávisle“ proměnná a y je „závisle“ proměnná.) (Gillman, 1980)

Poznámka. Množina A (odkud jsou hodnoty x) se nazývá definiční obor a množina reálných čísel (respektive odkud jsou hodnoty y) obor hodnot.

Spojení předchozích dvou definic dostaneme definici toho, co rozumíme pod funkcionální rovnicí.

Definice 3. Funkcionální rovnice je výroková forma ve tvaru $L(x) = P(x)$, kde výrazy $L(x)$ a $P(x)$ tvoří jedna či více neznámých funkcí. Lze také zapsat jako $L(f) = P(f)$, kde f je funkce a L, P jsou operátory.

Funkcionální rovnice může například vypadat následovně

$$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)).$$

[1] V práci budeme pracovat převážně s reálnými funkcemi

Při řešení příkladů se vždy navíc uvádí definiční obor a obor hodnot funkce (funkcí) vystupujících v rovnici. Někdy může být příklad doplněn ještě o podmínku hodnoty v určitém bodě nebo o vlastnost hledané funkce. Celé zadání úlohy by tedy mohlo vypadat takto: *Nalezněte všechny kladné funkce*[2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, pro které platí* $f(1) = 2$ *a které splňují rovnici*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

Řešení této funkcionální rovnice se nachází v příkladu 11 na str. 37.

[2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, nebo že $f(x) > 0$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$

Kapitola 3

Metody řešení funkcionálních rovnic

Při hledání řešení funkcionálních rovnic se využívá především dvou metod a vlastností hledaných funkcí, které lze těmito metodami zjistit. Dále si vysvětlíme, v čem jednotlivé metody spočívají a teorii doplníme o ukázku, která danou metodu demonstruje v praxi.

3.1 Dosazovací/Substituční metoda

Dosazovací metoda řešení funkcionálních rovnic je jakýmsi heuristickým postupem, kdy se do rovnic dosazují vhodné konkrétní hodnoty, pomocí nichž se zjistí například hodnota funkce v určitém bodě nebo nějaká vlastnost funkce, která se dále využije při jejím hledání. Neexistují stoprocentně univerzální hodnoty, které by byly vhodné (někdy ani možné) dosazovat do každé funkcionální rovnice. Nicméně osobně se mi ověřilo jako vhodné dosazování hodnot $0, 1, x, f(x), -x$.

Příklad 1. *Zkusíme vhodným dosazováním vyřešit funkcionální rovnici pro* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3$$

Řešení. Zkusíme nejprve dosadit za $x, y = 0$ a dostaneme $f(0)+f(0) = f(0)+0\cdot\sqrt[3]{f(0)}+0^3$, tedy $f(0) = 0$. Tím jsme získali konkrétní hodnotu funkce v bodě 0. Dosadíme-li nyní do funkce dvojici $[x, 0]$ dostaneme řešení $f(x) + f(x) = f(x) + 0 \cdot \sqrt[3]{f(0)} + x^3 \Rightarrow f(x) = x^3$.

Správně bychom měli ještě ověřit zkouškou, že řešení skutečně splňuje zadanou rovnici:

$$
\begin{aligned}
L = (x+y)^3 + (x-y)^3 = \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 2x^3 + 6xy^2 = \\
&= x^3 + 6xy\sqrt[3]{y^3} + x^3 = P
\end{aligned}
$$

Lze snadno nahlédnout, že v tomto příkladu by nám stačilo pouze dosazení $[x, 0]$ a dostali bychom rovnou výsledek. Chtěli jsme zde ovšem ukázat, jak dosazovací metoda funguje. Kdybychom například zvolili ve druhém kroku použití opačné dvojice, a to $[0, x]$, získáme rovnost $f(x) + f(-x) = f(0) + 0 \cdot \sqrt[3]{f(x)} + 0^3$, což by nám neodhalilo konkrétní řešení, ale vlastnost $f(-x) = -f(x)$. (viz definice 11 na str. 28)

3.2 Cauchyova metoda

Cauchyova metoda je pojmenována po slavném francouzském matematiku Augustinu Louisi Cauchym. Metoda využívá husté množiny k řešení funkcionálních rovnic, jejichž řešením jsou spojité reálné funkce.

Definice 4. Říkáme, že funkce $f(x)$ je **spojitá v bodě c**, jestliže ke každému kladnému číslu ϵ existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon$$

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je

$$|x - c| < \delta.$$

(Jarník, 1955)

Poznámka. Říkáme, že funkce je **spojitá**, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Definice 5. Funkce f má **v bodě c limitu** L, jestliže pro každé ϵ-okolí bodu L existuje takové δ-okolí bodu x_0, že pro všechna x z okolí bodu x_0, $x \neq x_0$ patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu L. (Definice limit I)

Věta 1. *Funkce f je spojitá v bodě x_0 svého definičního oboru právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Důkaz. Nejprve si zapíšeme obě vlastnosti podle definic. Funkce f je spojitá v bodě x_0 znamená, že

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Funkce f má v bodě x_0 limitu $f(x_0)$ znamená, že

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.2}$$

Věta má tvar ekvivalence a proto ji dokážeme jako dvě implikace. Nejprve se podíváme na spojitost $\Longrightarrow$ limita:
Vidíme, že jediný rozdíl v definicích je ten, že v (3.2) máme požadavek $0 < |x - x_0|$, který nám ovšem u (3.1) nijak nevadí a tím se dá jedna definice převést na druhou.
V druhé implikaci, limita $\Longrightarrow$ spojitost, je opět rozdíl v požadavku $0 < |x - x_0|$. Jediná možnost, kterou u limity vylučujeme, je $x = x_0$. Budeme-li tuto možnost nyní zvažovat, tak potom $f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$ a tedy jistě platí, že $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Máme dokázány obě implikace a věta tedy platí. □

Definice 6. Budiž $A \subset B \subset P; P$ je metrický prostor (P, δ). Potom říkáme, že A **je hustá v** B, jestliže každý bod z B má od A vzdálenost rovnou nule. (Jarník, 1956)

Poznámka. Jelikož se zabýváme převážně reálnými funkcemi a intervaly v reálných číslech, definice nám vlastně říká, že množina A je hustá v B, pokud v každém nedegenerovaném intervalu[1] z B existuje bod z A.

Věta 2. *Množina racionálních čísel je v množině reálných čísel hustá.*

Důkaz. Chceme dokázat, že máme-li libovolný interval (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, tak potom existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

1. Označíme délku intervalu $\epsilon = b - a > 0$. Potom jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, což je totéž jako $\epsilon > \frac{1}{n_0}$.

2. Nechť $b > 0$ *, potom jistě lze najít takové $m_0 \in \mathbb{N}$, že platí $\frac{m_0}{n_0} < b \leq \frac{m_0+1}{n_0}$.

3. Dále nechť $\frac{m_0}{n_0} \leq a \Longleftrightarrow -a \leq -\frac{m_0}{n_0}$.

[1]Neobsahuje pouze jeden bod
*Pro $b \leq 0$ se dokazuje obdobně

Z 2. a 3. kroku předpokládáme, že číslo $\frac{m_0}{n_0}$ je menší než b a zároveň menší nebo rovno než a – tedy, že toto číslo leží mimo interval (a, b). Potom ale

$$\epsilon = b - a \leq \frac{m_0 + 1}{n_0} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{1}{n_0} < \epsilon,$$

díky čemuž docházíme ke sporu $\epsilon < \epsilon$ a číslo $\frac{m_0}{n_0} =: q \in \mathbb{Q}$ musí tedy ležet mezi a, b.

$\square$

Definice 7. Říkáme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je **limitou posloupnosti**$\{a_n\}$ (nebo že $\{a_n\}$ **konverguje** k a), jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq k$ je

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

(Veselý, 1997)

Věta 3. *Nechť množina A je hustá na množině reálných čísel. Potom ke každému číslu $a \in \mathbb{R}$ existuje konvergentní posloupnost $a_1, a_2, \dots \in A$, která má za limitu číslo a.*

Důkaz. Díky větě 2 víme, že ke každému $\epsilon > 0$ existuje a_n takové, že $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Vezmeme-li nyní pouze hodnoty $\epsilon := \frac{1}{n}$ dostaneme

$$a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n},$$

což odpovídá konvergenci posloupnosti a_n k číslu a. $\square$

Věta 4. *Nechť jsou $f : A \to B$ a $g : A \to B$ spojité funkce, které nabývají stejných funkčních hodnot na nějaké husté množině $C \subseteq A$, potom jsou f a g totožné.*

Důkaz. Vezměme $a \in \mathbb{R}$. Díky větě 3 víme, že existuje posloupnost $\{a_n\}$, která má za limitu číslo a. A protože víme, že pro každé $a \in A$ je $f(a) = g(a)$, máme

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a).$$

$\square$

Poznámka. Věty 2, 3, 4 a jejich důkazy jsou převzaty z publikace Funkcionální rovnice od Ljubomira Davidova.

