Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Kukhtenko

Číslo π v netradičních úlohach

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělání

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 4. 5. 2020

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za všestrannou pomoc, množství cenných a inspirativních rad, doporučení, připomínek a zároveň za velkou trpělivost v průběhu tvorby mé bakalářské práce. Ráda bych poděkovala také své rodině a všem přátelům, kteří mě při vytváření této práce podpořili, a bez jejichž pomoci by nebylo možné práci dokončit.

Abstrakt:

Tato práce se zabývá použitím čísla π v netradičních úlohách různého typu. Práce je rozdělena do sedmi kapitol. První kapitola je věnována historii odvozování čísla π od starověku do dnešní doby. Druhá kapitola se zabývá geometrickým významem čísla π, a to v planimetrii a stereometrii. V dalších kapitolách jsou uvedené zajímavé úlohy jak v různých oblastech matematiky, tak i v jiných vědách. Pro lepší znázornění jsou některé příklady doplněné ilustračními obrázky, které jsou vytvořeny pomocí programu Geogebra. Cílem práce je rozšířit představení o použití čísla π v matematických úlohách.

Klíčová slova:

Číslo π, Ludolfovo číslo, netradiční úlohy, matematická konstanta

Abstract:

This bachelor thesis obtains the usage of the number π in non-traditional methods of different types. This work is divided into seven chapters. The first chapter is dedicated to the history of deriving the number π from antiquity to the present day. The second chapter looks into the geometric meaning of the number π, in planimetry and stereometry. In the following chapter, various tasks are presented both in different fields of mathematics and in other sciences. For better representation, some examples are completed with illustration, which are created using the program Geogebra. The aim of this work is to extend the presentation of the use of the number π in mathematical problems.

Keywords:

The number π, Ludolph's number, non-standard problems, mathematical constant

Obsah

Úvod **2**

1 Historie čísla π. Odvozování **4**
- 1.1 Starobylí Babyloňané 5
- 1.2 Starověcí Egypťané 6
- 1.3 Starověké Řecko 8
- 1.4 Arabská matematika na začátku druhého tisíciletí 10
- 1.5 Středověka Evropa 11
- 1.6 Období Novověku 11
- 1.7 Počítačová éra 13

2 Ludolfovo číslo a jeho geometrický význam **15**
- 2.1 Planimetrie 18
- 2.2 Stereometrie 26

3 Goniometrické rovnice a nerovnice **34**

4 Číslo π, Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost **39**
- 4.1 Číslo π ve Fibonacciho posloupnosti 39
- 4.2 Vztah mezi číslem π a Zlatým řezem 41
- 4.3 Vztahy mezi číslami π, φ a e 42

5 Matematická analýza **44**

6 Prvděpodobnost a náhodné veličiny **49**
- 6.1 Buffonova jehla 49
- 6.2 Metoda Monte Carlo 52

7 Použití čísla π ve fyzice **54**
- 7.1 Úlohy na kmitavé pohyby 54

Závěr **58**

Literatura **59**

Úvod

Z kurzu matematiky na střední škole již víme, že číslo π je matematickou konstantou, která vyjadřuje poměr délky kružnice a jejího průměru. Ludolfovo číslo je iracionální a transcendentní. V dnešní době nenarazíme na nikoho, kdo by nevěděl, že se π rovná přibližně 3,14. Existuje hodně vzorců, pomocí kterých se tato konstanta dá spočítat s vcelku velkou přesností. Některé z těchto vzorců byly odvozené starověkými vědci, některé zase moderními matematiky.

Většina z nás by se divila, kolik lidí se zajímá o číslo π. Ve škole jsme si uvědomili, že číslo π je poměr délky kružnice a jejího poloměru, ale co je na tom zajímavého? Ve své práci bych chtěla ukázat jiný pohled na tuto záhadnou matematickou konstantu.

Studium Ludolfova čísla ještě není dokončeno a lidstvo čeká na hodně vědeckých objevů s tímto číslem spojených. K číslu π takovému, jaké ho známe dnes, vedla dlouhá cesta a hodně matematiků této zajímavé matematické konstantě zasvětilo svůj život. Právě díky jejich obětavosti a píli známe už poměrně přesné vyjádření této konstanty a jsme schopni ji prakticky používat, a to nejen při výpočtech v matematice.

Cílem mé bakalářské práce je ukázat možné netradiční způsoby používání čísla π nejen v geometrii, ale i v jiných oblastech matematiky a také v jiných vědách. Při psaní této bakalářské práce jsem narazila na problém, že ve všech úlohách (zejména na základní a střední škole) se číslo π ukazuje jenom z jedné strany, kde se převážně používá pro geometrické výpočetní úlohy s kružnicí. Mým cílem bylo dát dohromady v jedné práci takové příklady, které by vytvořily kompletní přehled čísla π z různých směrů.

V další kapitole jsem se zaměřila na historii výpočtu Ludolfova čísla. Chtěla jsem popsat nejenom teorii, ale uvést netradiční úlohy těchto období, ve kterých byla tato konstanta využita. Pomocí takových příkladů můžeme pozorovat nejenom vývoj matematiky jako takové, ale i způsob matematické logiky kterou využívali starověcí matematici.

Po rozboru historie a tehdejších metod, které matematici minulých dob používali pro výpočet čísla π, se budeme v další kapitole věnovat modernějším geometrickým úlohám. V této kapitole jsem chtěla ukázat, že Ludolfovo číslo může být použito nejen v planimetrii, jak jsme na to byli zvyklí, ale i v stereometrických úlohách. Příklady v této kapitole postupují od jednodušších ke složitějším.

Další kapitola je věnovaná goniometrickým funkcím a tomu, jak významnou roli hraje číslo π pro výpočet takového typu rovnic a nerovnic. Protože, jak dobře víme ze střední školy, Ludolfovo číslo může taky označovat velikost úhlu. Právě toto jsem taky chtěla ukázat v této kapitole. Důležitá je také kapitola o vztazích čísla π, Zlatého řezu a Fibonaccího posloupnosti. V této části jsem ukázala vztahy mezi významnými matemtickými císly.

Jak už jsem zmínila, číslo π se často používá i v jiných částech matematky, například v pravděpodobnosti a matematické analýze. V kapitole o použití Ludolfova čísla v pravděpodobnosti jsem ukázala známou úlohu s Buffonovou jehlou a také způsob výpočítání čísla π metodou Monte Carlo. Když jsem zpracovávala tyto úlohy, zaujaly mě natolik, že jsem se rozhodla udělat vlastní experimentální pokus. Výsledky jsou uvedeny v této kapitole.

V poslední časti bych vám ráda ukázala, že se číslo π používá nejen v matematice, ale i jiných vědách. Jako příklad jsem uvedla fyzikální úlohy.

Celkový přínos bakalářské práce spočívá především ve shromáždění takových úloh na použití hodnoty čísla π, ve kterých by bylo toto číslo znázorněno z různých úhlů pohledu, aby si čtenáři vytvořili kompletní obrázek o tom, co je to za konstantu. Práce je určená pro žáky středních škol. Závěr práce bude věnován stručnému shrnutí některých poznatků o hodnotě π a taky o různých směrech použití této konstanty.

Kapitola 1

Historie čísla π. Odvozování

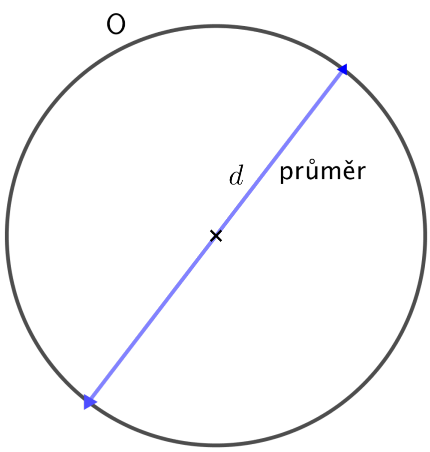
Několik veršů v Biblii přisuzuje π hodnotu 3. V 1. knize královské 7:23 se píše:

Odlil také moře průměru deseti loket, okrouhlé, pět loket vysoké; dalo se obepnout měřicí šňůrou dlouhou třicet loket.

Kdybychom chtěli zjistit, kde se poprvé objevilo číslo π, asi bychom se museli podívat velmi hluboko do minulosti. Předpokládá se, že zmínku o něm měli už starověcí Egypťané. Zároveň však platí, že se Egypťané, podobně Babyloňanům, snažili k matematické hodnotě π aspoň přiblížit.(1, str. 9)

Prvním krokem bylo objevení vztahů mezi různými veličinami. Zdá se jisté, že tyto relace byly vyjádřeny nejdříve kvalitativně. Museli si všimnout, že větší kameny jsou těžší, nebo — vyjádříme-li to složitěji — že existuje vztah mezi velikostí kamene a jeho tíhou. Museli pozorovat, že starý strom je vyšší, že větší pole poskytují větší úrodu. Mezi všemi těmito vztahy nemohli přehlédnout jeden, ze kterého nebyly výjimky:

„Čím větší je kruh napříč, tím delší je kolem.“



Obrázek 1.1: Obvod = $\pi \times$ průměr

Jestliže bylo zjištěno, že „okolo“ (obvod) a „napříč“(průměr) kruhu jsou úměrné veličiny, což přirozeně musí být, pak z toho bezprostředně vyplývá poměr *obvod : průměr = konstanta pro všechny kružnice.* Tento konstantní poměr se začal označovat písmenem π teprve od 18. století n.l.. My ovšem použijeme moderního značení od začátku, takže definice čísla π bude znít

$$\pi = \frac{o}{d},$$

kde o znamená obvod a d průměr libovolné kružnice 1.1. Podrobněji to probereme v další kapitole. (2, str. 11)

1.1 Starobylí Babyloňané

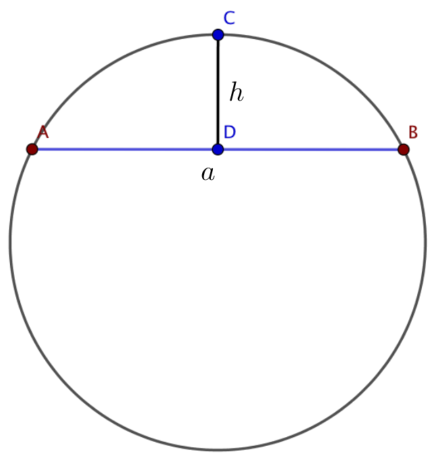
Protože Mezopotámie byla první oblastí, v níž došlo k zemědělské revoluci a kde vznikla nová společnost, lze předpokládat, že babylonská matematika byla první a nejpokročilejší. (2, str. 18)

Slovesní úlohy starobylých babyloňanů pro výpočet obsahu kruhu je možné zapsat moderním vzorcem: $S = \frac{o^2}{12}$, kde S – obsah kruhu, o – délka kružnice obvodu.

Způsob, který byl použit pro odvozování tohoto vztahu, není známý. Dosadíme-li do tohoto vzorce známé modernímu žákovi formule pro obsah kruhu ($S = \pi \cdot r^2$) a délky jejího obvodu ($o = 2 \cdot \pi \cdot r$) , z rovnice $\pi \cdot r^2 = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r)^2}{12}$ dostaneme $\pi = 3$.(1, str. 12)

Další úloha je obsazena v jednom z klínovitých textů, patřících Britskému muzeu: "60 je délka obvodu kružnice. 2 — na kolik půjdeme dolů. Co je tětiva?"

V této úloze jde o výpočet délky tětivy $|AB|$ (obr. 1.2), kolmice ke které – $|CD|$ – je rovna 2, přičemž délka obvodu kružnici k je rovna 60.



Obrázek 1.2: Kružnice k

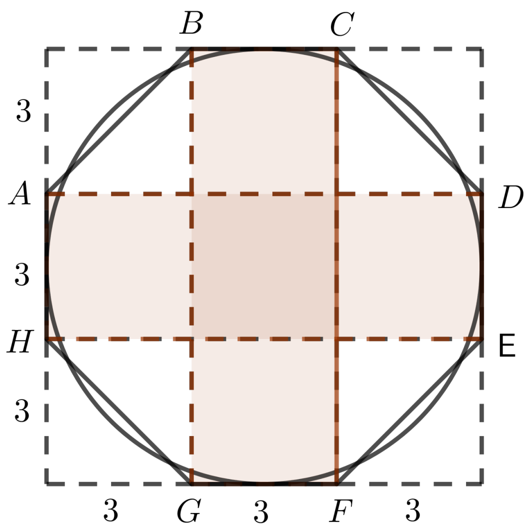
Takový způsob vyřešení úlohy nám nabízí neznámý babylonský matematik: „2 umocní na druhou, 4 vidíš. 4 od 20, průměru, odečti, 16 vidíš. 20, průměr, vynásob sebou, 400 vidíš. 16 vynásob sebou, 256 vidíš. 256 od 400 odečti, 144 vidíš. Co je odmocnina z 144? 12 je odmocnina a je to tětiva. Takový je způsob“.

Jestli vynecháme jednu vypočtní chybu, daný postup pro zjištění tětivy odpovídá vzorci, kde a je délka tětivy a h je délka kolmice k tětivě:

$a = \sqrt{d^2 - (d - h^2)^2}$, kterou zvládne odvodit každý dnešní žák. Zajímavé je, že v textu při délce obvodu kružnice $o = 60$, průměr $d = 3$. Ten fakt, že poloměr je umístěn v kružnici jako tětiva 6krát, zanechal nesmazatelný otisk světového pohledu na obyvatele osídlení.(1, str. 13)

1.2 Starověcí Egypťané

Přesnější aproximace čísla π používali starověcí Egypťané. Nejstarším egyptským dokumentem, který měl vztah k matematice, a tím i nejstarším matematickým dokumentem vůbec je papyrusový svitek, který se nazývá Rhindův papyrus nebo též Ahmesův papyrus. Ahmesův papyrus obsahuje 84 problémů s řešením. Jedním z nich je problém č. 48, kde je srovnáván vztah mezi kružnici a jí opsaným čtvercem. Ahmes vytváří (nepravidelný) osmiúhelník tak, že rozděluje strany čtverce o délce 9 jednotek na tři části (obr. 1.3) a vytíná trojúhelníky v rozích, jak je ukázáno. Plocha osmiúhelníku $ABCDEFGH$ se příliš neliší od plochy kruhu vepsaného do čtverce a rovná se ploše pěti vybarvených čtverců, z nichž každý má plochu 9 plošných jednotek, plus čtyř trojúhelníků každého s plochou $4\frac{1}{2}$ plošných jednotek. To je dohromady 63 plošných jednotek, což je blízké 64 neboli 8^2. Takže plocha kruhu s průměrem 9 se přibližně rovná 64 plošným jednotkám, tj. ploše čtverce o straně 8, což povede k hodnotě $\pi = 4 \times (8/9)^2$. (2, str. 22)



Obrázek 1.3: Egyptská metoda výpočtu π

Na jedné z úloh uvedené na papyrusu jsou dané pokyny, jak spočítat obsah kulaté stodoly s průměrem u základu 9 loktů. Návod vypadal zhruba takhle: „Od 9 odečti $\frac{1}{9}$, to jest 1. Dostaneš 8. Vynásob 8. Koukej: to je 64, ty jsi správně našel.“

V dané úloze se nachází pravidlo pro hledání obsahu kruhu: obsah S je roven obsahu čtverce, strana kterého je rovna d (průměru kružnice), zmenšenému o $\frac{1}{9}$

své délky:

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2$$

Z jakých pravidel je tento vzorec odvozen? – Není známo. Moderní rekonstrukci odvození tohoto vzorce podávají Dalmedico a Pfeiffer :

„Vepíšeme do čtverce s délkou d osmiúhelník, jehož vrcholy dělí strany čtverce na 3 stejné části. Obsah tohoto osmiúhelníku je přibližně roven obsahu vepsaného do čtverce kružnici s průměrem d a vypočítá se podle vzorce:

$$S = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \doteq \frac{64}{81} \cdot d^2.$$

Z tohoto vzorce se dá vyčíst dost přesné značení císla π:

$$\pi \doteq \left(\frac{16}{9}^2\right) \doteq 3{,}16$$

“(1, str. 14)

Hodnota π se také nepřímo uvádí v jednom z nejstarších matematických textů, datovaném přibližně do roku 1650 př. n. l., a to v Egyptském Rhindovém papyru. Přiklad číslo 50 (z celkových 87) zní:„Pole ve tvaru kruhu má průměr 9 chet (1 chet $\doteq$ 50 m). Jaký je jeho obsah?“ Dnes bychom počítali takto:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \pi\frac{81}{4} \quad \text{[čtverečních chetů].}$$