Nyní můžeme popsat, v čem spočívá Cauchyova metoda. Sestává z několika kroků:

1. Nalezne se a dokáže, například dosazovací metodou, řešení funkcionální rovnice nejprve pro všechna přirozená čísla.
2. Ukáže se, že řešení platí pro všechna kladná racionální čísla.
3. Rozšíří se platnost řešení na záporná racionální čísla a nulu.
4. Využije se věty 4 a tím se řešení přenese i na všechna reálná čísla.

Klasické příklady využívající Cauchyovu metodu se nachází v následující kapitole.

Kapitola 4

Funkcionální rovnice vedoucí na elementární funkce

4.1 Elementární funkce

V matematické analýze existuje skupina funkcí, které lze nazývat elementární. Neznamená to nutně, že by se jednalo o funkce jednoduché, nýbrž základní.

Definice 8. Za **elementární funkce** budeme považovat následující funkce – konstatní, identická, exponenciální, logaritmická, sinus, arkussinus, odmocniny. Dále funkce, které z nich vzniknou pomocí operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

Připomeneme si předpisy jednotlivých elementárních funkcí:

1. **Konstatní** $f(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}; D_f = \mathbb{R}$
2. **Identická** $f(x) = x; D_f = \mathbb{R}$
3. **Exponenciální** $f(x) = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\,; D_f = \mathbb{R}$
4. **Logaritmická** $f(x) = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\,; D_f = \mathbb{R}^+$
5. **Sinus** $f(x) = \sin x; D_f = \mathbb{R}$
6. **Arkussinus** $f(x) = \arcsin x; D_f = \langle -1, 1\rangle$
7. **Odmocniny** $f(x) = \sqrt[n]{x}$, kde $n \in \mathbb{N}; D_f = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}^+$

Dále budou v práci zkoumány funkcionální rovnice, jejichž řešením jsou právě elementární funkce. Některé z těchto funkcionálních rovnic budou řešeny Cauchyho metodou (viz str. 12), ostatní vhodným převedením na již vyřešené rovnice.
Při řešení následujících funkcionálních rovnic budeme využívat některé vlastnosti elementárních funkcí a proto si je zde nejprve uvedeme a dokážeme.

Věta 5. *Pro* $\forall x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *platí* $: x = a^{(\log_a x)}$.

Důkaz. Vyjdeme z toho, že logaritmická a exponenciální funkce jsou inverzní:

$$\log_a x = y \tag{4.1}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a^y = x \tag{4.2}$$

Dosazením (4.1) do (4.2) rovnou máme $a^{(\log_a x)} = x$. □

Věta 6. *Pro* $\forall x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, r \in \mathbb{R}$ *platí:* $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.

Důkaz. Označíme $\log_a x = y$ a přepíšeme si rovnost podle definice logaritmu a dále budeme upravovat:

$$a^y = x \ /^r$$
$$a^{yr} = x^r \Longleftrightarrow \log_a x^r = yr \tag{4.3}$$

Nakonec nahradíme-li v (4.3) y z (4.1) dostaneme dokazovanou vlastnost $\log_a x^r = r \log_a x$.

□

Důsledek. Pro $r \in \mathbb{Z}, r$ sudé můžeme pro $x \neq 0$ využívat vlastnost $\log_a x^r = r \cdot \log_a |x|$.

Důkaz. Protože je r sudé, můžeme ho zapsat jako $r = 2k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Potom, využijeme-li předchozí věty, máme

$$\underline{\log_a x^r} = \log_a x^{(2k)} = \log_a \left(x^2\right)^k = k \log_a x^2 = \frac{2k}{2} \log_a x^2 =$$
$$= r \cdot \frac{1}{2} \log_a x^2 = r \log_a \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = r \log_a \sqrt{x^2} = \underline{r \log_a |x|}.$$

□

Věta 7. *Pro* $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *platí:* $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

Důkaz. Označme nejprve $\log_a x = u$ a $\log_a y = v$. Z definice logaritmu víme, že platí $a^u = x$ a $a^v = y$. Potom

$$xy = a^u \cdot a^v$$

$$xy = a^{(u+v)} \quad / \log_a$$

$$\underline{\log_a(xy)} = \log_a a^{(u+v)} = u + v = \underline{\log_a x + \log_a y}$$

$\square$

4.2 Aditivní funkce

Jako první funkcionální rovnici, která vede na nějaké elementární funkce, budeme řešit

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,. \tag{4.4}$$

Rovnici řešíme pro spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (U následujících rovnic, nebude-li jinak, již nebudeme uvádět.)

Nejprve dosadíme do rovnice za $[x, y]$ postupně dvojice $[x, x], [2x, x], \ldots, [(n-1)\,x, x]$ a dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} f(x+x) = f(x) + f(x) &\Longleftrightarrow f(2x) = 2f(x) \\ f(2x+x) = f(2x) + f(x) &\Longleftrightarrow f(3x) = 3f(x) \\ &\vdots \\ f((n-1)\,x + x) = f((n-1)\,x) + f(x) &\Longleftrightarrow f(nx) = nf(x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ze vztahu (4.5) plyne $f(n) = nf(1)$ a označíme-li $f(1) = c \in \mathbb{R}$, vychází nám, že $f(n) = n \cdot c$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. S využitím této rovnosti vezměme nyní m, n libovolná přirozená čísla a dokážeme platnost i pro všechna kladná racionální čísla:

$$\underline{n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right)} \overset{(4.5)}{=} f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) = m \cdot f(1) = \underline{m \cdot c} \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot c$$

Do původní rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dosadíme $[0, 0]$ a vychází $f(0) = f(0) + f(0)$, tedy $f(0) = 0$. To jistě odpovídá (4.5) pro $n = 0$. Nakonec dosadíme dvojici $[x, -x]$:

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x) + f(-x) \\ f(0) &= f(x) + f(-x)\,, \text{ kde } f(0) = 0 \\ 0 &= f(x) + f(-x) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Tím máme dokázáno, že funkce $f(x) = x \cdot c$ pro $\forall x \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{R}$. Z Cauchyovy metody tedy vyplývá, že $f(x) = x \cdot c$ pro všechna reálná čísla x.

Zkouškou lze jednoduše ověřit, že funkce f je opravdu řešením:

$$L = c\,(x+y) = cx + cy = P$$

4.3 Exponenciální funkce

Dále budeme řešit funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)\,, \tag{4.6}$$

a to také Cauchyovou metodou. Postupně dosadíme $[x,x],\ldots,[(n-1)x,x]$:

$$f(x+x) = f(x) \cdot f(x) \Longleftrightarrow f(2x) = (f(x))^2$$

$$\vdots$$

$$f((n-1)x+x) = f((n-1)x) \cdot f(x) \Longleftrightarrow f(nx) = (f(x))^n \tag{4.7}$$

Lze tedy vidět, že $f(n) = (f(1))^n = c^n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále dokážeme platnost pro kladné racionální hodnoty. Pro $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n} \overset{(4.7)}{=} f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) = \underline{(f(1))^m} \overset{\sqrt[n]{}}{\Longrightarrow} f\left(\frac{m}{n}\right) = c^{\frac{m}{n}}$$