Papyrus ovšem uvádí vlastní řešení, a to

$$\frac{64}{81}d^2$$

kde d je průměr kruhu. Pro $d = 9$ tedy dostaneme egyptský odhad π:

$$\pi\frac{81}{4} = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}9^2 = \frac{64}{81}81 = 64$$

a odtud

$$\pi = \frac{4 \times 64}{81} \doteq 3{,}160493827.$$

Hodnota v Rhindově papyru je ale méně přesná než ta, kterou podle všeho vypočítali Egypťané z Gízy již 2600 let př. n. l. Poměr obvodu a výšky zdejších pyramid je 22/7. Předpokládá se, že starověcí architekti přisuzovali tomuto poměru nadpozemské vlastnosti, a je pravda, že toto číslo se často používá jako přibližná hodnota π. Je možné, že to už věděli i oni. Pokud přistoupíme na teorii, že v pyramidách je ukryto π, dostaneme

$$\pi = \frac{22}{7} = 3{,}142\ldots,$$

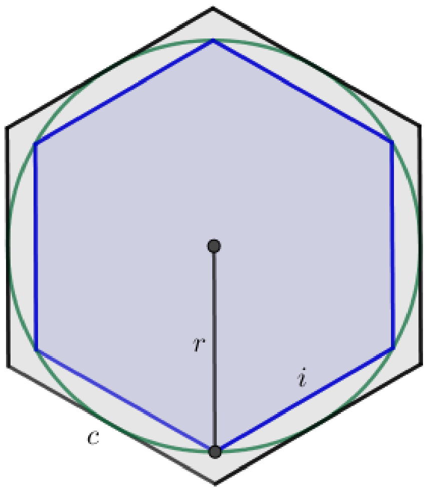
(3, str. 18)

1.3 Starověké Řecko

„V matematice, která je zrcadlem společnosti, v níž sama prospívá nebo trpí, je předathénské období časem zajímavých mužů a důležitých objevů. Sparta, jako většina militaristských států před ní a po ní, neprodukovala nic. Athény a s nimi spojená Ionie produkovaly řadu prací filosofů a matematiků, některé dobré, jiné kontroverzní, některé hrubě chybné“. Co se týká historie čísla π, měli v tomto období určitý vztah k tomuto problému čtyři muži: Anaxagoras, Antifon, Hippokrates a Hippias. (2, str. 31)

Pomalu se dostáváme do starověkého Řecka, kde působil jeden z největších myslitelů lidstva, Archimedes ze Syrakus. Archimedes byl prvním, kdo poskytl metodu výpočtu π s libovolnou žádanou přesností. Metoda byla založena na faktu, že obvod pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu je menší než obvod kruhu, zatímco obvod mnohoúhelníku kružnici opsaného je větší. Zavedeme-li n dosti velké, budou se oba obvody mnohoúhelníků blížit kruhu s libovolnou přesností. Jeden se bude blížit zdola, druhý zhora. Archimedes začal od šestiúhelníkami a postupním zdvojováním počtů stran dospěl k mnohoúhelníku, který měl 96 stran, což dávalo

$$3^{10}/_{71} \doteq 3{,}14084 < \pi < 3^{1}/_{7} \doteq 3{,}142858 \tag{1.1}$$



Obrázek 1.4: Znázornění Archimedové metody

Jestiže r je poloměr kružnice a $\theta = \pi/n$ je poloviční úhel, který přísluší jedné straně ve středu pravidelného mnohoúhelníku (obr. 1.4), pak délka této strany je

$$i = 2r \sin\theta \tag{1.2}$$

a délka strany opsaného mnohoúhelníku

$$c = 2r \tan\theta. \tag{1.3}$$

Pro obvod o tedy máme

$$ni < o < nc, \tag{1.4}$$

což po vydělení $2r$ dává

$$n \sin\theta < \pi < n \tan\theta. \tag{1.5}$$

Jestliže původní počet stran n zdvojíme k-krát, dostaneme

$$2^k n \sin(\theta/2^k) < \pi < 2^k n \tan(\theta/2^k), \tag{1.6}$$

a zvolíme-li k dosti velké, dolní i horní limita se bude blížit hodnotě π libovolně blízko.

Při tom Archimedes nepoužíval trigonometrické funkce. Ale již pro $n = 6$ bylo $\sin\theta = 1/2, \tan\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ podle Pythagorovy věty. Ostatní funkce lze dostat postupným používáním pravidla pro půlení úhlu (která odpovídají určení vztahů v pravoúhlých trojúhelnících). Pro $k = 4$ budou mít mnohoúhelníky 96 stran a to povede k mezím (1.1), jestliže odmocniny obsažené ve vzorcích pro poloviční úhel budou aproximovány poněkud menšími racionálními čísly pro dolní limitu a poněkud většími čísly pro horní limitu.(2, str. 54)

Kvadratura kruhu

Kvadratura kruhu je jedním ze tří proslulých matematických problémů starověku (trisekce úhlu, zdvojení krychle, kvadratura kruhu). S úlohou zápolili matematici několik tisíciletí. Jde totiž o následující úkol:

Lze sestrojit čtverec o stejném plošném obsahu, jako má daný kruh, a to jen pravítkem a kružítkem?

Popularita problému kvadratury kruhu záleží hlavně v tom, že se mu může porozumět bez větších matematicikých znalostí.

Teprve J. H. Lambertovi se podařilo v roce 1767, jako prvnímu, dokázat iracionalitu čísla π. Problém kvadratury kruhu však důkazem iracionality π a e^x nebyl ukončen. Toho si byl vědom i sám Lambert a vyslovil proto ve svém pojednání „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques“ domněnku, že e a π nejsou algebraická čísla. Lindemann v roce 1882 dokázal transcendentnost čísla π.(4, str. 240-250)

Problematikou kvadratury kruhu se taky zabýval italský umělec, učenec a inženýr Leonardo da Vinci. Mnoho zájmu věnoval rovnoplochým útvarům a tělesům se stejnými objemy, konstrukci pravidelných mnohoúhelníků buď nad danou stranou, nebo vepsaných do dané kružnice. Taky mezi jeho zápiskámi jsou také poznámky o rozdílech mezi křivkami jedné a dvojí křivosti, o nemožnosti kvadratury kruhu, o zavedení symbolů $+$ a $-$ a zabývá se v nich i studiem menisků.

Přibližné řešení problému kvadratury kruhu Leonardo navrhuje provést pomocí kola, jehož tloušťka by se rovnala polovině jeho poloměru. Jestliže bychom kolo kutáleli po rovině, potom jeho obdélníková stopa bude mít po úplné otáčce obsah rovný obsahu jeho základný ($\pi r^2 = 2\pi r(\frac{r}{2})$). Je zajímavé, že při zkoumání těžišť obrazců a těles, například polokruhu a čtyřstěnu, a také při určování obsahu elipsy, Leonardo používal Archimedovu metodu.(5, str. 411)

1.4 Arabská matematika na začátku druhého tisíciletí

Hledáním hodnoty čísla π se zabýval ibn al-Hajtham, al-Bírúní a další. Dlouho ale nemohl překonat přesnost, kterou dosáhli starověcí řekové. Ve třetí knize Mascúdovského kánonu vypočetl al-Bírúní z tětivy 2° obvody kružnici vepsaného a opsaného 180-úhelníka a stanovil jejich aritmetický průměr. Ten výsledek byl ale stále méně přesný, než tehdy znamá hodnota a rovnal se 3,1417. Bylo to také proto, že al-Bírúní z neznámých důvodů vzal za tětivu 2° hodnotu $2'5''39'''43^{IV}36^{V}$, přitom že v jiných kapitolách téže své knihy uvádí přesnější hodnotu $2'5''39'''25^{IV}58^{V}$. (Přesně by mělo být $2'5''39'''26^{IV}22^{V}29^{VI}$).

Velmi dobrého přiblížení hodnoty π dosáhl Džamšíd Ghijáth ad-Dín al-Káší ve svém „Traktátu o kruhu“ („Risála al-muhítíja“) na konci 1424 roku. Tato práce je skutečně dobrou ukázkou přibližných výpočtů. A to nejenom pokud chceme vědět přesnější výsledek na sedmnáct desetinných míst, ale i co nejjednodušší provedení odhadů v přesnosti mezihodnot.

Na počátku svého traktátu podrobuje al-Káší kritice aproximace, které prováděli jeho předchůdci; ukazuje, že tyto hodnoty dávají pro velké kružnice velké absolutní chyby. Pro lepší pochopení dalšího výkladu uveďme míry, kterých al-Káší používal:

1 farsang = 12 000 loktů (přibližně 6 km)

1 loket (přibližně 50 cm) = 24 palců

1 palec = 6 šířek středního zrna ječmene

1 šířka středního zrna ječmene = 6 tlouštěk koňské žíně (= 1/2mm).

Al-Káší předpokládá, že zemský poloměr je roven 2485 farsangů a délka hlavní kružnice Země přibližně 8000 farsangů a konečně se domnívá spolu s islámským astronomem Qutb ad-Dín aš-Šírází (1236-1311), že poloměr sféry stálic se rovná 70073 $\frac{1}{2}$ zemských poloměrů.

Archimedes předpokládal, že π leží mezi hodnotami $3\frac{1}{7}$ a $3\frac{10}{71}$. Rozdíl těchto hodnot je $\frac{1}{497}$. Proto al-Káší používá kružnici o průměru 497 jednotek, délku které můžeme nalézt s přesností v mezích jednotky. Pro hlavní kružnici Země je tato chyba přibližně 5 farsangů a pro hlavní kružnici sféry stálic už více než 300 000 farsangů. Kdybychom měřili plochy, tato chyba by se ještě zvětšovala. Když al-Káší ukázal nedostatky výsledků al-Bírúního a (jak se domníval) Abu 'l-Wafových, zformuloval úkol přesnějšího výpočtu hodnoty π, ve tvaru následujícího originálního požadavku: Délka obvodu kruhu se musí vyjádřit pomocí svého průměru tak přesně, aby chyba v délce kružnice, jejíž průměr je rovný 600 000 zemských průměrů, nebyla větší než tloušťka vlasu.(5, str. 307-308)

1.5 Středověka Evropa

Ve 12.-13. století zaujala v Evropě v rozvoji řemesel, obchodu a peněžnictví první místo italská města Pisa, Milán, Benátky, Janov a Florencie. Město Pisa mělo na konci 12. století obchodní kolonie v Alexandrii, Malé Asii, v Cařihradu a na severním pobřeží Afriky. Jeden z městských písařů, pracujících v devadesátých letech 12. století v Bougie, zvaný Bonaccio (dobrotivý) měl syna Leonarda, který vešel do dějin jako Leonardo Fibonacci z Pisy.(5, str. 362) Leonarda můžeme považovat za nejvýznamnějšího matematika středověké Evropy.

Geometrickým záležitostem se Fibonacci věnuje zejména ve spise „Practica geometriae“. Úvod tohoto spisu začíná vymezením pojmů bod, čára, přímka, rovina, úhel atd.; Fibonacci je zde inspirován Eukleidovými *Základy*. Celý spis je rozdělen na osm částí, nás bude zajímat jen třetí část tohoto díla, která pojednává o „měření obrazců“, jako je trojúhelník, čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník, mnohoúhelník, kruh. Najdeme zde i obecný návod na výpočet obvodu a obsahu kruhu a konkrétní výpočet pro kruh s průměrem 14, kde jako π je použita hodnota $\frac{22}{7}$.

Velmi zajímavou pasáží je výpočet čísla π. Fibonacci reprodukuje Archimedův výpočet, tj. počítá poměr obvodu pravidelného vepsaného, resp. opsaného 96-tiúhelníka k průměru. Jeho výsledek můžeme v dnešní symbolice vyjádřit nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

Protože aritmetický průměr čísel $\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$ je $\frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3}$ dochází Fibonacci k přibližné hodnotě

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275},$$

což je $3{,}14\overline{18}$ a to je správné na tři desetinná místa.(6, str. 313)

1.6 Období Novověku

Na Archimedův způsob aproximaci čísla π navázali F. Viéte v roce 1579, Romanus (Adrien van Roomen (1561-1615)) v roce 1593 a Ludolph van Ceulen (1540-1610) v roce 1596. Jejích postup můžeme traktovat takto:

Představíme si jednotkovou kružnici a vepsaný do ní pravidelný konvexní n-úhelník. Středový úhel příslušný straně označíme $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$. Z délky strany snadno vypočítáme $\sin \frac{\alpha}{2}$, a pak postupně

$$\sin\frac{\alpha}{2^2},\quad \sin\frac{\alpha}{2^3},\quad \dots,\quad \sin\frac{\alpha}{2^k},\quad \cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

Elementární nerovnosti

$$\sin\omega < \omega < \tan\omega \quad (0 < \omega < \frac{\pi}{2}) \tag{1.7}$$

pro $\omega = \dfrac{\alpha}{2^k} = \dfrac{\pi}{2^{k-1}n}$ pak dají

$$\sin\frac{\alpha}{2^k} < \frac{\pi}{2^{k-1}n} < \frac{\alpha}{2^k}.$$

Podobné určil F. Viéte číslo π s přesností na 9 desetinných míst, L. van Ceulen dokonce na 35 míst. Po tom, co F. Viéte a J.Wallis použili jiný výpočet čísla π, přišli k prvním nekonečným součinům:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots \tag{1.8}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}. \tag{1.9}$$

Jeden ze vzorců lze odvodit pomocí goniometrických vzorců. Máme:

$$\sin\omega = 2\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} = 2\cdot 2\sin\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} =$$

$$= 2^2\cdot 2\sin\frac{\omega}{2^3}\cdot\cos\frac{\omega}{2^3}\cdot\cos\frac{\omega}{2^2}\cdot\cos\frac{\omega}{2} =$$

$$= \ldots = 2^n\cdot\sin\frac{\omega}{2^n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\omega}{2^k},$$

takže

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\omega}{2^k} = \frac{\sin\omega}{2^n\sin\frac{\omega}{2^n}} = \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\frac{\omega}{2^n}}{\sin\frac{\omega}{2^n}} \to \frac{\sin\omega}{\omega} \text{ při } n\to\infty.$$

Zvlášť pro $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ dostáváme

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots,$$

což nám dává 1.8.

W. Snell (1580-1626) v roce 1621 a Ch. Huygens v roce 1654 zpřísnili nerovnost 1.7 a dospěli k číslu π.

Jinak postupoval J. Gregory (1638-1675) v roce 1667. Představíme si jednotkovou kružnici a do ní nejdřív vepíšeme pravidelné konvexní jednak n a $2n$-úhelníky. Potom kolem té kružnice opíšeme pravidelné n a $2n$-úhelníky. Obsahy vepsaných mnohoúhelníků označme V_n a V_{2n} , obsahy opsaných O_n a O_{2n}. Pak platí

$$V_{2n} = \sqrt{V_n\cdot O_n}, \qquad O_{2n} = \frac{2V_n\cdot O_n}{V_n + V_{2n}}. \tag{1.10}$$

Ověříme tyto vzorce pro $n = 4$. Po jednoduchém výpočtu

$$V_4 = 2, \qquad O_4 = 4,$$
$$V_8 = 2\sqrt{2} = 2{,}8\ldots, \quad O_8 = 8(\sqrt{2}-1) = 3{,}3\ldots.$$

dostáváme

$$V_8 = \sqrt{V_4 \cdot O_4}, \qquad O_8 = \frac{2V_4 \cdot O_4}{V_4 + V_8}.$$

Z 1.10 lze pak postupně spočítat

$$V_{2^2n}, \quad ,V_{2^3n}, \quad \ldots,$$
$$O_{2^2n}, \quad ,O_{2^3n}, \quad \ldots,$$

takže když máme obsah π jednotkové kružnice, ten obsah vypadá takto:

$$V_{2^kn} < \pi < O_{2^kn}.$$

(7, str. 118-119)

1.7 Počítačová éra

Historie čísla π v poočítačovém věku 20.století je podobná honbě za číslicemi v 18. a 19. století. Ale tam, kde matematici 18. a 19. století dělali výpočty s desítkami a stovkami desetinných míst, počítače zvládali ty stejné výpočty s tisícemi a stovkami tisíc míst. V 1967 byla hodnota π známa na 500 000 desetinných míst a tam, kde se matematici snažili měsíce a roky, aby dostali stovky desetinných míst, počítač k tomu potřeboval pouze 26 hodin a 40 minut aby spočetl půl milionu míst. (plus 1 hodinu 30 minut na přeměnu konečného výsledku z binárního tvaru do desetinného zápisu).

První výpočet π pomocí počítače byl proveden v září 1949 na ENIACu (Electronic Numerical Integrator and Computer –Elektronický numerický integrátor a počítač) v Laboratořích pro balistický výzkum. Spočítal π na 2 037 míst za 70 hodin, což je podle našich nynějších standardů hodně dlouhá doba. Stejně jako při jiných poočítačových výpočtech, tento výpočet byl naprogramován na základě Machinova vzorce (který podrobněji probereme v kapitole o použití čísla π v matematické analýze) ve tvaru

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5} - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right).$$

V červenci 1958 byl naprogramován IBM 704 v pařížském Data Processing Centre na základě kombinace vzorce Machinova a Gregoryho řady. Poskytl 10 000 míst za 1 hodinu 40 minut.

V červenci 1961 Shanks a Wrench zvýšili rychlost výpočtů o faktor okolo 20. Bylo toho dosaženo jak použitím rychlejšího počítače (IBM 7090 v IBM Data Processing Center v New Yorku), tak i užitím některých triků v programování. Např. nahradili Machinovův vzorec vzorcem, který nalezl Strömer v roce 1896 a který vypádal takto:

$$\pi = 24 \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 8 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

Výpočet poskytl 100 265 desetinných míst, z nichž 100 000 bylo publikováno fotografickou reprodukcí s 5000 místy na stránce.