Dosadíme dvojici $[0,0]$ do původní rovnice a máme $f(0) = (f(0))^2$, tedy buď $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$. Pokud by se $f(0) = 0$, po dosazení $[x,0]$ dostaneme rovnost $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, kde $f(0) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ pro libovolné x. Tedy funkce f je konstantní nulová funkce, což je jistě řešením funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.
Zabývejme se tedy funkcemi, pro které platí $f(0) = 1$.[1] Už jen zbývá dokázat rovnost $f(x) = c^x$ pro záporné hodnoty pomocí dvojice $[x,-x]$:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) \cdot f(-x) \\ 1 &= f(x) \cdot f(-x) \\ f(-x) &= \frac{1}{f(x)} \\ f(-x) &= (f(x))^{-1} \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že $f(x) = c^x$ je řešením rovnice pro $\forall x \in \mathbb{Q}$. Díky Cauchyově metodě i pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouška:

$$L = c^{(x+y)} = c^x \cdot c^y = P$$

Vidíme, že řešením jsou všechny exponenciální funkce s reálným základem. Pokud bychom chtěli zajistit, aby řešením byla přesně funkce e^x, stačí pouze přidat podmínku, že $f'(0) = 1$.[2]

[1] Jistě splňuje vztah (4.7)

[2] $f'(0)$ je derivace funkce f v bodě 0

4.4 Logaritmické funkce

Nyní se podíváme na opačný případ operací, a to na funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y)\,. \tag{4.8}$$

Tentokrát se pokusíme nejprve dosadit hodnoty $[x, x], [x^2, x], \dots, [x^{(n-1)}, x]$:

$$\begin{aligned} f\left(x^2\right) &= 2f(x) \\ f\left(x^3\right) &= 3f(x) \\ &\vdots \\ f\left(x^n\right) &= nf(x) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ovšem z této vlastnosti nelze nic určit pro $f(n)$. Pokud za x zvolíme 1, dostaneme $f\left(1^n\right) = nf(1)$, neboli $f(1) = nf(1)$.

Tuto rovnici tedy vyřešíme trikovým zavedením $g(x) := f(a^x)$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.[3] Potom

$$\underline{g(x+y)} = f\left(a^{(x+y)}\right) = f\left(a^x \cdot a^y\right) = f\left(a^x\right) + f\left(a^y\right) = \underline{g(x) + g(y)}$$

Řešení funkcionální rovnice pro g známe z kapitoly 4.2 a je jím $g(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$. S využitím tohoto řešení a věty 5 máme

$$\underline{f(x)} \overset{x \geq 0}{=} f\left(a^{(\log_a x)}\right) = g\left(\log_a x\right) = \underline{c \cdot \log_a x}$$

Tím jsme vyřešili rovnici pro $x > 0$.

Pro $x < 0$ stačí abychom x umocnili na libovolné sudé číslo, např. 2, a poté již x^2 kladné bude. Využijeme navíc důsledku za větou 6 na str. 17:

$$\underline{2f(x)} \overset{(4.9)}{=} f\left(x^2\right) = f\left(a^{\left(\log_a x^2\right)}\right) = g\left(\log_a x^2\right) = g\left(2\log_a |x|\right) = \underline{c \cdot 2\log_a |x|}$$

Po vydělení dvěma dostaneme řešení i pro záporné hodnoty x. Zbývá tedy už jen případ, kdy je $x = 0$. Dosazením dvojice $[x, 0]$ do původní rovnice dostaneme $f(0) = f(x) + f(0)$, neboli $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Výsledná funkce f je tedy

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \log_a |x| & \text{pro } x > 0 \lor x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

[3] a je omezeno z důvodu vlastností, které jsou používány dále

Poznámka. Pro $x > 0$ jsme dostali řešení $c \cdot \log_a x$, což je jistě shodné jako $c \cdot \log_a |x|$, proto se mohla řešení pro $x > 0$ a $x < 0$ spojit do jednoho.

Opět jednoduše ověříme, že funkce f je skutečně řešením rovnice:

$$L = c \cdot \log_a |xy| = c\,(\log_a |x| + \log_a |y|) = c \cdot \log_a |x| + c \cdot \log_a |y| = P$$

4.5 Mocninné funkce

Už nám zbývá pouze poslední kombinace sčítání a násobení, tedy funkcionální rovnice

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y). \tag{4.10}$$

Dosazování hodnot pomocných k řešení Cauchyovou metodou by nám zde dalo rovnost $f(x^n) = f^n(x)$, a to by nám v určení toho, čemu se rovná $f(n)$, nepomohlo.
K řešení rovnice použijeme opět vhodné převedení na předchozí, již vyřešenou, rovnici. Nejprve aplikujeme na obě strany rovnice pro $x > 0$ funkci $\log_a x$ a zavedeme novou funkci $g := g(x) = \log_a(f(x))$, kde musí být $f(x) > 0$:

$$\underline{\log_a(f(xy))} = \log_a(f(x) \cdot f(y)) = \underline{\log_a(f(x)) + \log_a(f(y))} \qquad \text{neboli}$$
$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Řešení pro funkci g známe z předchozí rovnice $g(x) = c \cdot \log_a |x|$. Potom funkce f je

$$\underline{f(x)} = a^{\log_a(f(x))} = a^{g(x)} = a^{c \cdot \log_a |x|} = \left(a^{\log_a |x|}\right)^c = \underline{|x|^c}.$$

Pro $x < 0$ opět stačí vycházet z libovolné sudé mocniny x:

$$f\left(x^2\right) = \underline{f^2(x)} = a^{\log_a (f(x))^2} = a^{2\log_a |f(x)|} = \left(a^{\log_a |f(x)|}\right)^2 = \left(a^{g(x)}\right)^2 = \left(a^{c \cdot \log_a |x|}\right)^2 = \underline{(|x|^c)^2}$$

Po odmocnění dvěma máme shodný výsledek jako pro $x > 0$. Poslední možnost, a to $x = 0$, vyřešíme dosazením $[0, 0]$, do původní rovnice. Stejně jako u rovnice (4.6) vychází $f(0) = f^2(0)$, tedy $f(0) = 0 \vee f(0) = 1$.

1. $f(0) = 1$:

   $$[x, 0] \longrightarrow f(0) = f(x) \cdot f(0) \Longrightarrow \underline{f(x) = 1}, \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

   Vidíme, že f je konstatní jednotková funkce a ta jistě řeší zadanou funkcionální rovnici, protože $1 = 1 \cdot 1$.

2. $f(0) = 0$:
   Pro každou funkci $f(x) = |x|^c$, kde $c \neq 0$, platí, že $f(0) = 0$ a tato funkce f je tedy řešením.
   Konstatní řešení z bodu 1. lze chápat jako $|x|^c$, pro $c = 0$.

Obecné řešení lze tedy vyjádřit jako $f(x) = |x|^c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

4.6 Speciální elementární funkce

Podívejme se nyní na dva zajímavé případy nepatrného pozměnění zadání elementárních funkcionálních rovnic.

1.

$$f(x+y) = f(x) + y \tag{4.11}$$

Dosadíme $[0, x]$ a dostáváme rovnost $f(x) = f(0) + x$, kde $f(0) = c \in \mathbb{R}$ a tedy $f(x) = x + c$.
Zkouška:

$$L = x + y + c = x + c + y = P$$

2.

$$f(xy) = f(x) \cdot y \tag{4.12}$$

Rovnici vyřešíme dvěma způsoby.

(a) Dosadíme $[x, \frac{1}{x}]$ (kde $x \neq 0$), potom $f(1) = f(x) \cdot \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x) = x \cdot c$.[4]

(b) Pomocí vhodné substituce a převedení na již vyřešenou rovnici. Použijeme na rovnici pro $x > 0$ funkci $\log_a(x)$ (pro všechny hodnoty a pro které má funkce smysl) a definujeme funkci $g := g(x) = \log_a(f(x))$, potom

$$\log_a(f(xy)) = \log_a(f(x) \cdot y)$$
$$\log_a(f(xy)) = \log_a(f(x)) + \log_a(y)$$
$$g(xy) = g(x) + \log_a(y)$$

Dosadíme $[1, x]$ a označíme $g(1) = b \in \mathbb{R}, a^b = c \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = b + \log_a(x)$$
$$\downarrow$$
$$\underline{f(x)} = a^{\log_a(f(x))} = a^{g(x)} = a^{(\log_a x + b)} = a^{\log_a x} \cdot a^b = \underline{x \cdot c}$$

[4]Pro $x = 0$ je řešení také splněno

Dvakrát jsme při využívání přepisu přes funkci g využili větu 5.

Pro $x < 0$ bychom při využití důsledku za větou 6 ze str. 17 obdobným způsobem dostali výsledek $f^2(x) = x^2 \cdot c^2$, což po odmocnění dvěma dává shodný výsledek jako pro $x > 0$.

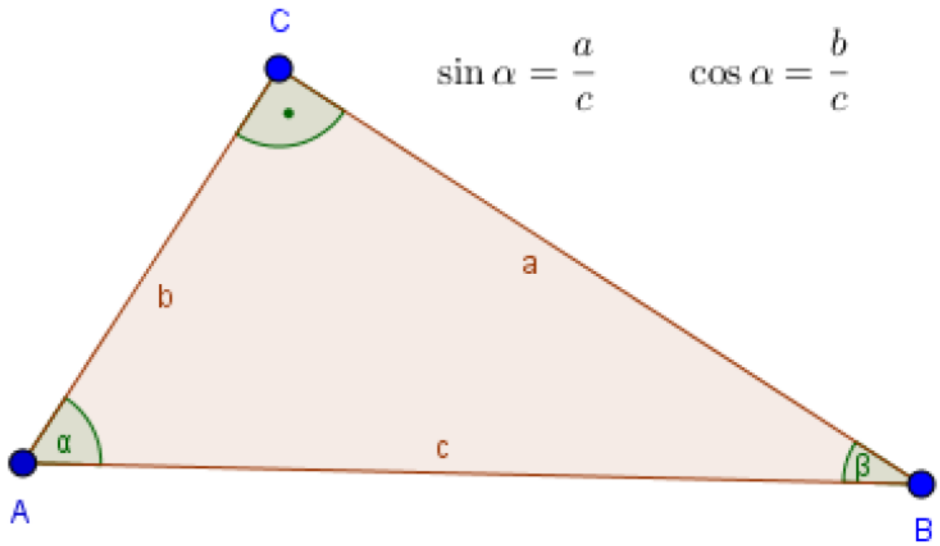
Zkouškou opět můžeme lehce ověřit platnost řešení:

$$L = x \cdot y \cdot c = x \cdot c \cdot y = P$$

4.7 Goniometrické funkce

Z elementárních funkcí, které lze definovat pomocí funkcionálních rovnic, jsme ukázali téměř všechny. V neposlední řadě se podíváme na goniometrické funkce sinus a kosinus.

Definice 9. (Trigonometrická) V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c a odpovídajícími[5] odvěsnami a, b a úhly α, β, γ definujeme funkci **sinus** daného úhlu jako podíl odpovídající (protilehlé) odvěsny a přepony. A funkci **kosinus** jako podíl neodpovídající (přilehlé) odvěsny a přepony.



Obrázek 4.1: Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

(Bartsch, 1965)

Definice 10. (Funkcionální) Funkce $\sin(x), \cos(x)$ mají tyto vlastnosti (vycházející z obloukové definice goniometrických funkcí):

1. Jsou definovány pro všechny x.

2. Pro libovolná x, y je

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y) \tag{4.13}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) \tag{4.14}$$

$$\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$$

[5]Vrcholu A odpovídá vnitřní úhel α a protější strana a atd.

3. Existuje kladné číslo, které označíme znakem π, takové, že funkce $\sin(x)$ je rostoucí v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a že $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; mimo to je $\sin(0) = 0$.
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

(Jarník, 1955)

Pomocí vlastností uvedených v definici 10 lze dokázat další vlastnosti a více či méně známé vzorce pro funkce sinus a kosinus (viz. Jarník V. - Diferenciální počet I, s. 213-216).
V této práci se nicméně omezujeme jen na dokazování elementárních funkcí výlučně pomocí funkcionálních rovnic bez použití dalších pojmů diferenciálního počtu, jako jsou derivace a limita.
Dále tedy vyjdeme z tzv. „součtových vzorců“ pro funkce sinus a kosinus a dokážeme některé vlastnosti funkcí pouze pomocí těchto rovnic.

$$f(x-y) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \tag{4.15}$$

$$g(x-y) = g(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot f(y) \tag{4.16}$$

Poznámka. Na rozdíl od funkcionální definice záměrně vycházíme ze součtových vzorců rozdílu, protože díky tomu můžeme dokázat i některé další vlasnosti z definice 10.

1. $f(0) = 0$; $g(0) = 1$:
   Dosadíme do rovnic $[0, 0]$ a dostaneme $f(0) = f(0) \cdot g(0) - f(0) \cdot g(0)$ a $g(0) = g^2(0) + f^2(0)$. Z první z rovností dostáváme rovnou, že $\underline{f(0) = 0}$ a po dosazení do druhé máme $g(0) = g^2(0)$. Buď se tedy $g(0) = 0 \vee g(0) = 1$:

   (a) $g(0) = 0$:
   Potom ovšem, po dosazení $[x, 0]$ do rovnic (4.15) a (4.16), zjistíme, že $f(x) = 0$ i $g(x) = 0$. To znamená, že funkce f i g jsou konstatní nulové funkce. Taková funkce jistě řeší obě rovnice. My ovšem hledáme netriviální funkce.

   (b) $\underline{g(0) = 1}$

   Dokázali jsme, že při hledání nenulového řešení je $f(0) = 0$ a $g(0) = 1$.

2. $f^2(x) + g^2(x) = 1$:
   Dosadíme dvojici $[x, x]$ do rovnice (4.16) a rovnou dostaneme $g(x-x) = g(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot f(x)$ neboli $\underline{g^2(x) + f^2(x)} = g(x-x) = g(0) = \underline{1}$.

3. Funkce f je lichá; g je sudá:

Definice 11. Řekneme, že funkce f je **lichá**, jestliže pro každé $x, -x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$. (Hájková, 2012)

Definice 12. Řekneme, že funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $x, -x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$. (Hájková, 2012)

Chceme ukázat, že $f(-x) = -f(x)$ a $g(-x) = g(x)$ a proto zkusíme dosadit do (4.15) a (4.16) dvojici $[0, x]$:

$$f(0-x) = f(0)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(0) \Longrightarrow \underline{f(-x)} = \underline{-f(x)} \tag{4.17}$$

$$g(0-x) = g(0)\cdot g(x) + f(0)\cdot f(x) \Longrightarrow \underline{g(-x)} = \underline{g(x)} \tag{4.18}$$

Dokázali jsme, že $f(-x) = -f(x)$ a $g(-x) = g(x)$ a dle definice 11 funkce f je lichá a definice 12 funkce g sudá.

4. f a g jsou periodické:

Mějme nyní kladné reálné α a dokážeme následující ekvivalenci:

$$f(x+2\alpha) = f(x) \wedge g(x+2\alpha) = g(x) \Longleftrightarrow f(\alpha) = 0$$

(a) $f(x+2\alpha) = f(x) \wedge g(x+2\alpha) = g(x) \Longrightarrow f(\alpha) = 0$

Předpokládejme $f(x+2\alpha) = f(x) \wedge g(x+2\alpha) = g(x)$, potom

$$f(2\alpha) = f(2\alpha+0) = f(0) = 0$$
$$f(2\alpha) = f(\alpha-(-\alpha)) = f(\alpha)\cdot g(-\alpha) - f(-\alpha)\cdot g(\alpha) = 2\cdot f(\alpha)\cdot g(\alpha)$$
$$g(2\alpha) = g(2\alpha+0) = g(0) = 1$$
$$g(2\alpha) = g(\alpha-(-\alpha)) = g(\alpha)\cdot g(-\alpha) + f(\alpha)\cdot f(-\alpha) = g^2(\alpha) - f^2(\alpha)$$

Spojíme-li po dvou pravé strany předchozích vztahů, dostaneme rovnosti

$$2\cdot f(\alpha)\cdot g(\alpha) = 0$$
$$g^2(\alpha) - f^2(\alpha) = 1$$

Jediná možnost, pro kterou jsou obě rovnosti splněny, je $f(\alpha) = 0 \wedge |g(\alpha)| = 1$.[6] Zároveň i nyní víme, že $f(2\alpha) = 0$ a $g(2\alpha) = 1$.