Výpočet tohoto druhu zahrnuje miliardy jednotlivých aritmetických úkonů, a jestliže jediný z nich je chybný, celý další výpočet vede k nesprávným hodnotám. Výsledek je tedy třeba prověřit. K tomu použili Shanks a Wrench speciální metodu, která počítá π pomocí jiného vzorce (s arcustangentou podle Gausse), ale využívá částečných výsledků původního výpočtu, takže zabere méně času než vlastní výpočet.(2, str. 152)

Před třemi stoletími G. W. Leibniz, spoluobjevitel integrálního a diferenciálního počtu a též první nekonečné řady pro π, snil o dni, kdy soudy budou zrušeny, protože rozsudky budou stanovovány matematicky řešením rovnic, které ukáží, kdo byl v právu a kdo byl vinen. Inteligentní počítač, který se právě rodí, činí tento sen méně fantastickým.(2, str. 156)

Kapitola 2

Ludolfovo číslo a jeho geometrický význam

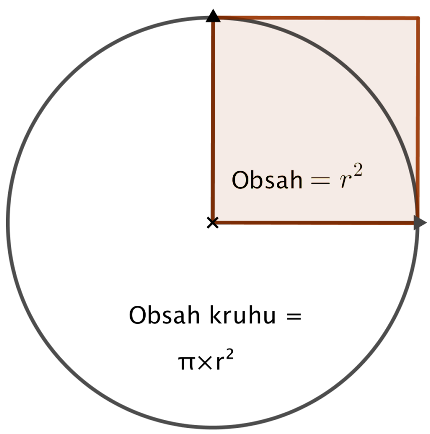
V následující kapitole si ukážeme nejznámější způsob použití čísla π, a to v geometrii. Kapitola je rozdělená na několik částí: na začátku je uvedena geometrická definice, popis iracionality a transcendentnosti; druhá část kapitoly je věnována úlohám.

Geometrická definice

Jak jsme již zmínili v úvodu, v geometrii (eukleidovské) je π definováno jako poměr délky kružnice o k jejímu průměru d:

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Poměr $\frac{o}{d}$ je konstantní, nezávisí na obvodu kružnice. Jinými slovy, nezáleží na tom, jak velký nebo malý je kruh, π bude mít vždy stejnou hodnotu.



Obrázek 2.1: Obsah kruhu je π × obsah růžového čtverce

Číslo π není jen poměr obvodu a průměru kružnice. Je také poměrem obsahu kruhu a obsahu čtverce se stranou rovnající se průměru kruhu (obr. 2.1). Ve škole jsme se učili, že

$$S = \pi r^2,$$

což je vzorec pro výpočet obsahu S kruhu o poloměru r.(3, str. 18)

Často se π definuje jako dvojnásobek nejmenší kladné hodnoty x, pro kterou je goniometrická fuknce $\cos x$ rovna nule.(8, str. 183)

Na konec této části bych chtěla uvést pár základních vzorců, kde se číslo π nejčástěji vyskytuje. Část z nich využijeme při řešení úloh, které budeme probírat dále.

Obvod kruhu:

$$o = 2\pi r$$

Obsah kruhu:

$$S = \pi r^2$$

Obsah elipsy s poloosami a a b:

$$S = \pi ab$$

Povrch koule:

$$S = 4\pi r^2$$

Objem koule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Objem rotačního válce s výškou v:

$$V = \pi r^2 v$$

Objem rotačního kužele s výškou v:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Existuje samozřejmě mnoho dalších vzorců pro výpočet obvodu, obsahu a objemu, kde se π vyskytuje ve velmi složitých integrálech.(3, str. 72)

Iracionálnost a transcendentnost

V souvislosti s rozsáhlými výpočty čísla π na mnoho desetinných míst a s použitím nových analytických prostředků, zesílily v 17. a 18. století pochybnosti, zda vůbec patří číslo π mezi racionální čísla. Objevila se řada pokusů o důkaz jeho iracionality, ale teprve když Euler odvodil vztahy mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi, podařilo se v roce 1767 J. H. Lambertovi jako prvnímu iracionalitu čísla π dokázat. (4, str. 246) Co je vlastně iracionální číslo?

Definice 1. *(20) Reálná čísla dělíme na racionální a na iracionální. Reálná čísla, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj, označujeme jako iracionální.*

Iracionální čísla nelze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. *Iracionální* čísla jsou například $\sqrt{2}$, obecněji $\sqrt[n]{p}$, kde n je libovolné přirozené číslo větší než 1 a p je prvočíslo.

V Eulerově době pojali lidé podezření, že jsou čísla, která jsou nejen iracionální, ale nejsou ani kořenem žádné algebraické rovnice. Taková čísla byla nazvána *transcendentní*. Nebylo vůbec samozřejmé, že taková čísla skutečně existují.(2, str. 137) Přesnější definice transcendentního čísla je:

Definice 2. *(20) Komplexní čísla dělíme na algebraická a na transcendentní. Algebraická čísla jsou kořeny polynomů s racionálními koeficienty, transcendentní nikoliv.*

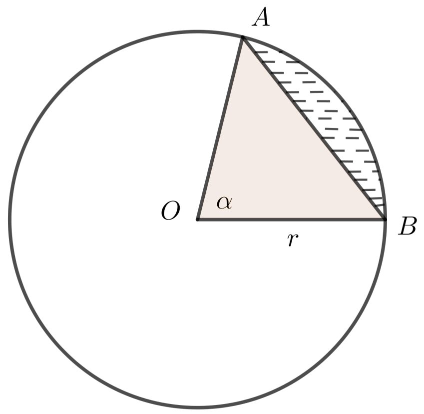
Každé reálné transcendentní číslo je iracionální. Nejznámější transcendentní čísla jsou například Ludolfovo číslo π, Eulerovo číslo e, Liouvilleova čísla . . ., není však snadné to o nich dokázat.

Kvůli transcendentnosti nelze číslo π sestrojit euklidovsky, tedy pouze za pomocí pravítka a kružítka. Tento problém je propojený s problémem kvadratury kruhu, který jsme probírali v předchozí kapitole.

Délka oblouku kružnice, obsah výseče a úseče

Máme-li kružnici o poloměru r, je její délka $o = 2\pi r$. Délka l oblouku na této kružnici, který odpovídá středovému úhlu α (v obloukové míře), je $l = r\alpha$. Máme-li ovšem úhel α vyjádřen ve stupních , je $l = \frac{2\pi r}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha$.

Kruhem o středu O a poloměru r rozumíme množinu všech bodů X roviny, pro které je $|OX| \leq r$. Jeho obsah je $S = \pi r^2$. Máme-li na kružnici o středu O a poloměru r nějaký oblouk, pak ta část kruhu, která leží v příslušném středovém úhlu k uvažovanému oblouku, se nazývá **kruhová výseč** (obr. 2.2)



Obrázek 2.2: Kruhová výseč

Její obsah pro úhel α v obloukové míře je $P = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

Je-li úhel α měřen ve stupňové míře, je $S = \frac{\pi}{360°} \cdot \alpha r^2$.

Označme ještě krajní body zvoleného oblouku A,B. Přímka $|AB|$ rozdělí kruh na dvě části, které se nazývají **kruhové úseče.** Obsah menší úseče ($\alpha \leq \pi$) dostaneme,když od celé výseče odečteme obsah trojúhelníku SAB, tedy

$$S = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha).$$

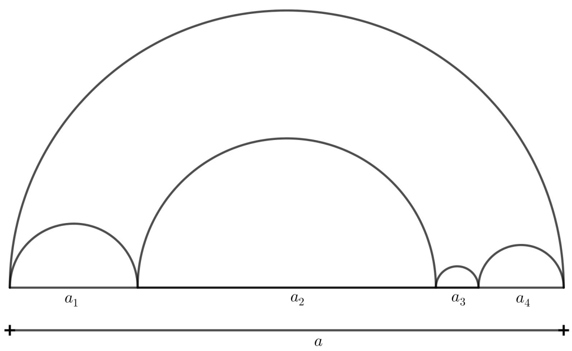
(29, str. 78)

2.1 Planimetrie

V této části kapitoly si ukážeme, jak se může používat číslo π v různých úlohách v planimetrii. První úloha je motivační a pomocí čísla π přijdeme na vztah mezi délkami půlkružnic, které jsou sestrojené na jedné úsečce. Následující úlohy znazorňují praktické použiti teorii o délce oblouku kružnice, obsahu výseče a úseče, kterou jsme probírali v předchozí části. Každá z těchto úloh by se neobešla bez použití konstanty, ale v každé z nich se číslo π používá různými způsoby. Poslední tři úlohy jsou hezkou ukázkou použití Ludolfova čísla v netradičním směru. Ke každé úloze je uveden obrázek pro lepší znázornění problemů.

Příklad 1. *(29, str. 79)*

Úsečku délky a rozdělte na n úseček a nad každou z nich sestrojte polokružnici. Porovnejte součet délek všech polokružnic s délkou polokružnice nad celou úsečkou (obr. 2.3).

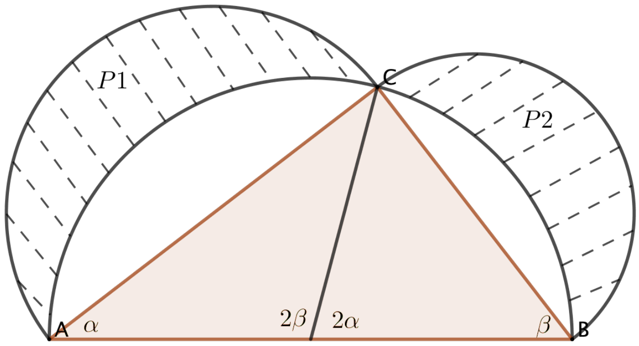


Obrázek 2.3:

Řešení: Označíme a_1,a_2,…,a_n délky úseček, na které je rozdělena úsečka délky a. Je tedy $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a$. Součet délek všech polokružnic je $\pi\frac{a_1}{2} + \pi\frac{a_2}{2} + \cdots + \pi\frac{a_n}{2}$, délka polokružnice nad úsečkou délky a je $\pi\frac{a}{2}$; oba tyto výrazy se sobě rovnají.

Příklad 2. *(29, str. 79)*

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou $|AB|$. Polokružnice nad odvěsnami $|AC|$,$|BC|$ ležící v polorovinách opačných k polorovinám ACB a BCA vytvoří spolu s polokružnicí nad průměrem $|AB|$ a procházející bodem C dva měsíčky (tzv. Hippokratovy měsíčky). (obr. 2.4)Vypočtěte jejich obsahy.



Obrázek 2.4:

Řešení:

Obsah P_1 měsíčku nad odvěsnou $|AC|$ vypočteme tak, že od obsahu půlkruhu s průměrem $|AC|$ odečteme obsah kruhové úseče, jež je částí kruhu o poloměru $\frac{1}{2}|AB|$ a odpovídá středovému úhlu 2β, tedy

$$P_1 = \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\cdot 2\beta - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\sin 2\beta\right) = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{c^2\beta}{4} + \frac{c^2}{8}\sin 2\beta.$$

Podobně máme pro obsah P_2 druhé měsíčku rovnost

$$P_2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{c^2\alpha}{4} + \frac{c^2}{8}\sin 2\alpha.$$

Užitím vzorců: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$; $b = c\sin\beta = c\cos\alpha$ dostaneme

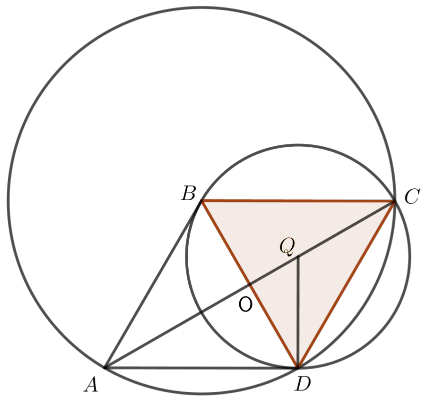
$$P_1 = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{c^2\beta}{4} + \frac{ab}{4}, \qquad P_2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{c^2\alpha}{4} + \frac{ab}{4}.$$

Protože $c^2 = a^2 + b^2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, je $P_1 + P_2 = \frac{ab}{2}$.

Poznámka. Ve výsledku se nevyskytuje číslo π, součet obsahů obou měsíčků se rovná obsahu. Tento výsledek dával naději matematikům starověku, kteří řešili tzv. problém kvadratury kruhu, tj. euklidovskými konstrukcemi sestrojit čtverec stejného obsahu jako daný kruh. Dnes je ale dokázáno,že tuto konstrukci kružítkem a pravítkem nelze provést.

Příklad 3. *(9, příklad číslo 53188)*

Máme rovnoběžník $ABCD$, ve kterém strana $|AB|$ a úhlopříčka $|BD|$ jsou rovné 1. Úhlopříčky mají poměr $1 : \sqrt{3}$ (obr. 2.5). Spočítejte plochu té části kružnice opsané kolem trojúhelníku BCD, která nepatří do kružnice opsané kolem trojúhelníku ADC.



Obrázek 2.5:

Řešení:

Předpokládejme, že $|AC| < |BD|$. Tedy $|AC| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Jestli O –průsečík úhlopříček rovnoběžníku $ABCD$, víme, že v trojúhelníku ABO:

$$|AB| = 1, |OB| = \frac{1}{2}, |AO| = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

což není možné, protože neplatí trojúhelníková nerovnost, tj. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} < 1$. Z toho plyne, že $|AC| > |BD|$ a $|AC| = \sqrt{3}$. Podle zadání víme, že $|BD| = 1$, podle vlastnosti rovnoběžníků můžeme říct, že $|CD| = |AB| = 1$. Pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku BOC spočítáme stranu $|BC| = 1$. Tehdy trojúhelník BDC je rovnostranný. Q je střed kružnice, opsané trojúhelníku BCD a leží na úsečce $|OC|$ a $\frac{|OC|}{|QO|} = 3$. Poloměr této kružnice je roven $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a obsah výseče DQC je rovna

$$\frac{1}{3}\pi\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = \frac{\pi}{9}.$$

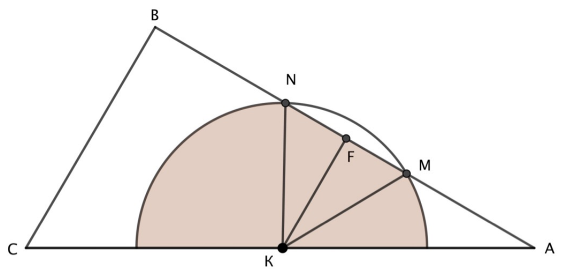
Když vezmeme daný obsah a odečteme od něj obsah trojúhelníku DQC, dostaneme obsah úseče $\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12}$. Dál se podíváme na kružnici, která je opsaná trojúhelníku ADC. Střed té kružnice je bod B a její poloměr je roven 1. Obsah výseče DBC je roven $\frac{\pi}{6}$. Po odečteni od obsahu výseče DBC plochy trojúhelníku DBC dostáváme obsah úseče $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Z toho následuje, že hledaná plocha je rovna:

$$\Big(\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12}\Big) - \Big(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$$

Příklad 4. *(10, příklad číslo 54350)*

Obsah trojúhelníku ABC je roven 1, strana $|AC| = 2|BC|$, bod K — střed strany $|AC|$. Kružnice se středem v bodě K protíná stranu $|AB|$ v bodech M a N, přičemž $|AM| = |MN| = |NB|$.(obr. 2.6) Spočítejte plochu té části trojúhelníku, která se nachází uvnitř kružnice.



Obrázek 2.6:

Řešení:

Označíme $|BC|$ jako a, r je poloměr kružnice. Tehdy $|AC| = 2a$. Nyní se podíváme na trojúhelník KMN. Protože $|KN| = |KM|$, víme, že trojúhelník KMN je rovnoramenný. Když sestrojíme F — kolmý průmět středu kružnice K na stranu $|AB|$, dostaneme výšku rovnoramenného trojúhelníku KMN, tím pádem podle vlastnosti výšky rovnoramenného trojúhelníku F bude střed úsečky $|MN|$, což znamená, že to bude i střed úsečky $|AB|$. Když K je střed úsečky $|AC|$ a F je střed úsečky $|AB|$, je $|KF|$ střední příčkou trojúhelníku ABC. Z čehož následuje, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B
Z toho důvodu, že $|AC| = 2|BC|$, následuje další rovnost:

$$\measuredangle CAB = \frac{\pi}{6}, \text{podle definice kosinu získáme } \ |AB| = a\sqrt{3}$$

Úsečka $|MN|$ je třetinou úsečky $|AB|$ takže dostáváme:

$$|MN| = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$|FM| = \frac{1}{2}|MN| = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$|KF| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{a}{2}, \ \ \measuredangle FKM = \frac{\pi}{6}$$

$$r = |KM| = 2|FM| = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$S_{\triangle NKM} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Protože je $r < |CK|$ ($\frac{a\sqrt{3}}{3} < a$), průmer kružnice se nachází na úsečce $|AC|$. Kromě toho, vzdálenost mezi bodem K a přeponou $|BC|$ je větší, než poloměr polokružnice ($\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a\sqrt{3}}{3}$). Z toho následuje, že hledaný obsah je roven rozdílu obsahu polokružnice a krohuvé úseči, která je oddělená od polokružnice tětivou $|MN|$:

$$\frac{\pi r^2}{2} - \Big(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\Big) = r^2\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big) = \frac{1}{3}a^2\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big)$$

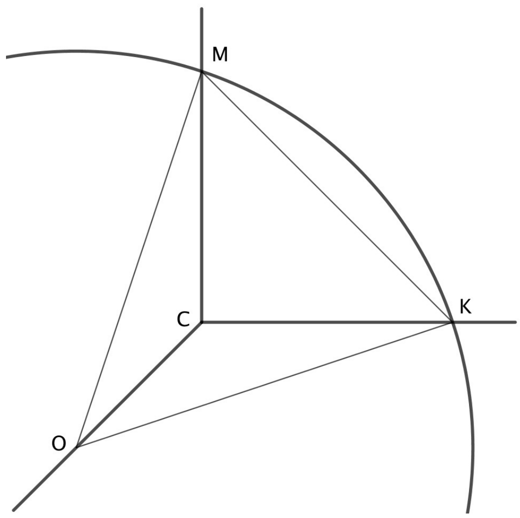
.