[6] Pokud by $g(\alpha) = 0$, potom $-f^2(\alpha) = 1$ nemá řešení

(b) $f(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(x+2\alpha) = f(x) \wedge g(x+2\alpha) = g(x)$

Využijeme toho, že jsme ukázali $|g(\alpha)| = 1 \Longleftrightarrow g^2(\alpha) = 1$

$$\begin{aligned}
\underline{f(x+2\alpha)} &= f(x) \cdot g(-2\alpha) - f(-2\alpha) \cdot g(x) = \\
&= f(x)\left[g(-\alpha) \cdot g(\alpha) + f(-\alpha) \cdot f(\alpha)\right] - \left[f(-\alpha) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(-\alpha)\right] g(x) = \\
&= f(x)\left[g^2(\alpha) - f^2(\alpha)\right] - \left[-f(\alpha) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(\alpha)\right] g(x) = \\
&= f(x)\left[1-0\right] - \left[-0-0\right] g(x) = \underline{f(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{g(x+2\alpha)} &= g(x) \cdot g(-2\alpha) + f(x\alpha) \cdot f(-2\alpha) = \\
&= g(x)\left[g(-\alpha) \cdot g(\alpha) + f(-\alpha) \cdot f(\alpha)\right] + f(x)\left[f(-\alpha) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(-\alpha)\right] = \\
&= g(x)\left[g^2(\alpha) - f^2(\alpha)\right] + f(x)\left[-f(\alpha) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(\alpha)\right] = \\
&= g(x)\left[1-0\right] + f(x)\left[-0-0\right] = \underline{g(x)}
\end{aligned}$$

Dokázali jsme obě implikace a tedy ekvivalence je také dokázána, a tím funkce f, g jsou periodické.

5. f a g jsou omezené:

   Využijeme rovnost z bodu 2.

$$f^2(x) = 1 - g^2(x) \overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow} |f(x)| = \sqrt{1 - g^2(x)}, \text{ kde } 1 - g^2(x) \geq 0$$

   Z podmínky dostáváme, že $|g(x)| \leq 1$, a z toho i $|f(x)| \leq 1$. Funkce f i g mají obor hodnot $= \langle -1, 1\rangle$ a jsou tedy omezené.

Celá kapitola byla pojata odlišným stylem než kapitoly předchozí, kde jsme rovnou ze zadaných rovnic definovali konkrétní elementární funkce. Při pokusu definování funkcí sinus a kosinus pouze ze zadaných rovnic dosazovací nebo Cauchyho metodou (viz kapitola 3 na str. 11) narazíme na problém transcendentnosti funkcí.[7]

Použití zmíněných metod na počáteční součtové vzorce (4.13), (4.14) a pokus o definování goniometrických funkcí se nachází v příloze A (str. 43).

Poznámka. Dokázali jsme vlastnosti, které odpovídají úrovni celé práce. Zájemce o důkaz dalších vlastností lze odkázat na knihu Matematická analýza pro učitele od Jiřího Veselého (MATFYZPRESS, 1997).

[7] Transcendetní funkce je funkce, která nesplňuje žádnou polynomickou rovnici s polynomickými koeficienty. Neboli, že ji nelze vyjádřit konečným součtem polynomických funkcí. (Fučík, Matematika 1)

Odlišný (nicméně trochu náročnější) styl definování funkce sinus pomocí funkcionální rovnice se nachází v článku A Functional Equation Characterising the Sine od R. A. Rosenbauma a S. L. Segala, který je veřejně dostupný na https://www.jstor.org/stable/3612552.

Kapitola 5

Řešení konkrétních příkladů

Zadání a inspiraci k řešení následujících příkladů jsem čerpal z přednášky RNDr. Alice Bílé, Ph.D. v roce 2018 v rámci předmětu Rovnice a nerovnice II na téma funkcionální rovnice. Dále také z bakalářské práce na téma Funkcionální rovnice od Františka Konopeckého, disertační práce na téma Elementární metody řešení funkcionálních rovnic od Petra Šatného a z materiálů na přednášku od Františka Konopeckého na téma Funkcionální rovnice, dostupné z:
https://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalneRovniceFK/FunkcionalneRovniceFK.pdf

Příklad 2. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2.$$

Řešení. Nejprve zvolíme $x, y = 0$ a po dosazení do rovnice máme $f(0) + 2f(0) - 4f(0) + 0f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2$, neboli $-f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Nyní zkusíme dosadit do rovnice dvojici $[x, 0]$:

$$\begin{aligned} f(x) + 2f(x) - 4f(x) + xf(0) &= 0 - x^2 - 0 + 0 \\ -f(x) &= -x^2 \\ f(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Zkouškou ověříme, že funkce $f(x) = x^2$ je skutečně řešením funkcionální rovnice:

$$\begin{aligned} L = (x+y)^2 + 2(x-y)^2 - 4x^2 + xy^2 = \\ = x^2 + 2xy + y^2 + 2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) - 4x^2 + xy^2 = \\ = -x^2 - 2xy + xy^2 + 3y^2 = P \end{aligned}$$

Příklad 3. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$yf(x) + xf(y) = f(x + y).$$

Řešení. Dosadíme opět nejprve $[0, 0]$, z čehož dostaneme $0f(0) + 0f(0) = f(0 + 0) \Rightarrow f(0) = 0$ a po zvolení $x = x \wedge y = 0$ máme $0f(x) + xf(0) = f(x + 0)$, tedy $f(x) = 0$. Funkce splňující zadanou funkcionální rovnici je pouze konstatní nulová funkce.

Poznámka. Tato funkcionální rovnice měla rychlé a poměrně nezajímavé řešení. Podívejme se nyní na řešení podobné rovnice s malou změnou na pravé straně.

Příklad 4. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$yf(x) + xf(y) = f(xy).$$

Řešení. Celou rovnici nejprve vydělíme xy (pro $x, y \neq 0$) $\to \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} = \frac{f(xy)}{xy}$. Definujeme novou funkci $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ a tím dostaneme rovnici

$$g(x) + g(y) = g(xy)$$

Dle (4.8) na str. 21 víme, že řešením této rovnice je $g(x) = c \cdot \log_a |x|$, a tím dostaneme i řešení původní rovnice pro $x \neq 0$: $f(x) = c \cdot x \cdot \log_a |x|$.
Pro $x = 0$ je $g(x) = 0$ a tedy i $f(x) = x \cdot 0 = 0$.

Příklad 5. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$f(x + y) + 2(x - y) = 3f(x) - y.$$

Řešení. Zkusíme opět dosazovat „klasické“ dvojice do rovnice.

1. $[0, 0]$:
   Potom $f(0+0)+2f(0-0) = 3f(0)-0 \Longrightarrow 3f(0) = 3f(0)$. Toto dosazení nám nic nevrátilo a musíme zkusit jiné.

2. $[x, 0]$:
   $f(x + 0) + 2f(x + 0) = 3f(x) - 0$ - vidíme, že to nám opět nepomohlo, protože dostaneme $3f(x) = 3f(x)$.

3. $[0, x]$ a $[0, -x]$:
   Při tomto dosazení vychází $f(x)+2f(-x) = 3f(0)-x$ a $f(-x)+2f(x) = 3f(0)+x$.

Nezískali jsme sice konkrétní řešení, ale při vhodném spojení obou rovnic do jedné již řešení dostaneme:

$$
\begin{aligned}
f(x) + 2f(-x) &= 3f(0) - x \\
2f(x) + f(-x) &= 3f(0) + x \quad \backslash \cdot (-2) \\
&\downarrow + \\
-3f(x) + 0f(-x) &= -3f(0) - 3x \quad \backslash : (-3) \\
f(x) &= f(0) + x
\end{aligned}
$$

Označíme-li $f(0) = c \in \mathbb{R}$ dostaneme všechna řešení rovnice a to $f(x) = x + c$.

Vidíme, že rovnice má shodné řešení jako rovnice (4.11) na str. 24. Přepíšeme-li tedy levou stranu zde podle $f(x+y) = f(x)+y$, dostaneme rovnost $f(x)+y+2(f(x)-y) = 3f(x)-y$, což přesně odpovídá pravé straně zadané rovnice.

Příklad 6. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, které splňují rovnici*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \wedge f(1) = 2.$$

Řešení. Dosadíme do rovnice postupně dvojice $[1,1], [1,2]$:

$$
\begin{aligned}
f(1) = f(1)f(1) - f(2) + 1 &\overset{f(1)=2}{\Longrightarrow} 2 = 2 \cdot 2 - f(2) + 1 \Longrightarrow \underline{f(2)} = 3 \\
f(2) = f(1)f(2) - f(3) + 1 &\Longrightarrow 3 = 2 \cdot 3 - f(3) + 1 \Longrightarrow \underline{f(3)} = 4
\end{aligned}
$$

Dokážeme teorii $f(n) = n + 1$ matematickou indukcí. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{Z}^+$ platí $f(n-1) = n$, potom po dosazení $[1, n-1]$:

$$f(n-1) = f(1)f(n-1) - f(n) + 1 \Longrightarrow \underline{f(n)} = f(1)f(n-1) - f(n-1) + 1 = 2n - n + 1 = \underline{n+1}$$

Dokázali jsme tedy, že pro $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ je řešením rovnice funkce $f(x) = x + 1$.