My víme, že $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 1$, takže $a^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Z toho následuje, že hledaný obsah se rovná

$$\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{6}$$

Příklad 5. *(11, příklad číslo 5)*

Máme pravý úhel s vrcholem C. Na prodloužení osy úhlu máme bod O tak, že $|OC| = \sqrt{2}$. Se středem v bodě O je sestrojena kružnice o poloměru 2.(obr. 2.7) Spočítejte obsah útvaru, který je omezený rameny úhlů a kruhové úseče mezi nimi.



Obrázek 2.7:

Řešení:

Nechť K a M jsou průsečíky kružnice s rameny úhlů. Rozdělíme útvar, jehož plochu hledáme, na kruhovou úseč $|MK|$ a trojúhelník CMK a spočítáme nejdřív plochy S_1 a S_2 těchto útvarů.

První spočítáme plochu kruhové úseče. V trojúhelníku OCK známe $|OC| = \sqrt{2}$, $|OK| = 2$, $\measuredangle OCK = \frac{3\pi}{4}$.

Pro daný trojúhelník použijeme sinovou větu:

$$\frac{|OK|}{\sin \measuredangle OCK} = \frac{|OC|}{\sin \measuredangle CKO}$$

Po dosázení přesných hodnot dostáváme:

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \measuredangle CKO}$$

A po úpravě získáme:

$$\sin \measuredangle CKO = \frac{1}{2}$$

$$\measuredangle CKO = \frac{\pi}{6}; \measuredangle CKO = \frac{5\pi}{6}$$

(při výsledku $\frac{5\pi}{6}$, úhel $\measuredangle MOK$ vyjde záporný, takže našim účelům vyhovyje řešení $\measuredangle CKO = \frac{\pi}{6}$) Z tohoto následuje, že:

$$\measuredangle COK = \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}; \quad \measuredangle MOK = \frac{\pi}{6}$$

Plocha kruhové úseče $|MK|$ je rovna:

$$S_1 = \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\pi}{3} - 1$$

Spočítáme teď plochu trojúhelníku CMK. Opětovným použitím sinové věty dostaneme vztah:

$$\frac{|CK|}{\sin \measuredangle COK} = \frac{|OK|}{\sin \measuredangle OCK}$$

Pomocí úprav spočítáme délku $|CK|$:

$$|CK| = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

To znamená, že plocha trojúhelníku CMK je rovna

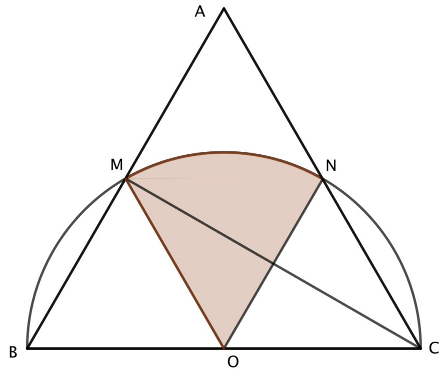
$$S_2 = S_{CMK} = \frac{|CK|^2}{2} = 4\sin^2\frac{\pi}{12} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

A z toho následuje, že plocha hledaného útvaru se rovna:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}.$$

Příklad 6. *(12, příklad číslo 52935)*

Na straně $|BC|$ rovnostranného trojúhelníku ABC, jako na průměru, je sestrojená polokružnice, která dělí trojúhelník na dvě části.(obr. 2.8) Strana trojúhelníku je rovna a. Spočítejte plochu té části trojúhelníku, která je mimo kružnici.



Obrázek 2.8:

Řešení:

Nechť polokružnice se středem O, která je sestrojená na straně $|BC|$ rovnostranného trojúhelníku ABC jako na průměru, protíná jeho strany $|AB|$ a $|AC|$ v bodech M a N. Potom $|CM|$ je výška trojúhelníku ABC. Proto M je střed $|AB|$ a trojúhelník MOB je podobný trojúhelníku ACB s koeficientem $\frac{1}{2}$. Takže $S_{\triangle MOB} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$. Stejně i $S_{\triangle NOC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

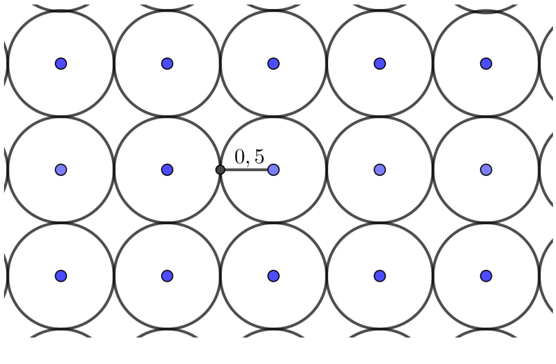
Proto, že $\measuredangle MON = \frac{\pi}{3}$, je plocha části MON jednou šestinou plochy kružnice o poloměru $\frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{24}$. Z toho následuje vztah pro hlednou plochu :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{24} = \frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{24}$$

.

Příklad 7. *(33, příklad číslo 108995)*

Dokažte, že v kruhu o poloměru 10 nelze umístit 400 teček tak, aby vzdálenost mezi každými dvěma byla větší než 1.



Obrázek 2.9:

Řešení:

Kruh o poloměru 10 má plochu 100 π . Představme si 400 teček umístěných vedle sebe tak, aby vzdálenost mezi nimi byla vždy 1. Potom uděláme stejný počet kruhů se středy v těch tečkách a poloměrem 0,5. Tím pádem se tyto kruhy budou dotýkat. Plocha 400 takových kruhů o poloměru 0,5 je rovna $400 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 = 100\pi$. Při tom, že se kruhy dotýkají, mezi nimi vždy bude nepokryté místo (určitá mezera, viz obrazek 2.9). Takže plocha, pokrytá kruhy se středem v tečkách a poloměrem o polovině vzdálenosti mezi nimi, bude vždy větší, než plocha kruhu o poloměru 10. Takže je zřejmé, že nemůžeme dát do kruhu 400 teček tak, aby vzdálenost mezi nimi byla větší než 1.

Příklad 8. *(33, příklad číslo 109035)*
Dokažte, že existuje čára délky $\sqrt{2\pi S} + 1$, kterou není možné překrýt plochým konvexním útvarem s plochou S.

Řešení:

Dokážeme, že takovou čárou je polokružnice. Konvexní útvar, který překrývá polokružnici musí obsahovat polokruh, omezený danou polokružnici, jinak by útvar nemohl být konvexní. Vezmeme-li polokružnici s délkou $\sqrt{2\pi S}$, plocha odpovídajicího polokruhu bude rovna S. Opravdu, plocha polokruhu je rovna $\frac{\pi r^2}{2}$, délka polokružnici $\sqrt{2\pi S} = \pi r$. Po tom, jak z poslední rovnici najdeme poloměr dané polokružnice a dosadíme $r^2 = \frac{2S}{\pi}$ do vzorce plochy polokruhu, dostaneme naše tvrzení. Takže abychom překryli polokružnici větší délky, než $\sqrt{2\pi S} + 1$, potřebujeme útvar větší plochy, než S.

Příklad 9. *(17, příklad číslo 116591)*

Je dán konvexní pětiúhelník. Petr si do sešitu vypsal hodnoty sinu všech úhlů, a Honza — hodnoty kosinu všech úhlů. Zjistilo se, že mezi čísly, které vypsal Petr, jsou nejvíce tři různé. Mohou všechna čísla, které vypsal Honza, být různá?

Řešení:

Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že všechny Honzou vypsané hodnoty kosinu jsou různé. To znamená, že všechny úhly pětiúhelníku jsou různá čísla z intervalu $(0; \pi)$.

Z toho plyne, že mezi čísly, která Petr vypsal nebudou 3 stejná, protože v tomhle intervalu nejsou 3 různé úhly se stejnými hodnotami sinu.

To znamená, že Petr má nejvýše 2 páry stejných čísel: $\sin\alpha = \sin\beta$ a $\sin\gamma = \sin\delta$, přitom $\alpha = \pi - \beta, \gamma = \pi - \delta$.

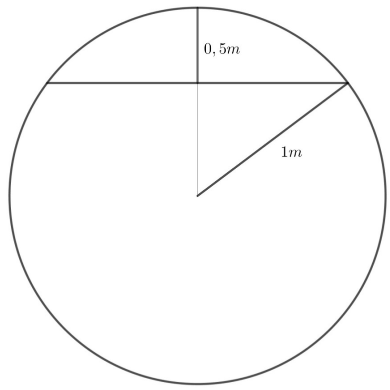
V tom případě 5. úhel pětiúhelníku by měl být roven $3\pi - (\alpha+\beta) - (\gamma+\delta) = \pi$, což nelze, tudíž dochází ke sporu. To znamená, že všechna čísla, která Honza vypsal nemůžou být různá.

2.2 Stereometrie

V druhé části kapitoly si ukážeme stereometrické úlohy, převážně na rotační tělesa, kde se bez čísla π nedá obejít. Jedna z úloh nás seznámí se sférickým trojúhelníkem a výpočtem jeho plochy. Poslední úloha nám ukáže, jak se dá řešit slovní úlohy pomocí geometrických vztahu a s použitím čísla π.

Příklad 10. *(13)*

Cisterna tvaru válce (položeného na bok) je dlouhá 5 *m.(obr. 2.10) Jaký objem veze, jestliže její poloměr je* 1 *m a není naplněna až po okraj. Výška hladiny je* 0,5 *m pod výškou strany.*



Obrázek 2.10:

Řešení:

Objem převážené látky získáme jako součin plochy podstavy válce, které se látka dotýká, a délky cisterny. Plocha podstavy, které se převážená látka nedotýká, má tvar kruhové úseče, proto výsledný obsah podstavy bude roven obsahu kruhu o poloměru 1 m mínus obsah kruhové výseče o výšce 0,5 m

$$S_p = \pi r^2 - (r^2 \arccos\Big(\frac{r-h}{r}\Big) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2})) =$$

$$= \pi \cdot 1^2 - (1^2 \arccos\Big(\frac{1-0{,}5}{1}\Big) - (1-0{,}5)\sqrt{2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 - 0{,}5^2}) =$$

$$= \pi - \arccos 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}75}.$$

Objem zjistíme po dosazení do vzorce

$$V = S_p \cdot v = (\pi - \arccos 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}75}) \cdot 5 \approx 12{,}64 cm^3$$

Další úloha je ukázkou, že stereometrické výpočty lze provádět i s pomocí nekonečných geometrických řad.

Definice 3. *(19) Je dána posloupnost a_n. Výraz tvaru*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

se nazývá řada. Členy posloupnosti se nazývají členy řady.

K výpočtu budeme potřebovat následujíci vzorce:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q,$$

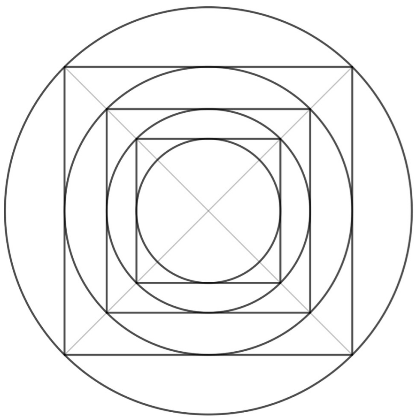
kde q je kvocient geometrické řády.

$$S_n = \frac{a_1}{1-q},$$

kde S_n je součet nekonečné řady.

Příklad 11. *(13)*

Mějme kouli, do níž budeme vepisovat střídavě krychle a koule. Krychle se svými vrcholy dotýká pláště koule, vepisovaná koule se zase dotýká středů stran krychle. (obr. 2.3) Vypočtěte obecně součet povrchů vzniklých těles.



Obrázek 2.11:

Řešení:

Koule má poloměr r, jestliže do ní vepíšeme krychli, tělesová uhlopříčka krychle bude rovna dvojnásobku poloměru opsané koule, tedy $a\sqrt{3} = 2r \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Nyní, když do této vzniklé krychle vepíšeme kouli, její poloměr bude roven polovině hrany, tedy $r = \frac{a}{2}$. Touto cestou nám vznikne posloupnost.

Kroky	**Koule(r)**	**Krychle(a)**
1.	r	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$
2.	$\frac{\sqrt{3}}{3}r$	$\frac{2}{3}r$
3.	$\frac{1}{3}r$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\frac{r}{\sqrt{3}^{n-1}}$	$\frac{2r}{\sqrt{3}^{n}}$

Na základě této tabulky můžeme dopočíst povrchy těles a určit jejich součet. Věnujeme se nejdříve kouli, povrch vypočteme vzorcem $S = 4\pi r^2$:

$$S_1 = 4\pi r^2, S_2 = 4\pi\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}r\Big)^2 = \frac{4}{3}\pi r^2, S_3 = 4\pi\Big(\frac{1}{3}r\Big)^2 = \frac{4}{9}\pi r^2$$

Nyní určíme kvocient:

$$q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{3} < 1$$

A teď můžeme spočítat součet nekonečné řády:

$$S_n = \frac{S_1}{1-q} = \frac{4\pi r^2}{1-\frac{1}{3}} = 6\pi r^2.$$

S_n je součet ploch všech kouli a rovná se $6\pi r^2$.

To stejné provedeme s krychlí, $S = 6a^2$:

$$S_4 = 6a^2 = 6\Big(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\Big)^2 = 8r^2, S_5 = 6\Big(\frac{2}{3}r\Big)^2 = \frac{8}{3}r^2, S_6 = 6\Big(\frac{2\sqrt{3}}{9}r\Big)^2 = \frac{8}{9}r^2$$

Kvocient a součet počítáme stejným způsobem:

$$q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{8}{3}r^2}{8r^2} = \frac{1}{3} < 1$$

$$S_k = \frac{S_4}{1-q} = \frac{8r^2}{1-\frac{1}{3}} = 12r^2.$$

S_k je součet ploch všech krychli a rovná se $12r^2$.
Výsledný součet tedy je roven $S = S_n + S_k = 6\pi r^2 + 12r^2 = 6r^2(\pi + 2)$.

Příklad 12. *(14, str. 38 příklad číslo 33)*

Máme daný kužel. Obsah jeho pláště se rovná 15. *Po rozvinutí plášť kužele dává čtvrtkruh. Určeme objem kužele.*

Řešení:

Označíme obsah pláště jako S, poloměr pláště jako h a poloměr podstavy kužele jako r. Po rozvinutí pláště, úhel mezi jeho bočními stranami bude $90°$ $\Big(\frac{\pi}{2}\text{ rad}\Big)$. Obsah pláště tedy můžeme vyjádřit dvojím způsobem:

$$S : \pi h^2 = \frac{\pi}{2} : 2\pi, \qquad S = 2\pi \cdot r \cdot \frac{1}{2}h,$$

tj.

$$S = \frac{1}{4}\pi h^2 \quad ; \quad S = \pi r h. \tag{2.1}$$

Platí tedy

$$\frac{1}{4}\pi h^2 = \pi r h,$$

odkud

$$r = \frac{1}{4}h;$$

ze vztahů 2.1 dostaneme

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

takže

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Výšku vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{h^2 - r^2} = \sqrt{\frac{4S}{\pi} - \frac{1}{4}\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{15S}{4\pi}}.$$

Hledaný objem kužele

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{4}\frac{S}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15S}{\pi}} = \frac{S}{24}\sqrt{\frac{15S}{\pi}};$$

pro $S = 15\pi$ dostaneme

$$V = \frac{15\pi}{24}\sqrt{\frac{15 \cdot 15\pi}{\pi}} = \frac{255\pi}{24} = \frac{75\pi}{8}.$$

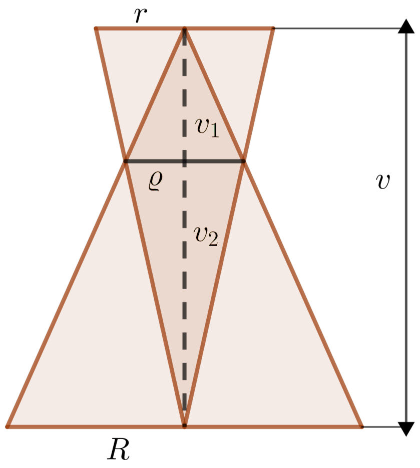
Příklad 13. *(14, str. 42 příklad číslo 38)*

Dva rotační kužele stejné výšky v, poloměru R a r jsou vraženy vrcholy do sebe až k podstavám (obr. 2.12). Určeme objem společné části.