Zkusme nyní rovnici vyřešit bez podmínky $f(1) = 2$. Budeme tedy řešit pouze funkcionální rovnici $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ pro $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$. Dosazením $[1,1]$ máme rovnost

$$f(1) = f(1)f(1) - f(1+1) + 1 \Longrightarrow f^2(1) - f(1) - f(2) + 1 = 0$$

Podíváme se na kvadratickou rovnici pro neznámou $f(1)$:

$$f(1)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-f(2)+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4f(2) - 3}}{2} \Longrightarrow f(1) = \frac{1 + \sqrt{4f(2) - 3}}{2} = c \in \mathbb{Z}^+$$

Poznámka. Hledáme $f(1) \in \mathbb{Z}^+$ a tedy možnost s „minus" nemá smysl.

Označili jsme $f(1) = c$ a z kvadratické rovnice si vyjádříme, čemu se rovná $f(2)$:

$$\underline{f(2)} = f^2(1) - f(1) + 1 = \underline{c^2 - c + 1}$$

Dosadíme nyní do původní rovnice postupně dvojice $[1,2], [1,3], [1,4], \dots$ a vyjádříme $f(3), f(4), f(5), \dots$

$$\begin{aligned}
f(3) &= f(1)f(2) - f(2) + 1 = c(c^2 - c + 1) - (c^2 - c + 1) + 1 = \\
&= c^3 - c^2 + c - c^2 + c - 1 + 1 = \underline{c^3 - 2c^2 + 2c} \\
f(4) &= (f(1) - 1)\, f(3) + 1 = (c - 1)\left(c^3 - 2c^2 + 2c\right) + 1 = \underline{c^4 - 3c^3 + 4c^2 - 2c + 1} \\
f(5) &= \underline{c^5 - 4c^4 + 7c^3 - 6c^2 + 3c} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Každý další člen lze získat z členu předchozího a dostáváme tím rekurentně zadanou posloupnost $f(n) = (c-1)f(n-1) + 1$, která splňuje zadanou rovnici.

Poznámka. Pokud bychom nyní přidali podmínku, že $f(1) = 2$, tak vidíme, že

$$\begin{aligned}
\underline{f(n)} &= (c-1)f(n-1) + 1 = (f(1) - 1)f(n-1) + 1 = \\
&= f(n-1) + 1 = ((c-1)f(n-2) + 1) + 1 = f(n-2) + 2 = \cdots \\
\cdots &= f(n - (n-1)) + (n-1) = f(1) + n - 1 = 2 + n - 1 = \underline{n+1}
\end{aligned}$$

Příklad 7. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které splňují rovnici*

$$f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}.$$

Řešení. Zkusíme opět dosazovat hodnoty. Protože funkce má být definována pro kladné hodnoty, nemá smysl zkoušet 0 a zkusíme tedy nejprve $x, y = 1$:

$$f(1) = 1 + f(1) - \frac{1}{f(1)} \overset{*f(1)}{\Longrightarrow} f^2(1) = f(1) + f^2(1) - 1$$
$$f(1) = 1$$

Nyní dosadíme $[x, 1]$ a dostaneme $f(x^2) = x + f(1) - \frac{1}{f(1)}$, tedy $f(x^2) = x$. Pokud bychom místo x dosadili $\sqrt{x}$,[1] dostali bychom přesný předpis funkce $f(x) = \sqrt{x}$.

[1]Odmocnina má v tomto případě smysl, protože hledáme funkce na $\mathbb{R}^+$

Příklad 8. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Řešení. Zkusíme opět nejprve dosadit $[1, 1]$:

$$\begin{aligned} f^2(1) - f(1) &= 2 \\ f^2(1) - f(1) - 2 &= 0 \\ (f(1) + 1)\,(f(1) - 2) &= 0 \\ f(1) &= -1 \vee f(1) = 2 \end{aligned}$$

Budeme tedy dále pracovat s dvěma možnostmi. Dosadíme $[x, 1]$ do rovnice a dostaneme $f(x)f(1) - f(x) = x + 1$

1. $f(1) = -1$:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot (-1) - f(x) &= x + 1 \\ -2f(x) &= x + 1 \\ f(x) &= -\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

2. $f(1) = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot (2) - f(x) &= x + 1 \\ f(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Vyšla nám dvě řešení a snadno můžeme zkouškou ověřit, že první z nich rovnici nesplňuje.

$$\begin{aligned} L_1 = \left(-\frac{x+1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{y+1}{2}\right) - \left(-\frac{xy+1}{2}\right) = \frac{(x+1)\,(y+1)}{4} + \frac{xy+1}{2} = \\ = \frac{(x+1)(y+1) + 2(xy+1)}{4} = \frac{xy + x + y + 1 + 2xy + 2}{4} = \\ = \frac{x + y + 3xy + 3}{4} \neq x + y = P_1 \end{aligned}$$

Druhé řešení po dosazení do zkoušky rovnici splňuje:

$$L_2 = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y = P_2$$

Příklad 9. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

Řešení. Zvolíme dosazení dvojice $[x+1, x-1]$:

$$\begin{aligned} f((x+1)+(x-1)) - f((x+1)-(x-1)) &= (x+1)(x-1) \\ f(2x) - f(2) &= x^2 - 1 \\ f(2x) &= x^2 \underbrace{-1 + f(2)}_{c\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $f(2x) = x^2 + c$ a tedy nahradíme-li $x \to \frac{x}{2}$, dostaneme předpis $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + c$. Ověříme řešení zkouškou:

$$\begin{aligned} L = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + c - \left(\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + c\right) = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} = \\ = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{4} = \frac{4xy}{4} = xy = P \end{aligned}$$

Dalším, a možná i vhodnějším, dosazením by byla dvojice $\left[\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right]$. Dostali bychom rovnou $f(x) - f(0) = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}$, neboli $f(x) = \frac{x^2}{4} + \underbrace{f(0)}_{c}$.

Příklad 10. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

Řešení. Dosazovat do tohoto příkladu jednoduché hodnoty, jako jsme to dělali u předchozích příkladů, by nám moc nepomohlo. V rovnici se totiž objevuje funkce f vnořená do další funkce f. Zkusíme nejprve dosadit dvojici $[x, f(x)]$:

$$f(x^2 + f(x)) + \underbrace{f(f(x) - f(x))}_{=f(0)} = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \tag{5.1}$$

Zatím to vypadá, že dosazení nám k řešení rovnice mnoho nepomohlo. Nicméně, dosadíme-li ještě dvojici $[x, -x^2]$, zjistíme, že rovnice po dosazení jsou si podobné.

$$\underbrace{f(x^2 - x^2)}_{=f(0)} + f(f(x) + x^2) = 2f(f(x)) + 2 \cdot (-x^2)^2 \tag{5.2}$$

Odečteme-li nyní rovnici (5.2) od rovnice (5.1), získáváme $0 = 2f^2(x) - 2x^4$, což po převedení a vydělení dvěma dává $f^2(x) = x^4$. Tedy dostáváme dvě řešení:

$$f(x) = x^2 \vee -x^2$$

Zkouškou ověříme obě řešení:

1. $f(x) = x^2$:

$$L = \left(x^2 + y\right)^2 + (x^2 - y)^2 = x^4 + 2x^2y + y^2 + x^4 - 2x^2y + y^2 = \\ = 2x^4 + 2y^2 = 2f(x^2) + 2y^2 = 2f(f(x)) + 2y^2 = P$$

2. $f(x) = -x^2$:

$$L = -\left(x^2 + y\right)^2 - (-x^2 - y)^2 = \\ = -x^4 - 2x^2y - y^2 - x^4 - 2x^2y - y^2 = -2x^4 - 4x^2y - 2y^2 \neq \\ \neq -2x^4 + 2y^2 = 2\left(-\left(-x^2\right)^2\right) + 2y^2 = P$$

Řešením příkladu je tedy pouze funkce $f(x) = x^2$.