Řešení:

Použijeme-li označení podle obrázku, platí

$$V = \pi\varrho^2\frac{1}{3}v_1 + \pi\varrho^2\frac{1}{3}v_2 = \pi\varrho^2\frac{1}{3}v.$$



Obrázek 2.12:

Úměrnost stejnolehlých stran v podobných trojúhelnících dává úměry:

$$\varrho : R = v_1 : v, \tag{2.2}$$

$$\varrho : r = (v - v_1) : v. \tag{2.3}$$

Z 2.2 plyne $(v - v_1) : v = (R - \varrho) : R$. Zároveň z 2.3 máme $(v - v_1) : v = \varrho : r$. Platí tedy

$$(R - \varrho) : R = \varrho : r,$$

odkud vyjádříme

$$\varrho = \frac{Rr}{R + r}.$$

Toto dosadíme a máme

$$V = \frac{\pi v}{3} \frac{R^2 r^2}{(R + r)^2}.$$

Příklad 14. *(14, str. 62 příklad číslo 61)*

Koule povrchu S_k s poloměrem r se má přeměnit v rotační válec stejného objemu, jehož plocha pláště S_v se rovná povrchu koule S_k. Určete ploměr a výšku válce.

Řešení:

Oznacíme poloměr válce jako ϱ a jeho výšku jako h.

$$S_k = 4\pi r^2,$$

odkud

$$r = \sqrt{\frac{S_k}{4\pi}},$$

a tedy

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3}\frac{S_k}{4\pi}\sqrt{\frac{S_k}{4\pi}} = \frac{S_k}{6}\sqrt{\frac{S_k}{\pi}}.$$

Podle daných podmínek $V_k = V_v = \pi\varrho^2 h$, tj.

$$\frac{1}{6}S_k\sqrt{\frac{S_k}{\pi}} = \pi\varrho^2 h. \tag{2.4}$$

Kromě toho

$$S_k = S_v = 2\pi\varrho h$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{S_k}{\pi}} = \frac{1}{2}\varrho,$$

odkud

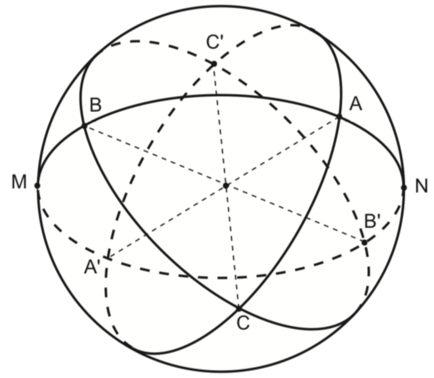
$$\varrho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{S_k}{\pi}}.$$

Z rovnice 2.4 vyjde nyní

$$h = \frac{S_k}{2\pi\varrho} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S_k}{\pi}}.$$

Definice 4. *(21) Sférický trojúhelník je menší část kulové plochy ohraničená oblouky tří hlavních kružnic. Má tři vrcholy, tři strany a tři úhly. Strany a úhly sferického trojúhelníku vyjadřujeme v míře stupňové nebo obloukové.*

Příklad 15. *(15, str. 43)*
Odvoďte obecný vzorec pro plochu S sférického trojúhelníku ABC.



Obrázek 2.13:

Řešení:

Rovina $ABMA'B'N$ (obr. 2.13) dělí kouli na dvě polosféry, v jedné ze kterých se nachází trojúhelník ABC. Pokud je poloměr koule roven R, je plocha polosféry rovna $2\pi R^2$. Na obrázku se plocha polosféry obsahující C skládá z ploch následujících útvarů: sférického segmentu $ABMA'CA$, sférického segmentu $BCB'NAB$

bez trojúhelníku ABC a sférického segmetu $CA'C'B'C$ bez trojúhelníku $A'B'C'$. Jestli se úhly v trojúhelníku ABC měří v radiánech, plochy každého ze zadaných segmentů se rovnají $2AR^2, 2BR^2$,$2CR^2$ odpovídajícím způsobem. Trojúhelník $A'B'C'$ je stejně velký jako trojúhelník ABC, proto je možné napsat rovnici:

$$2\pi R^2 = 2AR^2 + 2BR^2 - S + 2CR^2 - S$$

Odkud plyne, že se plocha sferického trojúhelníku ABC rovná

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

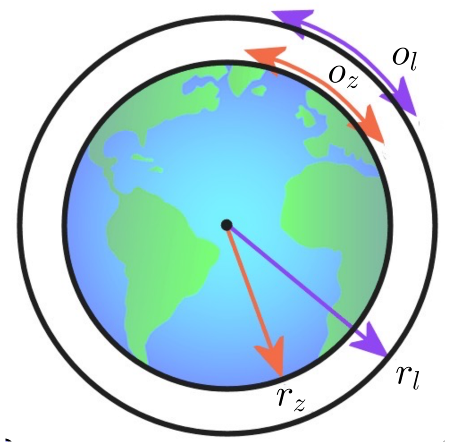
kde jsou úhly vyjádřeny v radiánech.

Příklad 16. *(16, str. 208, příklad číslo 512)*

Vezmeme-li planetu Zemi jako ideální kouli a vezmeme lano, které je dlouhé jako obvod po rovníku. Toto lano prodloužíme o 1 metr a zvedneme ho rovnoměrně o kousek po délce celého rovníku. Vejde-li se pod zvětšené lano tenisový míček, basketbalový míček nebo pinpongový míček?

Řešení:

Nechť o_z je obvod Země, o_l je nová délka lana, r_z je poloměr Země a r_l je vzdálenost od středu Země k lanu (obr. 2.14). Hledáme $h = r_l - r_z$. Nechť x je délka, o kterou zvětšíme lano, v našem případě 1 m. Navíc už víme, že vztah mezi obvodem kruhu a jeho poloměrem je obecně dán $r = \frac{o}{2\pi}$, což je jediný vzorec, který potřebujeme vědět, abychom vyřešili tuto úlohu.



Obrázek 2.14:

Pomocí definice čísla π můžeme vyjádřit vztah:

$$r_l = \frac{o_l}{2\pi}$$

Větší poloměr můžeme představit jako součet menšího poloměru a délky h—jejích rozdílu.

$$r_z + h = r_l = \frac{o_l}{2\pi} = \frac{o_z + x}{2\pi}$$

Jinak vztah můžeme rozepsat takto:

$$r_z + h = \frac{o_z}{2\pi} + \frac{x}{2\pi}$$

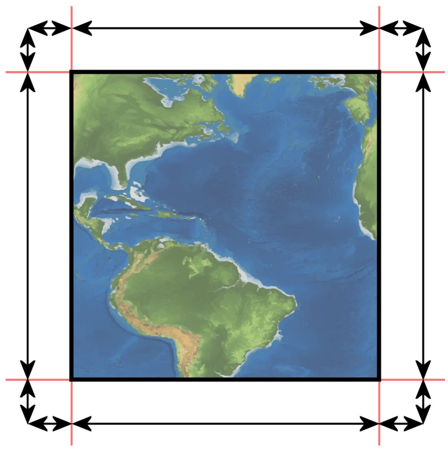
Podle definici čísla π pro menší kruh dostáváme:

$$r_z + h = r_z + \frac{x}{2\pi}$$

Z toho můžeme vyjádřit hledanou délku h:

$$h = \frac{x}{2\pi}$$

Klíčovou věcí, kterou je třeba poznamenat, je to, že poloměr nebo obvod Země se ve výsledku vůbec neobjevují, vypadly z rovnic. Ve skutečnosti by odpověď byla stejná, kdybychom si kolem pasu přivázali provaz a přidali k tomu 1 m. Dalším obrázkem se pokusím ukázat problém z jiného úhlu pohledu.



Obrázek 2.15:

Ben Arnold přišel s tímto zajímavým vysvětlením. Cílem je představit si, že Země je kostka nebo jen čtverec (obr. 2.15) a zeptáme se: jestli k délce lana přidáme 8 m o kolik metrů by se to lano zvedlo nad čtvercovou Zemi? Z diagramu je jasné, že je to o 1 m.

Kapitola 3

Goniometrické rovnice a nerovnice

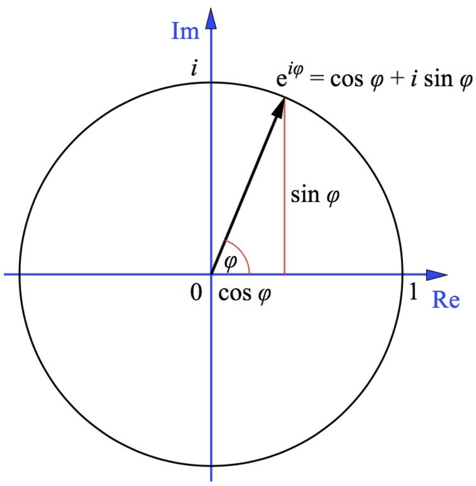
V této kapitole podrobněji probereme roli čísla π v goniometrických rovnicích a nerovnicích. Na začátek uvedeme trochu teorie.

Existují dvě obecně používané jednotky k měření úhlů. Známější z nich je stupeň (stupňová míra). Obvod kružnice rozdělíme na 360 stejných částí. Každý z takto vzniklých oblouků vymezuje úhel 1°. (Pravý úhel je 90°.)

Druhá používaná jednotka je radián (oblouková míra). Je definován na jednotkové kružnici (kružnici s poloměrem 1). Vrchol úhlu umístíme do středu kružnice. Úhel potom určí na kružnici kruhový oblouk. Délka toho oblouku je pak velikost příslušného úhlu v radiánech. Převádět jednu jednotku druhou je snadné. Obvod jednotkové kružnice je 2π. To znamená, že $360° = 2\pi$ rad. Takže

$$1° = \frac{\pi}{180}\text{ rad} \quad \text{a} \quad 1\text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

(24, str. 78)



Obrázek 3.1: Cyklometrické funkce

Číslo π je často definováno pomocí goniometrických a cyklometrických funkcí (obr. 3.1). Například: $\sin(0) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nebo $2\arccos(0) = \pi$. Rozšíření cyklometrickych funkcí jako mocninnych řad je jeden ze způsobů, jak odvodit nekonečné řady pro π.

V některých rovnicích jako pomocnou sílou používáme známý vztah : $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$.

Příklad 17. *(25)*

$\sin 5x + \sin 9x = 2$.

Řešení:

Ze středoškolské matematiky víme, že definiční obor sinu je $\langle -1; 1\rangle$, takže daná rovnost může být splněná jenom v tom případě, když $\sin 5x$ i $\sin 9x$ jsou oba rovné 1. Dostáváme soustavu rovnic:

$$\sin 5x = 1,$$
$$\sin 9x = 1$$

Takže musí být splněné rovnice:

$$\begin{array}{c} 5x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 9x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \hline x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}, \end{array}$$

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}, \quad n,k \in \mathbb{Z}$$

Po dosazení máme:
$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}.$$

Vynásobíme obě strany 90 a vydělíme π:

$$9 + 36n = 5 + 20k$$

$$36n + 4 = 20k$$
$$9n + 1 = 5k$$

Levá čast, jak vidíme, musí být dělitelná 5. Číslo n při dělení 5 může mít zbytky od 0 do 4, jinak řečeno, číslo n můžeme přepsat do jedné následujících pěti variant: $5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4; m \in \mathbb{Z}$. Pro to, aby se $9n+1$ dělilo 5, je vhodné jenom $n = 5m+1$.

Hledat k už nepotřebujeme. Hned můžeme najít x:

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m+1)}{5} + 2\pi m.$$

Výsledek je:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Příklad 18. *(26)*
V oboru reálných čísel řešte goniometrickou rovnici

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Řešení:

Využijeme základní vztahy pro goniometrické funkce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

a odvodíme vztahy

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Zadanou rovnici upravíme pomocí danych vztahů na tvar

$$\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 + (4\cos^3 x - 3\cos x)^2 = 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + 16\cos^6 x - 24\cos^3 x\cos x + 9\cos^2 x &= 1, \\ 16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x &= 0, \\ 2\cos^2 x(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost splňují ta x, pro která platí:

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0.$$

Rovnost $\cos x = 0$ splňují $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
Rovnost $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$ vyřešíme pomocí substituce $t = \cos^2 x$. Řešíme tedy kvadratickou rovnici

$$8t^2 - 10t + 3 = 0,$$

jejímž řešením je $t_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2}{16} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Řešením rovnice $\cos^2 = \frac{1}{2}$ jsou ta x, pro která platí $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \text{kde} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řešením rovnice $\cos^2 = \frac{3}{4}$ jsou ta x, pro která platí $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, tedy

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ a } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \text{kde} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

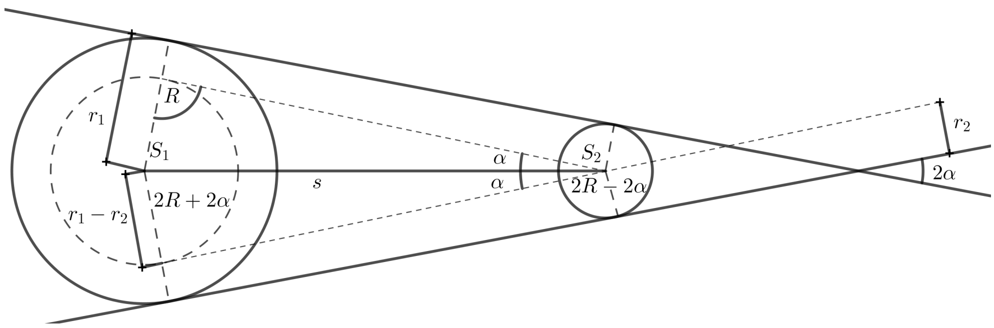
V intervalu $\langle 0{,}2\pi\,\rangle$ jsou to úhly

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$$

a další řešení dostaneme přičtením násobků 2π.

Příklad 19. *(14, str. 128 příklad číslo 142)*

Jak dlouhého řemene je třeba na převod s opásáním dvou řemenic, jejichž poloměry jsou r_1, r_2 při vzdálenosti středu s: a) s řemenem nezkříženým; b) s řemenem zkříženým?



Obrázek 3.2:

Řešení:

a) Na obr. 3.2 vidíme, že $\sin\alpha = \dfrac{r_1 - r_2}{s}$; z toho lze určit α. Délku řemene nyní určíme jako součet délek těch jeho částí, které jsou opásány na řemenicích, a těch částí, které tvoří společné tečny obou řemenic:

$$d = \frac{2\pi r_1(180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi r_2(180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + 2s\cos\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{90^\circ}[r_1(90^\circ + \alpha) + r_2(90^\circ - \alpha)] + 2s\cos\alpha.$$

b) V případě zkříženého řemene postupujeme podle obr.. Na něm je vidět, že $\sin\beta = \dfrac{r_1 + r_2}{s}$; z toho lze určit velikost úhlu β.

Délku řemene nyní vypočteme podoně jako v případě a):

$$d = \frac{2\pi r_1(180^\circ + 2\beta)}{360^\circ} + \frac{2\pi r_2(180^\circ + 2\beta)}{360^\circ} + 2s\cos\beta =$$

$$= \frac{\pi(90^\circ + \beta)}{90^\circ}(r_1 + r_2) + 2s\cos\beta.$$

Příklad 20. *(18, příklad číslo 105215) Jaké hodnoty může nabývát rozdíl rostoucí aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_5$, všechny členy nacházející se na intervalu $\langle 0; \frac{3\pi}{2}\rangle$, jestli čísla $\cos a_1, \cos a_2, \cos a_3$ a také čísla $\sin a_3, \sin a_4, \sin a_5$ v určitém pořadí taky tvoří aritmetické posloupnosti.*

Řešení:

Pro hledaný rozdíl δ rostoucí posloupnosti

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in [0; \frac{3\pi}{2}]$$

dostáváme $\delta \in (0; \frac{\pi}{2})$ a $\cos\delta \neq 1$. V našem případě můžou nastat dvě možnosti: když třetí člen posloupnosti a_3 bude menší nebo roven než π a když bude větší nebo roven $\frac{\pi}{2}$.

1. $\alpha_3 \leq \pi$, tehdy první tři členy posloupnosti se budou nacházet na intervalu od 0 do π a kvůli tomu, že posloupnost je rostouci budou mít následující vztah: $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leq \pi$. Při tom kosinusy danych členů budou tvořit klesající posloupnost a jejích vztah bude vypadat takto: $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cos\alpha_3$. Z předchozího vztahu můžeme vyjádřit kosinus druhého členu posloupnosti a podle goniometrcikých vzorců rozepsat takto: $2\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_3 = 2\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} = 2\cos\alpha_2\cos\delta$. Proto $\cos\alpha_2 = 0$ a podle toho $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. (A to znamená, že $\alpha_3 \leq \frac{\pi}{2}$, takže je možný i druhý případ).

2. $\alpha_3 \geq \frac{\pi}{2}$. Stejným způsobem jako v prvním případě můžeme určit následující vztah, tentokrát pro sinusy, které na danem intervalu taky tvoří klesající posloupnost: $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 \leq \frac{3\pi}{2}$ a $\sin\alpha_3 > \sin\alpha_4 > \sin\alpha_5$. Vyjádříme značení pro sinus čtvrtého členu posloupnosti: $2\sin\alpha_4 = \sin\alpha_3 + \sin\alpha_5 = 2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_5}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_5}{2} = 2\sin\alpha_4\cos\delta$, proto $\sin\alpha_4 = 0$ a dostaneme $\alpha_4 = \pi$. (A to znamená, že $\alpha_3 \geq \pi$, takže je možný i první případ).

Z toho následuje, že oba případy jsou možné, proto $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha_4 = \pi$, odkud $\delta = \frac{\pi}{4}$

Kapitola 4

Číslo π, Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost

V této kapitole si ukážeme vztahy mezi konstantami π, φ a Fibonacciho posloupnosti. Nejprve definujeme Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost.

Definice 5. *(22) Rozdělíme-li libovolnou úsečku na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr délky větší části úsečky ku délce části menší, je tato úsečka rozdělena právě tzv. „zlatým řezem“.*

Tento poměr označíme řeckým písmenem φ(fi). Číslo φ se nazývá zlaté číslo a rovna se $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}61803$

Definice 6. *(23) Fibonacciho posloupnost je posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ celých čísel splňující rekurenci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro všechna $n = 0,1,2,\dots$ s počáteční podmínkou $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Jejími prvními členy jsou* $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\dots$

4.1 Číslo π ve Fibonacciho posloupnosti

V této části kapitoly se budeme zabývat tím, jak souvisejí členy Fibonacciho posloupnosti s číslem π. K tomu však potřebujeme znát ještě následující dvě vlastnosti zmíněné posloupnosti.

Pro všechna přirozená čísla n platí:

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^{n+1} \tag{4.1}$$

Pro všechna přirozená čísla n platí:

$$F_{n+1} F_{n+2} = F_n F_{n+3} + (-1)^{n+1} \tag{4.2}$$

Z rovnosti 4.2 vypočteme:

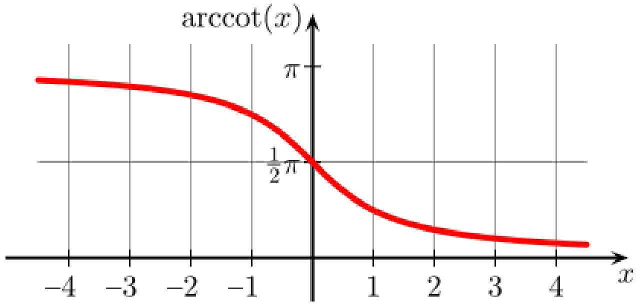
$$F_{n+3} = [F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+2}]/F_n = [F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+1}]/(F_{n+2} - F_{n+1})$$

a v získaném vztahu položíme $n = 2k$:

$$F_{2k+3} = (F_{2k+1}F_{2k+2} + 1)/(F_{2k+2} - F_{2k+1}) \tag{4.3}$$

Proč jsme vlastně tuto poslední úpravu prováděli?

Funkce cotg(x) (obr. 4.1) je prostá v intervalu $(0,\pi)$ a k ní v tomto intervalu existuje funkce inverzní; nazývá se arkuskotangens a značí se arccotg. Její definiční obor je interval $(-\infty,\infty)$, oborem hodnot je interval $(0,\pi)$; její graf je na obrázku. Pro naše účely je důležitý následující vztah, který platí pro všechna $x_2 > x_1$:



Obrázek 4.1: Funkce arccotg

$$\text{arccotg} x_1 - \text{arccotg} x_2 = \text{arccotg}\frac{(x_2x_1+1)}{x_2-x_1}.$$

Podmínka $x_1 < x_2$ bude splněna,položme-li v této rovnosti $x_1 = F_{2k+1}, x_2 = F_{2k+2}$. Potom platí

$$\text{arccotg} F_{2k+1} - \text{arccotg} F_{2k+2} = \text{arccotg}\frac{(F_{2k+2}F_{2k+1}+1)}{(F_{2k+2}-F_{2k+1})};$$

pravá strana této rovnosti je rovna arccotgF_{2k+3} (podle vztahu 4.3), takže platí pro všechna celá nezáporná čísla k:

$$\text{arccotg} F_{2k+3} = \text{arccotg} F_{2k+1} - \text{arccotg} F_{2k+2}.$$

V tomto vztahu položíme za k postupně čísla $0, 1, 2, \ldots, n$, čímž vznikne $(n+1)$ následujících rovností:

$$\begin{array}{lr}
k = 0\ldots & \text{arccotg } F_3 = \text{arccotg } F_1 - \text{arccotg } F_2 \\
k = 1\ldots & \text{arccotg } F_5 = \text{arccotg } F_3 - \text{arccotg } F_4 \\
k = 2\ldots & \text{arccotg } F_7 = \text{arccotg } F_5 - \text{arccotg } F_6 \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k = n\ldots & \text{arccotg } F_{2n+3} = \text{arccotg } F_{2n+1} - F_{2n+2}.
\end{array}$$

Sečtením dostaneme:

$$\text{arccotg } F_{2n+3} =$$
$$= \text{arccotg } F_1 - (\text{arccotg } F_2 + \text{arccotg } F_4 + \text{arccotg } F_6 + \ldots + \text{arccotg } F_{2n+2}) =$$
$$= \tfrac{\pi}{4} - \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \text{arccotg } F_{2k},$$

neboť

$$\text{arccotg } F_1 = \text{arccotg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Po utvoření limity pro n jdoucí do nekonečna výrazu na levé i pravé straně této rovnosti vznikne rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} F_{2n+3} = \frac{\pi}{4} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arccotg} F_{2k},$$

odkud s ohledem na to, že

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} F_{2n+3} = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arccotg} F_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k},$$

dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k} = \operatorname{arccotg} F_2 + \operatorname{arccotg} F_4 + \operatorname{arccotg} F_6 + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

neboli

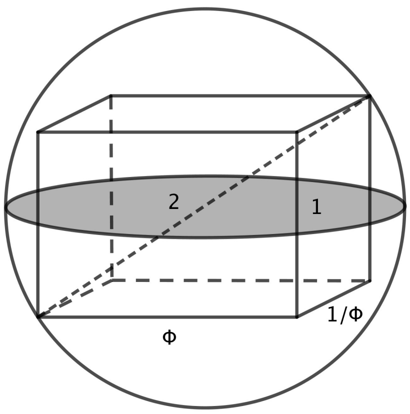
$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arccotg} 2 + \operatorname{arccotg} 5 + \operatorname{arccotg} 13 + \operatorname{arccotg} 34 + \ldots,$$

kde k-tým členem této nekonečné řady je arkuskotangens čísla, které je $2k$-tým členem Fibonacciho posloupnosti. (27, str. 8)

4.2 Vztah mezi číslem π a Zlatým řezem

Poměr zlatého řezu často bývá používán malíři a architekty. Leonardo Da Vinchi objevil φ (označení pro zlatý řez) v poměrech lidského těla. Starořecký sochař Fidij používal zlatý řez při ozdobě Pantheonu. Na počest Fidije zlatý řez občas značí písmenem φ.

Z uvedené rovnosti následuje, že $\varphi^2 = \varphi + 1$ a $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.



Obrázek 4.2: Zlatý kvádr

Zlatým kvádrem se jmenuje obdélníkový rovnoběžnostěn s hranami $\varphi, 1, \frac{1}{\varphi}$ (obr. 4.2). Jeho celá plocha S je rovna 4φ:

$$S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$$

$$S = 2\varphi + 2\frac{1}{\varphi} + 2\varphi\frac{1}{\varphi} = 2\varphi + 2\frac{1}{\varphi} + 2$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

$$S = 2\varphi + 2(\varphi - 1) + 2 = 4\varphi$$

a úhlopříčka D je rovna 2:

$$D = \sqrt{\varphi^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2}$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = 2$$

Odkud následuje, že plocha sféry, opsané kolem „zlatého kvádru“ je rovna 4π. (Použili jsme vzorec: $S = 4\pi r^2$)

Z toho je vidět, že vztah dané plochy ku ploše samotného kvádru je rovno $\frac{\pi}{\varphi}$.(28, str. 116-124)

4.3 Vztahy mezi číslami π, φ a e

Matematici se od dávné doby snažili najít vztah mezi čísly π a φ. Ale vzorce s těmito konstantami se často neobjevovaly, což se dá vysvětlit různými vlastnosti daných iracionálních čísel. Číslo φ je algebraicke číslo (je kořenem polynomu $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$), a iracionální číslo π je, jak už víme, transcendentní číslo (a nemůže být kořenem polynomu s realnými koeficienty). Byl objeven například trojúhelník s úhlami 90°, 54° a 36°. Poměr větší odvěsny k přeponě v tomhle trojúhelníku je roven polovině zlatého poměru $\frac{\varphi}{2}$. Z čeho následuje:

$$\varphi = 2 \cdot \cos 36^\circ = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{5},$$

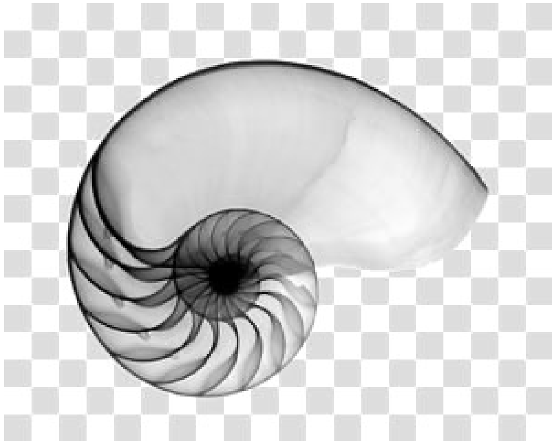
Tohle je jeden ze vzorců, který spojuje konstanty π a φ, který naznačuje základní vztah mezi zlatým řezem a číslem π. Zejmená libovolný násobek tohoto úhlu bude spojovat čísla π a φ přes různé goniometrické funkce.

Zajímavé je, že v Chufuově pyramidě poměr výšky pyramidy h a jejího zakladu l dělá : $\frac{2h}{l} = \varphi$ a $\frac{2l}{h} = \pi$, přičemž s dost velkou přesností.

Vztah třech základních konstant π, φ a e ukazuje, například, vzorec zlaté spirály:

$$f(x) = \sqrt{\varphi} \cdot e^{x \cdot \frac{2 \cdot ln \sqrt{\varphi}}{\pi}},$$

Viditelným provedením tohoto matematického „zlata“ je skořápka měkkýšů Nautilus (obr. 4.3).



Obrázek 4.3: Měkkýš Nautilus

Obzvlášť zajímavý vztah těchto tří konstant se vyskytuje ve vzorci, který odvodil známý indický matematik Šrínivása Rámanudžan:

$$e^{\frac{2\pi}{5}}\left(\sqrt{\varphi\sqrt{5}} - \varphi\right) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi}}{1 + \ldots}}}}$$

Vzorec je ve své harmonii pozoruhodný. Není ale překvapenim, že iracionální konstanty jsou často spojené vzorcem, který ukazuje jejích neočekávanou závislost. Uvedeme pár příkladu takových vzorců:

$$\pi^e = e^\pi;$$

$$\pi \cdot e^2 = e^\pi;$$

$$\frac{\pi^2 + e^2}{\pi^3 - e^3} = \frac{\pi}{2};$$

$$\sqrt{\sqrt{\pi^\pi} + \sqrt{e^e}} = \pi$$

(28, str. 124)

Za vrcholové dílo umění čisté matematiky lze považovat tuto rovnici:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

která obsahuje pět nejdůležitějších matematických konstant ($e, \pi, ß, 1$ a 0). První, kdo ji představil a dokázal, byl švýcarský matematik Leonhard Euler.

Kapitola 5

Matematická analýza

V této kapitole si ukážeme dost zajímavou úlohu, která sice je z astronomii, ale některé výpočty se prováděly pomocí matematické analyzy. Díly tomu, že celý system je představem pomocí elipsy, při výpočtu její plochy integrační metodou se nám objeví číslo π. Také bez čísla π se neobejdeme při počítání úhlové rychlosti a sestavování rovnic v nebeské mechanice. Začatek kapitoly je věnován zajímavým algoritmum a vzorcům pro výpočet čísla π pomocí ználosti z matematické analyzy.

Vzorec BBP

V roce 1995 D. Bailey, P. Borwien a S. Plouffe objevili následující vzorec pro výpočet čísla π:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\Big), \tag{5.1}$$

který se často označuje BBP podle přímení autorů.

Tento výsledek je šokující, protože umožnil snadne získávání číslici na n-tém místě rozvoje π v šestnáctkové soustavě, aniž bychom počítali předchozí číslice. (35, str. 852)

Krátce poté, co autoři opublikovali výsledek 5.1, několik kolegů, včetně H. Fergusona, T. Halesa a S. Wagona, předvedli další vzorce.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{2}{8n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{\frac{1}{2}}{4n+5} - \frac{\frac{1}{2}}{4n+6} - \frac{\frac{1}{4}}{4n+7}\Big),$$

který je možno taky zapsat takto:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\Big(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\Big).$$

V případě, že koeficienty rozvojů obsahují převrácenou hodnotu lineárního výrazu (v „n“) dostáváme jednočlenné vzorce. Například:

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n}, \quad \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n}\frac{\frac{2}{3}}{2n+1}, \quad \log\frac{9}{10} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\frac{1}{n} \tag{5.2}$$

(36, str. 903)

První řada v 5.2 se dostane dosazením $x = \frac{1}{2}$ do Taylorova rozvoje funkce $\log(1-x)$ o středu 0 a je to „dvojkový rozvoj“. Druhá řada je „devítkový rozvoj“ a vznikne dosazením $x = \frac{1}{3}$ do Taylorova rozvoje fuknce $\log\frac{1+x}{1-x}$ o středu 0. Třetí vzorec v 5.2 dostaneme z Taylorova rozvoje funkce $\log(1+x)$ o středu 0 dosazením $x = -\frac{1}{10}$.

Když vezmeme uvedený na začatku vzorec 5.1, můžeme mluvit o čtyřčlenném vzorci.

(37, str. 229)

„Spigot“ algoritmus

Mezi algoritmy pro výpočet čísla π patří jeden zajímavý z teoretického hlediska algoritmus, který pochází z roku 1990 a jmenuje se „spigot“ algoritmus S. D. Rabinowitze a S. Wagona, vyloženy v článku (39)
Daný algoritmus nepoužívá žádné operace v pohyblivé čárce.
Základem je:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10}\Big(1 + \frac{1}{10}\Big(4 + \frac{1}{10}\Big(1 + \frac{1}{10}\Big(5 + \dots\Big)\Big)\Big)\Big).$$

Vidíme vyjádření v bázi $\mathbf{b} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots)$. Podstatou spigot algoritmu je převod vyjádření π v speciální bázi $\mathbf{c} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots)$ do báze $\mathbf{b}$. Je totiž:

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!} \tag{5.3}$$

Z 5.3 plynou rovnosti:

$$\pi = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} = 2\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9} + \dots\Big) =$$

$$= 2 + \frac{1}{3}\Big(2 + \frac{2}{5}\Big(2 + \frac{3}{7}\Big(2 + \frac{4}{9}\Big(2 + \dots\Big)\Big)\Big)\Big),$$

kde $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ pro lichá $n \in \mathbb{N}$.

Můžeme si všimnout, že platí $\pi = (2{,}222\dots)_c$. Převod do báze $\mathbf{b}$ se realizuje pomocí tabulky, která je grafickým zápisem spigot algoritmu. Algoritmem lze počítat rozvoj při libovolném základu. (37, str. 228)

Machinův vzorec

Pro další zajímavý výpočet čísla π budeme potřebovat následující vzorec:

$$\text{tg }(x \pm y) = \frac{\text{tg } x \pm \text{tg } y}{1 \mp \text{tg } x\text{tg } y}, \tag{5.4}$$

kde x,y a $x+y$ předpokládáme v intervalu $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.
Zřejmě lze nalézt $y, 0 < y < \frac{\pi}{4}$ tak, že je tg $y = \frac{1}{5}$. Podle 5.4 dostaneme

$$\text{tg } 2y = \frac{2\text{tg } y}{1 - \text{tg }^2 y} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

a také

$$\text{tg } 4y = \frac{2\text{tg } 2y}{1 - \text{tg}^2(2y)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Zřejmě je tg $4y = 1$ a tedy $4y = \frac{\pi}{4}$. Dále je

$$\text{tg } \left(4y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg } 4y - 1}{1 + \text{tg } 4y} = \frac{1}{119} \cdot \frac{119}{239} = \frac{1}{239}.$$

Odkud dostáváme $4y - \frac{\pi}{4} = \text{arctg}(\frac{1}{239})$ a tedy

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{arctg } \frac{1}{5} - \text{arctg } \frac{1}{239}, \tag{5.5}$$

který se lépe hodí pro výpočet π. V 1706 roce s použitím tohoto vzorce dokázal Machin spočíst jako první π na 100 desetinných míst. Kdybychom nahradili arkustangenty v 5.5 prvními čtyřmi členy jejich Taylorova rozvoje v bodě 0 a dosadili čísla $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{239}$, dostali bychom po vynásobení číslem 4 hodnotu 3,141591772, která se od π liší až na šestém desetinném místě.