Příklad 11. *Nalezněte všechny kladné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $f(1) = 2$ a které splňují rovnici*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)).$$

Řešení. Nejprve dosadíme do rovnice za $x, y = 0$ a zjistíme, že $2f(0) = 4f(0)$, neboli $f(0) = 0$. Nyní vyřešíme samotnou rovnici Cauchyovou metodou. Dosadíme do rovnice tedy postupně dvojice $[x, x], [2x, x], \ldots$:

$$\begin{aligned} f(x + x) + f(x - x) &= 2(f(x) + f(x)) \\ \underline{f(2x)} &= \underline{4f(x)} \qquad (5.3) \\ f(2x + x) + f(2x - x) &= 2(f(2x) + f(x)) \\ f(3x) + f(x) &= 2(4f(x) + f(x)) \\ \underline{f(3x)} &= \underline{9f(x)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Budeme dále dokazovat matematickou indukcí předpoklad, že pro $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí: $f(nx) = n^2 f(x)$. Pro $n = 2$ rovnost jistě platí z (5.3). Předpokládejme, že pro $n-1$ a n platí: $f(nx) = n^2 f(x)$. Dokážeme rovnost i pro $n+1$ dosazením $[nx, x]$:

$$
\begin{aligned}
f(nx + x) + f(nx - x) &= 2(f(nx) + f(x)) \\
f((n+1)x) + f((n-1)x) &= 2f(nx) + 2f(x) \\
f((n+1)x) &= 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n-1)^2 f(x) \\
f((n+1)x) &= \left(2n^2 + 2 - \left(n^2 - 2n + 1\right)\right) f(x) \\
f((n+1)x) &= (n+1)^2 f(x)
\end{aligned}
$$

Označíme $f(1) = c \in \mathbb{R}$, a tím máme, že $f(n) = cn^2$.

Vezmeme $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) = m^2 \cdot f(1) \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot f(1)$$

Máme tím dokázáno, že $f(x) = cx^2$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}^+$. Dosazením $[0, x]$ zjistíme, že $f(-x) = f(x)$. Spolu s tím, že $f(0) = 0$ máme dokázánou platnost řešení $f(x) = cx^2$ pro všechna racionální čísla. Z Cauchyovy metody vyplývá, že funkce $f(x) = cx^2$, kde $c \in \mathbb{R}$ je platná pro všechna reálná x.

Zkouška:

$$
\begin{aligned}
L = c(x+y)^2 + c(x-y)^2 = c\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + c\left(x^2 - 2xy + y^2\right) = \\
= 2cx^2 + 2cy^2 = 2\left(cx^2 + cy^2\right) = P
\end{aligned}
$$

Příklad 12. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnici*

$$(f(x) + f(y))\,(f(u) + f(v)) = f\,(xu - yv) + f\,(xv + yu)\,.$$

Řešení. Nejprve do rovnice zkusíme dosadit $x, y, u, v = 0$:

$$
\begin{aligned}
(f(0) + f(0))\,(f(0) + f(0)) &= f(0) + f(0) \\
4f^2(0) &= 2f(0) \\
f(0)\,[2f(0) - 1] &= 0 \\
f(0) = 0 \vee f(0) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

1. $f(0) = \frac{1}{2}$:

   Po dosazení $[x, 0, 0, 0]$ dostaneme rovnost

   $$\left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \text{ neboli } f(x) = \frac{1}{2} \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. $f(0) = 0$:

   Dalším vhodným dosazením, tentokrát $[1, 0, 1, 0]$, zjistíme další hodnotu funkce f:

$$(f(1) + f(0))\,(f(1) + f(0)) = f(1) + f(0)$$
$$(f(1) + 0)\,(f(1) + 0) = f(1) + 0$$
$$f^2(1) = f(1)$$
$$f(1) = 0 \lor f(1) = 1$$

   (a) $f(1) = 0$:

      Po dosazení $[x, 0, 1, 1]$ máme $(f(x) + 0)\,(0 + 0) = f(x) + f(x)$, tedy $f(x) = 0$.

   (b) $f(1) = 1$:

      Zjistíme dalším dosazováním vlastnosti funkce f, které využijeme při hledání nekonstatního řešení rovnice.

      $[0, x, 1, 1]$: $(f(0) + f(x))\,(f(1) + f(1)) = f(0 - x) + f(0 + x) \longrightarrow f(x) \cdot 2 = f(-x) + f(x)$, z toho vidíme $f(x) = f(-x)$ tedy, že funkce f je sudá.

      $[x, 0, y, 0]$: $(f(x) + f(0))\,(f(y) + f(0)) = f(xy) + f(0) \longrightarrow \underline{f(x)f(y) = f(xy)}$

      Řešenou rovnici ze zadaného příkladu jsme převedli na elementární funkcionální rovnici (4.10) na str. 23 a víme, že jejím řešením je funkce $|x|^c$.[2]

      $[1, 1, 1, 1]$: $(f(1) + f(1))^2 = f(0) + f(2) \longrightarrow \underline{f(2) = 4}$

      Víme-li nyní, že řešením bude funkce ve tvaru $|x|^c$ a že $f(2) = 4$, připadá v úvahu jediná funkce a to x^2.

Že je funkce skutečně řešením můžeme ověřit Cauchyovou metodou popsanou na str. 12. Dokážeme nejdříve matematickou indukcí pro všechna přirozená n, že $f(n) = n^2$. Pro $n = 1$ jistě platí. Předpokládejme platnost pro libovolné $n - 1$ a n a dokážeme platnost

[2] Řešením rovnice (4.10) je i funkce $f(x) = 1$, která ovšem náš příklad zde neřeší.

pro $n+1$:

$$\begin{aligned}
[n,1,1,1] \longrightarrow \quad (f(n)+f(1))\,(f(1)+f(1)) &= f(n-1)+f(n+1) \\
(f(n)+1)\cdot 2 &= f(n-1)+f(n+1) \\
f(n+1) &= 2f(n)+2-f(n-1) \\
f(n+1) &= 2n^2+2-(n-1)^2 \\
f(n+1) &= 2n^2+2-n^2+2n-1 \\
f(n+1) &= n^2+2n+1 = \underline{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Vezměme nyní $m,n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right) = f(m) = m^2 \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Máme tedy dokázáno, že $f(x)=x^2$ pro $\forall x \in \mathbb{Q}^+$. Víme navíc, že funkce f je sudá (tedy $f(-x)=f(x)$) a že $f(0)=0=0^2$. Spojením těchto vlastností dostáváme předpoklad ke Cauchyově metodě, a proto $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)=x^2$ je řešením rovnice.

Na závěr opět ověříme zkouškou:

$$\begin{aligned}
L = (f(x)+f(y))\,(f(u)+f(v)) = \left(x^2+y^2\right)\left(u^2+v^2\right) = (xu)^2+(xv)^2+(yu)^2+(yv)^2 = \\
= (xu)^2-2xuyv+(yv)^2+(xv)^2+2xvyu+(yu)^2 = (xu-yv)^2+(xv+yu)^2 = P
\end{aligned}$$

Kapitola 6

Závěr

Cílem práce bylo propojit vlastnosti elementárních funkcí do tématu funkcionálních rovnic. Zprvu jsme definovali základní pojmy, kterými byly funkce a rovnice, z toho jsme spojením ukázali, co jsou a čím se zabývají funkcionální rovnice.

Teoreticky a prakticky jsme předvedli dvě základní metody řešení funkcionálních rovnic. Cauchyovu metodu jsme nejprve uvedli několika definicemi a větami, aby čtenáři bylo zcela jasné, s čím metoda pracuje.

V následující kapitole jsme se nejprve seznámili s pojmem „elementární funkce“ a poté, za pomoci předchozích metod nebo vhodných převedení, jsme vyřešili rovnice, jejichž řešením byla právě elementární funkce. U funkcí sinus a kosinus jsme dokázali několik jejich vlastností pomocí funkcionálních rovnic a názorně tak předvedli, že ne vždy je možné příklady jednoznačně vyřešit za pomocí známých metod.

Závěrem bylo představeno několik gradovaných příkladů využívající různé metody řešení a jejich kombinace. Od dosazování, přes soustavy rovnic až po rovnice využívající Cauchyovu metodu. Všechny příklady jsme řešili srozumitelnými, jednoduchými a logickými způsoby. V některých případech jsme ukázali více možností způsobů řešení a tím rozdíl v jejich náročnosti.