Karel Petr (1868-1950) uvádí ve své učebnici „*Počet differenciální (část analytická)*“ na str. 283 kromě formule 5.5 ještě další dva vzorce

$$\frac{\pi}{4} = 8\text{arctg } \frac{1}{10} - 4\text{arctg } \frac{1}{515} - \text{arctg } \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\text{arctg } \frac{1}{18} - 8\text{arctg } \frac{1}{57} - 5 \text{ arctg } \frac{1}{239}.$$

Poslední formule náleží Carlu Friedrichu Gaussovi (1777-1855).
(40, str. 509-510)

Moderní metody výpočtu

V roce 1914 S. Ramanujan opublikoval článek (38) , ve kterém zkoumal vztahy eliptických integralů a π. Mimo jiné dokázal i rovnost:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^n (396)^{4n}} \tag{5.6}$$

Součet n-tého členu řady 5.6 a předcházejícího členu dává 9 platných míst $\frac{1}{\pi}$.

Dál zmíníme o vzorci „Ramanujanova typu“, který objevili J. Kanada a bratři D. a G. Chudnovsky a který dává přičtením dalšího členu navíc 14 platných míst:

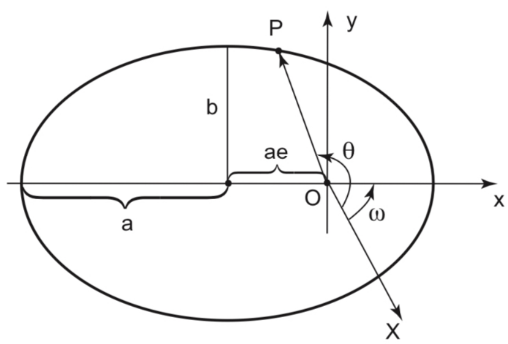
$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53360\sqrt{640320}}.$$

(37, str. 225)

Souřadnicové systémy v astronomii

Teď si ukážeme hodně zajímavou úlohu z astronimie, pro řešení které využijeme základní ználosti z matematické analyzy. Pomocí této úlohy si ukážeme, že konstanta π je jenou z nejdůležitějších části v prvním Keplerově zákoně, a tak i v celé astronimii.

Pokud je těleso s hmotností M_1 nazýváno sluncem, jiné těleso — planetou, první Keplerův zákon je formulován takto: Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce. Parametr p se nazývá parametrem elipsy a je spojený s velkou poloosou a elipsy vzorcem: $p = a(1 - e^2)$, kde e je excentricita dráhy. Malá poloosa b může být vyjádřena pomocí a a e: $b^2 = a^2(1 - e^2)$(obr. 5.1). Na obrázku se Slunce nachází v bodě O, planeta je v bodě P, osa OX směřuje k bodu vystupného uzlu [1] orbity, a osa Ox — k nejblížšímu ke Slunci bodu orbity, která se nazývá perihélium. Úhel ω se nazývá úhlová vzdálenost perihelia k uzlů nebo argumentem perihelia.



Obrázek 5.1:

Označíme-li periodu otáčení planety P jako T, podle Keplerova druhého zákona, za čas T planeta opíše celou elipsu. Plochu elipsy jednodušše spočítáme pomocí určitého integralu. Vezmeme-li rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a vyjadříme y, dostaneme následující vztah:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Teď můžeme najít plochu elipsy. Hledat budeme plochu poloviny útvaru (část která se nachází nad osou x), kterou následovně vynasobíme dvěma. Dostáváme

[1] Výstupní uzel je bod, ve kterém se těleso pohybuje směrem na sever z jižní části dráhy do severní.

určitý integral:

$$S = 2\int_{-a}^{a}\Big(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\Big)\mathrm{d}x = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\frac{b}{a}\Big[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big]_{-a}^{a} = \frac{b}{a}a^2\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \pi ab$$

Takže plocha hledané elipsy se rovná πab. Poměr plochy elipsy ku periodě otáčení se rovna polovině momentu hybnosti:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2} = const,$$

kde h je moment hybnosti, tj. vektorová fyzikální veličina, která popisuje rotační pohyb tělesa. Takže

$$2\pi a^2\sqrt{1-e^2} = hT \tag{5.7}$$

Perioda otáčení zaleží jen na velikosti větší poloosy orbity a součtu hmotnosti těl, protože $\mu = G(M_1+M_2)$, kde M_1 je hmotnost Slunce, M_2 je hmotnost planety P a G je gravitační konstanta.

Z toho, že $\dfrac{h^2}{\mu} = p = a(1-e^2)$, plýne že $h^2 = \mu a(1-e^2)$. Vyloučením h z 5.7 dostáváme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Označíme ω jako průměrnou úhlovou rychlost otáčení [2] planety po orbitě:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{5.8}$$

V nebeské mechanice se parametr ω nazývá střední pohyb. Označíme-li hmotnost Slunce jako $M_\odot$, hmotnost planety jako M_{P_1}, přičemž perioda otáčení a větší poloosa jsou rovné T_1 a a_1, dostaneme vztah :

$$G(M_\odot + M_{P_1}) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = \omega_1^2 a_1^3.$$

Stejnou rovnici můžeme napsat i pro jinou planetu s hmotnosti M_{P_2}, periodou otáčení T_2 a větší poloosou a_2:

$$G(M_\odot + M_{P_2}) = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} = \omega_2^2 a_2^3.$$

(15, str. 114)

[2]Úhlová rychlost otáčení je fyzikalní veličina, která popisuje otáčivý pohyb tělesa. Průměrná úhlová rychlost je poměrem celkové úhlové dráhy a celkového času.

Kapitola 6

Prvděpodobnost a náhodné veličiny

Definice 7. *(30, str. 2) Pravděpodobnost přiřazuje náhodným jevům $A \in S$ číslo $P(A)$ mezi 1 a 0 vyjadřující, jak hodně či málo očekáváme, že náhodný jev A nastane.*

I v pravděpodobnosti se často vyskytují vzorce, které obsahují číslo π. Například pro výpočet hustoty pravděpodobnosti pro normální rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$,$\sigma^2 > 0$ se používá vzorec:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

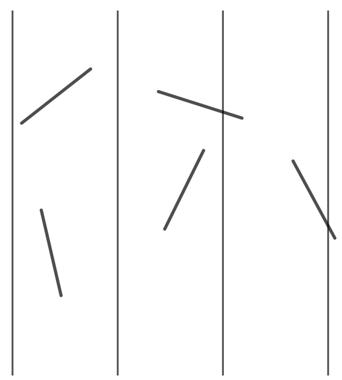
a pro pro (standardní) Cauchyho rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

(30)

Ale nejznámější úlohou z pravděpodobnosti, která je spojená s číslem π, je úloha o Buffonově jehle, kterou probereme v další části kapitoly.

6.1 Buffonova jehla



Obrázek 6.1: Buffonova jehla

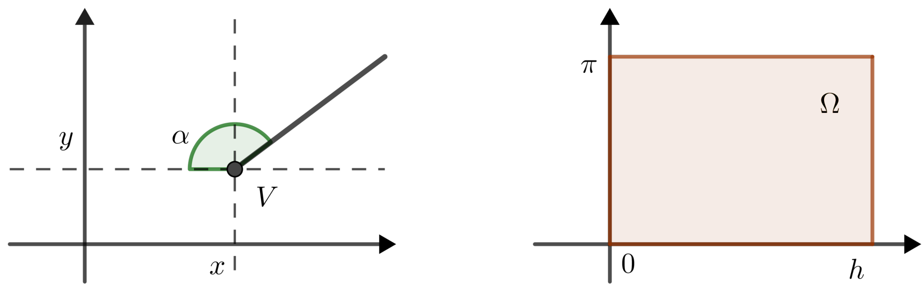
Úloha o Buffonově jehle

Tato úloha je zajimavým příkladem použití geometrické pravděpodobnosti.

Na síť rovnoběžek, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna h, náhodně hodíme jehlu o stejné délce h (obr. 6.1). Jaká je pravděpodobnost , že jehla překříží síť rovnoběžek (jev A)?

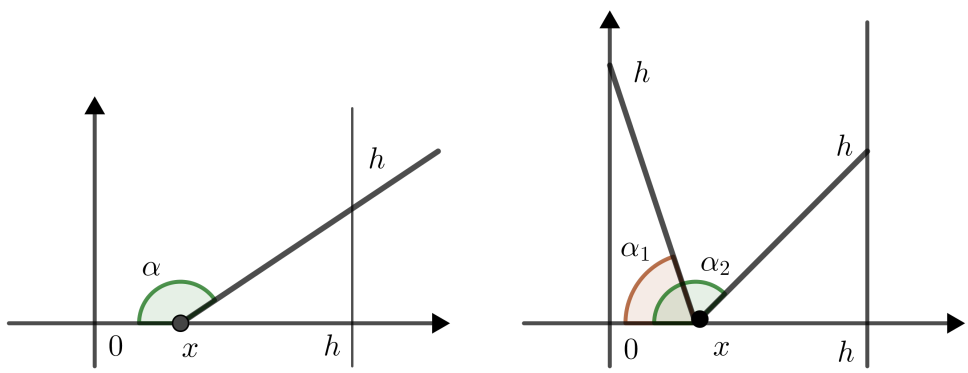
Řešení:

Síť rovnoběžek umístíme do počátku souřadné soustavy rovnoběžně s osou y. Náhodné vhození jehly rozložíme do dvou fází:
1. kam, na jaké místo v rovině dopadne špička jehly $V = [x,y]$ a
2. pod jakým úhlem $\alpha \in (-\pi; \pi\rangle$ (od osy x) pak jehla dopadne na rovinu. Pro



Obrázek 6.2:

všecha možná y situace je stejná, což nám umožňuje ve všech pásech šířky h a pro úhly kladné i záporné omezit naše úvahy pouze na popis modelu, kde $y = 0, 0 \leq x \leq h$ a $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$. Prostor všech výsledků pro nás bude tedy obdélník $\Omega = \langle 0; h\rangle \times \langle 0; \pi\rangle$ a jeho obsah je roven $|\Omega| = \pi h$.(obr. 6.2)



Obrázek 6.3:

Dál můžeme zvolit pevné $x \in \langle 0; h\rangle$ a vyjádřit si, pro které úhly jehla protne síť. Z obrazku 6.3 je patrné, že jehla protne síť pro $\alpha, 0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ a $\alpha_2 \leq \alpha \leq \pi$, kde

$$\cos \alpha_1 = \frac{x}{h} \quad \text{a} \quad \cos(\pi - \alpha_2) = \frac{h - x}{h}. \tag{6.1}$$

Oblast odpovídající jevu A je tedy pro $x \in \langle 0; h\rangle$ omezena úhly

$$0 \le \alpha \le \arccos\frac{x}{h} \quad \text{a} \quad \pi - \arccos\frac{h-x}{h} \le \alpha \le \pi. \tag{6.2}$$

Obsah oblasti vypočítáme integrálem

$$|A| = \int_0^h \left(\int_0^{\arccos\frac{x}{h}} 1 d\alpha + \int_{\pi - arccos\frac{h-x}{h}}^{\pi} 1 d\alpha\right) dx =$$
$$= \int_0^h \left(\arccos\frac{x}{h} - 0 + \pi - \left(\pi - \arccos\frac{h-x}{h}\right)\right) dx = h\int_0^1 (\arccos w + \arccos(1-w)) dw =$$
$$= h\left[w\arccos w - \sqrt{1-w^2} - (1-w)\arccos(1-w) + \sqrt{1-(1-w)^2}\right]_0^1 = 2h,$$

využili jsme substituci $w = \dfrac{x}{h}$ a vztah $\int \arccos w dw = w \arccos w - \sqrt{1-w^2} + c$.

Pravděpodobnost jevu A vypočítáme jako podíl $P(A) = \dfrac{2hl}{\pi h} = \dfrac{2}{\pi}$.

Úloha o Buffonově jehle bývá považována za první případ numerické metody využívající náhodných procesů (tzv. metody Monte Carlo o které budeme mluvit dál). Skutečně, když na základě většího počtu pokusů s Buffonovou jehlou odhadneme pravděpodobnost $P(A)$, můžeme vypočítat numericky hodnotu čísla π.

$$\pi \doteq \frac{2}{P(A)}.$$

(30)

Experimentální pokus pro zjištění čísla π pomocí úlohy o Buffonové jehle

V předchozí úloze jsme našli vzorec pro π pomocí pravděpodobnosti, že jehla délky h překříží síť rovnoběžek o stejné vzdálenosti h. Teď bych chtěla ukázat obecnější případ stejného vzorce, kde se délka jehly (označíme ji jako l) a vzdálenost mezí rovnoběžkami (oznacíme ji jako a) budou lišit.

Hodně matematiků se snažili odhadout číslo π co nejpřesněji pomocí vzorce: $\pi \approx \dfrac{2 \cdot l}{P(A) \cdot a}$. Přesnost výpočtu samozřejmě záleží na počtu hodů. Tak švýcarský astronom a matematik R. Wolf udělal experimentální zkoušku vzorce. V pokusech Wolfa se vzdálenost mezi rovnoběžkami rovnala $a = 45$ mm, a délka hozené jehly byla $l = 36$ mm. Pravděpodobnost, že jehla překříží síť rovnoběžek podle vzorce je

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a} = \frac{72}{45\pi} \approx 0{,}5093.$$

Jehla byla hozena 5000 krát, přitom překřížela síť 2532 krát. Takže frekvence jevu vyšla:

$$\frac{2532}{5000} = 0{,}5064,$$

a my si můženme všimnout, že táto hodnota je hodně blízká k pravděpodobnosti, která byla spočítána přes vzorec, a to 0,5093.

Výsledky Wolfových pokusů se dají použít pro přiblížný výpočet Ludolfova čísla. A to tak, že budeme předpokládat rovnost:

$$\frac{72}{45\pi} \approx \frac{2532}{5000},$$

Z této rovnosti můžeme vypočítat přibližnou hodnotu π (rovna se to 3,159 . . .), která se liší od skutečné o 0,02.

Poté stejné pokusy zopakovali i další matematici a níže jsou uvedené jejich výsledky:

M. A. Smith (1855 r.) –3204 hodů –$\pi \approx 3{,}1553$;

Fox (1894 r.) –1120 hodů –$\pi \approx 3{,}1419$;

Lazzarini (1901 r.) –3408 hodů –$\pi \approx 3{,}1415929$.

Stejný experimentální pokus jsem udělala i já pomocí papíru A4 s nakreslenými rovnoběžkami a obyčejné jelhy. Délka mé jehly byla $a = 56$ mm a vzdálenost mezi rovnoběžkami byla $l = 65$mm. Jehlu jsem hodila 100x a získala jsem takový výsledek pokusu:

Jehla překřížila rovnoběžky 74x. Takže teď podle vzorce se pokusím vypočítat číslo π:

$$\frac{65 \cdot 2}{56\pi} \approx \frac{74}{100}$$
$$\pi \approx \frac{65 \cdot 2 \cdot 100}{56 \cdot 74}$$
$$\pi \approx 3{,}13706564$$

Jak vidíme, číslo π, které jsme vypočítali experimentálně není úplně přesné, ale je hodně přiblížené k reálnému.

Pro mě tato zkušenost byla velice zajímavá.(31)

Náhodné generování bodů v rovině umožňuje simulovat chování mnoha fyzikálních systémů. Další část kapitoly pojednává o metodě Monte Carlo a její aplikaci při stanovení hodnoty čísla π.

6.2 Metoda Monte Carlo

Představme si následující problém: Máme čtverec o straně délky a, do kterého vepíšeme kruh o poloměru $\frac{a}{2}$. Jaká je pravděpodobnost (jev A), že náhodně zvolený uvnitř čtverce bod leží uvnitř vepsaného kruhu? Velikost množiny příznivých výsledků a všech výsledků bude charakterizována svým obsahem. Užijeme geometrické definice pravděpodobnosti a dostáneme:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Máme nahodný pokus: „*vybrat náhodně bod ze čtverce o straně délky a*“. Zopakujeme ten pokus n krát a zaznamenáme, kolikrát se vyskytl přiznivý výsledek. Tím pádem vyjadříme poměr $\dfrac{n(A)}{n}$. A co víc, dostatečně velkým opakováním náhodného pokusu zjistíme hodnotu matematické konstanty π. Platí totiž, že

$$\pi \sim 4\frac{n(A)}{n},$$

neboť $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(A)}{n} = P(A)$.

Metoda kterou jsme právě popsali se nazývá *Monte Carlo*. Využívá náhodných procesů ke hledání řešení konkrétních problémů. Touto metodou lze v praxi rychle určovat například obsahy složitých geometrických obrazců (výpočty integrálů, apod.). (32)

V této úloze jsem také udělala experimentální pokus zjištění hodnoty čísla π, ale teď pomocí počitačové aplikace (zdrojový kod je uveden v příloze). Aplikace náhodně umísťovala body v čtverci a další tabulka ukazuje jak se měnila hodnota čísla π v závislosti na počtu budů.

Počet umístěných bodů	Stanovený odhad hodnoty π
100	3,36
500	3,1173
2000	3,1364
5000	3,1254

$$\pi \simeq 3{,}1415926539$$

Podle předchozí tabulky vidíme, že odhad čísla π pomocí metody Monte Carlo není přesný, ale je hodně přiblížený.