Věřím, že práce splnila vytyčené cíle a propojila rovnice a elementární funkce takovým způsobem, který bude pochopitelný pro kohokoli, kdo se ponoří do zkoumání funkcionálních rovnic.

Seznam použitých zdrojů

[1] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce.* Přel. V. Malý. 2. doplněné vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. ISBN 04-003-65.

[2] DAVIDOV, Ljubomir. *Funkcionální rovnice: pro účastníky matematické olmpiády* [online]. Praha: Mladá fronta, 1984 [cit. 2019-07-03]. Škola mladých matematiků. Dostupné z: https://dml.cz/data/handle/10338.dmlcz/404099/monography.pdf

[3] *Definice limit I* [online]. [cit. 2019-07-03]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01 Matematika SŠ/10 Diferenciální a integrální počet/01 Spojitost, limita/08 Definice limit I.pdf

[4] Fučík, Radek. *Matematika 1* [online].[cit. 2020-03-22]. Dostupné z: https://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/wiki/index.php/Hlavní_strana

[5] GILLMAN, Leonard a Robert H. MCDOWELL. *Matematická analýza.* Přel. J. Adámek. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980. ISBN 04-009-80.

[6] HÁJKOVÁ, Vladimíra a kol. *Matematika.* 2. upravené vydání. Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2012. ISBN 978-80-7378-193-7.

[7] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1955.

[8] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II.* Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[9] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 8. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-719-6267-8.

[10] ŠVARC, Rado. *Dolní celá a zlomková část čísla* [online]. [cit. 2019-07-03]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/CelaCastRS/CelaCastRS.pdf

[11] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele.* Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 1997. ISBN 80-858-6323-5.

Příloha A

Funkcionální rovnice na sinus/kosinus řešená Cauchyovou metodou

Pokus o vyřešení funkcionální rovnice vedoucí na goniometrické funkce pomocí Cauchyovy metody. Mějme soustavu dvou funkcionálních rovnic

$$f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$$
$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot f(y)$$

a pokusíme se najít funkce f, g, které tyto rovnice splňují pomocí metod popsaných v kapitole 3 na str. 11.

Dosadíme postupně do obou rovnic dvojice $[x, x], [2x, x], \ldots, [nx, x]$:

$$\begin{array}{l|l}
f(x+x) = f(x)g(x) + f(x)g(x) & g(x+x) = g(x)g(x) - f(x)f(x) \\
\underline{f(2x) = 2f(x)g(x)} & \underline{g(2x) = g^2(x) - f^2(x)} \\
f(3x) = f(2x)g(x) + f(x)g(2x) & g(3x) = g(2x)g(x) - f(2x)f(x) \\
f(3x) = 2f(x)g(x)g(x) + f(x)\left[g^2(x) - f^2(x)\right] & g(3x) = \left[g^2(x) - f^2(x)\right]g(x) - 2f(x)g(x)f(x) \\
f(3x) = 2f(x)g^2(x) + f(x)g^2(x) - f^3(x) & g(3x) = g^3(x) - f^2(x)g(x) - 2f^2(x)g(x) \\
\underline{f(3x) = 3f(x)g^2(x) - f^3(x)} & \underline{g(3x) = g^3(x) - 3f^2(x)g(x)}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
f(4x) = f(3x)g(x) + f(x)g(3x) & g(4x) = g(3x)g(x) - f(3x)f(x) \\
f(4x) = \left[3f(x)g^2(x) - f^3(x)\right]g(x) + & g(4x) = \left[g^3(x) - 3f^2(x)g(x)\right]g(x) - \\
\qquad + f(x)\left[g^3(x) - 3f^2(x)g(x)\right] & \qquad - \left[3f(x)g^2(x) - f^3(x)\right]f(x) \\
f(4x) = 3f(x)g^3(x) - f^3(x)g(x) + & g(4x) = g^4(x) - 3f^2(x)g^2(x) - \\
\qquad + f(x)g^3(x) - 3f^3(x)g(x) & \qquad -3f^2(x)g^2(x) + f^4(x) \\
\underline{f(4x) = 4f(x)g^3(x) - 4f^3(x)g(x)} & \underline{g(4x) = g^4(x) - 6f^2(x)g^2(x) + f^4(x)} \\
\quad \vdots & \quad \vdots
\end{array}
$$

$$
f(nx) = \binom{n}{1} f(x) \cdot (g(x))^{(n-1)} - \binom{n}{3} f^3(x) \cdot (g(x))^{(n-3)} + \binom{n}{5} f^5(x) \cdot (g(x))^{(n-5)} - \cdots
$$
$$
\cdots \pm \binom{n}{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (f(x))^{\left(2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right)} \cdot (g(x))^{\left(n - 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right)}
$$

$$
g(nx) = \binom{n}{0} f^0(x) \cdot (g(x))^{(n)} - \binom{n}{2} f^2(x) \cdot (g(x))^{(n-2)} + \binom{n}{4} f^4(x) \cdot (g(x))^{(n-4)} - \cdots
$$
$$
\cdots \pm \binom{n}{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (f(x))^{\left(2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)} \cdot (g(x))^{\left(n - 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)}
$$

Definice 13. Jako funkci $\lfloor x \rfloor$ definujeme (zjevně jednoznačně dané) celé číslo, pro které platí $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Toto číslo pak nazýváme **dolní celou částí** x. (Švarc)

$$
f(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (f(x))^{(2k+1)} \cdot (g(x))^{(n-2k-1)} \tag{A.1}
$$
$$
g(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (f(x))^{(2k)} \cdot (g(x))^{(n-2k)} \tag{A.2}
$$

V této fázi řešení Cauchyho metodou jsme volili $x = 1$, abychom zjistili, co platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Po dosazení do předchozích vzorců dostaneme:

$$
f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (f(1))^{(2k+1)} \cdot (g(1))^{(n-2k-1)}
$$
$$
g(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (f(1))^{(2k)} \cdot (g(1))^{(n-2k)}
$$

Jelikož neznáme hodnotu funkcí $f(1)$ ani $g(1)$, nepomůžeme si dosazením blíže ke goniometrickým funkcím.
Můžeme si ovšem všimnout jisté podobnosti vzorců s Maclaurinovou řadou pro funkce sinus a kosinus. Pro úplnost zde uvedeme její definici a použití na obě goniometrické funkce.

Definice 14. (Maclaurinova řada) Funkce $f(x)$ a její derivace musí být jednoznačné, konečné a spojité v intervalu mezi 0 a x (počítajíc v to i nulu). Potom platí

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_n.$$

$$\text{Zbytek } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}, \text{ pro } 0 < \epsilon < 1 \text{ (Lagrangeův tvar zbytku).} \tag{A.3}$$

(Bartsch, 1965)

Poznámka. Uvažme Maclaurinovu řadu jdoucí do nekonečna. Potom Lagrangeův tvar zbytku (A.3) vychází jako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\epsilon x)}{(n+1)!}x^{(n+1)} = 0^*$$

Pro funkce $\sin(x), \cos(x)$ tedy platí:

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}(x) + \frac{-\sin(0)}{2!}(x)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}(x)^3 + \cdots$$
$$\sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x) + \frac{0}{2!}(x)^2 + \frac{-1}{3!}(x)^3 + \cdots$$
$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{-\sin(0)}{1!}(x) + \frac{-\cos(0)}{2!}(x)^2 + \frac{\sin(0)}{3!}(x)^3 + \cdots$$
$$\cos(x) = 1 + \frac{0}{1!}(x) + \frac{-1}{2!}(x)^2 + \frac{0}{3!}(x)^3 + \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{(2k)}}{(2k)!}$$

Ve vzorcích (A.1) a (A.2) jsme se dostali k vyjádření násobků hodnot funkcí přes součty kombinací obou funkcí, kdežto v Maclaurinových řadách jsou nekonečné řady mocninných

*faktoriál je dominantní vůči mocninné funkci a tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$

funkcí. Přestože mají obě vyjádření na první pohled podobný tvar, nelze bez využití jiných funkcí nebo vlastností je na sebe vzájemně převést. Nelze tedy jen ze součtových vzorců (4.13) a (4.14) pomocí dosazovací a Cauchyho metody dostat tvar, který by odpovídal definicím goniometrických funkcí sinus a kosinus.