Kapitola 7

Použití čísla π ve fyzice

Číslo π je součástí mnoha vzorců nejen v různých oblastech matematiky, jak jsme to mohli pozorovat dříve, ale i ve fyzice, chemii, biologii, astronomii a ekonomice. To znamená, že číslo π odráží určité zákony přírody. V této kapitole si ukážeme jak je tato konstanta důležitá pro výpočet úloh z fyziky, kde bez čísla π nedokážeme vypočítat výchylku harmonických kmitů nebo moment setrvačnosti kruhové desky.

Číslo π znázorňuje vlastnosti prázdného prostoru Vesmíru, jejích stejnost v libovolném směru. Můžeme říct, že tato zajímavá konstanta je spojená s izotopií prostoru, a ták i momentem hybnosti (rotačním momentem).

7.1 Úlohy na kmitavé pohyby

V této části kapitoly se budeme zabývat jedním ze základních typů pohybu, který se označuje jako kmitavý pohyb nebo mechanické kmitání. Pro mechanické kmitání je charakteristické, že kmitající těleso při pohybu zůstává stále v okolí určitého bodu, označovaného jako rovnovážná poloha. Jestliže těleso pravidelně prochází rovnovážnou polohou, koná periodický kmitavý pohyb. Zařízení, které volně kmitá, je mechanický oscilátor. (41, str. 10)

Definice 8. *(41, str. 13) Perioda nebo doba kmitu T, za kterou proběhne jeden kmit a oscilátor dospěje do stejné polohy jako v počátečním okamžiku.*

Definice 9. *(41, str. 13) Frekvence nebo kmitočet f, který je roven počtu kmitů za jednu sekundu. Je tedy převrácenou hodnotou periody:*

$$f = \frac{1}{T}$$

Definice 10. *(41, str. 15) Při pohybu mechanického oscilátoru se výchylka y s časem periodicky mění a vzhledem k rovnovážné poloze nabývá kladných i záporných hodnot. V určitých časech dosahuje výchylka největší kladné. popř. záporné hodnoty. Kladná hodnota největší výchylky je amplituda výchylky y_m nebo krátce amplituda.*

Definice 11. *(41, str. 17) Pro výchylku harmonického pohybu tělesa, které se v počátečním okamžiku nachází v rovnovážné poloze, platí vztah: $y = y_m \sin \omega t$.*

Úhel $\varphi = \omega t$, kde ω je úhlová frekvence, je fáze kmitavého pohybu a v každém okamžiku jednoznačně určuje výchylku oscilátoru, který koná harmonický pohyb.

Základní grafy kmitavých pohybů

Při znázorňování kmitavých pohybů se neobejdeme bez znalostí grafů goniometricých funkcí s použitím čísla π. Další úloha nám ukáže, že číslo π je důležitou konstantou nejenom pro grafické znázornění. Také se bez něj neobejde vzorec pro výpočet úhlové frekvenci a tak i celý výpočet okamžité výchylky.

Příklad 21. *(34, příklad číslo 4)*

a) Napište rovnici okamžité výchylky harmonických kmitů v závislosti na čase, je-li amplituda výchylky $y_m = 10$ cm a doba kmitu $T = 2$ s. Znázorněte graficky závislost okamžité výchylky na čase. V čase $t = 0$ je okamžitá výchylka rovna nule.

b) Napište rovnici harmonických kmitů o poloviční amplitudě výchylky, dvojnásobné frekvenci a počáteční fázi $-\frac{3\pi}{2}$. I tuto funkci znázorněte graficky.

Řešení:

Obecně rovnice okamžité vychylky y vypádá takto:

$$y = r \cdot \sin \varphi,$$

kde r je vektor, který popisuje polohu hmotného bodu. Pro úhlovou frekvenci také platí:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{7.1}$$

Když vektor r leží v ose y, určuje největší výchylku hmotného bodu z rovnovážné polohy. Odpovídá tedy amplitudě výchylky: $r = y_m$.

Pak pro okamžitou výchylku platí vztah:

$$y = y_m \cdot \sin \omega t,$$

kde y_m je amplituda kmitavého pohybu.

Když harmonický pohyb nezačíná v rovnovážné poloze, uvažujeme že v čase $t = 0$ hmotný bod urazil úhel φ_0. φ_0 je počáteční fáze kmitavého pohybu.

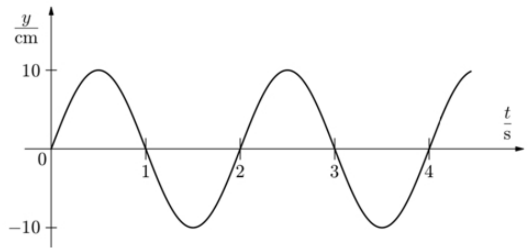
My budeme potřebovat okamžitou výchylku kmitavého pohybu s počáteční fází, která vypádá takto:

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

a podle vztahu 7.1 ji můžeme přepsát takto:

$$y = y_m \sin\Big(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\Big).$$

a) V tomto případě je $\frac{2\pi}{T} = \pi, \varphi_0 = 0$. Potom $y = 10 \sin \pi t$. (obr. 7.1)

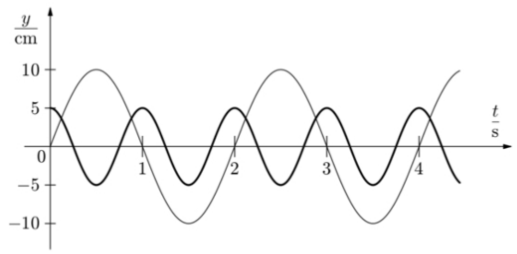


Obrázek 7.1: $y = 10 \sin \pi t$

b) Je-li $y'_m = \dfrac{y_m}{2}$, $f' = 2f$ a $\varphi_0 = -\dfrac{3\pi}{2}$, má rovnice harmonických kmitů tvar

$$y = 5 \sin\left(2\pi t - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Na obr. 7.2 je tento graf vyznačen silnou čarou.



Obrázek 7.2: $y = 5 \sin(2\pi t - \dfrac{3\pi}{2})$

Moment setrvačnosti kruhové desky

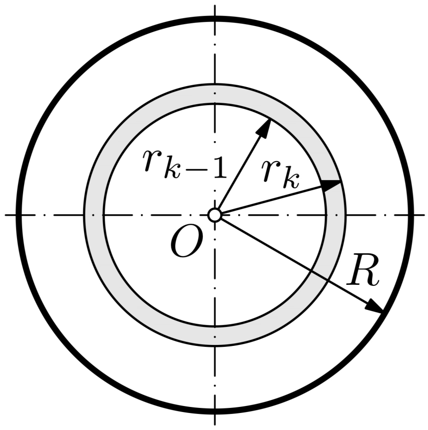
V dalším příkladu budeme hledat moment setrvačnostu kruhové desky. Táhle fyzikální veličina vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Při řešení použijeme to, že desku rozdělíme na mezikruží (nekonečně tenké prstency) a postupným sečtením dílčích mometů dospějeme k výsledku. Pro výpočet hmotnosti prstenců a jejích plochy číslo π je zásadní, a tak vidíme že bez této konstanty by se tato úloha nedála spočítat.

Příklad 22. *(34, příklad číslo 9) Určete moment setrvačnosti homogenní kruhové desky o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose procházející středem desky kolmo na rovinu desky. Tloušťku desky zanedbejte.*

Řešení:

Jak jsme již zmínili dříve, v této úloze využijeme toho, že si kruh rozdělíme na n mezikruží (nekonečně tenkých prstenců). A to uděláme tak, že poloměr kruhu rozdělíme na n stejně velkých částí a dělícími body provedeme soustředné kružnice (obr. 7.3). Hmotnost k-tého mezikruží pak určíme užitím vztahu

$$m_k = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2) \cdot \sigma,$$



Obrázek 7.3:

kde σ je pošná hustota a vypočteme ji užitím vztahu $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$.

Každý prstenec nyní budeme považovat za hmotnou kružnici o poloměru rovném aritmetickému průměru krajních poloh prstenců. Označíme-li

$$r_k = \frac{R}{n}k, \qquad r_{k-1} = \frac{R}{n}(k-1),$$

pak pro moment setrvačnosti k-tého prstenců můžeme psát

$$J_k = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\sigma\Big(\frac{r_k - r_{k-1}}{2}\Big)^2 = \frac{\pi\sigma R^4}{4n^2}(2k-1)^3.$$

Po sečtení dílčích momentů setrvačnosti J_k dostaneme celkový moment setrvačností kruhové desky $J(n)$, který se bude skutečné hodnotě blížit tím více, čím bude větší n. Platí

$$J(n) = \sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{4\pi\sigma R^4}{4n^4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3.$$

$$J(n) = \frac{4\pi\sigma R^4}{4n^4}n^2(2n^2-1) = \frac{4\pi\sigma R^4}{4}\Big(2 - \frac{1}{n^2}\Big).$$

Budeme-li za n postupně dosazovat hodnoty 1,2,3 . . ., dostaneme posloupnost

$$J_1 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}, \qquad J_2 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\frac{7}{4}, \qquad J_3 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\frac{17}{9}, \ldots, \qquad J_n = J(n).$$

Hledaný moment setrvačnosti kruhové desky pak dostaneme jako limitu této posloupnost, tj.

$$J = \lim_{n\to\infty} J(n) = \frac{\pi\sigma R^4}{2}.$$

Nakonec dosadíme zpět za $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$ a obdržíme vztah pro moment setrvačnosti kruhové desky vzhledem k ose kolmé na rovinu kruhu a procházející středem kruhu

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2.$$

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo ukázat čtenáři jiné směry a způsoby použití čísla π kromě tradičních, a to nejenom v geometrii, ale i v jiných oblastech matematiky. Vzhledem k tomu, že číslo π patří mezi jednu z nejdůležitějších konstant, považovala jsem za vhodné udělat sbírku netradičních příkladů, které by znázornily praktické použití Ludolfovy konstanty v různých oblastech matematiky.

V průběhu jednotlivých kapitol jsem se snažila pomocí různého typu úloh ukázat, že číslo π můžeme vnímat nejenom jako poměr délky kružnice a jejího poloměru, ale i jako důležitou konstantu při výpočtu goniometrických rovnic nebo fyzikálních úloh.

V první kapitole jsme se zaměřili na historii čísla π a použití konstanty v zajímavých úlohách těch dob. Druhá kapitola byla věnována geometrickým úlohám a v této kapitole jsme se seznámili s netypickým způsobem použití Ludolfove konstanty. Například, hodně zajímavým byl příklad číslo 15 (str. 31-32), ve kterém jsme se setkali se sférickým trojúhelníkem. Nejmiň tradiční úlohu v této kapitole podle mě byla úloha číslo 16 (str. 32-33), kde číslo π bylo zásadní jak při výpočtu, tak ve výsledku.

Kapitola o goniometrických rovnicích a nerovnicích nám ukázala číslo π né jako poměr obvodu kružnice a jejího poloměru, ale jako úhel v trigonometrických funkcích.

Další dvě úlohy byly věnované zajímavým vztahům mezi číslem π a matematickými konstantami, ukázali nám netradiční vzorce a algoritmy s použitím čísla π, rozšířili naše představení o možném využití konstanty v matematice.

Nejmiň tradiční úlohou ale zůstává úloha o Buffonově jehle, která byla představená v kapitole o pravděpodobnosti. Také v této kapitole je ukázaná metoda Monte Carlo a výpočet čísla π pomocí této metody. Oba příklady jsem experimentálně vyzkoušela i já a ýysledky mě překvapily svým přiblížením k reálné hodnotě.

Poslední kapitola byla věnována použitím Ludolfové konstanty ve fyzikálních úlohách a ukázala nám, že číslo π je zásadní i pro hodně fyzikálních procesů.

V této práci se nám podařilo shromáždit ty úlohy, které se malokdy vyskytly a nejsou typické při výuce čísla π. Sbírka je vhodná pro používání na středních a vysokých školách pro rozšíření poznatků o Ludolfovém čísle a způsobech jeho použití.

Literatura

[1] ЖУКОВ, А.В. Вездесущее число π. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[2] BECKMANN, Petr. *Historie cisla* . Praha: Academia, 1998.

[3] NAVARRO, Joaquín. *Tajemné Pí: Lze udělat kvadraturu kruhu?*. Praha: Dokořán, 2018.

[4] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problem kvadratury kruhu a Lambertuv dukaz iracionality cisla* π. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 4

[5] JUSKEVIC, P. Adolf. *Dějiny matematiky ve stredověku.* Praha: Academia, 1977.

[6] BEČVÁŘ, J. *Leonardo Pisansky - Fibonacci.*Matematika ve stredoveke Evrope. (Czech). Praha: Prometheus, 2001.

[7] NÁDENÍK, Z. *Matematika v 16. a 17. století* Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.-21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999.

[8] RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education; 3rd edition (January 1, 1976)

[9] Internetový portál dostupný na WWW: `<http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=53188>`

[10] Internetový portál dostupný na WWW: `<http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=54350>`

[11] Internetový portál dostupný na WWW: `<https://mat.1sept.ru/view_article.php?ID=201000414>`

[12] Internetový portál dostupný na WWW: `<http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=52935>`

[13] Internetový portál dostupný na WWW: `<https://is.muni.cz/th/ewooy/Bakalarska_prace.pdf>`

[14] MAŠKA, O. *Řešené úlohy z matematiky.* Praha: SNTL, 1959.

[15] ЖАРОВ, В. Е. Сферическая астрономия, М.: Фрязино, 2006.

[16] KISELEV, A.P. *Kiselev's Geometry, Book I. Planimetry.* Sumizdat (September 1, 2006)

[17] nternetový portál dostupný na WWW: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=116591>

[18] nternetový portál dostupný na WWW: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=105215>

[19] nternetový portál dostupný na WWW: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/posloupnosti_a_rady/rady.php>

[20] nternetový portál dostupný na WWW: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/mocniny/?page=Ciselne_obory>

[21] nternetový portál dostupný na WWW: <kartometrie.upol.cz/materialy/04_prednaska.pdf>

[22] CHMELÍKOVÁ, V. Bakalářská práce *Zlatý řez* Univerzita Karlova v Praze: 2006.

[23] Internetový portál dostupný na WWW: <https://prase.cz/library/FibonaccihoPosloupnostHS/FibonaccihoPosloupnostHS.pdf>

[24] JONÁŠOVÁ E.; RUBEŠ Z.; VESECKÁ J. *Matematika II* Univerzita Karlova v Praze: 2009.

[25] Internetový portál dostupný na WWW: <https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/trigonometricheskie-uravneniya/>

[26] Internetový portál dostupný na WWW: <https://prase.cz/library/GoniometrieMB/GoniometrieMB.pdf>

[27] CALDA, E. *Co Fibonacci ani Ludolf netušili aneb Jak souvisí čísla Fibonacciho s číslem* π Praha.

[28] ШУМИХИН, С.А.; ШУМИХИНА А.Я. ЧИСЛО ПИ. ИСТОРИЯ, ДЛИНОЮ В 4000 ЛЕТ М.: Эксмо, 2011.

[29] BOČEK, L.; ZHOUF, J. *Planimetrie* Pedagogická fakulta UK: 2012.

[30] MOŠNA, F. *Pravděpodobnost a náhodné veličiny* Pedagogická fakulta UK: 2018.

[31] Internetový portál dostupný na WWW: <www.e-osnova.ru/PDF/osnova_3_47_9914.pdf>

[32] Internetový portál dostupný na WWW: <www.michalrepik.cz/matematika/monte-carlo.html>

[33] Internetový portál dostupný na WWW: <http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=108995>

[34] Internetový portál dostupný na WWW: <fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/funkce.pdf>

[35] ADAMCHIK, V., WAGON, S. *A simple formula for* π. Amer. Math. Monthly: 1997.

[36] BAILEY, D.H., BORWEIN, P.B., PLOUFFE, S. *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*. Math. Comp: 1997.

[37] NETUKA, I., VESELÝ, J. *Nedávné poznatky o čísle* π. Pokroky MFA: 1998.

[38] RAMANUJAN, S. *Modular equations and approximations to* π. Quart. J. Math: 1914 (str. 350-372)

[39] RABINOWITZ, S. D., WAGON, S. *A spigot algorithm for the digits of* π Amer. Math. Monthly: 1995 (str. 195-203)

[40] VESELÝ, J. *Základy matematické analýzy*, Druhý díl. Matfyzpress, Praha: 2009.

[41] LEPIL, O. *Fyzika pro gymnázia* Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha: 2001.

Příloha

Zdrojový kod, naprogramovany v jazyce Pascal, spouštěcí aplikace pro výpočet čísla π pomocí metody Monte Carlo:

```
uses Crt;
  const
    n=10000000;
    r=46340;
    r2=46340*46340;
    var
    i,pass : LongInt;
    x,y : real;
    F+
    begin
    Randomize;
    pass:=0;
    for i:=1 to n do
    begin
    x:=Random(r+1);
    y:=Random(r+1);
    if ( x*x+y*y < r2 ) then INC(pass);
  end;
  TextColor(GREEN);
  WriteLn(„Číslo π je rovno:“,(pass/i*4):0:5);
  ReadLn;
end.
```